Platten – Bruchmechanismen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht

Elastische Plattentheorie

Plastische Plattentheorie

Statische Methode der Plastizitätstheorie

Kinematische Methode der Plastizitätstheorie

- Lösung der Platten-differentialgleichung
- Approximative Lösungen mit Energieverfahren

Methode der Finiten Elemente

- Momentenansätze
- Methode der stell-vertretenden Rahmen
- Streifenmethode
  - einfach
  - erweitert

Fliessgelenklinienmethode

Platten – Bruchmechanismen

Fliessgelenklinienmethode

- Die Fliessgelenklinienmethode (Johansen, 1962) ist eine Anwendung der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie.

- Vorgehen: kinematisch zulässigen Mechanismus annehmen, Arbeit der äusseren Kräfte mit Dissipationsarbeit gleichsetzen $\rightarrow$ oberer Grenzwert für die Traglast.

- In der Regel sind verschiedene Bruchmechanismen zu untersuchen, für jeden Mechanismus ist die Traglast bezüglich allfälliger freier Parameter zu minimieren.

- Starre Teile der Mechanismen in der Regel hochgradig innerlich statisch unbestimmt $\rightarrow$ im Gegensatz zu Stabtragwerken gelingt die Plastizitätskontrolle ($m \leq m_u$) nur in einfachen Spezialfällen.

Platten – Bruchmechanismen

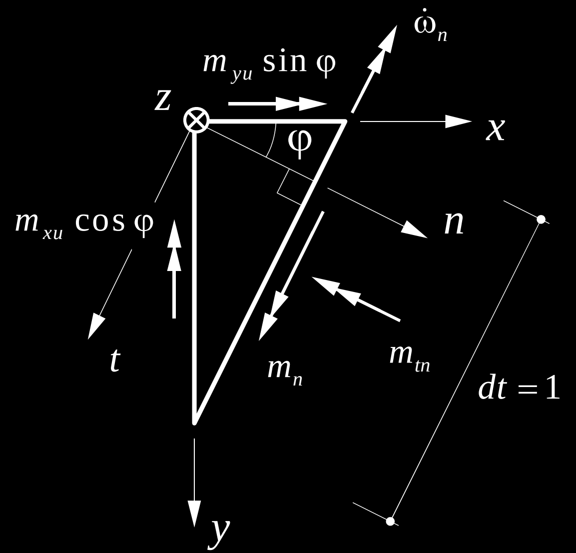
Fliessgelenklinienmethode

- Im Vergleich mit Lösungen nach elastischer Plattentheorie oder auch Gleichgewichtslösungen recht einfach anzuwenden, insbesondere bei der Überprüfung bestehender Tragwerke → kinematische Methode der Plastizitätstheorie hat bei Platten eine weitaus grössere Verbreitung erlangt als für Balken und Scheiben (vor allem in Skandinavien sehr verbreitet, auch für die Bemessung).

- Mit der sogenannten «Gleichgewichtsmethode» (Ingerslev, 1923) kann der analytisch oft aufwendige Minimierungsprozess beim Vorgehen nach der Fliessgelenklinienmethode umgangen werden. Dabei wird Gleichgewicht an den einzelnen, starren Plattenteilen eines Mechanismus formuliert, wobei sogenannte «Knotenkräfte» zu berücksichtigen sind. Die Methode ist jedoch nur beschränkt gültig, und der Minimierungsprozess kann heute mit numerischen Verfahren problemlos durchgeführt werden. Daher wird darauf nicht eingegangen.

Platten – Bruchmechanismen

Fliessgelenklinienmethode – Dissipation in Fliessgelenklinie



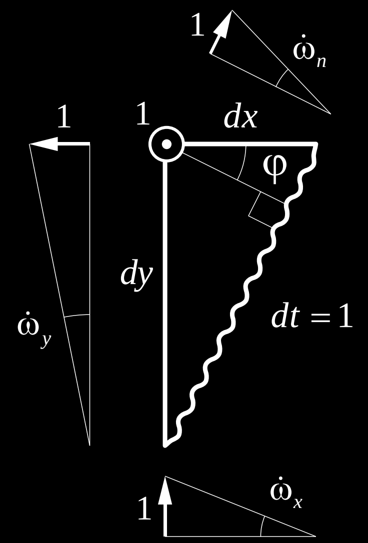
- Platte, orthogonal bewehrt (x, y)
- Fliessgelenklinie in beliebiger Richtung t: Unter Vernachlässigung von Membrankräften ($n_n = 0$) gilt: $$dD = m_n \dot{\omega}_n dt$$
- Einsetzen von Beziehung: $$m_{nu} = m_{xu} \cos^2\varphi + m_{yu} \sin^2\varphi$$
- ergibt Dissipationsarbeit: $$dD = \left(m_{xu} \cos^2\varphi + m_{yu} \sin^2\varphi\right) \dot{\omega}_n dt$$
- mit Rotationsgeschwindigkeiten um die y- resp. x-Achse: $$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_n \cos\varphi, \quad \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_n \sin\varphi$$ $$dy = dt\cos\varphi, \quad dx = dt\sin\varphi$$

→ Dissipationsarbeit:

$$\boxed{dD = m_{xu}\dot{\omega}_x dy + m_{yu}\dot{\omega}_y dx}$$

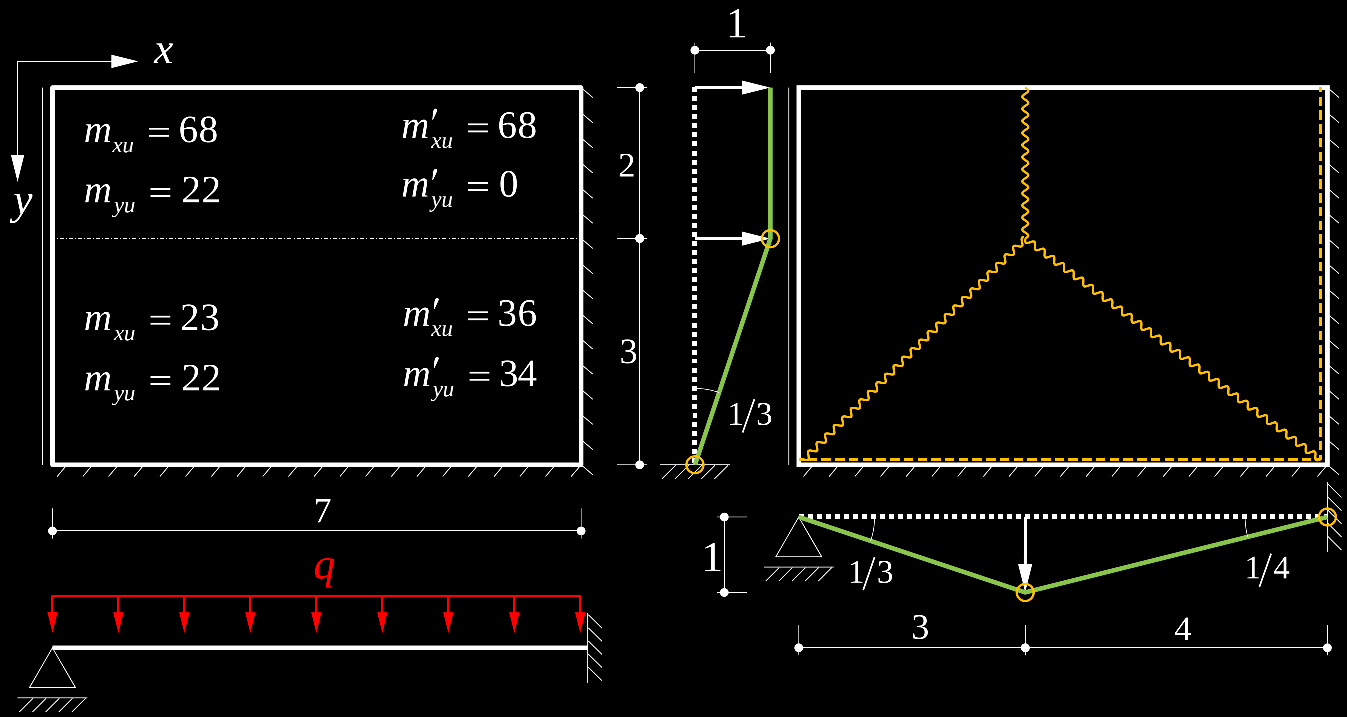
= Summe der Produkte in den beiden Bewehrungsrichtungen von:

