

| | | |
|---------------|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 2/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |

| | g_{0k} | $g_{0k} + g_{1k}$ | $g_{0k} + g_{1k} + q_k$ | d-Niveau |
|-----------------|----------|-------------------|-------------------------|----------|
| q [kN/m] | 27.8 | 37.8 | 52.8 | 73.5 |
| V_{max} [kN] | 167 | 227 | 317 | 441 |
| M_{max} [kNm] | 500 | 680 | 950 | 1322 |

b) Vorspannkonzzept

- Parabolische Kabelführung mit maximalen Exzentrizitäten
- Ziel: Volle Vorspannung für ständige Lasten

Vorbemessung: Abschätzung Spannstahlfläche damit Lastausgleich für ständige Lasten

$$X \approx 8 \cdot \sqrt{A_p}$$

$$\varnothing_{ext} = \varnothing_a \approx 2 \cdot \sqrt{A_p}$$

$$e = \Delta s \approx 0.3 \cdot \sqrt{A_p}$$

$$f \approx h - \underbrace{\left(30 \text{ mm} + 4 \cdot \sqrt{A_p}\right)}_{c_{nom,p} + \frac{X}{2}} - \underbrace{\left(30 \text{ mm} - 1.3 \cdot \sqrt{A_p}\right)}_{c_{nom,p} + \frac{\varnothing_a}{2} + \Delta s} = 540 \text{ mm} - 5.3 \cdot \sqrt{A_p}$$

$$u_\infty = \frac{8P_\infty f}{l^2} = g_{0k} + g_{1k} = 37.8 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \rightarrow A_p \approx 2050 \text{ mm}^2$$

$$P_\infty = 0.7 \cdot 0.85 \cdot f_{pk} \cdot A_p$$

Wahl Spannsystem:

- Spanngliedereinheit CONA 12-06 Y1860, $A_p = 1800 \text{ mm}^2$
- Rundes Stahlhüllrohr 79/85 ($\varnothing_i = 79 \text{ mm}$, $\varnothing_a = 85 \text{ mm}$, $\Delta s = 14 \text{ mm}$)
- $c_{nom,p} = \min\left(30 \text{ mm}, \frac{\varnothing_a}{2}\right) = 42.5 \text{ mm}$
- Bewegliche Verankerung BP
- Feste Verankerung FP
- Initiale Vorspannung $\sigma_{p0} = 0.7 f_{pk} = 1302 \text{ MPa}$
- Achsabstand $A = 380 \text{ mm}$
- Randabstand $R = \frac{A}{2} + c_{nom,p} = 232.5 \text{ mm}$
- Spiralbewehrung $\varnothing_s = 325 \text{ mm}$
- Pfeilhöhe $f = h - R - \left(c_{nom,p} + \frac{\varnothing_a}{2} + \Delta s\right) = 268.5 \text{ mm}$
- Exzentrizitäten: $e\left(x = -\frac{l}{2}\right) = e_A = R - \zeta_c = 72.0 \text{ mm}$

$$e(x=0) = e_F = h - \left(c_{nom,p} + \frac{\varnothing_a}{2} + \Delta s\right) - \zeta_c = 340.5 \text{ mm}$$

- Das Spannkabel liegt für die gesamte Trägerlänge unterhalb des Schwerpunktes.

