

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 1/10
Hausübung 2	Musterlösung	fm/22.03.2021 amr/ 29.03.2023 (rev.)

Aufgabe 1

Baustoffe

Beton	C30/37	$f_{cd} = 20 \text{ MPa}$ $E_c = 33.6 \text{ GPa}$
Spannstahl	Y1860	$A_p = 19 \cdot 150 \text{ mm}^2$ $f_{pk} = 1860 \text{ MPa}$ $E_p = 195 \text{ GPa}$ $c_{nom.p} = 50 \text{ mm}$

SIA 262

Tab. 8,
3.1.2.3.3

Pro Kabel

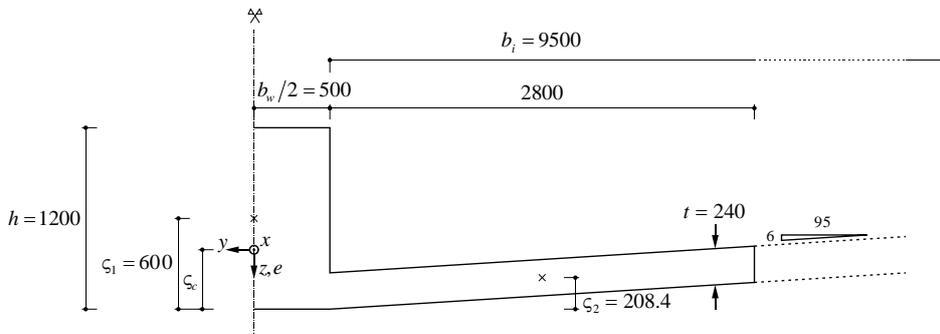
Fig. 17

Tab. 18
XD1

a) Spanngliedgeometrie

Querschnittswerte:

Riegel:



$$l_0^* = 0.7 \cdot L = 14 \text{ m}$$

$$b_{eff,i} = 0.2b_i + 0.1l_0 = 3.3 \text{ m} \leq 0.2l_0 \rightarrow b_{eff,i} = 0.2l_0 = 2.8 \text{ m}$$

$$b_{eff} = 2 \cdot b_{eff,i} + b_w = 6.6 \text{ m}$$

$$A_b = h \cdot b_w + 2 \cdot t \cdot b_{eff,i} = 2.544 \text{ m}^2$$

$$\zeta_1 = \frac{h}{2} = 600 \text{ mm}, \quad \zeta_2 = \frac{t}{2} + \frac{6}{95} \frac{b_{eff,i}}{2} = 208.4 \text{ mm}$$

$$\zeta_c = \frac{h \cdot b_w \cdot \zeta_1 + 2 \cdot t \cdot b_{eff,i} \cdot \zeta_2}{A_b} = 393.1 \text{ mm}$$

$$I_b = \frac{h^3 b_w}{12} + 2 \cdot \frac{b_{eff,i} \cdot t^3}{12} + b_w \cdot h \cdot (\zeta_1 - \zeta_c)^2 + 2 \cdot b_{eff,i} \cdot t \cdot (\zeta_c - \zeta_2)^2 = 0.2477 \text{ m}^4$$

* Hier wird die effektive Breite für den mittleren Teil des Rahmens berechnet, da diese in Teilaufgabe b) in die Steifigkeit EI_b einfließt. Die Steifigkeit der Randüberstände wird für die Berechnung der Zwangsschnittgrößen nicht benötigt.

Stütze:

$$A_c = 1 \text{ m}^2, \quad I_c = 0.0833 \text{ m}^4$$

$L = 20 \text{ m}$

4.1.3.3

Resultate mit
Querschnitts-
programm:
 $A_b = 2.558 \text{ m}^2$
 $\zeta_c = 395 \text{ mm}$
 $I_b = 0.2492 \text{ m}^4$
→ kleine
Abweichung

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 2/10
Hausübung 2	Musterlösung	fm/22.03.2021 amr/ 29.03.2023 (rev.)

