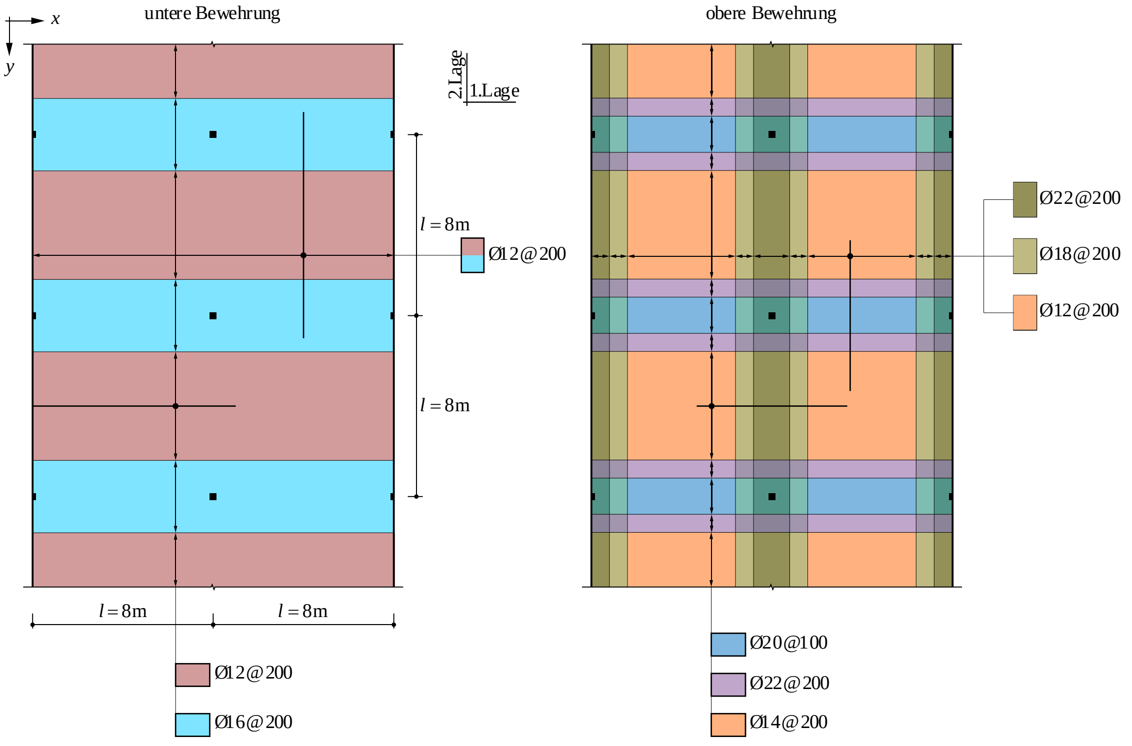
Aufgabe 1

Geometrie



Plattendicke: $h = 0.34\,\text{m}$

Baustoffe

Beton	C25/30	$f_{cd} = 16.5\,\text{MPa}$
Betonstahl	B500B	$f_{sd} = 435\,\text{MPa}$

Einwirkungen

$$g_{0k} = h \cdot \gamma_c = 8.5\,\text{kN/m}^2$$

$$g_{1k} = 2\,\text{kN/m}^2$$

$$q_k = ?$$

$$q_d = 1.35 \cdot (g_{0k} + g_{1k}) + 1.5 \cdot q_k \rightarrow \text{gesucht } q_{k,max}$$

