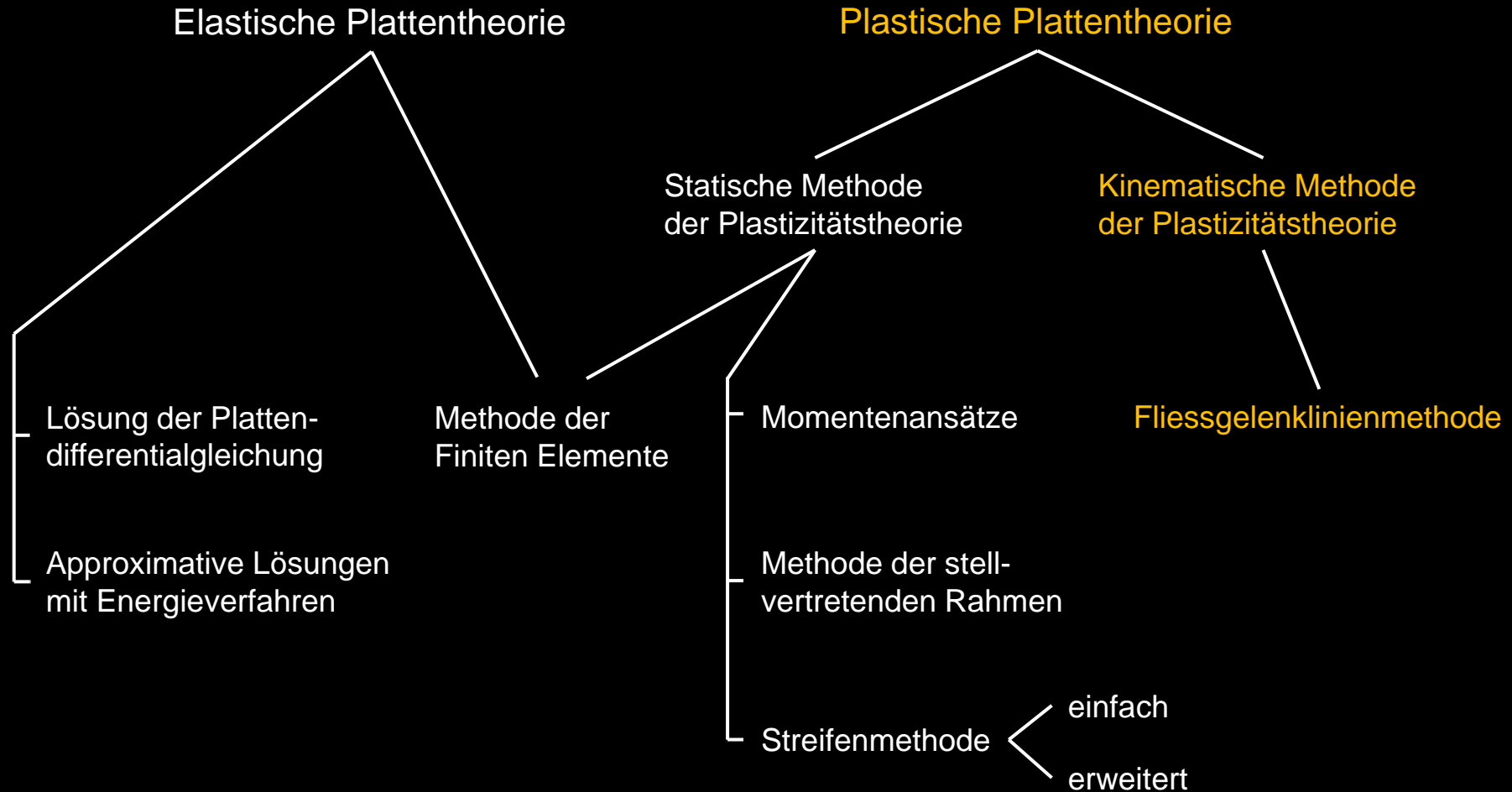


Platten – Bruchmechanismen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht



Platten – Bruchmechanismen

Fliessgelenklinienmethode

- Die Fliessgelenklinienmethode (Johansen, 1962) ist eine Anwendung der **kinematischen Methode der Plastizitätstheorie**.
- Vorgehen: **kinematisch zulässigen Mechanismus** annehmen, **Arbeit der äusseren Kräfte** mit **Dissipationsarbeit** gleichsetzen → **oberer Grenzwert für die Traglast**.
- In der Regel sind verschiedene Bruchmechanismen zu untersuchen, für jeden Mechanismus ist die Traglast bezüglich allfälliger freier Parameter zu minimieren.
- Starre Teile der Mechanismen in der Regel hochgradig innerlich statisch unbestimmt → im Gegensatz zu Stabtragwerken gelingt die **Plastizitätskontrolle** ($m \leq m_u$) **nur in einfachen Spezialfällen**.