Biegewiderstand • Rotationsgeschwindigkeit um die entsprechende Achse • auf diese Achse projizierte Länge der Fliessgelenklinie



Platten – Bruchmechanismen

Beispiel Einheiten [m, kNm/m]

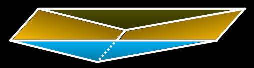


Signaturen für Fliessgelenklinien
(n = Richtung der Randnormalen)

positive Fliessgelenklinie,
$m_n = m_{nu}$

negative Fliessgelenklinie,
$m_n = -m_{nu}' = \lambda m_{nu}$

$\lambda = m_u'/m_u$

Arbeit der äusseren Kräfte W = (Pyramide  + Prisma ) · q $= \left(3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}\right) q = 14q$

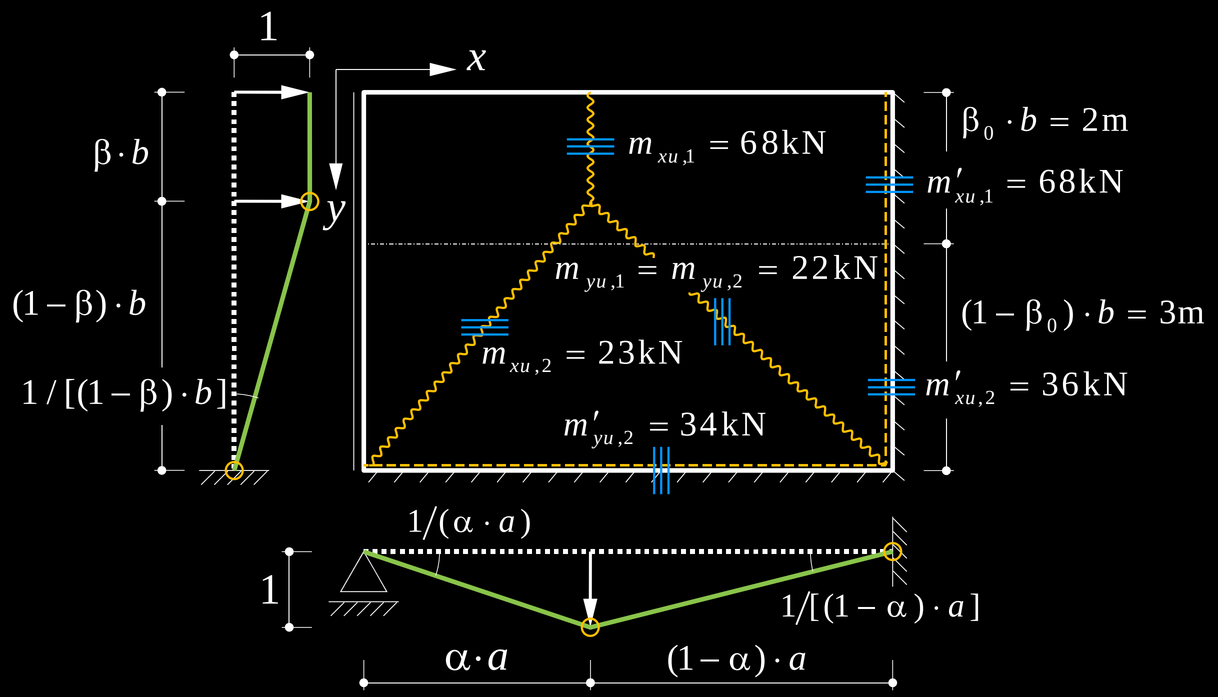
Dissipationsarbeit

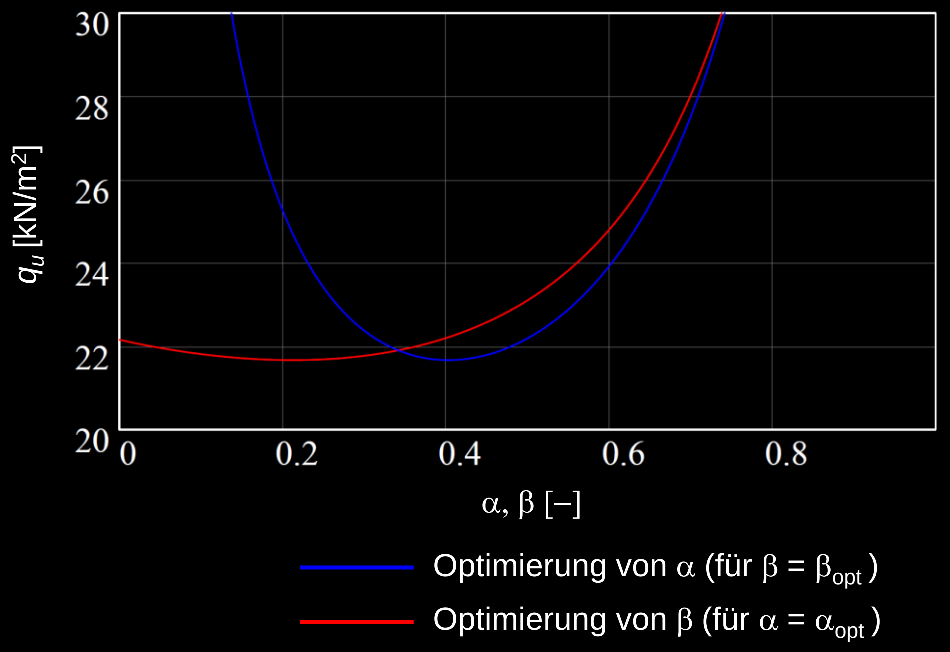
$$D = 68 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 2 + 68 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 23 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 3 + 36 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + 22 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7 + 34 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7 = 311.25$$

$$W = D \rightarrow q_u \leq 22.2\,\text{kN/m}^2$$

Platten – Bruchmechanismen

Beispiel: Optimierung der Fliessgelenklinien-Geometrie





$$D = m_{xu,1}\left(\frac{1}{\alpha a}+\frac{1}{(1-\alpha)a}\right)\beta_0 b + m'_{xu,1}\frac{1}{(1-\alpha)a}\beta_0 b + m_{xu,2}\left(\frac{1}{\alpha a}+\frac{1}{(1-\alpha)a}\right)(1-\beta_0)b + m'_{xu,2}\frac{1}{(1-\alpha)a}(1-\beta_0)b + m_{yu,2}\frac{1}{(1-\beta)b}a + m'_{yu,2}\frac{1}{(1-\beta)}a$$

$$W = \left[(1-\beta)\cdot b\cdot a\cdot\frac{1}{3}+\beta\cdot b\cdot a\cdot\frac{1}{2}\right]\cdot q = a\cdot b\cdot\frac{\beta+2}{6}\cdot q \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial q_u}{\partial\alpha}=0 \quad bzw. \quad \frac{\partial q_u}{\partial\beta}=0 \rightarrow \qquad q_{u,opt}\left(\alpha\cdot a = 2.823\ \text{m};\ \beta\cdot \text{b} = 1.062\ m\right) = 21.7\ \text{kPa}$$

