



Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 2/7
Kolloquium 3	Musterlösung	an / 26.03.2021 amr/27.03.2024(rev.)

Die Verluste infolge Keileinzug sind bei kurzen, geraden Spanngliedern erheblich (hier: 21%). Im Folgenden wird von einer konstanten Spannkraft über die Trägerlänge ausgegangen und wie bereits oben erwähnt werden die Reibungsverluste vernachlässigt.

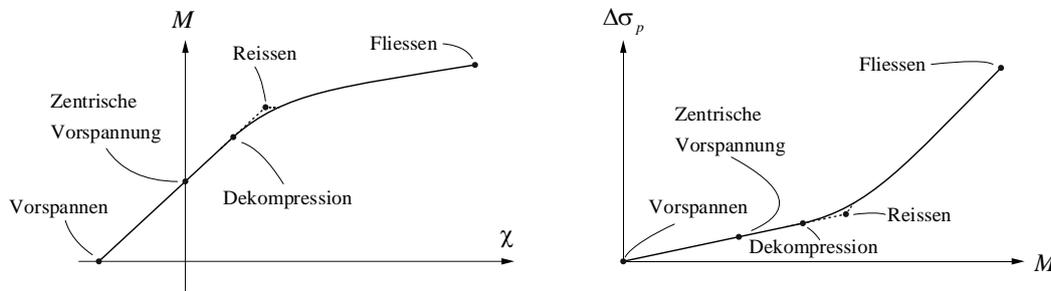
→ Spannkraft im Träger:  $P_0(x) = P_o = \sigma_{p0} \cdot A_p = 157 \text{ kN}$

SIA 262, 4.1.5.2.2/3:  $0.45 \cdot f_{pk} \leq \sigma_{p0} \leq 0.7 \cdot f_{pk}$

Spannung im Stahl:  $\sigma_{p0} = 0.79 \cdot 0.75 \cdot f_{pk} = 0.59 \cdot f_{pk} \rightarrow \text{i.O.}$

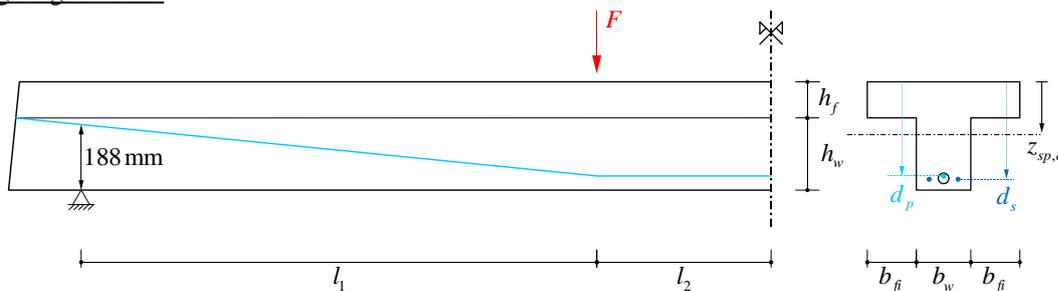
**b) App «Biegetragverhalten»**

Qualitatives Biegetragverhalten: Momenten-Krümmungsdiagramm und zusätzliche Spannung im Spannglied gegenüber Ausgangszustand in Abhängigkeit des Moments (für ein Spannglied unterhalb des Schwerpunkts des Trägers):