Daten der Vorspannfirma:

- Spanngliedeinheit VSL 6-19 Y1860, $A_p = 19 \cdot 150 \text{ mm}^2 = 2850 \text{ mm}^2$
- Rundes Stahlhüllrohr 90/97 ($\varnothing_i = 90 \text{ mm}$, $\varnothing_a = 97 \text{ mm}$, $\Delta s = 12 \text{ mm}$)
- Min. Radius: $R_{min} = k \cdot \sqrt{P_{pk} [\text{MN}]} = 3 \cdot \sqrt{A_p f_{pk} [\text{MN}]} = 6.9 \text{ m}$
- Minimaler Randabstand der Verankerung EC 30:

$$R_A = \frac{X}{2} + c_{nom.p} - 10 = 270 \text{ mm}$$

$$X = 460 \text{ mm}$$

- Minimaler Randabstand auf freier Länge:

$$R_F = c_{nom.p} + \frac{\varnothing_a}{2} + \Delta s = 111 \text{ mm}$$

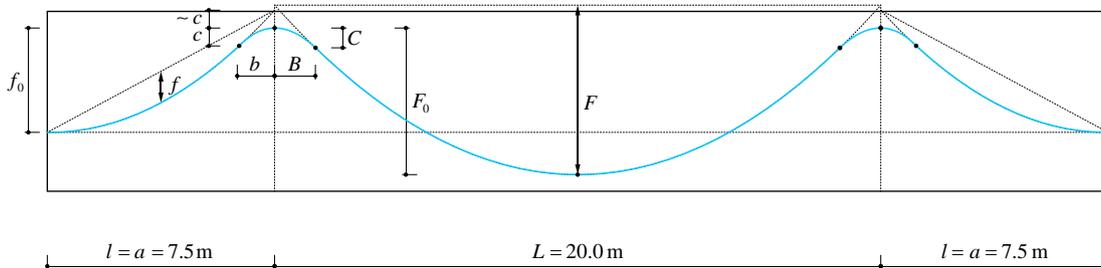
VSL Doku

S.5

S.33

S.32

S.14



Randfeld:

$$k = 0$$

$$f_0 = h - \zeta_c - R_F = 696 \text{ mm}$$

$$l = a = 7'500 \text{ mm}$$

$$b = \frac{2R_{min} \cdot f_0}{a} = 1281 \text{ mm}$$

$$c = \frac{2R_{min} \cdot f_0^2}{a^2} = 119 \text{ mm}$$

$$f = \frac{f_0 \cdot l^2}{4(a^2 - 2R_{min} \cdot f_0)} = 210 \text{ mm}$$

Innenfeld:

$$F_0 = h - 2R_F = 978 \text{ mm}$$

$$L = 20'000 \text{ mm}$$

$$B = \frac{4R_{min} \cdot F_0}{L} = 1350 \text{ mm}$$

$$C = \frac{8R_{min} \cdot F_0^2}{L^2} = 132 \text{ mm}$$

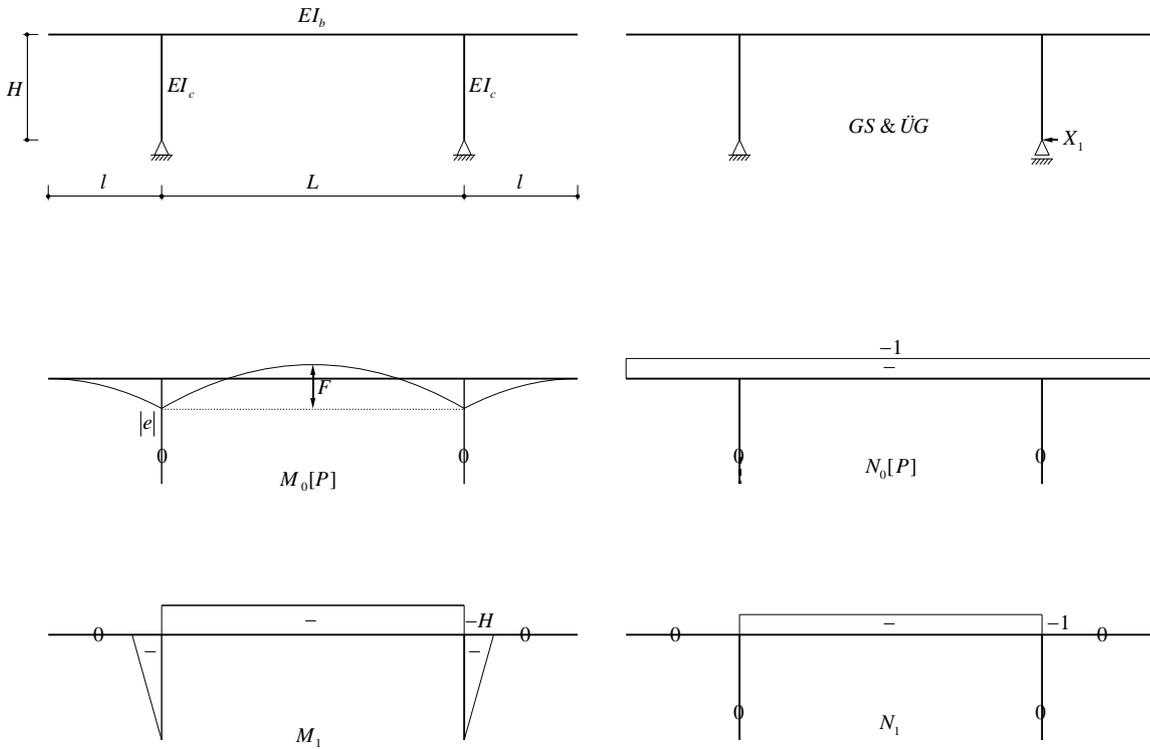
$$F = \frac{F_0 \cdot L^2}{L^2 - 8R_{min} \cdot F_0} = 1131 \text{ mm}$$

