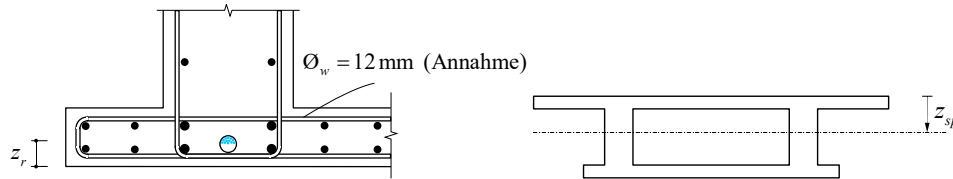


Randbedingungen

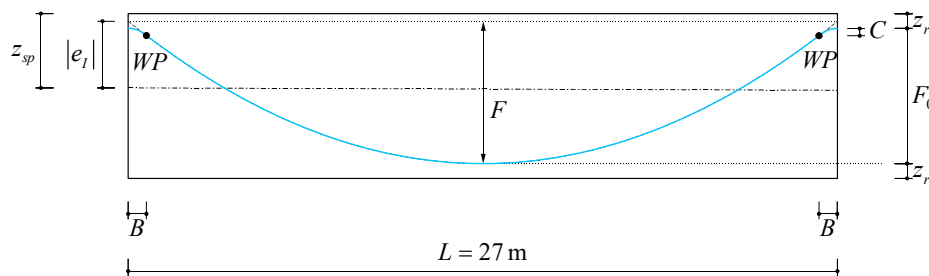
- Schwerpunkt: $z_{sp} = \frac{1}{A_c} \cdot (0.18 \cdot 5.0 \cdot 0.09 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.58 + 0.18 \cdot 3.6 \cdot 1.07) = 0.523 \text{ m}$

- Maximale Exzentrizität Spannglied:



$$z_r = \underbrace{c_{nom,s} + \varnothing_w}_{>c_{nom,p}} + \frac{\varnothing_H}{2} + \Delta s = 104 \text{ mm}$$

- Geometrie Innenfeld (überhöht):



$$F_0 = h - 2 \cdot z_r = 952 \text{ mm}$$

$$B = \frac{4 \cdot R_{min} \cdot F_0}{L} = 705 \text{ mm}$$

$$C = \frac{8 \cdot R_{min} \cdot F_0^2}{L^2} = 50 \text{ mm}$$

$$F = \frac{F_0 \cdot L^2}{L^2 - 8 \cdot R_{min} \cdot F_0} = 1004 \text{ mm} \approx F_0 + C = 1002 \text{ mm}$$

$$e_I \approx -(z_{SP} - z_r + C) = -469 \text{ mm}$$

$$u_{\infty, I} = \frac{8 \cdot P_{\infty} \cdot F}{L^2} = 43.9 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

- Geometrie Randfeld:

Gleichmässige Verteilung der Umlenkkräfte:

$$u_{\infty,R} = \frac{8 \cdot P_{\infty} \cdot f}{l^2} = u_{\infty,I}$$

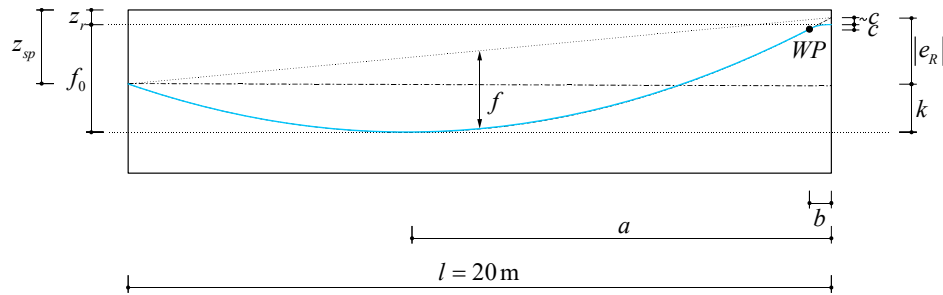
$$\rightarrow f = \frac{u_{\infty, I} \cdot l^2}{8 \cdot P_{\infty}} = 551 \text{ mm}$$