VL 6.1
S.3

Doku CONA

S.3

S.15

S.9

S.19

S.19

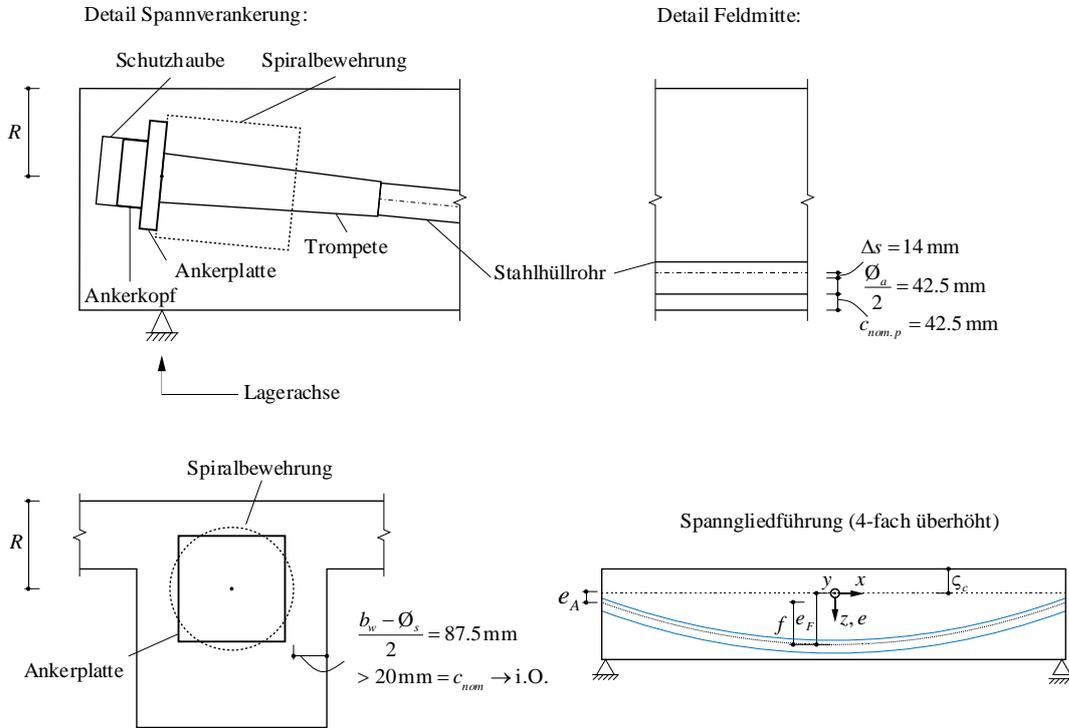
S.10

S.19

ζ_c siehe S.3

| | | |
|---------------|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 3/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |

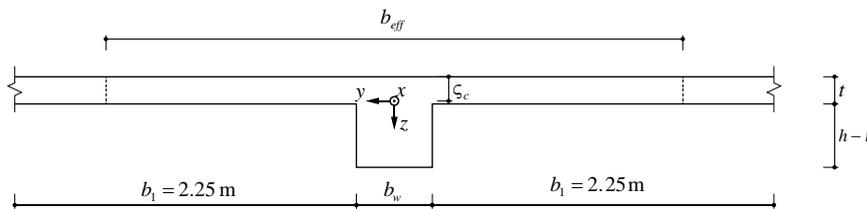
Spannsystem:



1:20

c) Verteilung der Betonspannungen

Querschnittswerte:



SIA 262
4.1.3.3.2

$l_0 = l = 12\text{m}$

$$b_{eff} = b_w + 2 \cdot \underbrace{(0.2 \cdot b_1 + 0.1 \cdot l_0)}_{< 0.2 \cdot l_0 = 2.4\text{m}} = 3.80\text{ m} < b = l_y = 5\text{ m}$$

$$A_c = b_{eff} \cdot t + b_w \cdot (h - t) = 0.894 \cdot 10^6\text{ mm}^2$$

$$\zeta_c = \frac{b_{eff} \cdot \frac{t^2}{2} + b_w \cdot (h - t) \cdot \left(\frac{t + h}{2}\right)}{A_c} = 160.5\text{ mm}$$

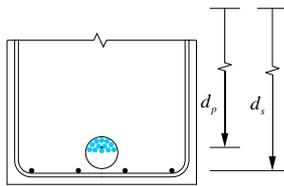
$$I_c = \frac{b_{eff} \cdot t^3}{12} + b_{eff} \cdot t \cdot \left(\zeta_c - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{b_w \cdot (h - t)^3}{12} + b_w \cdot (h - t) \cdot \left(\frac{t + h}{2} - \zeta_c\right)^2 = 19.394 \cdot 10^9\text{ mm}^4$$

| | | |
|---------------|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 5/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |

d) Tragsicherheit in Längsrichtung

→ Betrachtung mit Vorspannung auf Widerstandsseite

Biegung: $M_{max,d} = 1322 \text{ kNm}$



Schlaffe Bewehrung: Zulagen 4Ø14

$$d_p = h - c_{nom,p} - \frac{\varnothing_a}{2} - \Delta s = 501 \text{ mm}$$

$$d_s = h - c_{nom} - \varnothing_w - \frac{\varnothing}{2} = 563 \text{ mm}$$

Annahme:
 $\varnothing_w = 10 \text{ mm}$

$$F_p = A_p \cdot f_{pd} = 2502 \text{ kN}$$

$$F_s = A_s \cdot f_{sd} = 267.9 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{c,sup}(x) = \frac{x \cdot \left(\varepsilon_{ud} - \frac{\sigma_{p0}}{E_p} \right)}{d_p - x}$$

$$c(x) = x - \frac{x \cdot 0.045\%}{\varepsilon_{c,sup}(x)}$$

$$F_c(x) = c(x) \cdot b_{eff} \cdot f_{cd}$$

$$F_s + F_p - F_c(x) = 0 \rightarrow x = 52.4 \text{ mm} \rightarrow c(x) = 37.2 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} = F_s \left(d_s - \frac{c(x)}{2} \right) + F_p \left(d_p - \frac{c(x)}{2} \right) = 1353 \text{ kNm} > M_{max,d} = 1322 \text{ kNm} \rightarrow \text{i.O.}$$

Versagensart:
Spannkabel reißt bevor
Beton bricht
(Regime 2)

Würde man den Biegezugwiderstand mit der Annahme Betonbruch während Spannstahl und Bewehrungsstahl fließen (Regime 1) ermitteln, resultierte genau der gleiche Biegezugwiderstand, jedoch würde die Spannstahldehnung den zulässigen Wert von ε_{ud} überschreiten.

Querkraft: $V_{max,d} = 441 \text{ kN}$

$$z = \frac{A_p f_{pd} d_p + A_s f_{sd} d_s}{A_p f_{pd} + A_s f_{sd}} - \frac{c(x)}{2} = 488 \text{ mm}$$

Wahl: $\alpha = \alpha_{min} = 25^\circ$ (für vorgespannte Träger)

Nachweisschnitt bei $z \cdot \cot(\alpha)$ vom Auflager:

$$V_d = V_{max,d} - z \cdot \cot(\alpha) \cdot q_d = 364 \text{ kN}$$

Neigung des Vorspannkabels β_p :

$$\beta_p = f'(x) = -\frac{l}{2} + z \cdot \cot(\alpha) = -\frac{8 \cdot fx}{l^2} = 4.2^\circ$$

$$P_\infty \cdot \sin(\beta_p) = 147 \text{ kN}$$

$$\text{Mindestbewehrung im Steg } \rho_{min} = 0.2\% \rightarrow a_{s,min} = 1000 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\rightarrow \varnothing 10 @ 150, 2 - \text{schnittig} \rightarrow a_{sw} = 1047 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Nachweise:

$$V_{Rd,s} = a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \cot(\alpha) + P_\infty \cdot \sin(\beta_p) = 624 \text{ kN} > V_d = 364 \text{ kN} \rightarrow \text{i.O.}$$

$$V_{Rd,c} = b_w \cdot k_c \cdot f_{cd} \cdot z \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + P_\infty \cdot \sin(\beta_p) = 1176 \text{ kN} > V_d = 364 \text{ kN} \rightarrow \text{i.O.}$$

SIA 262
4.3.3.3.2

| | | |
|---------------|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 6/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |

Zusätzlich zu den Nachweisen in Längsrichtung muss auch die Tragsicherheit in Querrichtung nachgewiesen werden. Dabei ist die Ausbreitung der Druckkraft in den Flansch sowie das Querbiegemoment zu untersuchen. Diese Nachweise wurden bereits in SB I Kolloquium 4 detailliert aufgezeigt und werden deshalb hier nicht nochmals aufgeführt. Zusätzlich müsste der Nachweis der Querkrafttragsicherheit der Platte überprüft werden. Dies wird im Kapitel 7 Platten behandelt.

e) Durchbiegungen

Für die Berechnung der Mitteldurchbiegungen wird die Vorspannung als Umlenk- und Ankerkräfte betrachtet und effektive Bruttoquerschnittswerte verwendet.