- i. In der Mitte des Trägers befindet sich das Spannkabel am unteren Ende des Querschnitts und bringt so ein negatives Moment und eine negative Krümmung ins System ein. Dies wirkt im Endzustand den Biegemomenten und Verformungen aus der Einwirkung entgegen und hat somit eine vorteilhafte Wirkung.
- ii. Die Nichtlinearität beginnt mit dem Reissen des Querschnitts: Bis zum Reissen herrscht homogenes Verhalten ( $EI = \text{const.}$ ). Die durchgezogene Linie zeigt das Verhalten ohne die Berücksichtigung der Zugfestigkeit des Betons. Sobald positive Dehnungen am unteren Querschnittsrand auftreten, kann keine Spannung mehr übertragen werden. Es findet somit ein fließender Übergang zu gerissenem Verhalten statt. Die gestrichelte Linie beschreibt das aus Stahlbeton I (Zuggurtmodell, Momenten-Krümmungsverhalten) bekannte linear-elastische Verhalten bis zum Reissen des Querschnitts bei  $f_{ctm}$ , wobei eine sprunghafte Änderung der Verformung bei gleichbleibender Belastung auftritt.
- iii. Im ungerissenen, linear-elastischen Verhalten trägt der gesamte Querschnitt zur Aufnahme des Moments bei. Bei gerissenem Verhalten muss die ganze Änderung des Moments durch eine Änderung der Kraft in der Vorspannung und der Druckzone aufgenommen werden. Deshalb steigt die Kraft in der Vorspannung (und in der schlaffen Bewehrung, falls vorhanden) ab dem Reissen überproportional an.

**c) Biegetragverhalten**



Abmessungen:  $l_1 = 1420 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 480 \text{ mm}$ ,  $h_w = 200 \text{ mm}$ ,  $h_f = 100 \text{ mm}$ ,  $b_w = 150 \text{ mm}$ ,  $b_{fi} = 135 \text{ mm}$

Längsbewehrung:  $\varnothing_s = 14 \text{ mm} \rightarrow A_s = 2 \cdot \varnothing_s^2 \cdot \pi/4 = 308 \text{ mm}^2$

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 3/7
Kolloquium 3	Musterlösung	an / 26.03.2021 amr/27.03.2024(rev.)

Bruttoquerschnittsfläche:  $b = b_w + 2 \cdot b_{fi} = 0.42 \text{ m}$   
 $A_c = b \cdot h_f + b_w \cdot h_w = 0.072 \text{ m}^2$   
 $h = h_w + h_f = 300 \text{ mm}$

Schwerpunkte:  $z_{sp,c} = \frac{1}{A_c} \cdot \left( b \cdot h_f \cdot \frac{h_f}{2} + b_w \cdot h_w \cdot \left( h_f + \frac{h_w}{2} \right) \right) = 112.5 \text{ mm}$   
 $d_s = 270 \text{ mm}$   
 $d_p = 261 \text{ mm}$

Eigengewicht:  $g_k = A_c \cdot \gamma_c = 1.8 \text{ kN/m}, \gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$

Spannweite:  $l = 2 \cdot (l_1 + l_2) = 3.8 \text{ m}$

In der Folge wird mit ideellen Querschnitten gerechnet. Der Unterschied zum Bruttoquerschnitt ist in der Regel gering, der Vollständigkeit halber wird hier jedoch das „exakte“ Vorgehen gezeigt.

Querschnittsgrößen ideell, nach injizieren:

Wertigkeiten:  $n_p = \frac{E_p}{E_c} = 5.8, n_s = \frac{E_s}{E_c} = 6.1$

Ideelle Querschnittsfläche:  $A_i = A_c + A_s \cdot (n_s - 1) + A_p \cdot (n_p - 1) = 74'291 \text{ mm}^2$

Ideeller Schwerpunkt:  $z_{sp,i} = \frac{1}{A_i} \cdot \left( A_c \cdot z_{sp,c} + A_s \cdot d_s \cdot (n_s - 1) + A_p \cdot d_p \cdot (n_p - 1) \right) = 117.3 \text{ mm}$

Ideelles Trägheitsmoment:  $I_i = \frac{h_f^3 \cdot b}{12} + h_f \cdot b \cdot \left( \frac{h_f}{2} - z_{sp,i} \right)^2 + \frac{h_w^3 \cdot b_w}{12} + h_w \cdot b_w \cdot \left( h_f + \frac{h_w}{2} - z_{sp,i} \right)^2$   
 $+ A_p \cdot (n_p - 1) \cdot (d_p - z_{sp,i})^2 + A_s \cdot (n_s - 1) \cdot (d_s - z_{sp,i})^2$   
 $= 581.9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$E_s = 205 \text{ GPa}$

Nur Steiner-  
anteile für  
Spannglied  
und  
Betonstahl

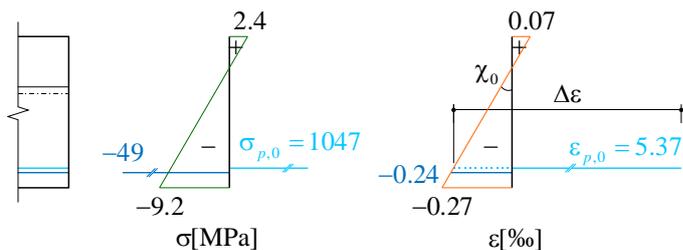
i. Vorspannung ohne Last („0“)

$$\sigma_c = \frac{-P}{A_i} + \frac{M}{I_i} \cdot z, \quad M = -P \cdot e$$

$$\sigma_{c,0} = \begin{bmatrix} \sigma_{c,sup,0} \\ \sigma_{cp,0} \\ \sigma_{cs,0} \\ \sigma_{c,inf,0} \end{bmatrix} = -\frac{P}{A_i} + \frac{-P \cdot (d_p - z_{sp,i})}{I_i} \cdot \begin{bmatrix} -z_{sp,i} \\ d_p - z_{sp,i} \\ d_s - z_{sp,i} \\ h - z_{sp,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ -7.7 \\ -8.0 \\ -9.2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s,0} = \sigma_{cs,0} \cdot n_s = -49.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,0} = \frac{P}{A_p} = 1046.7 \text{ MPa}$$



Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 4/7
Kolloquium 3	Musterlösung	an / 26.03.2021 amr/27.03.2024(rev.)

$$\varepsilon_{p,0} = \frac{\sigma_{p,0}}{E_p} = 5.37\text{‰}$$

$$\varepsilon_{cp,0} = \frac{\sigma_{cp,0}}{E_c} = -0.23\text{‰}$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{p,0} - \varepsilon_{cp,0} = 5.60\text{‰}$$

$$\chi_0 = \frac{\sigma_{c,inf,0} - \sigma_{c,sup,0}}{E_c \cdot h} = -1.15 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

NB: Da  $\varepsilon_{p,0} \gg |\varepsilon_{cp,0}|$  wird häufig angenommen, dass  $\Delta\varepsilon \approx \varepsilon_{p,0}$  (vgl. SBII, Kolloquium 1, Überprüfung der Dehnungen im Spannstahl)

ii. Zentrische Vorspannung („z“)

$$\chi_0 + \Delta\chi_z = 0 \quad \rightarrow \Delta\chi_z = -\chi_0 = 1.15 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

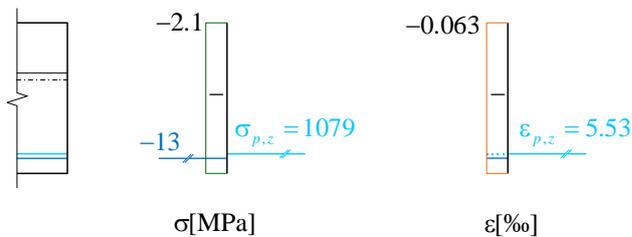
$$-P \cdot \underbrace{(d_p - z_{sp,i})}_{P \cdot e} + \Delta M_z = 0 \quad \rightarrow \Delta M_z = P \cdot (d_p - z_{sp,i}) = 22.6 \text{ kNm}$$

$$\text{Kontrolle: } \frac{\Delta M_z}{\Delta\chi_z} = 19.55 \text{ MNm}^2 = E_c \cdot I_i \quad \rightarrow \text{i.O.}$$

$$\sigma_{c,z} = -\frac{P}{A_i} + \frac{-P \cdot e + \Delta M_z}{I_i} \cdot z_i = -2.1 \text{ MPa} \quad \forall z_i \rightarrow \text{Zentrischer Spannungszustand}$$

$$\sigma_{s,z} = \sigma_{c,z} \cdot n_s = -12.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,z} = E_p \cdot \Delta\varepsilon + \sigma_{c,z} \cdot n_p = 1079.0 \text{ MPa}$$



iii. Dekompression („dec“)

$$\sigma_{c,inf,dec} = \sigma_{c,inf,0} + \underbrace{\frac{\Delta M_{dec}}{I_i}}_{\Delta\sigma_{c,inf,0-dec}} \cdot z_{inf} = 0$$

$$\rightarrow \Delta M_{dec} = \frac{-\sigma_{c,inf,0} \cdot I_i}{z_{inf}} = 29.3 \text{ kNm}$$