Biegewiderstände gemäss HÜ4

1. / 4. Lage

$Ø20@100: |m_{Rd}| = 353\,\text{kNm/m}$

$Ø22@200: |m_{Rd}| = 226\,\text{kNm/m}$

$Ø16@200: |m_{Rd}| = 126\,\text{kNm/m}$

$Ø14@200: |m_{Rd}| = 98\,\text{kNm/m}$

$Ø12@200: |m_{Rd}| = 73\,\text{kNm/m}$

2. / 3. Lage

$Ø22@200: |m_{Rd}| = 210\,\text{kNm/m}$

$Ø18@200: |m_{Rd}| = 147\,\text{kNm/m}$

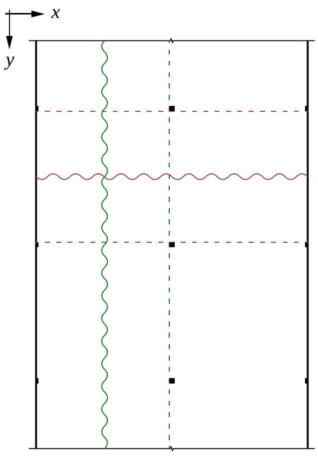
$Ø12@200: |m_{Rd}| = 68\,\text{kNm/m}$

Fliessgelenklinienmethode

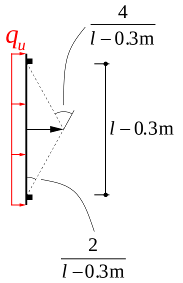
Linienmechanismen:

Stützenmech. gemäss Aufgabenstellung nicht massgebend!

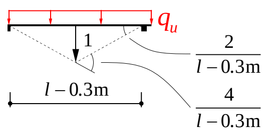
Fliessgelenklinien verlaufen ausserhalb der Stützen



Mechanismus 1:



Mechanismus 2:



Mechanismus 1: Fliessgelenklinien in *x*-Richtung

W und *D* pro Laufmeter

$$W=\frac{1}{2}q_u\left(l-0.3\text{m}\right)$$

$$D=m_{uy}\cdot\frac{4}{l-0.3\text{m}}+2\cdot m'_{uy}\cdot\frac{2}{l-0.3\text{m}}$$

$$W\overset{!}{=}D\rightarrow q_{u1}\leq\frac{8\left(m_{uy}+m'_{uy}\right)}{\left(l-0.3\text{m}\right)^2}=24.3\,\text{kN/m}^2$$

$$\text{mit: } m_{uy}=\frac{l\cdot m_{uy}(\text{Ø}12@200)}{l}=68\,\text{kNm/m}$$

$$m'_{uy}=\frac{0.6\cdot l\cdot m'_{uy}(\text{Ø}12@200)+0.2\cdot l\cdot m'_{uy}(\text{Ø}18@200)+0.2\cdot l\cdot m'_{uy}(\text{Ø}22@200)}{l}=112.2\,\text{kNm/m}$$

Mechanismus 2: Fliessgelenklinien in *y*-Richtung

$$W=\frac{1}{2}q_u\left(l-0.3\text{m}\right)$$

$$D=m_{ux}\cdot\frac{4}{l-0.3\text{m}}+m'_{ux}\cdot\frac{2}{l-0.3\text{m}}$$

$$W\overset{!}{=}D\rightarrow q_{u2}\leq\frac{4\left(2m_{ux}+m'_{ux}\right)}{\left(l-0.3\text{m}\right)^2}=24.5\,\text{kN/m}^2$$

$$\text{mit: } m_{uy}=\frac{0.6\cdot l\cdot m_{ux}(\text{Ø}12@200)+0.4\cdot l\cdot m_{ux}(\text{Ø}16@200)}{l}=94.2\,\text{kNm/m}$$

$$m'_{uy}=\frac{0.6\cdot l\cdot m'_{ux}(\text{Ø}14@200)+0.2\cdot l\cdot m'_{ux}(\text{Ø}22@200)+0.2\cdot l\cdot m'_{ux}(\text{Ø}20@100)}{l}=174.6\,\text{kNm/m}$$

$$q_u=\min\left(q_{u1},q_{u2}\right)=24.3\,\text{kN/m}^2$$

$$\underline{q_k\leq\frac{q_u-1.35\left(g_{0,k}+g_{1,k}\right)}{1.5}=6.9\,\text{kN/m}^2}$$