Die Umlenkkräfte im Randfeld $u = \frac{8Pf}{l^2} = \frac{P}{33.5 \text{ m}}$ sind etwas grösser als diejenigen im Mittelfeld

$$u = \frac{8PF}{L^2} = \frac{P}{44.2 \text{ m}}$$

Die theoretische Exzentrizität über den Stützen (gestrichelte Linie) beträgt für das Innenfeld ca. $e \approx \zeta_c - R_F - F = -849 \text{ mm}$. Für die Ermittlung der Zwängungsschnittgrößen wird nur die Exzentrizität des Innenfelds benötigt. (Die theoretische Exzentrizität für das Randfeld beträgt: $e \approx f_0 + c = -815 \text{ mm}$).

b) Zwangsschnittgrößen



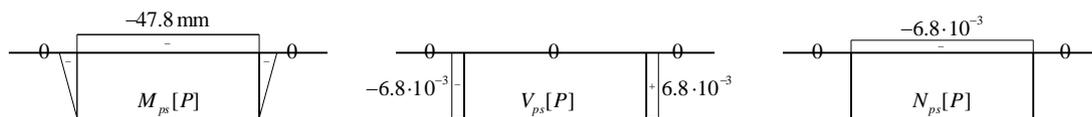
$$\delta_{10} = \frac{PHL \cdot \left(\frac{2F}{3} - |e| \right)}{EI_b} + \frac{PL}{EA_b}$$

$$\delta_{11} = h^2 \left(\frac{2}{3} \frac{H}{EI_c} + \frac{L}{EI_b} \right) + \frac{L}{EA_b}$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$$

$$\rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -P \frac{EI_b + EA_b H \left(\frac{2F}{3} - |e| \right)}{EI_b + EA_b H^2 \left(\frac{2h}{3L} \frac{EI_b}{EI_c} + 1 \right)} = 6.8\% \cdot P$$

$|e| = 849 \text{ mm}$

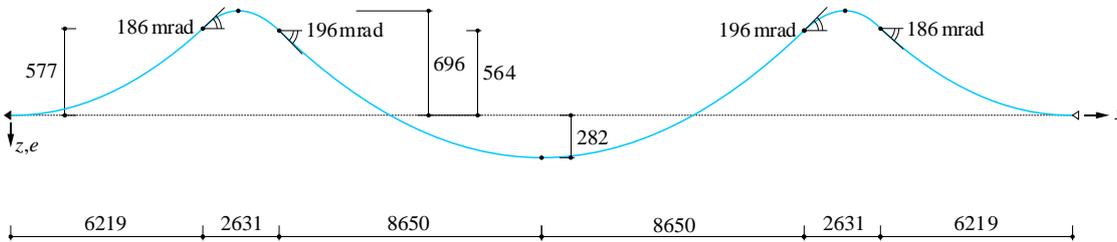


Die Zwangsschnittgrößen sind vernachlässigbar klein. Die Vorspannung aktiviert eine Rahmenwirkung, wodurch die effektive Vorspannkraft im Mittelfeld marginal erhöht wird