Fazit: Trotz relativ grosser Abweichung in der Geometrie ist die Traglast nur unwesentlich anders (flache Minima)!

Platten – Bruchmechanismen

Fliessgelenklinienmethode – Fächermechanismen

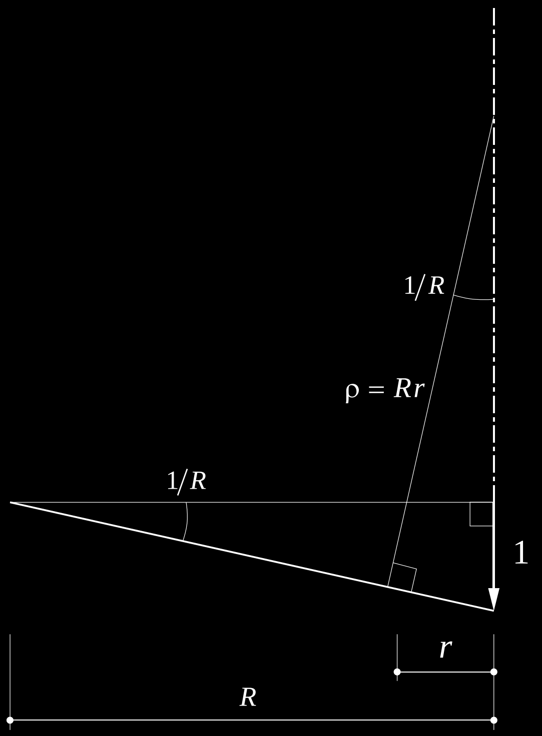
- Platte, isotrop bewehrt ($m_{xu} = m_{yu} = m_u$)

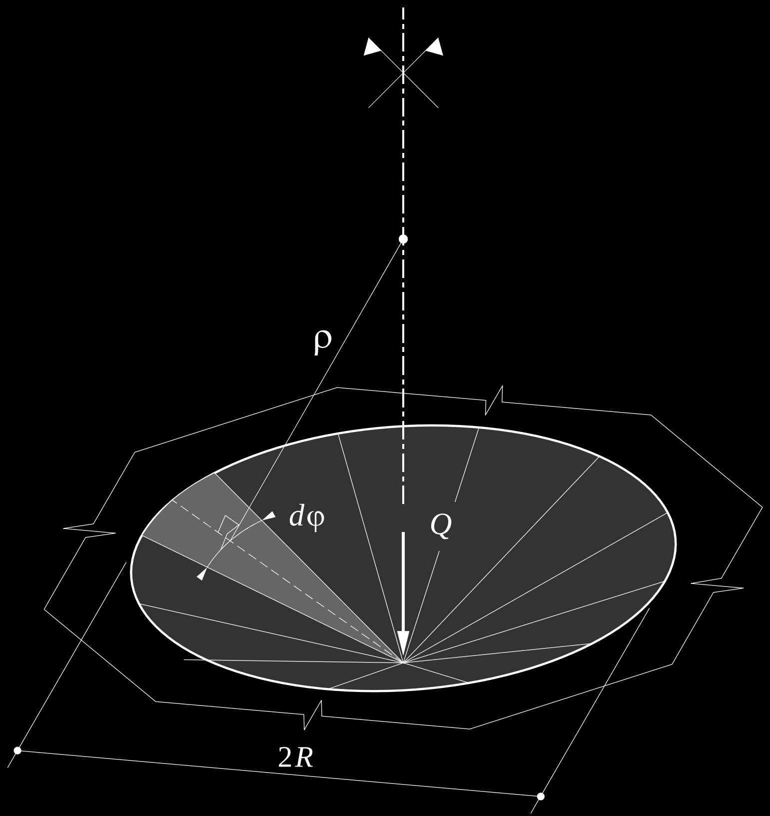
- Hauptkrümmungsradius im Kegelelement

  aus $\quad \rho = Rr \qquad \dfrac{r}{\rho} = \dfrac{1}{R}$

  $\rightarrow$ Hauptkrümmung $\quad \chi_1 = \rho^{-1} = (Rr)^{-1}$

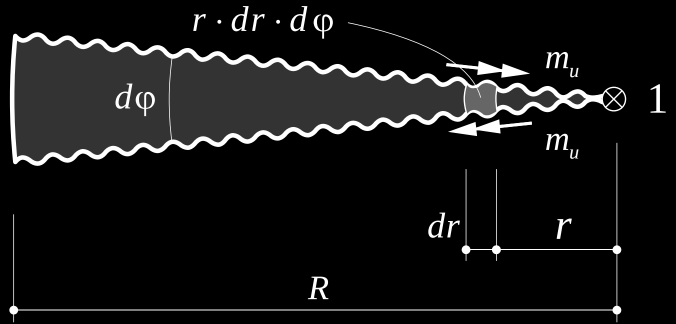
  $\rightarrow$ Rotation $\quad \dot{\omega}_\varphi = \chi_1 r d\varphi$





- Dissipationsarbeit pro Flächenelement im Fächer:

$$dD = m_u \dot{\omega}_\varphi dr = m_u \frac{1}{\rho} r d\varphi dr$$



Platten – Bruchmechanismen

Fliessgelenklinienmethode – Fächermechanismen

- Dissipationsarbeit pro Flächenelement im Fächer:

$$dD = m_u \dot{\omega}_\varphi dr = m_u \frac{1}{\rho} r d\varphi dr$$

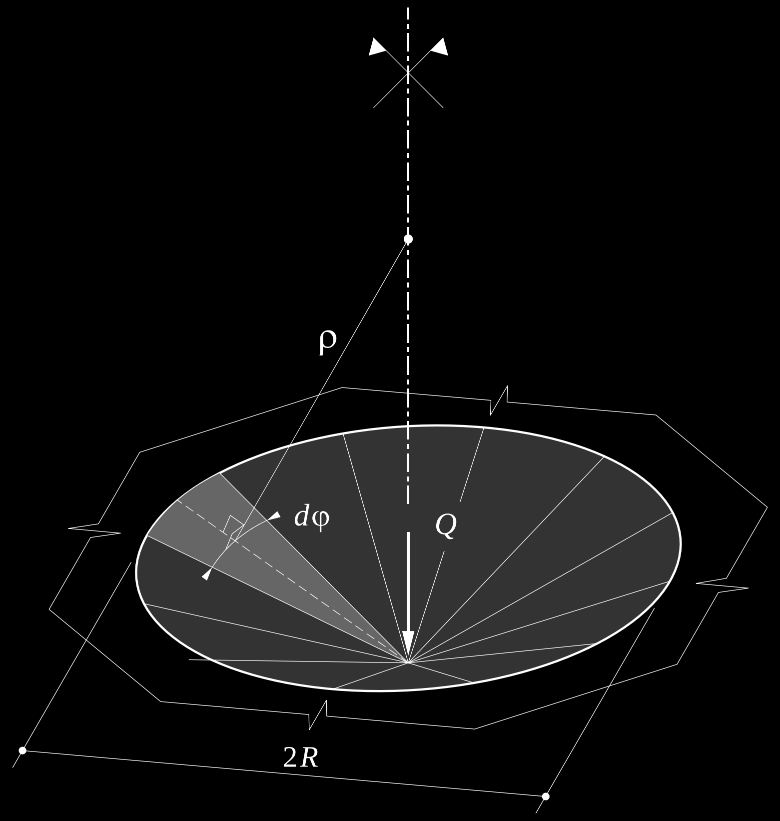
  Dissipationsarbeit im Inneren eines Fächers mit Öffnungswinkel β:

$$D = \left\{ \int_0^\beta \frac{1}{R(\varphi)} \int_0^{R(\varphi)} m_u(r,\varphi) dr \right\} d\varphi \qquad \text{mit} \qquad \rho = Rr$$

  wobei m_u und R und allgemeine Funktionen des Winkels φ sein können

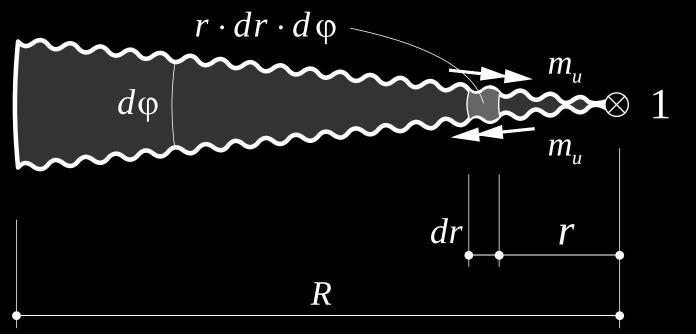
- Dissipation entlang der Fächerberandung (unabhängig von R):

$$D = \int_0^\beta \frac{1}{R} m'_u R d\varphi = \int_0^\beta m'_u(r,\varphi) d\varphi$$



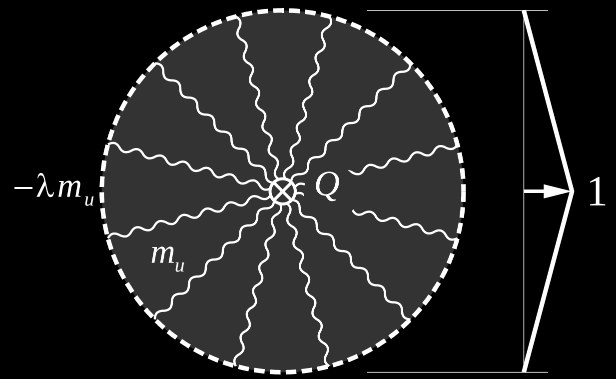
→ Dissipationsarbeit im Fächer mit Öffnungswinkel β für konstantes m_u und $m'_u = \lambda m_u$:

$$D = \beta(m_u + m'_u) = \beta m_u (1+\lambda)$$



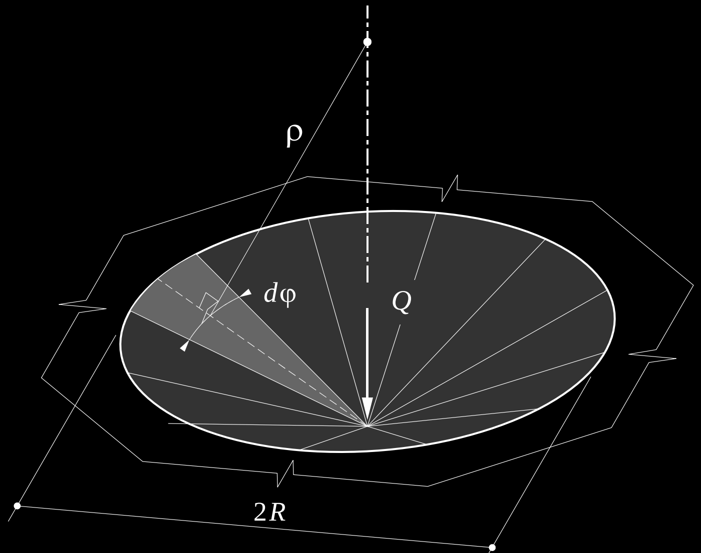
Platten – Bruchmechanismen

Einzellast auf Platte beliebiger Geometrie



$$\left.\begin{aligned} W &= Q\cdot 1 \\ D &= 2\pi m_u(1+\lambda) \end{aligned}\right\} \boxed{Q_u \leq 2\pi\left(m_u + m'_u\right) = 2\pi m_u\left(1+\lambda\right)}$$

Gleiche Traglast wie mit Momentenfeld für zentrisch gestützte Kreisplatte unter gleichmässiger Belastung, unabhängig von R $\rightarrow$ vollständige Lösung für eine Kreisplatte; für andere Fälle oberer Grenzwert.



Durch Anwendung des Affinitätstheorems (*) erhält man daraus für eine orthotrop bewehrte Platte beliebiger Geometrie den oberen Grenzwert:

$$\boxed{Q_u \leq 2\pi\left(\sqrt{m_{xu}m_{yu}} + \sqrt{m'_{xu}\,m'_{yu}}\right) = 2\pi\sqrt{m_{xu}m_{yu}}\left(1+\lambda\right)}$$

(*) Eine für eine isotop bewehrte Platte mit Biegewiderständen m_u, m'_u unter Belastungen q, Q in den Koordinaten (x,y) gültige Lösung kann auf eine orthotrop bewehrte Platte mit $m_{yu} = \mu\cdot m_{xu} = \mu\cdot m_u$, $m'_{yu} = \mu\cdot m'_{xu} = \mu\cdot m'_u$ übertragen werden. Dabei sind die Koordinaten mit $x^* = x$, $y^* = y\sqrt{\mu}$ zu transformieren, die Lasten mit $q^* = q$ und $Q^* = Q\sqrt{\mu}$
(praktischer Nutzen begrenzt, beispielsweise entspricht einer isotrop bewehrten Quadratplatte eine orthotrop bewehrte Platte mit stärkerer Bewehrung in der längeren Richtung, was nicht sinnvoll ist).