$t = 0$ (g_{0k}, P_0):

$$u_0 = \frac{8 \cdot P_0 \cdot f}{l^2} = 35.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$w_{m,0} = \frac{5 \cdot (g_{0k} - u_0) l^4}{384 \cdot EI_c} - \frac{P_0 \cdot e_A \cdot l^2}{8 \cdot EI_c} = -3.0 \text{ mm} - 4.7 \text{ mm} = -7.6 \text{ mm}$$

$t \rightarrow \infty$ ($g_{0k} + g_{1k}, P_\infty$):

$$u_\infty = 0.85 \cdot u_0 = 29.7 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$w_{m,\infty} = \frac{5 \cdot (g_{0k} + g_{1k} - u_\infty) l^4}{384 \cdot \frac{EI_c}{3}} - \frac{P_\infty \cdot e_A \cdot l^2}{8 \cdot \frac{EI_c}{3}} = 10.0 \text{ mm} - 11.9 \text{ mm} = -1.9 \text{ mm}$$

kurzfristige Nutzlast:

$$\Delta w_m = \frac{5 \cdot q_k \cdot l^4}{384 \cdot \frac{EI_c'}{3}} = 18.7 \text{ mm}$$

$$\Delta w_m + w_{m,\infty} = 16.7 \text{ mm}$$

Infolge kurzfristiger Nutzlast beträgt die Durchbiegung maximal 18.7 mm. Bezüglich der Horizontalen biegt sich der Träger insgesamt um ca. 16.7 mm. Dabei wird die gerissene Biegesteifigkeit verwendet, da der Träger beim Auftreten der Nutzlast in Feldmitte reißt. Aus diesem Grund wird auch für ständige Lasten und $t \rightarrow \infty$ die gerissene Biegesteifigkeit verwendet. Zusätzlich müssten auch noch Langzeiteinflüsse berücksichtigt werden. Diese spielen jedoch für die gerissene Biegesteifigkeit eine wesentlich geringere Rolle als für die ungerissene und werden hier einfachheitshalber vernachlässigt. Für ständige Lasten bleibt der Plattenbalken somit leicht überhöht (ca. $l/6000$).

Annahme
gerissene
Biegesteifig-
keit:
 $EI_c'' \cong \frac{EI_c'}{3}$

| | | |
|---------------|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 7/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |

Aufgabe 2

a) Umlenkkräfte bei Lastausgleich für ständige Lasten

Beim Lastausgleich für ständige Lasten entsprechen die Umlenkkräfte den ständigen Lasten, also $u_L = 100\% (g_{0k} + g_{1k})$.

b) Umlenkkräfte bei voller Vorspannung

Von einer vollen Vorspannung für ständige Lasten spricht man, falls unter ständigen Lasten kein Querschnitt dekomprimiert. Massgebend wird dabei im vorliegenden Fall die Spannung am unteren Querschnittsrand in Feldmitte.

Die Betonspannungen werden am ungerissenen elastischen Querschnitt berechnet:

$$\sigma_{c,inf} = -\frac{P}{A_c} + \frac{M_{Feld}(g_{0k}, g_{1k}) - Pe}{I_c} z_{inf} = 0$$

Mit dem oberen Kernpunkt $k_{sup} = \frac{W_{inf}}{A_c} = \frac{I_c}{z_{inf} A_c}$ ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} -Pk_{sup} + M_{Feld}(g_{0k}, g_{1k}) - Pe &= 0 \\ \Leftrightarrow P(k_{sup} + e) &= \frac{(g_{0k} + g_{1k})l^2}{8} \\ \Leftrightarrow P &= \frac{(g_{0k} + g_{1k})l^2}{8(k_{sup} + e)} \end{aligned}$$

Die Umlenkkräfte berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} u_V &= \frac{8Pf}{l^2} = \frac{f}{k_{sup} + e} (g_{0k} + g_{1k}) = 72\% (g_{0k} + g_{1k}) \\ k_{sup} &= \frac{I_c}{z_{inf} A_c} = 43.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

c) Verlauf der Betonspannungen

Die Betonspannungen werden mit der Formel von Navier bestimmt:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c,sup} \\ \sigma_{c,inf} \end{Bmatrix} = -\frac{P}{A_c} + \frac{M + M_{zw} - P \cdot e}{I_c} \cdot \begin{Bmatrix} z_{sup} \\ z_{inf} \end{Bmatrix}$$