Für Feld und
Stütze
identisch

Maximale
Stichhöhe

66% der
ständigen
Lasten (eher
wenig)

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 3/7
Kolloquium 2	Musterlösung	an/19.03.2021 mep/26.03.2025 (rev.)



$$(I): f_0 = z_{sp} - z_R + k = 419 \text{ mm} + k$$

$$(II): \frac{2 \cdot P_{\infty} \cdot k}{(l-a)^2} = u_{\infty, I}$$

$$(III): a = \frac{f_0}{f_0 - k} \cdot \left(l - \sqrt{\frac{k}{f_0} \cdot (l^2 + 2 \cdot R_{min} \cdot k) - 2 \cdot R_{min} \cdot k} \right)$$

→ 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten f_0 , k und a

$$k = 344 \text{ mm}$$

$$f_0 = 763 \text{ mm}$$

$$a = 12'097 \text{ mm}$$

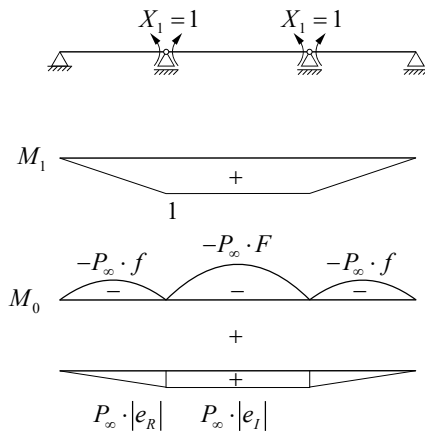
$$b = \frac{2 \cdot R_{min} \cdot f_0}{a} = 631 \text{ mm}$$

$$c = \frac{2 \cdot R_{min} \cdot f_0^2}{a^2} = 40 \text{ mm}$$

$$e_R \approx -(f_0 - k + c) = -459 \text{ mm}$$

b) Zwangsschnittgrößen

Durch die Symmetrie des Systems wird von Beginn an klar, dass die beiden überzähligen Größen identisch sein müssen. Dadurch wird die Kraftmethode erheblich einfacher.



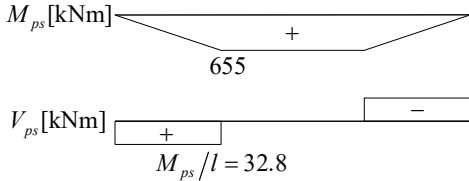
$$\delta_{10} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} P_{\infty} \cdot f \cdot 1 \cdot \frac{l}{EI} + \frac{1}{3} P_{\infty} \cdot |e_R| \cdot 1 \cdot \frac{l}{EI} \right)$$

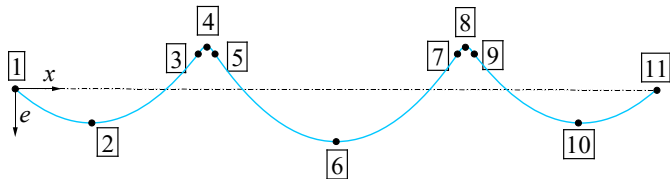
$$-\frac{2}{3} P_{\infty} \cdot F \cdot 1 \cdot \frac{L}{EI} + P_{\infty} \cdot |e_I| \cdot 1 \cdot \frac{L}{EI}$$

$$= \frac{2}{3} P_{\infty} \cdot (|e_R| - f) \cdot \frac{l}{EI} + P_{\infty} \cdot \left(|e_I| - \frac{2}{3} F \right) \cdot \frac{L}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{3} \frac{l}{EI} + \frac{L}{EI}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 655 \text{ kNm}$$