Aufgabe 2

a) Bemessung mit linearisierter Normalmomentenfliessbedingung ($k = k' = 1$)

$$m_{x,u} = m_x + k\left|m_{xy}\right| = 80 + 60 = 140 \text{ kNm/m}$$

$$m_{y,u} = m_y + \frac{1}{k}\left|m_{xy}\right| = 0 + 60 = 60 \text{ kNm/m}$$

$$m'_{x,u} = -m_x + k'\left|m_{xy}\right| = -80 + 60 = -20 \text{ kNm/m}$$

$$m'_{y,u} = -m_y + \frac{1}{k'}\left|m_{xy}\right| = -0 + 60 = 60 \text{ kNm/m}$$

Die Mindestbewehrung muss die Bedingung $m_{Rd} \geq m_r$ erfüllen. Das Rissmoment m_r kann wie folgt berechnet werden:

$$m_r = f_{ctk,0.95} \cdot \frac{bh^2}{6} = 1.3 f_{ctm} \frac{bh^2}{6} = 1.3 \cdot 2.6 \text{ MPa} \cdot \frac{1000 \text{ mm} \cdot 240^2 \text{ mm}^2}{6} = 32 \text{ kNm/m}$$

Die Bewehrung aller vier Lagen kann nach dem folgenden Prinzip bemessen werden (Tabelle 1):

- Wahl des Bewehrungsdurchmessers Ø und des Abstandes der Bewehrungsstäbe s
- Berechnung der Querschnittsfläche der Bewehrung pro Laufmeter $a_s = \frac{\pi}{4}\frac{Ø^2}{s}\frac{1000 \text{ mm}}{\text{m}}$
- Berechnung der Höhe der Druckzone $x = \frac{a_s f_{sd}}{0.85 \cdot 1000 \text{ mm} \cdot f_{cd}}$
- Berechnung der statischen Höhe d in der jeweiligen Lage
- Kontrolle, dass $x/d < 0.35$ erfüllt ist
- Berechnung des Biegewiderstandes $m_{Rd} = a_s f_{sd} \cdot \left(d - \frac{0.85x}{2}\right)$
- Nachweis durch Vergleich des Maximum des Bemessungsmoments m_u mit dem Rissmoment m_r

Tab. 1: Festlegung der Bewehrung

Lage	**Ø**	***s***	***a*$_s$**	***x***	***d***	***x/d***	***m*$_{Rd}$**	**Nachweis**
	[mm]	[mm]	[mm^2/m]	[mm]	[mm]	[-]	[kNm/m]	[kNm/m]
1. (x)	16	100	2011	62	207	0.30	157	> $m_{x,u}$ = 140
2. (y)	14	200	770	24	192	0.12	61	> $m_{y,u}$ = 60
3. (y)	14	200	770	24	198	0.12	63	> $m'_{y,u}$ = 60
4. (x)	10	200	393	12	210	0.06	35	> m_r = 32

b) Optimieren der oberen Bewehrung

Das Bemessungsmoment für die obere Bewehrung in x-Richtung (4. Lage) ist negativ, sodass rechnerich keine Bewehrung vorzusehen ist. In einer Platte muss jedoch in jede Richtung die Mindestbewehrung eingehalten werden, um ein sprödes Versagen bei Erstrissbildung zu vermeiden. Die Mindestbewehrung kann mit $k' = 1$ nicht ausgenutzt werden. Eine bessere Wahl findet man mit der Bedingung, dass das Bemessungmoment $m'_{x,u}$ gerade dem Rissmoment entspricht.

$$m'_{x,u} = -m_x + k'\left|m_{xy}\right| = m_r \Leftrightarrow k' = \frac{m_r + m_x}{\left|m_{xy}\right|} = \frac{32 + 80}{60} = 1.87$$

Damit können die Bemessungmomente der oberen Bewehrung neu berechnet werden:

$$m'_{x,u} = -m_x + k'\left|m_{xy}\right| = -80 + 1.87 \cdot 60 = 32 \text{ kNm/m}$$

$$m'_{y,u} = -m_y + \frac{1}{k'}\left|m_{xy}\right| = -0 + \frac{1}{1.87} \cdot 60 = 32 \text{ kNm/m}$$

Die Bewehrung kann neu festgelegt werden. Durch die Wahl von *k'* = 1.87 kann die obere Bewehrung in *y*-Richtung kleiner gewählt werden und entspricht nun ebenfalls der Mindestbewehrung.