Vorspannkraft im Fall des Lastausgleichs für ständige Lasten:

$$P = \frac{u_L l^2}{8f} = \frac{(g_{0k} + g_{1k})l^2}{8f}$$

Vorspannkraft im Fall der vollen Vorspannung für ständige Lasten:

$$P = \frac{u_V l^2}{8f} = \frac{72\% (g_{0k} + g_{1k})l^2}{8f}$$

Die Betonspannungen am oberen und unteren Querschnittsrand sind in Abbildung 1 dargestellt. Zusätzlich zeigt Abbildung 2 die Betonspannungen am Querschnitt in der Mitte des Trägers ($x = 0$) und am linken Auflager ($x = -l/2$).

| | | |
|---------------|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 8/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |

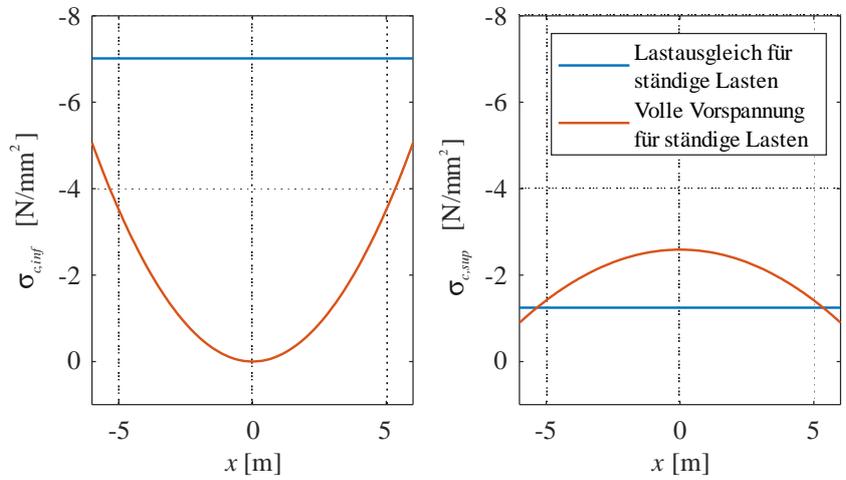


Abb. 1: Betonspannungen am unteren und oberen Querschnittsrand entlang des Trägers (Laufvariable x)

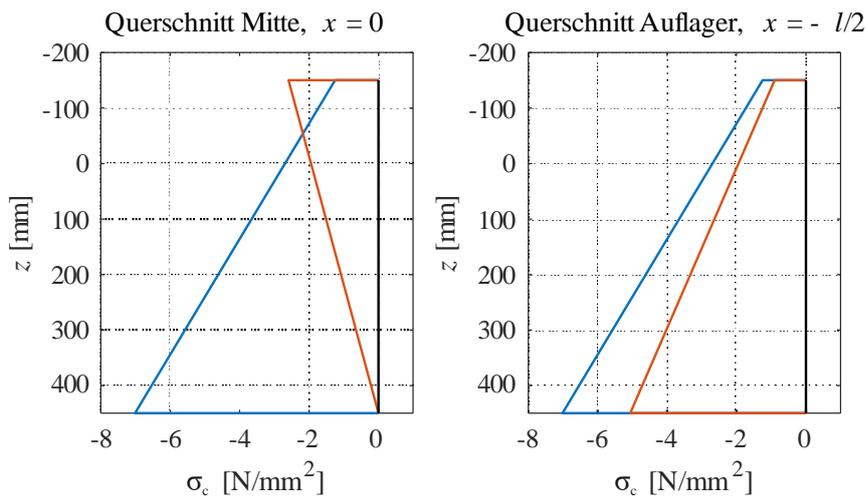


Abb. 2: Betonspannungen am Querschnitt (Legende gemäss Abbildung 1)

Beim Lastausgleich für ständige Lasten stellt sich kein zentrischer Spannungszustand ein, da die Ankerkraft nicht im Schwerpunkt des Querschnitts angreift, sondern bei $z = 69.8$ mm, wodurch eine konstante Momentenbeanspruchung über die Trägerlänge resultiert. Bei der vollen Vorspannung setzt sich das resultierende Moment aus dem Moment aus der exzentrischen Ankerkraft und dem Moment aus der Differenz der ständigen Lasten und der Umlenkkräfte zusammen.