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 4/7
Kolloquium 2	Musterlösung	an/19.03.2021 mep/26.03.2025 (rev.)
 c) <u>Spannkraftverluste qualitativ</u> Das Beispiel A in der App «Spannkraftverluste» entspricht qualitativ dem in diesem Kolloquium analysierten Träger. Unterschiede bestehen in der Geometrie des Querschnitts und den Exzentrizitäten der Spanngliedführung. Es soll nicht die Resultate dieses Kolloquiums replizieren, sondern einen qualitativen Überblick über das Phänomen Spannkraftverluste verschaffen. - Die Verluste konzentrieren sich über den Zwischenauflagern, da dort die kleinsten Radien auftreten und folglich die grössten Umlenkungen pro Längeneinheit. Der Reiter «Umlenkungen» zeigt die kumulierte Umlenkung des Spannglieds über die Länge und den konzentrierten Anstieg über den Auflagern. Intuitiv kann man sich vorstellen, dass dort, wo das Kabel am stärksten gekrümmt wird, die grössten Verluste auftreten. Dies widerspiegelt sich auch in der Formel für die Spannkraftverluste: $P(x) = P \cdot e^{-\mu(\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)}$, $\varphi(x)$ bezeichnet die kumulierte Umlenkung vom Trägeranfang bis zur Koordinate x. - Im Reiter «Ablauf» kann der Keileinzug von links zum Ablauf hinzugefügt werden. Der Keileinzug bezeichnet das Einziehen des Spannglieds in den Träger beim Verkeilen, nachdem die Presse gelöst wurde. Dies führt zu einer Reduktion der Spannkraft, die jedoch aufgrund der Reibung nur eine begrenzte Einflusslänge hat. Das Spannen von rechts führt zu einer spiegelsymmetrischen Situation. - Ein Kunststoffhüllrohr führt zu Änderungen im Reibungsbeiwert μ und der ungewollten Umlenkung $\Delta\varphi$. Im vorliegenden Beispiel erfährt das Spannglied durch die Wahl eines Kunststoffhüllrohres kleinere Verluste, da die Änderung von μ einen grösseren Einfluss hat als diejenige von $\Delta\varphi$. d) <u>Spannkraftverluste rechnerisch</u> Kennwerte Stahlhüllrohr: - Reibungsbeiwert: $\mu = 0.18$ - Ungewollte Umlenkung: $\Delta\varphi = 5 \text{ mrad/m}$ - Keileinzug: $\Delta = 5 \text{ mm}$ Spannprogramm: Gemäss App «Spannkraftverluste» - 1: Spannen von links - 2: Verkeilen links - 3: Spannen von rechts - 4: Verkeilen rechts	Doku S.11 Doku Anhang 2 S.6 mit Keileinpress- einrichtung	