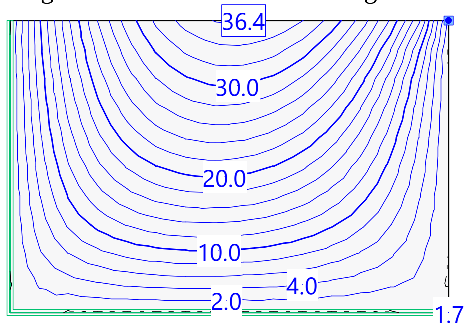
Tab. 2: Festlegung der Bewehrung der oberen Lagen mit optimiertem k'

Lage	**Ø**	***s***	***a_s***	***x***	***d***	***x/d***	***m_Rd***	**Nachweis**
	[mm]	[mm]	[mm²/m]	[mm]	[mm]	[-]	[kNm/m]	[kNm/m]
3. (*y*)	10	200	393	12	200	0.06	33	$> m'_{y,u} \approx m_r$
4. (*x*)	10	200	393	12	210	0.06	35	$> m'_{x,u} = m_r$

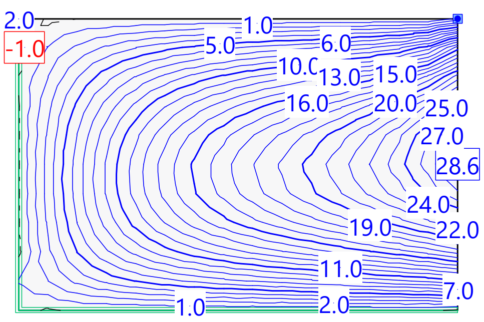
- Generell resultiert mit den linearisierten Normalmomentenfliessbedingungen der geringste gesamte Bewehrungsbedarf. Im Spezialfall dieser Aufgabe ist $k' \neq 1$ optimal, da eines der Bemessungmomente kleiner als das Rissmoment ist.
- Es ist Zufall, dass das Bemessungsmoment $m'_{y,u}$ nach Optimieren gleich dem Rissmoment ist.
- In der Applikation Normalmomenten-Fliessbedingung werden die rechnerichen Bemessungsmomente mit gestrichelten Linien dargestellt, falls eines der Bemessungsmomente negativ ist. Die durchgezogene Kurve zeigt die Bemessungsmomente an, wenn das negative Moment zu null gesetzt wird. Die einwirkenden Momente berühren die Fliessbedingung nicht. Durch Variieren von *k'* kann die Bewehrung optimiert werden.

Aufgabe 3

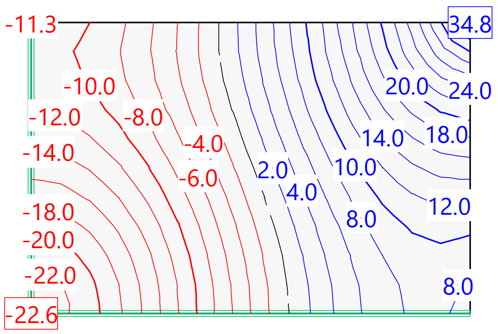
In Abbildungen 2 und 3 sind die Resultate der Bemessung der Platte nach der Methode der Finiten Elemente mit dem Programm CUBUS CEDRUS dargestellt.



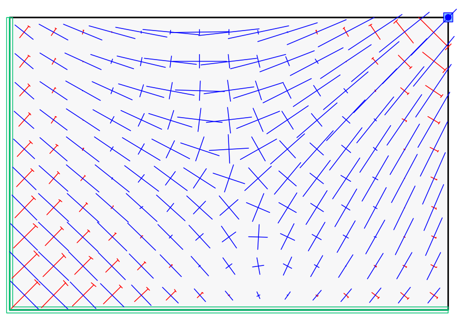
(a) m_x [kNm/m]



(b) m_y [kNm/m]