c) Spannkraftverluste

Verluste infolge Reibung: $\mu = 0.18$, $\Delta\varphi = 5 \text{ mrad/m}$

VSL Doku
S.34



$$\delta\varphi_x = \frac{2|e_j - e_{j-1}|}{x_j - x_{j-1}}$$

$$\varphi_x = \sum \delta\varphi_x$$

$$P(x) = P_{max} \cdot e^{-\mu(\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)}$$

$$P_{max} = 0.75 A_p f_{pk} = 3976 \text{ kN}$$

	x_j	e_j	$\delta\varphi_x$	φ_x	$\mu(\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)$	$e^{-\mu(\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)}$	$P(x)$
	[mm]	[mm]	[mrad]	[mrad]	[-]	[-]	[kN]
Trägeranfang	0.00	0	0	0	0	1	3976
Wendepunkt	6219	-577	186	186	0.039	0.962	3824
Stütze	7500	-696	186	371	0.074	0.929	3694
Wendepunkt	8850	-564	196	567	0.110	0.896	3562
Tiefpunkt	17'500	282	196	763	0.153	0.858	3412
Wendepunkt	26'150	-564	196	958	0.196	0.822	3268
Stütze	27'500	-696	196	1154	0.232	0.793	3151
Wendepunkt	28'781	-577	186	1339	0.267	0.766	3044
Trägerende	35'000	0	186	1525	0.306	0.736	2928

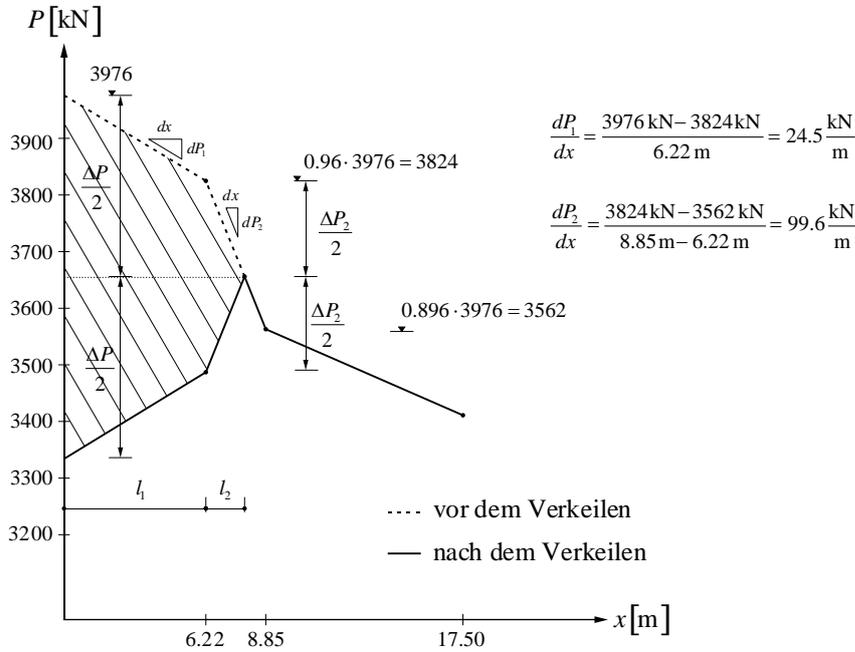
Am passiven Ende verbleiben nach Abzug der Reibungsverluste knapp 74% der maximalen Spannkraft am aktiven Ende.

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 5/10
Hausübung 2	Musterlösung	fm/22.03.2021 amr/ 29.03.2023 (rev.)

Verluste infolge Keileinzug: $\Delta = 6 \text{ mm}$

Der Keileinzug beeinflusst das aktive Ende bis über den ersten Wendepunkt des Spannglieds.