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 5/7																																																																																																																																																																																																																																																																
Kolloquium 2	Musterlösung	an/19.03.2021 mep/26.03.2025 (rev.)																																																																																																																																																																																																																																																																
Reibungsverluste: $\delta\varphi_x = \frac{2 e_j - e_{j-1} }{x_j - x_{j-1}} :$ $\varphi_x = \sum \delta\varphi_x :$ $P(x) = P_{max} \cdot e^{-\mu(\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)}, P_{max} = 5022 \text{ kN}$  Verlängerung des Spannglieds: $\text{Gemittelte Dehnung des Spannglieds: } \varepsilon_{pm} = \frac{P_j + P_{j-1}}{2} \cdot \frac{1}{E_p A_p}$ $\text{Verlängerung des Spannglieds: } \Delta l_p = \varepsilon_{pm} \cdot (x_j - x_{j-1})$ Tabellenkalkulation: <table><tr><th>Spannvorgang 1</th><th>x</th><th>e_j</th><th>δφ_x</th><th>φ_x</th><th>μ(φ_x+Δφ·x)</th><th>P₁(x)</th><th>ε_{pm,1}</th><th>Δl_{p,1}</th></tr><tr><th></th><th>[m]</th><th>[mm]</th><th>[mrad]</th><th>[mrad]</th><th>[-]</th><th>[kN]</th><th>[‰]</th><th>[mm]</th></tr><tr><td>1 Trägeranfang</td><td>0.00</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>5022</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2 Tiefpunkt</td><td>7.90</td><td>344</td><td>87.1</td><td>87.1</td><td>0.023</td><td>4909</td><td>7.07</td><td>55.9</td></tr><tr><td>3 Wendepunkt</td><td>19.37</td><td>-379</td><td>126.1</td><td>213.2</td><td>0.056</td><td>4749</td><td>6.88</td><td>78.9</td></tr><tr><td>4 Auflager</td><td>20.00</td><td>-419</td><td>126.6</td><td>339.8</td><td>0.079</td><td>4640</td><td>6.69</td><td>4.2</td></tr><tr><td>5 Wendepunkt</td><td>20.71</td><td>-369</td><td>141.8</td><td>481.6</td><td>0.105</td><td>4520</td><td>6.52</td><td>4.6</td></tr><tr><td>6 Tiefpunkt</td><td>33.50</td><td>533</td><td>141.0</td><td>622.6</td><td>0.142</td><td>4356</td><td>6.32</td><td>80.9</td></tr><tr><td>7 Wendepunkt</td><td>46.30</td><td>-369</td><td>141.0</td><td>763.6</td><td>0.179</td><td>4198</td><td>6.09</td><td>78.0</td></tr><tr><td>8 Auflager</td><td>47.00</td><td>-419</td><td>141.8</td><td>905.4</td><td>0.205</td><td>4090</td><td>5.90</td><td>4.2</td></tr><tr><td>9 Wendepunkt</td><td>47.63</td><td>-379</td><td>126.6</td><td>1032.0</td><td>0.229</td><td>3996</td><td>5.76</td><td>3.6</td></tr><tr><td>10 Tiefpunkt</td><td>59.10</td><td>344</td><td>126.1</td><td>1158.1</td><td>0.262</td><td>3866</td><td>5.60</td><td>64.2</td></tr><tr><td>11 Trägerende</td><td>67.00</td><td>0</td><td>87.1</td><td>1245.2</td><td>0.284</td><td>3779</td><td>5.44</td><td>43.0</td></tr><tr><td colspan="6"></td><td>Summe</td><td>417.5</td><td></td></tr></table> <table><tr><th>Spannvorgang 2</th><th>x</th><th>e_j</th><th>δφ_x</th><th>φ_x</th><th>μ(φ_x+Δφ·x)</th><th>P₁(x)</th><th>P_{tot}(x)</th><th>P₂(x)</th><th>ε_{pm,2}</th><th>Δl_{p,2}</th></tr><tr><th></th><th>[m]</th><th>[mm]</th><th>[mrad]</th><th>[mrad]</th><th>[-]</th><th>[kN]</th><th>[kN]</th><th>[kN]</th><th>[‰]</th><th>[mm]</th></tr><tr><td>11 Trägerende</td><td>67.00</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3779</td><td>5022</td><td>1243</td><td></td><td></td></tr><tr><td>10 Tiefpunkt</td><td>59.10</td><td>344</td><td>87.1</td><td>87.1</td><td>0.023</td><td>3866</td><td>4909</td><td>1043</td><td>1.63</td><td>12.9</td></tr><tr><td>9 Wendepunkt</td><td>47.63</td><td>-379</td><td>126.1</td><td>213.2</td><td>0.056</td><td>3996</td><td>4749</td><td>754</td><td>1.28</td><td>14.7</td></tr><tr><td>8 Auflager</td><td>47.00</td><td>-419</td><td>126.6</td><td>339.8</td><td>0.079</td><td>4090</td><td>4640</td><td>550</td><td>0.93</td><td>0.6</td></tr><tr><td>7 Wendepunkt</td><td>46.30</td><td>-369</td><td>141.8</td><td>481.6</td><td>0.105</td><td>4198</td><td>4520</td><td>322</td><td>0.62</td><td>0.4</td></tr><tr><td>6 Tiefpunkt</td><td>33.50</td><td>533</td><td>141.0</td><td>622.6</td><td>0.142</td><td>4356</td><td>4356</td><td>0</td><td>0.23</td><td>2.9</td></tr><tr><td>5 Wendepunkt</td><td>20.71</td><td colspan="4" rowspan="4">Beim Nachspannen ändert sich die Spannkraft nur bis zur Mitte des Trägers</td><td>4520</td><td colspan="2" rowspan="4"></td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr><tr><td>4 Auflager</td><td>20.00</td><td>4640</td></tr><tr><td>3 Wendepunkt</td><td>19.37</td><td>4749</td></tr><tr><td>2 Tiefpunkt</td><td>7.90</td><td>4909</td></tr><tr><td>1 Trägeranfang</td><td>0.00</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5022</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr><tr><td colspan="6"></td><td>Summe</td><td colspan="2"></td><td>31.5</td><td></td></tr></table>		Spannvorgang 1	x	e _j	δφ _x	φ _x	μ(φ _x +Δφ·x)	P ₁ (x)	ε _{pm,1}	Δl _{p,1}		[m]	[mm]	[mrad]	[mrad]	[-]	[kN]	[‰]	[mm]	1 Trägeranfang	0.00	0	0	0	0	5022			2 Tiefpunkt	7.90	344	87.1	87.1	0.023	4909	7.07	55.9	3 Wendepunkt	19.37	-379	126.1	213.2	0.056	4749	6.88	78.9	4 Auflager	20.00	-419	126.6	339.8	0.079	4640	6.69	4.2	5 Wendepunkt	20.71	-369	141.8	481.6	0.105	4520	6.52	4.6	6 Tiefpunkt	33.50	533	141.0	622.6	0.142	4356	6.32	80.9	7 Wendepunkt	46.30	-369	141.0	763.6	0.179	4198	6.09	78.0	8 Auflager	47.00	-419	141.8	905.4	0.205	4090	5.90	4.2	9 Wendepunkt	47.63	-379	126.6	1032.0	0.229	3996	5.76	3.6	10 Tiefpunkt	59.10	344	126.1	1158.1	0.262	3866	5.60	64.2	11 Trägerende	67.00	0	87.1	1245.2	0.284	3779	5.44	43.0							Summe	417.5		Spannvorgang 2	x	e _j	δφ _x	φ _x	μ(φ _x +Δφ·x)	P ₁ (x)	P _{tot} (x)	P ₂ (x)	ε _{pm,2}	Δl _{p,2}		[m]	[mm]	[mrad]	[mrad]	[-]	[kN]	[kN]	[kN]	[‰]	[mm]	11 Trägerende	67.00	0	0	0	0	3779	5022	1243			10 Tiefpunkt	59.10	344	87.1	87.1	0.023	3866	4909	1043	1.63	12.9	9 Wendepunkt	47.63	-379	126.1	213.2	0.056	3996	4749	754	1.28	14.7	8 Auflager	47.00	-419	126.6	339.8	0.079	4090	4640	550	0.93	0.6	7 Wendepunkt	46.30	-369	141.8	481.6	0.105	4198	4520	322	0.62	0.4	6 Tiefpunkt	33.50	533	141.0	622.6	0.142	4356	4356	0	0.23	2.9	5 Wendepunkt	20.71	Beim Nachspannen ändert sich die Spannkraft nur bis zur Mitte des Trägers				4520					4 Auflager	20.00	4640	3 Wendepunkt	19.37	4749	2 Tiefpunkt	7.90	4909	1 Trägeranfang	0.00					5022											Summe			31.5		S.2
Spannvorgang 1	x	e _j	δφ _x	φ _x	μ(φ _x +Δφ·x)	P ₁ (x)	ε _{pm,1}	Δl _{p,1}																																																																																																																																																																																																																																																										
	[m]	[mm]	[mrad]	[mrad]	[-]	[kN]	[‰]	[mm]																																																																																																																																																																																																																																																										
1 Trägeranfang	0.00	0	0	0	0	5022																																																																																																																																																																																																																																																												
2 Tiefpunkt	7.90	344	87.1	87.1	0.023	4909	7.07	55.9																																																																																																																																																																																																																																																										
3 Wendepunkt	19.37	-379	126.1	213.2	0.056	4749	6.88	78.9																																																																																																																																																																																																																																																										
4 Auflager	20.00	-419	126.6	339.8	0.079	4640	6.69	4.2																																																																																																																																																																																																																																																										
5 Wendepunkt	20.71	-369	141.8	481.6	0.105	4520	6.52	4.6																																																																																																																																																																																																																																																										
6 Tiefpunkt	33.50	533	141.0	622.6	0.142	4356	6.32	80.9																																																																																																																																																																																																																																																										
7 Wendepunkt	46.30	-369	141.0	763.6	0.179	4198	6.09	78.0																																																																																																																																																																																																																																																										
8 Auflager	47.00	-419	141.8	905.4	0.205	4090	5.90	4.2																																																																																																																																																																																																																																																										
9 Wendepunkt	47.63	-379	126.6	1032.0	0.229	3996	5.76	3.6																																																																																																																																																																																																																																																										
10 Tiefpunkt	59.10	344	126.1	1158.1	0.262	3866	5.60	64.2																																																																																																																																																																																																																																																										