Platten – Bruchmechanismen

Fliessgelenklinienmethode

- Im Vergleich mit Lösungen nach elastischer Plattentheorie oder auch Gleichgewichtslösungen recht einfach anzuwenden, insbesondere bei der **Überprüfung bestehender Tragwerke** → kinematische Methode der Plastizitätstheorie hat bei Platten eine weitaus grössere Verbreitung erlangt als für Balken und Scheiben (vor allem in Skandinavien sehr verbreitet, auch für die Bemessung).
- Mit der sogenannten «Gleichgewichtsmethode» (Ingerslev, 1923) kann der analytisch oft aufwendige Minimierungsprozess beim Vorgehen nach der Fliessgelenklinienmethode umgangen werden. Dabei wird Gleichgewicht an den einzelnen, starren Plattenteilen eines Mechanismus formuliert, wobei sogenannte «Knotenkräfte» zu berücksichtigen sind. Die Methode ist jedoch nur beschränkt gültig, und der Minimierungsprozess kann heute mit numerischen Verfahren problemlos durchgeführt werden. Daher wird darauf nicht eingegangen.

Platten – Bruchmechanismen

Fließgelenklinienmethode – Dissipation in Fließgelenklinie

- Platte, orthogonal bewehrt (x, y)
- Fließgelenklinie in beliebiger Richtung t :
Unter Vernachlässigung von Membrankräften ($n_n = 0$) gilt:

$$dD = m_n \dot{\omega}_n dt$$

- Einsetzen von Beziehung:

$$m_{nu} = m_{xu} \cos^2 \varphi + m_{yu} \sin^2 \varphi$$

- ergibt Dissipationsarbeit:

$$dD = (m_{xu} \cos^2 \varphi + m_{yu} \sin^2 \varphi) \dot{\omega}_n dt$$

- mit Rotationsgeschwindigkeiten um die y - resp. x -Achse:

$$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_n \cos \varphi, \quad \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_n \sin \varphi$$

$$dy = dt \cos \varphi, \quad dx = dt \sin \varphi$$

→ **Dissipationsarbeit:**

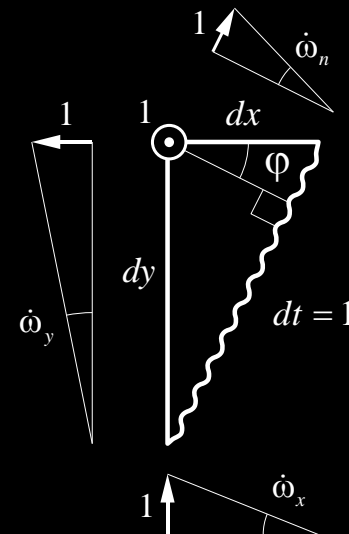
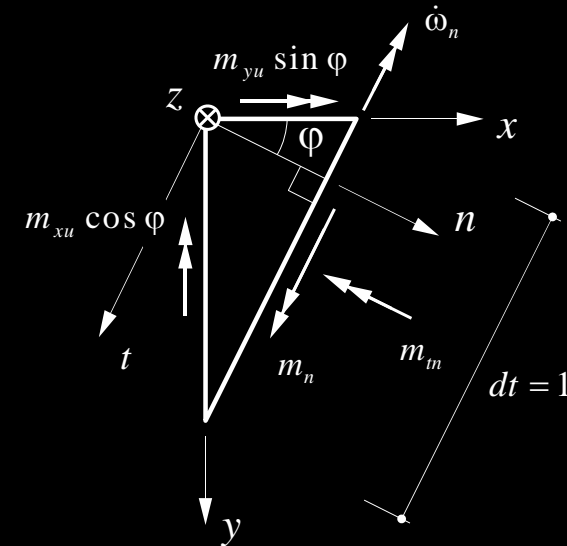
$$dD = m_{xu} \dot{\omega}_x dy + m_{yu} \dot{\omega}_y dx$$