Platten – Bruchmechanismen

Einzellast auf Plattenstreifen

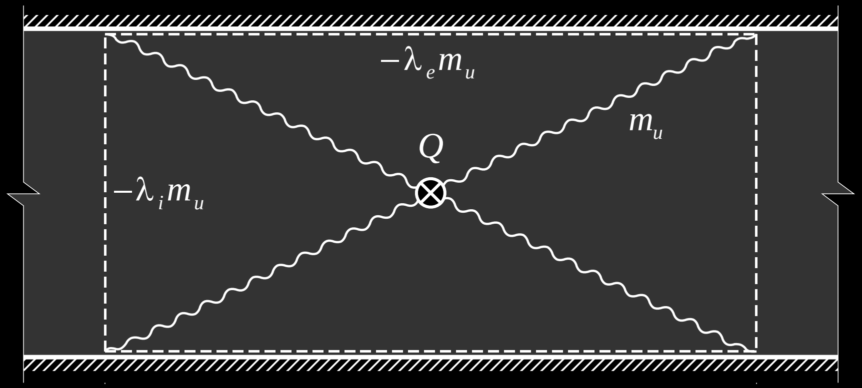
Liefert
Linien-/Pyramidenmechanismus

oder

Fächermechanismus

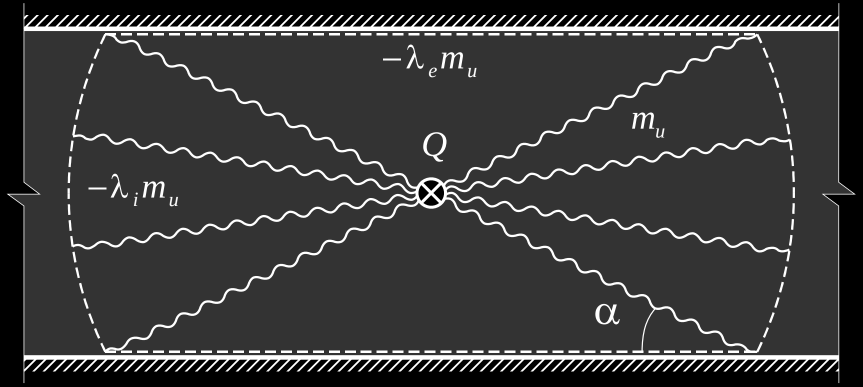
den tieferen Grenzwert?

(a)



Linien-/Pyramidenmechanismus

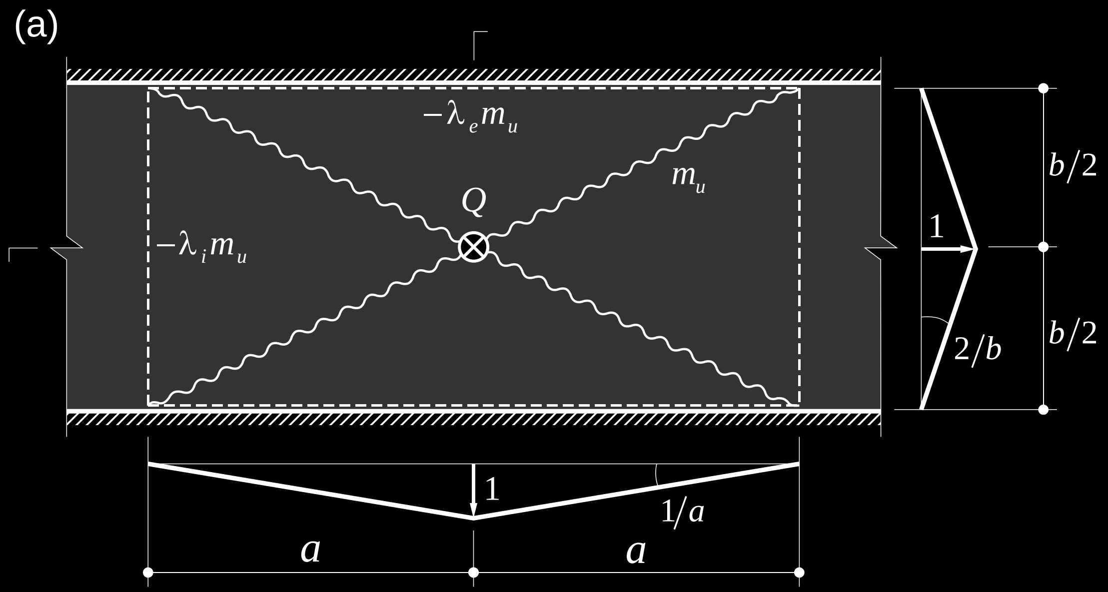
(b)



Fächermechanismus

Platten – Bruchmechanismen

Einzellast auf Plattenstreifen – Linien-/Pyramidenmechanismus



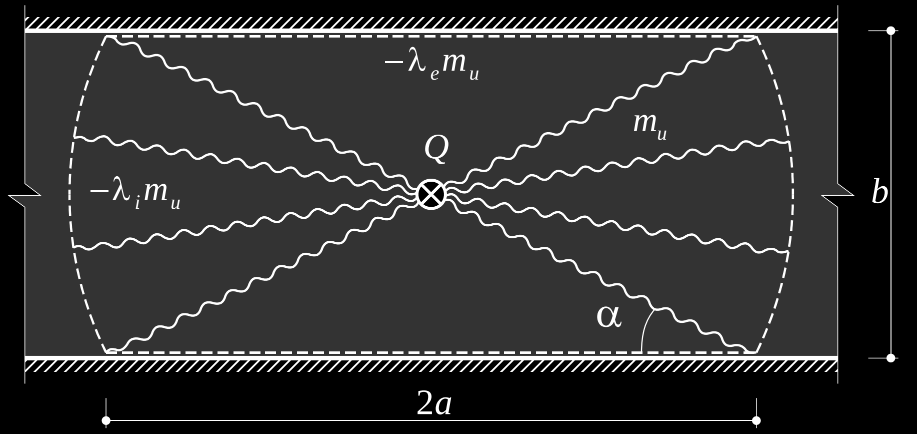
$$\boxed{Q_u \le 8m_u\sqrt{1+\lambda_i}\sqrt{1+\lambda_e}}$$

$$\left.\begin{aligned} W &= Q\cdot 1 \\ D &= 2\cdot m_u\cdot\left(2a\cdot\frac{2}{b}+b\cdot\frac{1}{a}\right)+\lambda_e\cdot m_u\cdot 2\cdot 2a\cdot\frac{2}{b}+\lambda_i\cdot m_u\cdot 2\cdot b\frac{1}{a}\end{aligned}\right\} Q_u \le 2m_u\left(\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+\lambda_e\frac{4a}{b}+\lambda_i\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{dQ}{da} = 2m_u\left[\frac{4}{b}(1+\lambda_e)-\frac{b}{a^2}(1+\lambda_i)\right] \longrightarrow a_{opt} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{1+\lambda_i}{1+\lambda_e}}$$