VSL Doku
S.34



$$\Delta P = 2 \left(l_1 \frac{dP_1}{dx} + l_2 \frac{dP_2}{dx} \right)$$

$$\Delta P_2 = 2 \cdot l_2 \frac{dP_2}{dx}$$

$$\Delta = \frac{l_1 (\Delta P + \Delta P_2)}{2E_p A_p} + \frac{l_2 \cdot \Delta P_2}{2E_p A_p} \stackrel{!}{=} 6 \text{ mm}$$

Aus den drei Gleichungen mit Unbekannten l_2 , ΔP , ΔP_2 folgt:

$$l_2 = 1.70 \text{ m}$$

$$\Delta P = 643 \text{ kN}$$

$$\Delta P_2 = 339 \text{ kN}$$

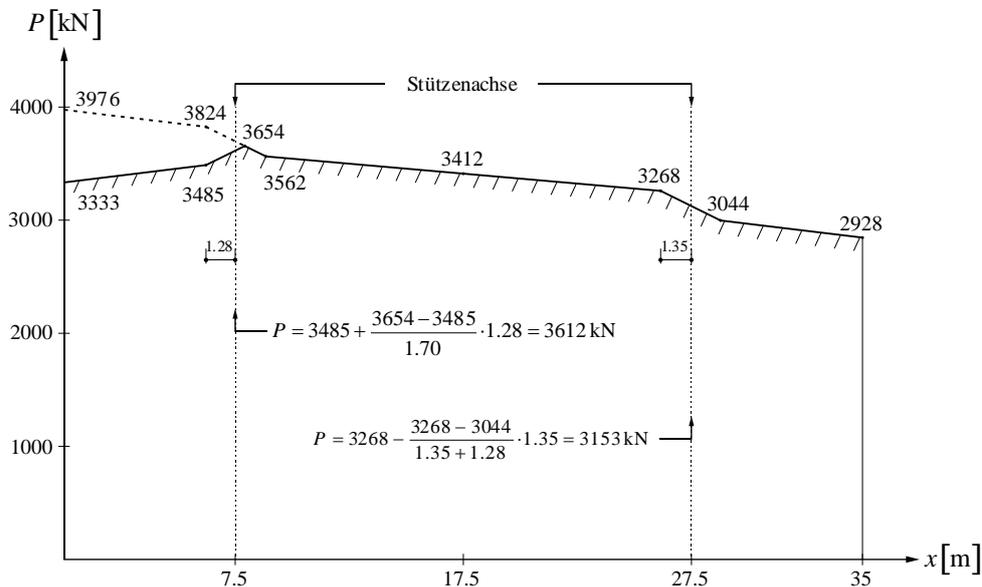
$\frac{\Delta P_2}{dx}$ entspricht der gemittelten Änderung der Vorspannkraft zwischen dem ersten und zweiten Wendepunkt.

aus
Geometrie

$\Delta = \int \epsilon dx$
(Integral der schraffierten Fläche)

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 6/10
Hausübung 2	Musterlösung	fm/22.03.2021 amr/ 29.03.2023 (rev.)

Verlauf der Vorspannkraft für Kabel A:



Der Verlauf des Kabels B ist gespiegelt bezüglich $x = 17.5\text{m}$. Aus der Superposition der beiden Spannkraftverläufe resultiert die tatsächliche Vorspannkraft in jedem Querschnitt:

Bei der Verankerung: $P = 3333\text{kN} + 2928\text{kN} = 6261\text{kN}$

In Feldmitte: $P = 2 \cdot 3412\text{kN} = 6824\text{kN}$

Über den Stützen: $P = 3612\text{kN} + 3153\text{kN} = 6765\text{kN}$

Die Spannkraften wurden hier zwischen den Wendepunkten gemittelt. Vergleicht man die Spannkraft über der Stütze bei $x = 27.5\text{m}$ mit dem exakten Wert aus der Tabelle auf S.4 wird ersichtlich, dass der Unterschied marginal ist.

d) Spannweg

Massgebend für die Ermittlung des Spannwegs ist der Zustand vor dem Verkeilen:

Mittlere Spannkraft P_m :

$$\frac{\frac{3976\text{kN} + 3824\text{kN}}{2} \cdot 6.22\text{m} + \frac{3824\text{kN} + 3562\text{kN}}{2} \cdot 2.63\text{m} + \frac{3562\text{kN} + 3268\text{kN}}{2} \cdot 17.3\text{m}}{35\text{m}} + \frac{\frac{3268\text{kN} + 3044\text{kN}}{2} \cdot 2.63\text{m} + \frac{3044\text{kN} + 2928\text{kN}}{2} \cdot 6.22\text{m}}{35\text{m}} = 3426\text{kN} = P_m$$

$$\text{Verlängerung des Spannglieds: } \Delta l_p = \frac{P_m \cdot l}{E_p A_p} = 216\text{mm}$$

$$\text{Verkürzung des Betons: } \Delta l_c = \frac{P_m \cdot l}{E_c A_b} = 1.4\text{mm}$$

$$\text{Spannweg: } \Delta l = \Delta l_p + \Delta l_c = 217\text{mm}$$

Beim Vorspannen des zweiten Spannglieds verkürzt sich der Beton ebenfalls um 1.4 mm, dadurch sinkt die Kraft im ersten Spannglied um $\frac{P_m A_p E_p}{E_c A_b} = 22\text{kN}$, was in diesem Fall vernachlässigbar klein ist.

Aufgabe 2

Kennwerte der typischen Kabelgeometrie für ein Randfeld:

$$a = \frac{f_0}{f_0 - k} \left[L - \sqrt{\frac{k}{f_0} \cdot (L^2 + 2Rk) - 2Rk} \right] \rightarrow a_L = 14.83 \text{ m}, a_R = 17.72 \text{ m}$$

$$b = \frac{2Rf_0}{a} \rightarrow b_L = 674 \text{ mm}, b_R = 677 \text{ mm}$$

$$c = \frac{2Rf_0^2}{a^2} \rightarrow c_L = 23 \text{ mm}, c_R = 23 \text{ mm}$$

Daraus ergeben sich folgende Punkte:

		x [m]	e [mm]
1	Trägeranfang	0.00 m	0 mm
2	Kabeltiefpunkt linkes Feld	$L_L - a_L = 9.17 \text{ m}$	$k_L = 200 \text{ mm}$
3	Wendepunkt	$L_L - b_L = 23.33 \text{ m}$	$-(f_{0L} - k_L - c_L) = -277 \text{ mm}$
4	Auflager	$L_L = 24.00 \text{ m}$	$-(f_{0L} - k_L) = -300 \text{ mm}$
5	Wendepunkt	$L_L + b_R = 24.68 \text{ m}$	$-(f_{0R} - k_R - c_R) = -277 \text{ mm}$
6	Kabeltiefpunkt rechtes Feld	$L_L + a_R = 41.72 \text{ m}$	$k_R = 300 \text{ mm}$
7	Trägerende	$L_L + L_R = 54.00 \text{ m}$	0 mm

Tab. 1: Kabelgeometrie

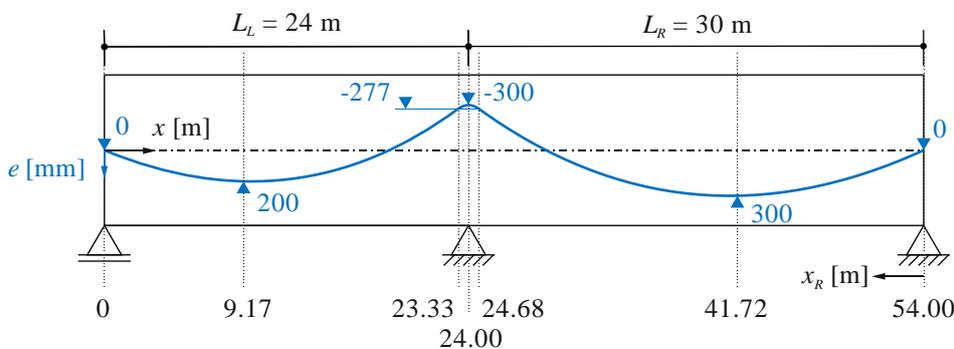


Abb. 1: Kabelgeometrie

(i) Spannkraftverlauf nach Spannen links

Die Umlenkung des Spannglieds in einem Parabelabschnitt, welcher an einer Seite eine Steigung von 0 hat, kann aus Geometrie wie folgt bestimmt werden:

$$\delta_{\varphi x} = \frac{2|e_j - e_{j-1}|}{x_j - x_{j-1}} - 0, \text{ z.B. im Fall } j = 3: \delta_{\varphi x 3} = \frac{2|e_3 - e_2|}{x_3 - x_2} = 67 \text{ mrad} \quad (1)$$