Schnittgrößen infolge Eigengewicht und äusserer Lasten in Trägermitte:

$$M_g = \frac{g_k \cdot l^2}{8} = 3.25 \text{ kNm}$$

$$M_{F,dec} = l_1 \cdot F_{dec}$$

Dekompression:  $\Delta M_{dec} = M_g + M_{F,dec}$

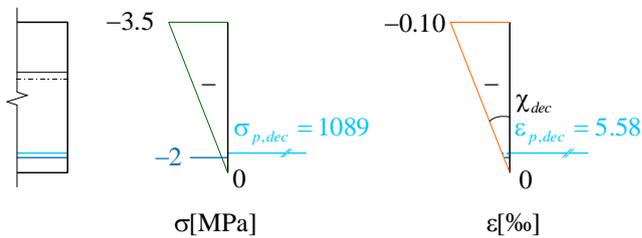
$$\rightarrow F_{dec} = \frac{\Delta M_{dec} - M_g}{l_1} = 18.3 \text{ kN}$$

$$\sigma_{c,dec} = \begin{bmatrix} \sigma_{c,sup,dec} \\ \sigma_{cp,dec} \\ \sigma_{cs,dec} \\ \sigma_{c,inf,dec} \end{bmatrix} = -\frac{P}{A_i} + \frac{-P \cdot (d_p - z_{sp,i}) + \Delta M_{dec}}{I_i} \cdot \begin{bmatrix} -z_{sp,i} \\ d_p - z_{sp,i} \\ d_s - z_{sp,i} \\ h - z_{sp,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ -0.5 \\ -0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s,dec} = \sigma_{cs,dec} \cdot n_s = -2.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,dec} = E_p \cdot \Delta \varepsilon + \sigma_{cp,dec} \cdot n_p = 1089 \text{ MPa}$$

$$\chi_{dec} = \frac{\varepsilon_{c,sup,dec}}{h} = 0.34 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$



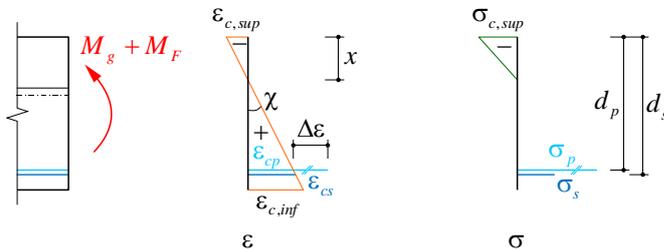
NB: Die Spannung im Spannstahl nimmt im ungerissenen Zustand nur geringfügig zu ( $\sim 4\%$ ).  
Der Hebelarm der inneren Kräfte wächst jedoch stark an.

d)  $F = F_{dec} + 15 \text{ kN}$

Der Beton reißt kurz nach dem Erreichen von  $F_{dec}$ , die Spannungen werden für diesen Lastfall über Gleichgewicht und Verträglichkeit ermittelt.