Platten – Bruchmechanismen

Einzellast auf Plattenstreifen – Fächermechanismus



$$\frac{2a}{b} = \cot\alpha$$

$$W = Q \cdot 1$$

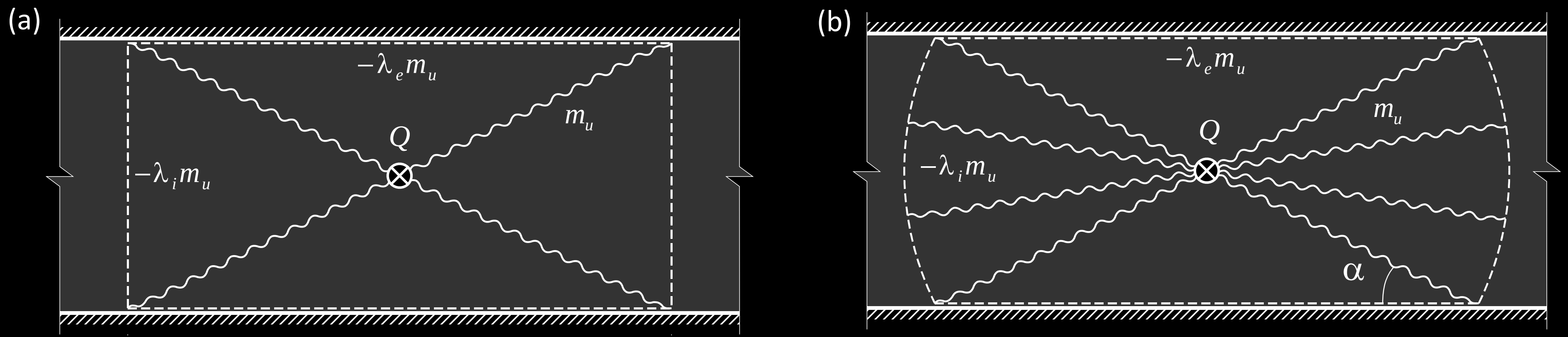
$$D = m_u\left(1+\lambda_i\right)\cdot 2\cdot 2\alpha + m_u\left(1+\lambda_e\right)\cdot 2\cdot 2a\frac{2}{b}$$

$$\sin^2\alpha_{opt} = \frac{1+\lambda_e}{1+\lambda_i}$$

$$\boxed{Q_u \le 4m_u\left[\alpha\left(1+\lambda_i\right)+\cot\alpha\left(1+\lambda_e\right)\right]}$$

Platten – Bruchmechanismen

Einzellast auf Plattenstreifen



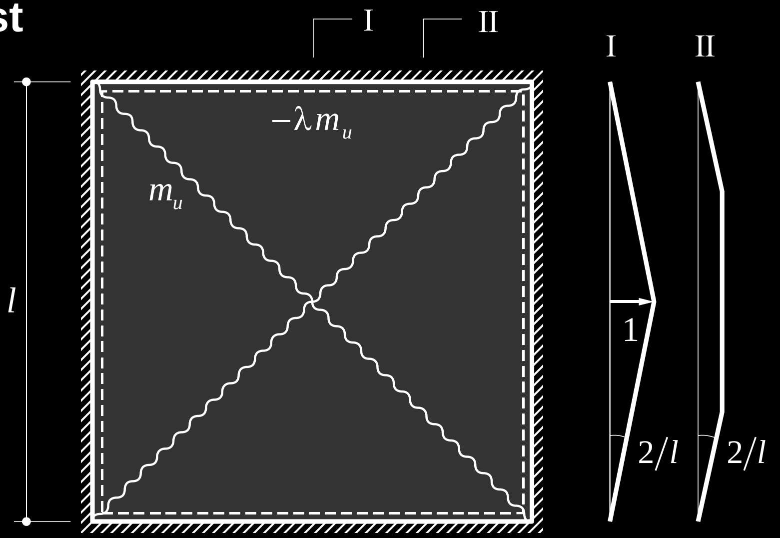
Vergleich:

Traglast für Mechanismen gemäss Bild (a) und (b) für verschiedene Werte von λ_i und λ_e				
$\lambda = \frac{m_u'}{m_u}$ λ_e	λ_i	Traglast Q_u/m_u für Mechanismus nach (a)	(b)	Lagerung und Bewehrungslayout
0	0	8	6.28	aufgelagert, ohne obere Bewehrung
1	0	11.31	10.28	aufgelagert, mit oberer Bewehrung
1	1	16	12.56	eingespannt, mit oberer Bewehrung

→ Fächermechanismen massgebend

Platten – Bruchmechanismen

Eingespannte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast

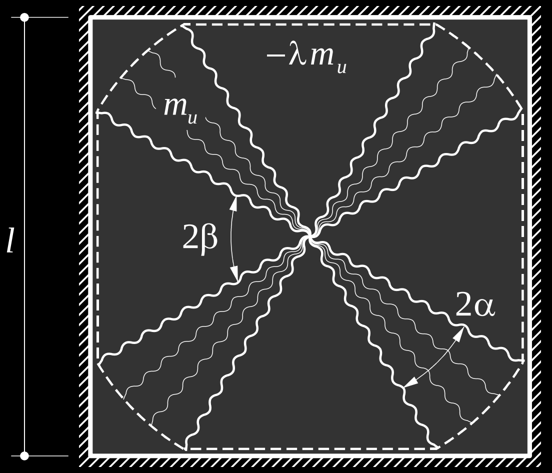


$$m_{ux} = m_{uy} = m_u$$

$$W = \frac{ql^2}{3}\ ^{(*)}$$

$$D = 4 \cdot l \cdot \frac{2}{l} \cdot m_u + 4 \cdot l \cdot \frac{2}{l} \cdot m'_u$$

$$\boxed{q_u \le 24 \frac{m_u}{l^2}(1+\lambda)}$$



$$\frac{W}{8} = q\left[\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \tan\beta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{l\alpha}{4\cos\beta} \cdot \frac{1}{3}\right] = \frac{ql^2}{24}\left[\tan\beta + \frac{\alpha}{\cos^2\beta}\right]$$

$$\frac{D}{8} = m_u(1+\lambda)\alpha + m_u(1+\lambda) \cdot \frac{2}{l} \cdot \frac{l}{2}\tan\beta = m_u(1+\lambda)(\alpha + \tan\beta)$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha \qquad \alpha_{opt} = 14.3°$$

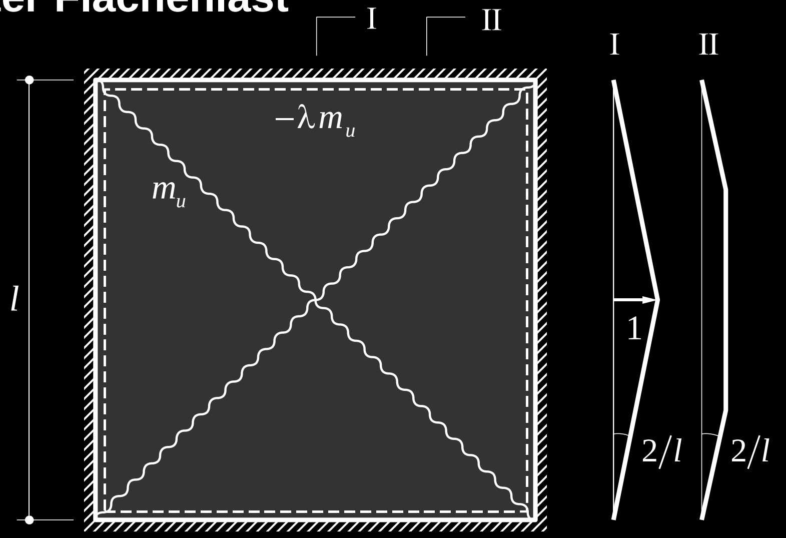
$$\boxed{q_u \le 21.75 \frac{m_u}{l^2}(1+\lambda)}$$