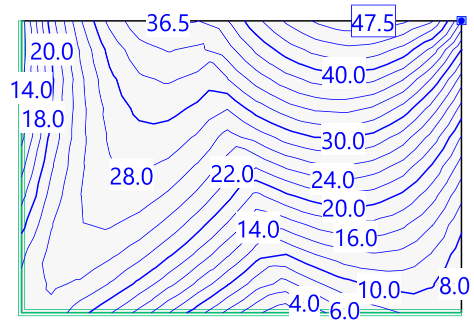


(c) m_{xy} [kNm/m]

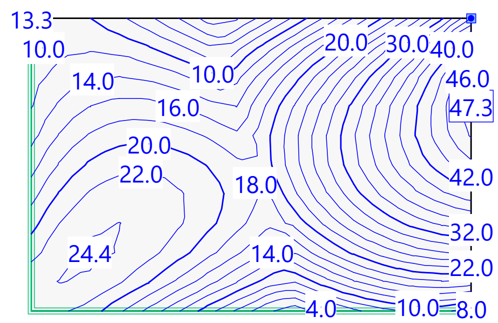


(d) Hauptmomentenrichtung

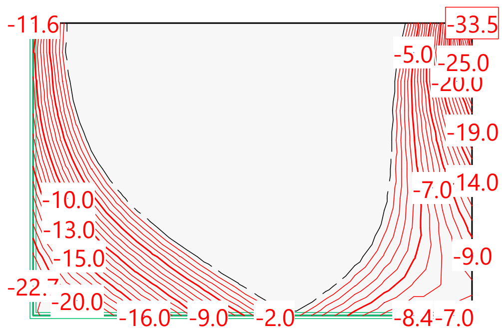
Abb. 1: Schnittgrössen bei einer Last q = 2 kN/m².



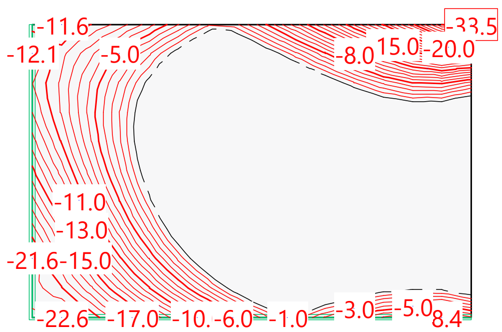
(a) $m_{x,u}$ [kNm/m]



(b) $m_{y,u}$ [kNm/m]



(c) $m'_{x,u}$ [kNm/m]



(d) $m'_{y,u}$ [kNm/m]

Abb. 2: Bemessungsmomente nach der linearisierten Fliessbedingung ($k = k' = 1$) bei einer Last $q = 2$ kN/m^2.

Die Methode der Finiten Elemente ergibt einen unteren Grenzwert der Traglast, da Gleichgewicht an jedem Element eingehalten wird. Bei der Überprüfung wird die Belastung solange gesteigert, bis der Biegewiderstand etwa $m_{x,u} = m_{y,u} = 50$ kNm/m beträgt. Dadurch resultiert eine Traglast von etwa $q = 2$ kN/m^2. Diese Traglast ist ein unterer Grenzwert für die tatsächliche Traglast. In der Applikation Fliessgelenklinienmethode wird ein oberer Grenzwert von $q = 6$ kN/m^2 bestimmt. Die tatsächliche Traglast liegt also zwischen 2 und 6 kN/m^2. Dieser grosse Unterschied kann zum einen dadurch erklärt werden, dass der in der Applikation aufgezeigte Mechanismus nicht der massgebende ist. Zum anderen wird die Traglast in der Methode der Finiten Elemente durch elastische (und somit konservative) Schnittgrössen bestimmt.

Die Traglast kann auch mit der Streifenmethode bestimmt werden. Je nach Wahl der Lastabtragung ergibt sich eine andere Traglast.

Ergänzende Bemerkung:
Streng genommen wird der Widerstand der oberen Bewehrung $m'_{x,u} = m'_{y,u} = 20$ kNm/m laut Methode der Finiten Elemente bei der Stütze überschritten. Dies liegt daran, dass es sich im Modell um eine Punktstützung handelt. In Wirklichkeit ist die Platte über eine Fläche gestützt und das Momentenmaximum ist flacher.