Die Spannkraftverluste können mithilfe den kumulierten Umlenkungen φ_x bestimmt werden:

$$P_i = P_0 \cdot e^{-\mu(\varphi_x + \Delta\varphi_x)} \quad (2)$$

Die Berechnungen sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 8/10
Hausübung 2	Musterlösung	fm/22.03.2021 amr/ 29.03.2023 (rev.)

	x [m]	e [mm]	δ_{qu} [mrad]	φ_x [mrad]	P [kN]
1	0.00	0	0	0	960
2	9.17	200	44	44	943
3	23.33	-277	67	111	917
4	24.00	-300	67	178	904
5	24.68	-277	68	246	892
6	41.72	300	68	314	865
7	54.00	0	49	363	846

Tab. 2: Spannkraftverlauf nach Spannen von der linken Seite.

(ii) Spannkraftverlauf nach Keileinzug links

Beim Verkeilen erfährt das Spannkabel im Endbereich einen Schlupfumkehr über die Länge l_1 . Diese wird über die Kompatibilitätsbedingung, dass die Längendifferenz (Integral der Dehnungen) des Kabels vor und nach dem Verkeilen genau dem Klemmeneinzug entspricht, bestimmt.

Diese Längendifferenz kann graphisch als die Fläche zwischen der Dehnungskurve vor und nach Verkeilen interpretiert werden.

Die Dehnung des Spanngliedes wird bestimmt als:

$$\varepsilon_p = \frac{P}{E_p A_p}$$

Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$\Delta = \int_0^{l_1} (\varepsilon_{\text{vor}}(x) - \varepsilon_{\text{nach}}(x)) dx = \int_0^{l_1} \frac{P_{\text{vor}}(x) - P_{\text{nach}}(x)}{E_p A_p} dx = \frac{1}{2} l_1 \frac{\Delta P}{E_p A_p}$$

wobei ΔP_L der Spannkraftverlust am linken Trägerrand ist.

Unter Annahme einer konstanten Steigung zwischen x_1 und x_3 kann die folgende Bedingung aufgestellt werden:

$$\frac{\Delta P}{2} = \left(\frac{|P_3 - P_1|}{x_3 - x_1} \right) \cdot l_1$$

Kombiniert man beide Gleichungen und löst man nach l_1 auf so ergeben sich folgende Werte:

$$l_1 = \frac{\sqrt{\Delta \cdot E_p A_p}}{\left(\frac{|P_3 - P_1|}{x_3 - x_1} \right)} = 19.98 \text{ m}$$

$$\Delta P = 2 \left(\frac{|P_3 - P_1|}{x_3 - x_1} \right) \cdot l_1 = 73 \text{ kN}$$

Die maximale Spannkraft beträgt jetzt $P_i = P_0 - \frac{\Delta P}{2} = 923 \text{ kN}$ bei $l_i = 19.98 \text{ m}$