NB: vollständige Lösung (Fox, 1972): $\boxed{q_u = 21.425 \frac{m_u}{l^2}(1+\lambda)}$

(*) Druckfehler in [5], hier korrekt

Platten – Bruchmechanismen

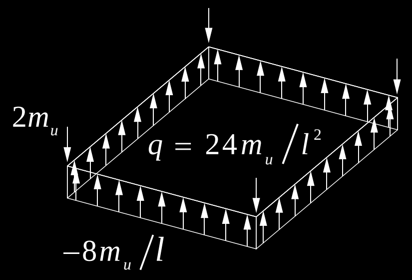
Einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast



Der Pyramidenmechanismus ergibt bei einfacher Lagerung (Ränder frei drehbar) die Traglast

$$\boxed{q_u \le 24 m_u / l^2}$$

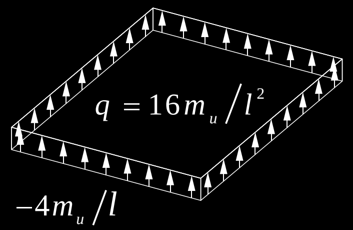
Diese stimmt mit dem unteren Grenzwert aus dem Momentenfeld für diesen Fall überein, sofern die Ecken nach unten gehalten sind und die negativen Biegewiderstände $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$ in den Eckbereichen vorhanden sind
$\rightarrow$ vollständige Lösung ('=' statt ≤).



- gleichmässig verteilte Flächenlast
- umfanggelagert, Ecken gehalten

Bei fehlender oberer Bewehrung wird der Fächermechanismus massgebend, und mit dem entsprechenden unteren Grenzwert gemäss Momentenfeldern II resultiert die Eingabelung:

$$\boxed{16 m_u / l^2 \le q_u \le 21.425 m_u / l^2}$$



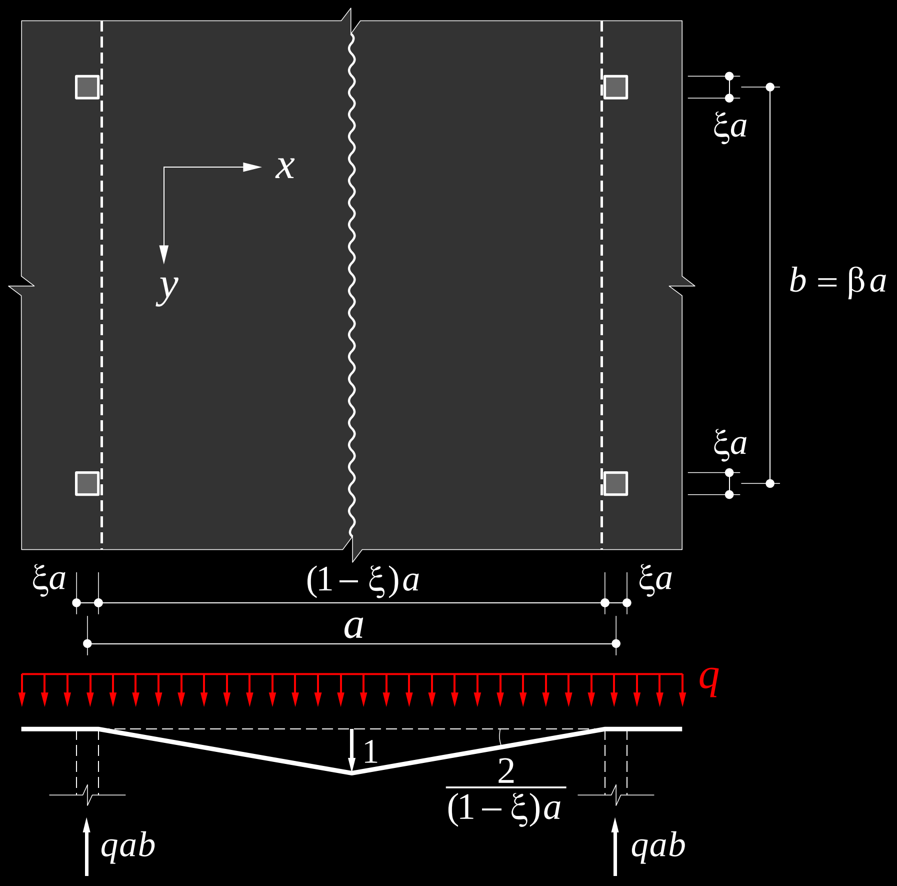
- gleichmässig verteilte Flächenlast
- umfanggelagert, Ecken nicht gehalten

Platten – Bruchmechanismen

Unendlich ausgedehnte Flachdecke unter gleichmässiger Last – Linienmechanismus

Bei nicht abgestufter Bewehrung (m_{ux} über Feldbreite b konstant) erhält man für die x-Richtung den oberen Grenzwert für die Traglast (W und D alles pro Einheitsbreite in y-Richtung):

$$W = \frac{1}{2} \cdot q \cdot (1-\xi) a \qquad D = 2 \cdot m_u (1+\lambda) \cdot \frac{2}{(1-\xi) a} \qquad \boxed{q_u \leq \frac{8 m_u (1+\lambda)}{a^2 (1-\xi)^2}}$$



Bei abgestufter Bewehrung ist anstelle von m_u der Mittelwert des Biegewiderstands einzusetzen (Integral von m_{ux} über Feldbreite b respektive *von* m_{uy} über a):

$$q_u \leq \frac{8}{a^2 (1-\xi)^2} \cdot \frac{\int_b (m_{xu} + m'_{xu})\, dy}{b} \qquad q_u \leq \frac{8}{b^2 (1-\xi a / b)^2} \cdot \frac{\int_a (m_{yu} + m'_{yu})\, dx}{a}$$

wobei der kleinere Wert massgebend wird.

Das Resultat entspricht in Richtung x resp. y tragenden, in Stützenachsen (resp. parallel dazu am Stützenrand) senkrecht zur betrachteten Richtung liniengelagerten Plattenstreifen unter voller Belastung q_u

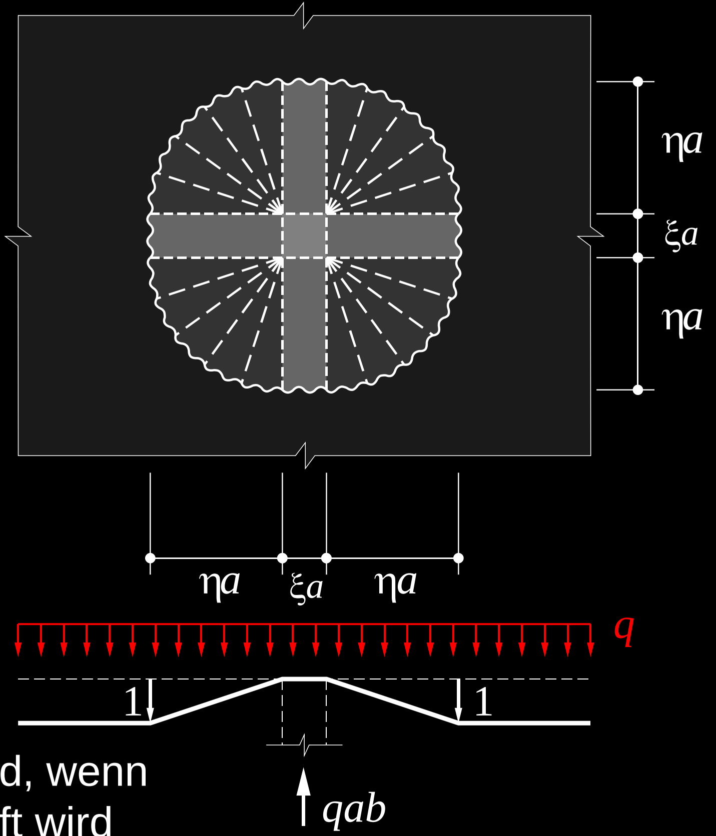
→ bei punktgestützten Platten ist pro Richtung die volle Last abzutragen!