Annahmen:

- Die Druckzone bleibt im Flansch ( $x \leq 100 \text{ mm}$ )
- Materialverhalten ist linear elastisch



Verträglichkeit:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \Delta \varepsilon = \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_p - x) + \Delta \varepsilon$$

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_s - x)$$

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 6/7
Kolloquium 3	Musterlösung	an / 26.03.2021 amr/27.03.2024(rev.)
<p><b>Materialverhalten:</b></p> $\sigma_{c,sup} = E_c \cdot \varepsilon_{c,sup}$ $\sigma_p = \varepsilon_p \cdot E_p = \left( \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_p - x) + \Delta\varepsilon \right) \cdot E_p$ $\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = \left( \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_s - x) \right) \cdot E_s$ <p><b>Schnittgrößen:</b></p> $F = F_{dec} + 15 \text{ kN} = 33.34 \text{ kN}$ $M_g = \frac{g_k \cdot l^2}{8} = 3.25 \text{ kNm}$ $M_F = l_1 \cdot F = 47.35 \text{ kNm}$ <p><b>Gleichgewicht:</b></p> $\sum F = 0 \rightarrow A_p \cdot \sigma_p + A_s \cdot \sigma_s = b \cdot \frac{x}{2} \cdot \sigma_{c,sup}$ $\sum M = 0 \rightarrow A_p \cdot \sigma_p \cdot \left( d_p - \frac{x}{3} \right) + A_s \cdot \sigma_s \cdot \left( d_s - \frac{x}{3} \right) = M_g + M_F$ <p>Nach Einsetzen von <math>\sigma_{c,sup}</math>, <math>\sigma_p</math> und <math>\sigma_s</math> in die Gleichgewichtsbedingungen erhält man 2 Gleichungen für die 2 Unbekannten <math>x</math> und <math>\varepsilon_{c,sup}</math>:</p> $A_p \cdot \left( \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_p - x) + \Delta\varepsilon \right) \cdot E_p + A_s \cdot \left( \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_s - x) \right) \cdot E_s = b \cdot \frac{x}{2} \cdot E_c \cdot \varepsilon_{c,sup}$ $A_p \cdot \left( \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_p - x) + \Delta\varepsilon \right) \cdot E_p \cdot \left( d_p - \frac{x}{3} \right) + A_s \cdot \left( \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_s - x) \right) \cdot E_s \cdot \left( d_s - \frac{x}{3} \right) = M_g + M_F$ <p>→ <math>x = 94.6 \text{ mm} &lt; 100 \text{ mm} \rightarrow \text{i.O.}</math>  <math>\varepsilon_{c,sup} = 0.328\text{‰}</math></p> <p><b>Einsetzen in Verträglichkeitsbedingungen:</b></p> $\chi = \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} = 3.47 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$ $\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_p - x) + \Delta\varepsilon = 6.17\text{‰}$ $\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x} \cdot (d_s - x) = 0.61\text{‰}$ <p><b>Spannungen:</b></p> $\sigma_{c,sup} = E_c \cdot \varepsilon_{c,sup} = -11.0 \text{ MPa}$ $\sigma_p = \varepsilon_p \cdot E_p = 1203.8 \text{ MPa}$ $\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = 124.7 \text{ MPa}$ <p><b>NB:</b> Im gerissenen Zustand findet ein signifikanter Anstieg der Spannung im Spannstahl statt (hier 10.6% gegenüber Dekompression).</p>		

e) Diagramme

Die zusätzliche Spannung im Spannglied, welche jeweils gegenüber dem Initialzustand („0“) hinzu kommt, wird hier in Analogie zur App mit  $\Delta\sigma_p$  bezeichnet:  $\Delta\sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_{cp} = E_p \cdot (\varepsilon_p - \Delta\varepsilon)$ . Mit  $M$  wird das Moment gegenüber dem Initialzustand bezeichnet: streng genommen also  $\Delta M$ .  $\chi$  hingegen bezeichnet die absolute Krümmung. Mit diesen Konventionen sind die Bezeichnungen identisch zur App, was den Vergleich vereinfacht.

Zusammenfassung:

Zustand	$M$ [kNm]	$\chi$ [mrad/m]	$\Delta\sigma_p$ [MPa]
0	0	-1.15	0
$z$	22.6	0	32
$dec$	29.3	0.34	42
$F_{dec+15kN}$	50.6	3.47	157

Folgende Diagramme zeigen die oben angegebenen Punkte, sowie jeweils eine Trendlinie. Es wird deutlich, dass eine hohe qualitative Übereinstimmung zu den Diagrammen in Teilaufgabe b) besteht.