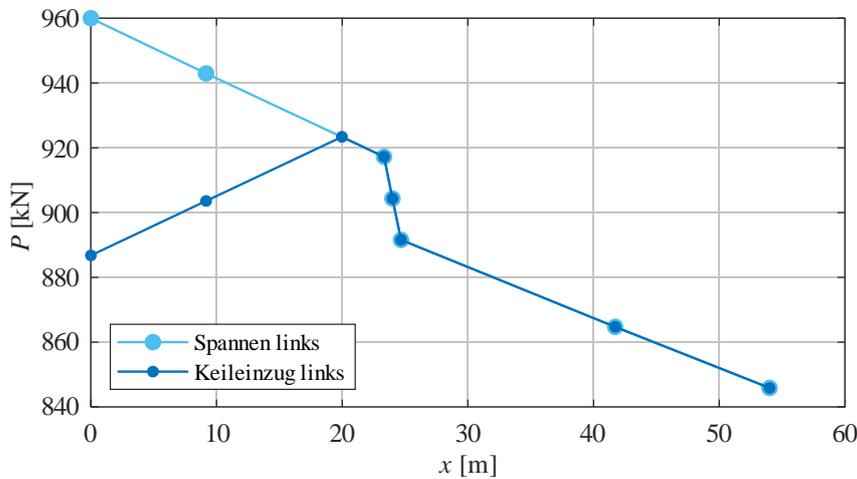


Abb. 2: Spannkraftverlauf nach Spannen und Verkeilen von der linken Seite

(iii) Spannkraftverlauf nach Spannen rechts

Zur Bestimmung des Spannkraftverlaufs wird eine vom rechten Trägerrand aus nach links laufende Laufvariable x_R eingeführt. Die Spannkraft am rechten Rand beträgt nach dem ersten Spannvorgang bereits 846 kN. Spannt man nun von der rechten Seite ebenfalls auf 960 kN vor (+114 kN) verläuft der Spannkraftverlauf mit der umgekehrten Steigung wie nach dem Vorspannen von links (umgekehrte Spannrichtung, selbe Spanngliedkrümmung). Bei $P = \frac{960 \text{ kN} + 846 \text{ kN}}{2} = 903 \text{ kN}$ schneiden

sich die beiden Spannkraftverläufe ($x_R = 29.92 \text{ m}$ resp. $x = 24.08 \text{ m}$). Dies bedeutet, dass der zweite Spannvorgang vom rechten Ende bis zur Position $x_R = 24.08 \text{ m}$ den Spannkraftverlauf beeinflusst. Der exakte Spannkraftverlauf kann entweder wieder mit den Formeln (1) und (2) bestimmt werden, wobei die kumulierte Umlenkung φ_{xR} von der rechten Seite her bestimmt werden muss, oder man spiegelt die Spannkraftverlaufskurve nach dem Spannen von links an der y-Achse beim Wert $P = 903 \text{ kN}$.

Die Resultate sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

	x_R [m]	e [mm]	δ_{φ_x} [mrad]	φ_x [mrad]	P_R [kN]
1	0.00	0	0	0	960
2	12.28	300	49	49	939
3	29.32	-277	68	117	911
	29.92				903
4	30.00	-300	68	184	904
5	30.67	-277	67	252	917
	34.02				923
6	44.83	200	67	319	904
7	54.00	0	44	363	887

Tab. 3: Spannkraftverlauf nach Spannen von der rechten Seite

(iv) Spannkraftverlauf nach Keileinzug rechts

Die Länge der Schlupfumkehr kann analog zu Abschnitt (ii) bestimmt werden:

$$l_2 = \sqrt{\frac{\Delta \cdot E_p \cdot A_p}{\left(\frac{|P_{R3} - P_{R1}|}{x_{R3} - x_{R1}}\right)}} = 20.87 \text{ m}$$

$$\Delta P_R = 2 \left(\frac{|P_{R3} - P_{R1}|}{x_{R3} - x_{R1}} \right) \cdot l_2 = 70 \text{ kN}$$

Die Spannkraft bei l_2 beträgt $P_{l_2} = P_0 - \frac{\Delta P_R}{2} = 925 \text{ kN}$

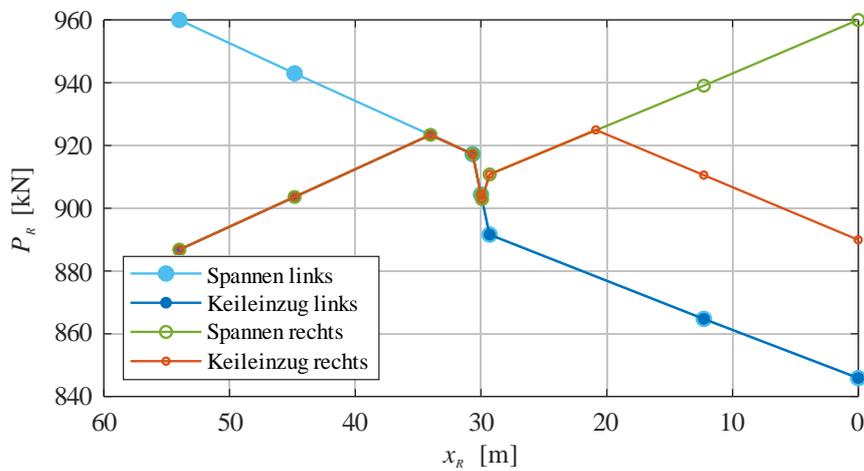


Abb. 3: Spannkraftverlauf nach Spannen und Verkeilen von der rechten Seite