| | | |
|---------------|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 9/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |

Aufgabe 3

Mitteldurchbiegung des Trägers:

Für die Berechnung der Durchbiegung wird die Betrachtungsweise als Anker- und Umlenkkräfte benutzt. Querschnittswerte:

$$P = 1000 \text{ kN}$$

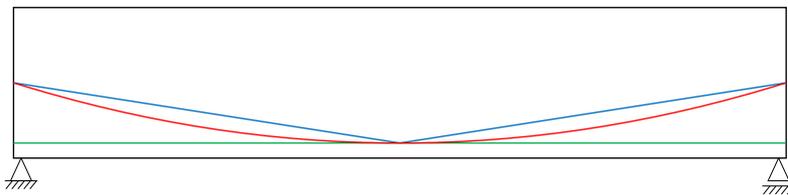
$$q = 30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$f = e_{\text{Mitte}} = 200 \text{ mm}$$

$$e_{\text{Auflager}} = 0 \text{ mm}$$

$$I_c = \frac{1}{12} bh^3 = 3.125 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$EI_c = 105 \text{ MNm}^2$$



a) parabolische Spanngliedführung

Bei der parabolischen Spanngliedführung wirken gleichmäßig verteilte Umlenkkräfte u auf den vom Spannglied befreiten Träger. Diese wirken der Belastung q entgegen. Da die Ankerkräfte im Schwerpunkt des Trägers angreifen, haben sie keinen Einfluss auf die Durchbiegung.

$$u = \frac{8Pf}{l^2} = 16 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$w = \frac{5ql^4}{384EI_c} - \frac{5ul^4}{384EI_c} = 37.2 \text{ mm} - 19.8 \text{ mm} = 17.4 \text{ mm}$$

b) lineare Spanngliedführung

Bei der linearen Spanngliedführung wirkt eine einzelne Umlenkkraft am Knick des Spanngliedes. Diese kann durch Kräftegleichgewicht am Knick bestimmt werden.

$$\frac{P}{U/2} = \frac{\sqrt{(l/2)^2 + e_{\text{Mitte}}^2}}{e_{\text{Mitte}}} \Leftrightarrow U = \frac{2Pe_{\text{Mitte}}}{\sqrt{(l/2)^2 + e_{\text{Mitte}}^2}} = 80 \text{ kN}$$

$$w = \frac{5ql^4}{384EI_c} - \frac{Ul^3}{48EI_c} = 37.2 \text{ mm} - 15.9 \text{ mm} = 21.3 \text{ mm}$$

c) gerade Spanngliedführung

Am geraden Spannglied wirken keine Umlenkkräfte. Dadurch, dass die Ankerkraft unterhalb des Schwerpunkts angreift, ergibt sich trotzdem eine Durchbiegung, welche der positiven Durchbiegung aufgrund der verteilten Last q entgegenwirkt.

$$w = \frac{5ql^4}{384EI_c} - \frac{Pe_{\text{Mitte}}l^2}{8EI_c} = 37.2 \text{ mm} - 23.8 \text{ mm} = 13.4 \text{ mm}$$

| | | |
|--|------------------------|------------------|
| Stahlbeton II | Frühjahrssemester 2022 | Seite 10/10 |
| Hausübung 1 | Musterlösung | skn / 05.03.2022 |
| <p>Bei gleicher Vorspannkraft sind die Durchbiegungen für die gerade Spanngliedführung am geringsten. Dabei entstehen bei der geraden Spanngliedführung keine Umlenkkräfte, jedoch greifen die Ankerkräfte exzentrisch an und verursachen ein negatives Moment, welches die Durchbiegungen reduziert. Bei diesem System ist jedoch zu beachten, dass im Auflagerbereichen grosse Zugspannungen entstehen und der Querschnitt am oberen Rand reißt ($\sigma_{c.sup} = 9.3\text{MPa}$).</p> <p>Im Vergleich zur parabolischen Spanngliedführung sind bei der linearen Spanngliedführung mit gleicher Exzentrizität und Spannkraft die Durchbiegungen grösser.</p> | | |