11 Trägerende	67.00	0	87.1	1245.2	0.284	3779	5.44	43.0																																																																																																																																																																																																																																																										
						Summe	417.5																																																																																																																																																																																																																																																											
Spannvorgang 2	x	e _j	δφ _x	φ _x	μ(φ _x +Δφ·x)	P ₁ (x)	P _{tot} (x)	P ₂ (x)	ε _{pm,2}	Δl _{p,2}																																																																																																																																																																																																																																																								
	[m]	[mm]	[mrad]	[mrad]	[-]	[kN]	[kN]	[kN]	[‰]	[mm]																																																																																																																																																																																																																																																								
11 Trägerende	67.00	0	0	0	0	3779	5022	1243																																																																																																																																																																																																																																																										
10 Tiefpunkt	59.10	344	87.1	87.1	0.023	3866	4909	1043	1.63	12.9																																																																																																																																																																																																																																																								
9 Wendepunkt	47.63	-379	126.1	213.2	0.056	3996	4749	754	1.28	14.7																																																																																																																																																																																																																																																								
8 Auflager	47.00	-419	126.6	339.8	0.079	4090	4640	550	0.93	0.6																																																																																																																																																																																																																																																								
7 Wendepunkt	46.30	-369	141.8	481.6	0.105	4198	4520	322	0.62	0.4																																																																																																																																																																																																																																																								
6 Tiefpunkt	33.50	533	141.0	622.6	0.142	4356	4356	0	0.23	2.9																																																																																																																																																																																																																																																								
5 Wendepunkt	20.71	Beim Nachspannen ändert sich die Spannkraft nur bis zur Mitte des Trägers				4520																																																																																																																																																																																																																																																												
4 Auflager	20.00					4640																																																																																																																																																																																																																																																												
3 Wendepunkt	19.37					4749																																																																																																																																																																																																																																																												
2 Tiefpunkt	7.90					4909																																																																																																																																																																																																																																																												
1 Trägeranfang	0.00					5022																																																																																																																																																																																																																																																												
						Summe			31.5																																																																																																																																																																																																																																																									