= Summe der Produkte in den beiden Bewehrungsrichtungen von:

Biege-
widerstand

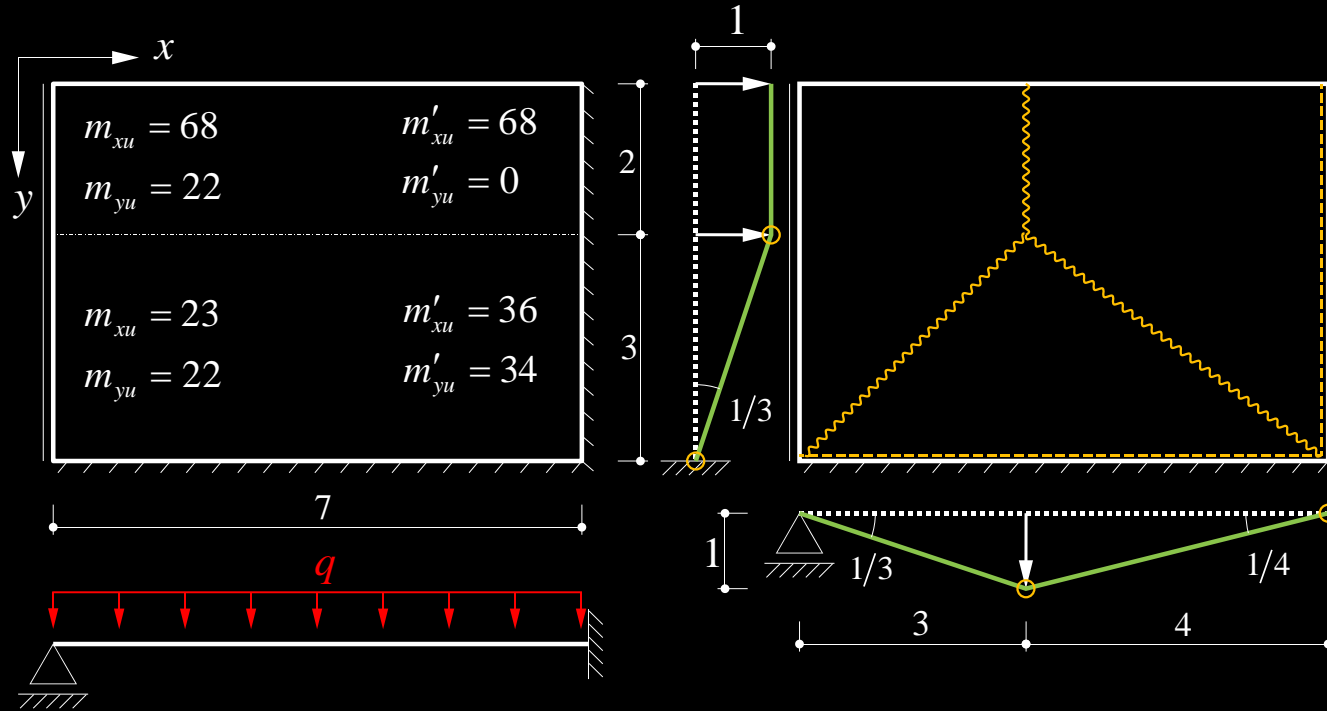
• Rotationsgeschwindigkeit um die entsprechende Achse

• auf diese Achse projizierte Länge der Fließgelenklinie



Platten – Bruchmechanismen

Beispiel Einheiten [m, kNm/m]