Platten – Bruchmechanismen

Unendlich ausgedehnte Flachdecke unter gleichmässiger Last – Fächermechanismus

$$W = q \cdot a \cdot \beta a \cdot 1 - q \cdot (\xi a)^2 \cdot 1 - 4\frac{q \cdot \xi a \cdot \eta a}{2} - \frac{1}{3} \cdot q \cdot \pi (\eta a)^2 \qquad D = 4 \cdot m_u (1+\lambda) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\xi a}{\eta a}\right)$$

$$q_u \leq \frac{2m_u(1+\lambda)(\pi + 2\xi/\eta)}{a^2\left(\beta - \xi^2 - 2\xi\eta - \pi\eta^2/3\right)}$$



Minimieren nach η, $dq/d\eta = 0$ liefert $\frac{\pi^2\eta^3}{3} + 2\pi\xi\eta^2 + 4\xi^2\eta - \xi\left(\beta - \xi^2\right) = 0$

→ optimales η bei gegebener Geometrie (β, ξ).

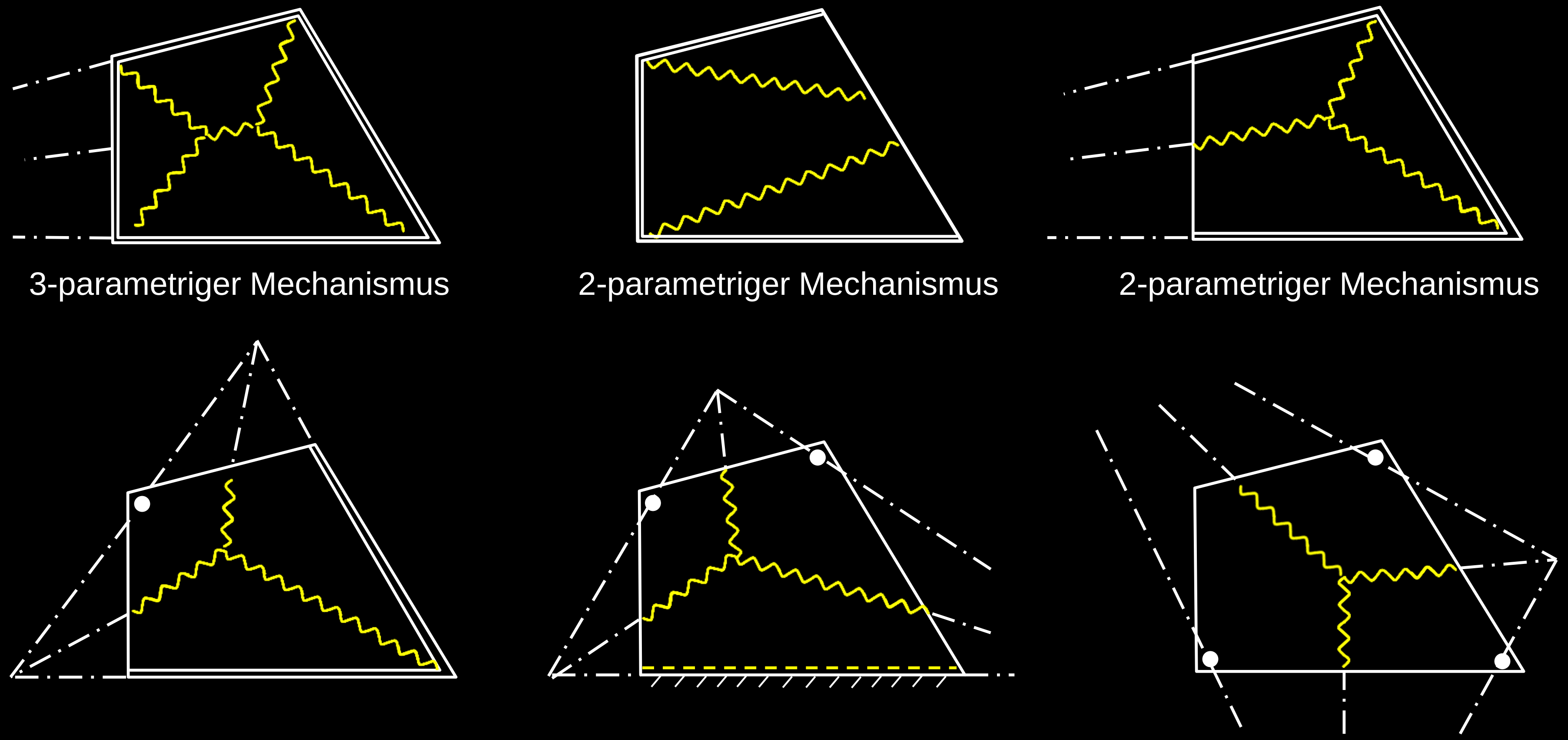
Vergleich der Mechanismen für verschiedene ξ:

ξ	η	$qa^2/[m_u(1+\lambda)]$ (a) Linien	(b) Fächer
0	0	8	6.28
0.04	0.2045	8.68	7.53
0.08	0.2387	9.45	8.51
0.12	0.255	10.33	9.54
0.16	0.2627	11.34	10.66

→ Linienmechanismus nur massgebend, wenn Bewehrung in Querrichtung abgestuft wird

→ Abstufung sinnvoll (z. B. nach Methode der stellvertretenden Rahmen), damit Stützen-mechanismen nicht massgebend werden

Platten – Bruchmechanismen



3-parametriger Mechanismus | 2-parametriger Mechanismus | 2-parametriger Mechanismus

3-parametriger Mechanismus | 4-parametriger Mechanismus | 5-parametriger Mechanismus

Die Fliessgelenklinien bzw. deren Verlängerungen gehen durch den Schnittpunkt der Rotationsachsen der in den Fliessgelenklinien verbundenen, gegenseitig rotierenden, starren Plattenteile.

Platten – Bruchmechanismen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht

- Elastische Plattentheorie
  - Lösung der Platten-differentialgleichung
  - Approximative Lösungen mit Energieverfahren
  - Methode der Finiten Elemente
- Plastische Plattentheorie
  - Statische Methode der Plastizitätstheorie
    - Methode der Finiten Elemente
    - Momentenansätze
    - Methode der stell-vertretenden Rahmen
    - Streifenmethode
      - einfach
      - erweitert
  - Kinematische Methode der Plastizitätstheorie
    - Fliessgelenklinienmethode