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 6/7
Kolloquium 2	Musterlösung	an/19.03.2021 mep/26.03.2025 (rev.)

Bemerkungen zum Spannvorgang:

- Spannen von links mit P_{max} ergibt am rechten Trägerende eine tatsächlich vorhandene Vorspannkraft $P_1(x=67\text{ m}) = 3779\text{ kN}$
- Nachspannen von rechts mit $\Delta P_r = 1243\text{ kN} \cdot (3779\text{ kN} + 1243\text{ kN} = 5022\text{ kN} = P_{max})$
- $P_2(x) = P_{tot}(x) - P_1(x)$
- $\varepsilon_{pm,2}$ wird mit $P_2(x)$ berechnet

Keileinzug

Gemittelte Abnahme der Spannkraft im Randfeld 1 pro Meter:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_m = \frac{P(x=0) - P(x=19.37\text{ m})}{19.37\text{ m}} = 14.1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Wirkungslänge Keileinzug:

$$\Delta = \frac{l_1 \cdot \Delta P_k}{2 \cdot E_p \cdot A_p} = \frac{l_1 \cdot (2 \cdot l_1 \cdot (\partial P / \partial x)_m)}{2 \cdot E_p \cdot A_p}$$

$$\rightarrow l_1 = \sqrt{\frac{\Delta \cdot E_p \cdot A_p}{(\partial P / \partial x)_m}} = 15.8\text{ m}$$

Spannkraftverlust infolge Keileinzug:

$$\Delta P_k = 2 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_m = 446\text{ kN}$$

Maximale Spannkraft und Spannung im Spannfeld nach Reibungsverlusten und Keileinzug:

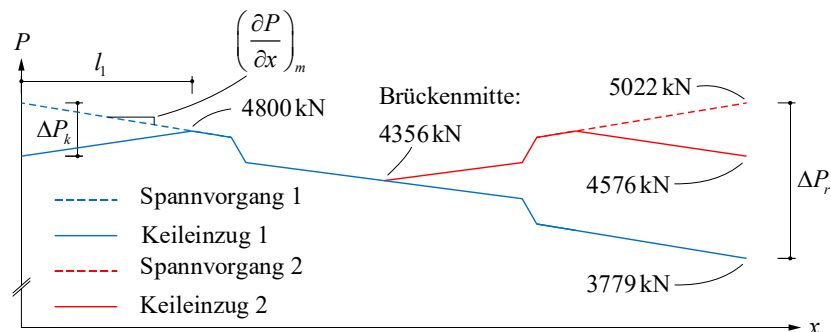
$$P(x=l_1) = P_{max} - l_1 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_m = 4800\text{ kN}$$

$$\sigma_p(x=l_1) = \frac{P(x=l_1)}{A_p} = 1334\text{ MPa} = 0.72 f_{pk}$$

Maximale Spannung im Spannstahl nach SIA 262, 4.1.5.2.2: $\sigma_{p0} \leq 0.7 f_{pk}$

→ ggf. etwas weniger stark spannen.

Zusammenfassung:



Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 7/7
Kolloquium 2	Musterlösung	an/19.03.2021 mep/26.03.2025 (rev.)
<u>c) Spannweg</u> Spannen links: Verlängerung des Spannglieds: $\sum \Delta l_p = 417.5 \text{ mm (Siehe Tabellenkalkulation)}$ Über die Gesamtlänge gemittelte Spannkraft: $P_m = \frac{5022 \text{ kN} + 3779 \text{ kN}}{2} = 4401 \text{ kN}$ Verkürzung des Trägers: $\varepsilon_c \approx \frac{P_m}{E_c A_c} = 0.059\text{‰}$ $\Delta l_c = \varepsilon_c \cdot L_{tot} = 4.0 \text{ mm} ; L_{tot} = 67 \text{ m (Gesamtlänge)}$ Gesamter Spannweg links: $\Delta l = \Delta l_c + \sum \Delta l_p = 421.5 \text{ mm}$ Spannen rechts: Zusätzliche Verlängerung des Spannglieds: $\sum \Delta l_p = 31.5 \text{ mm (Siehe Tabellenkalkulation)}$ Über die halbe Länge gemittelte zusätzliche Spannkraft: $P_m = \frac{\Delta P_r}{2} = 622 \text{ kN}$ Zusätzliche Verkürzung des Trägers: $\varepsilon_c \approx \frac{P_m}{E_c A_c} = 0.009\text{‰}$ $\Delta l_c = \varepsilon_c \cdot \frac{L_{tot}}{2} = 0.3 \text{ mm}$ Gesamter Spannweg rechts: $\Delta l = \Delta l_c + \sum \Delta l_p = 31.8 \text{ mm}$		