Signaturen für Fließgelenklinien
(n = Richtung der Randnormalen)

~~~~~ positive Fließgelenklinie,  
 $m_n = m_{nu}$

----- negative Fließgelenklinie,  
 $m_n = -m_{nu}' = \lambda m_{nu}$

$$\lambda = m_u' / m_u$$

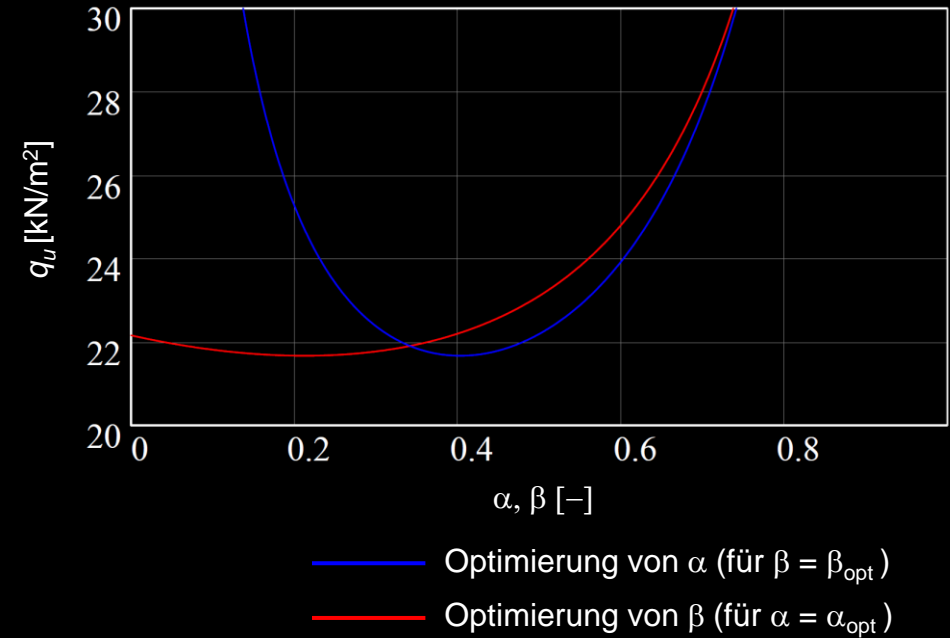
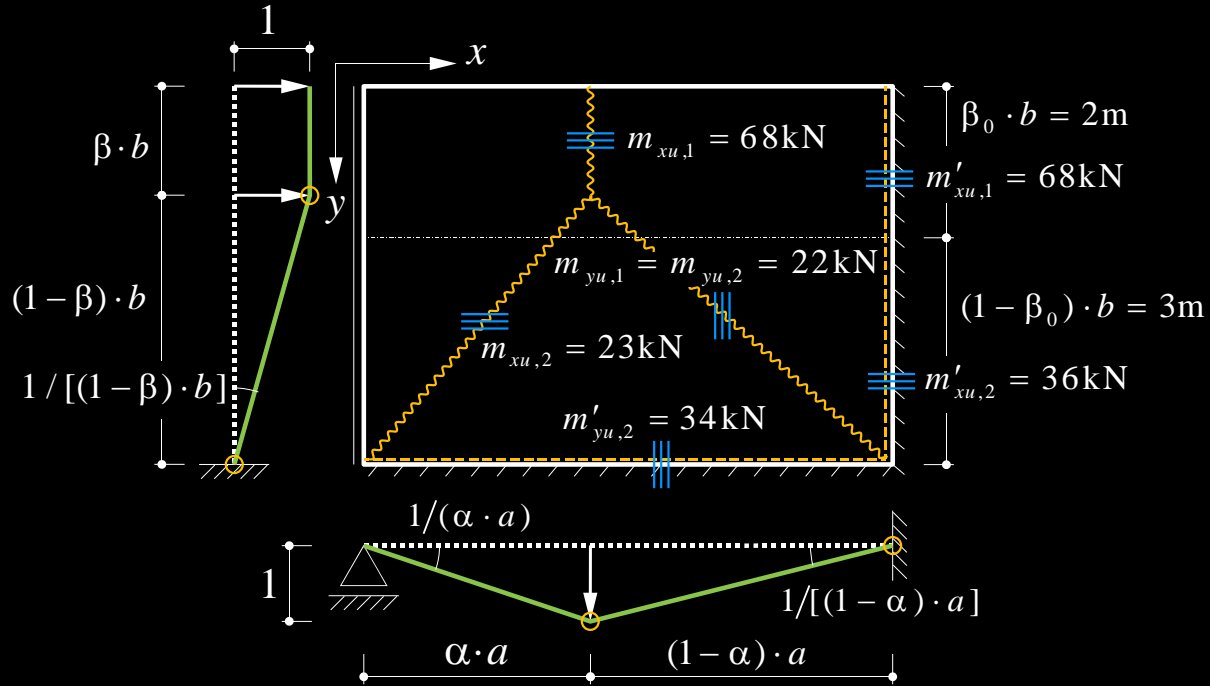
Arbeit der äusseren Kräfte  $W = (\text{Pyramide} \quad \text{+ Prisma} \quad ) \cdot q = \left( 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \right) q = 14q$

Dissipationsarbeit  $D = 68 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot 2 + 68 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 23 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot 3 + 36 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + 22 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7 + 34 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7 = 311.25$

$$W = D \rightarrow q_u \leq 22.2 \text{ kN/m}^2$$

# Platten – Bruchmechanismen

## Beispiel: Optimierung der Fließgelenklinien-Geometrie



$$D = m_{xu,1} \left( \frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{(1-\alpha)a} \right) \beta_0 b + m'_{xu,1} \frac{1}{(1-\alpha)a} \beta_0 b + m_{xu,2} \left( \frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{(1-\alpha)a} \right) (1-\beta_0) b + m'_{xu,2} \frac{1}{(1-\alpha)a} (1-\beta_0) b + m_{yu,2} \frac{1}{(1-\beta)b} a + m'_{yu,2} \frac{1}{(1-\beta)b} a$$

$$W = \left[ (1-\beta) \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{3} + \beta \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot q = a \cdot b \cdot \frac{\beta+2}{6} \cdot q \quad \rightarrow \quad \frac{\partial q_u}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial q_u}{\partial \beta} = 0 \quad \rightarrow \quad q_{u,\text{opt}} (\alpha \cdot a = 2.823 \text{ m}; \beta \cdot b = 1.062 \text{ m}) = 21.7 \text{ kPa}$$

**Fazit: Trotz relativ grosser Abweichung in der Geometrie ist die Traglast nur unwesentlich anders (flache Minima)!**

# Platten – Bruchmechanismen

## Fließgelenklinienmethode – Fächermechanismen

- Platte, isotrop bewehrt ( $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ )
- Hauptkrümmungsradius im Kegelelement

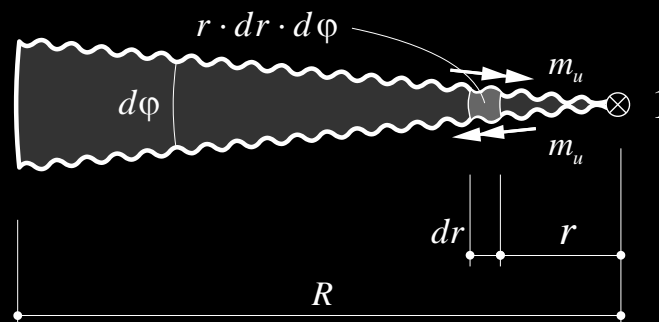
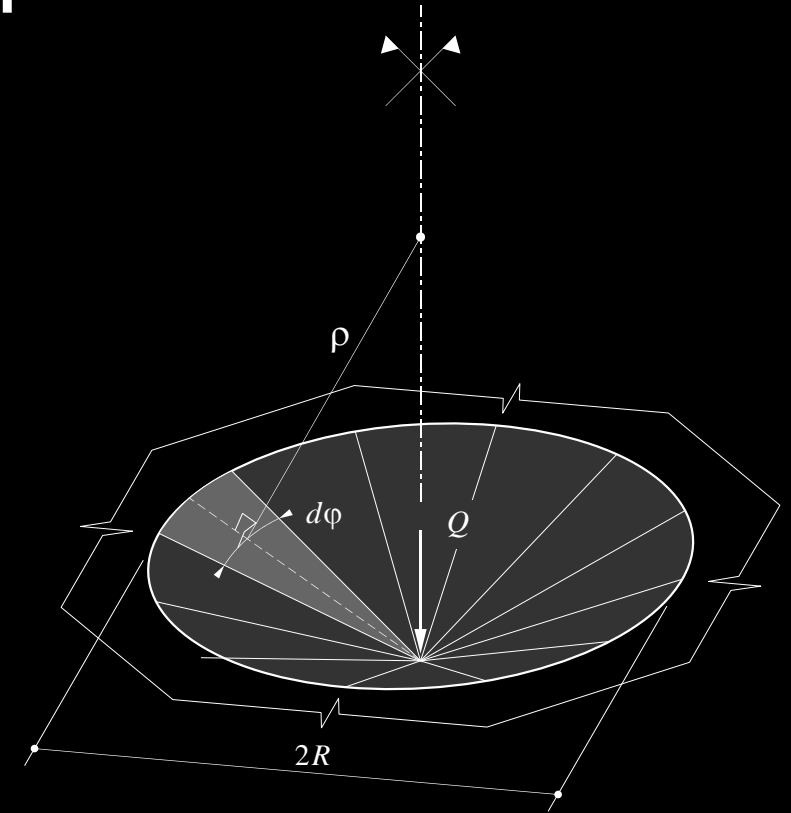
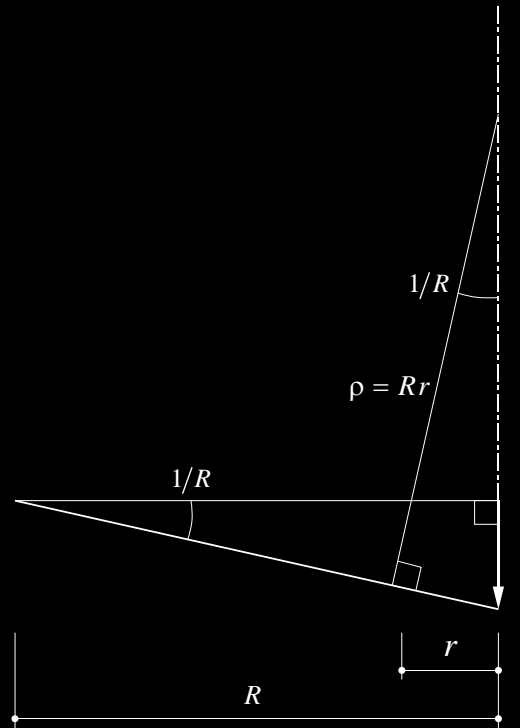
aus  $\rho = Rr$       $\frac{r}{\rho} = \frac{1}{R}$

→ Hauptkrümmung      $\chi_1 = \rho^{-1} = (Rr)^{-1}$

→ **Rotation**      $\dot{\omega}_\varphi = \chi_1 r d\varphi$

- **Dissipationsarbeit** pro Flächenelement im Fächer:

$$dD = m_u \dot{\omega}_\varphi dr = m_u \frac{1}{\rho} r d\varphi dr$$



# Platten – Bruchmechanismen

## Fließgelenklinienmethode – Fächermechanismen

- Dissipationsarbeit pro Flächenelement im Fächer:

$$dD = m_u \dot{\omega}_\varphi dr = m_u \frac{1}{\rho} r d\varphi dr$$

Dissipationsarbeit im Inneren eines Fächers mit Öffnungswinkel  $\beta$ :

$$D = \left\{ \int_0^\beta \frac{1}{R(\varphi)} \int_0^{R(\varphi)} m_u(r, \varphi) dr \right\} d\varphi \quad \text{mit} \quad \rho = Rr$$

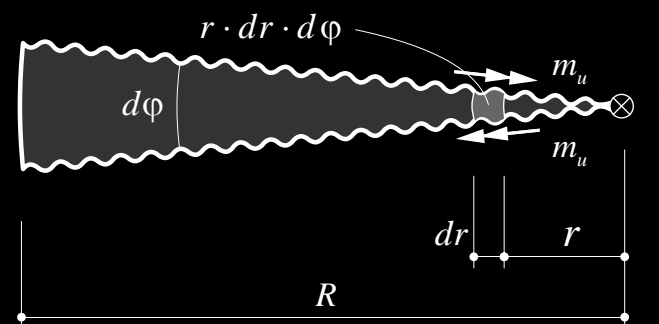
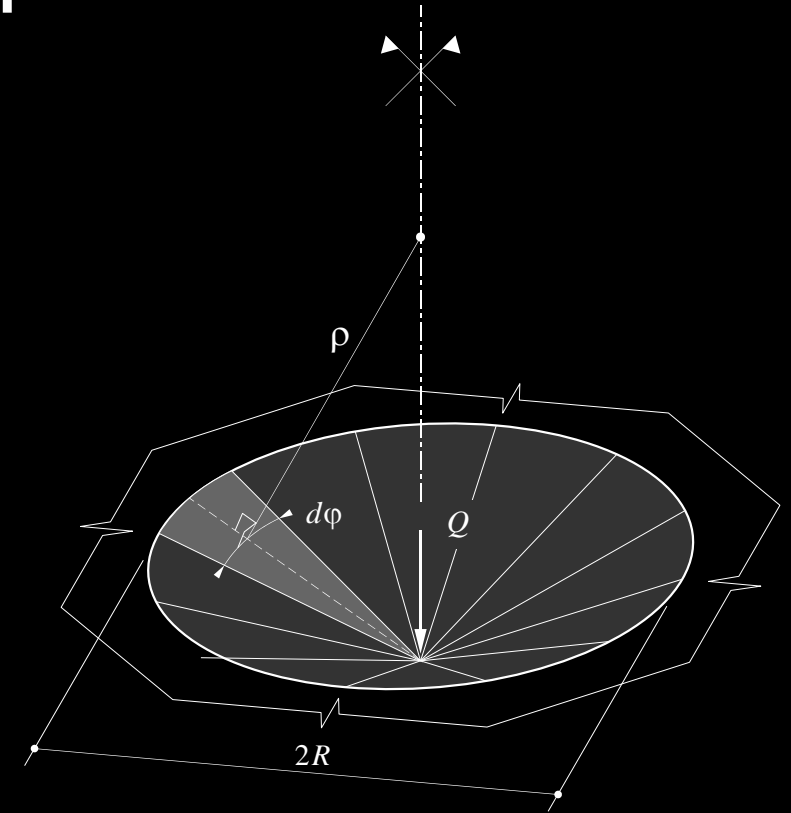
wobei  $m_u$  und  $R$  und allgemeine Funktionen des Winkels  $\varphi$  sein können

- Dissipation entlang der Fächerberandung (unabhängig von  $R$ ):

$$D = \int_0^\beta \frac{1}{R} m'_u R d\varphi = \int_0^\beta m'_u(r, \varphi) d\varphi$$

→ Dissipationsarbeit im Fächer mit Öffnungswinkel  $\beta$  für konstantes  $m_u$  und  $m'_u = \lambda m_u$ :

$$D = \beta(m_u + m'_u) = \beta m_u (1 + \lambda)$$





# Platten – Bruchmechanismen

## Einzellast auf Platte beliebiger Geometrie

$$\left. \begin{aligned} W &= Q \cdot 1 \\ D &= 2\pi m_u (1 + \lambda) \end{aligned} \right\} Q_u \leq 2\pi (m_u + m'_u) = 2\pi m_u (1 + \lambda)$$

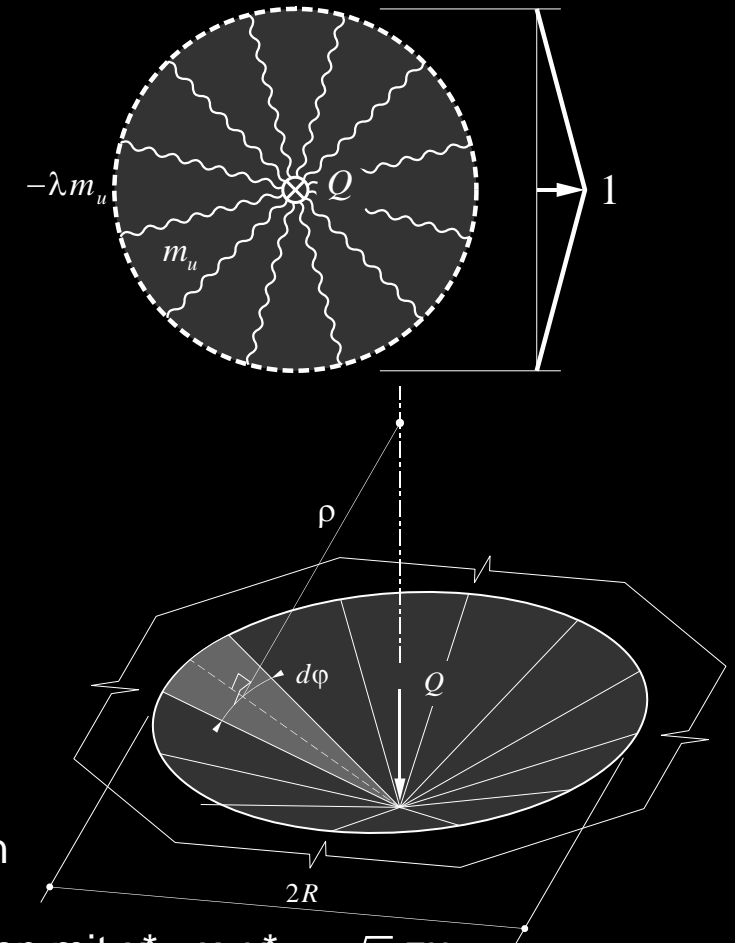
Gleiche Traglast wie mit Momentenfeld für zentrisch gestützte Kreisplatte unter gleichmässiger Belastung, unabhängig von R → **vollständige Lösung** für eine Kreisplatte; für andere Fälle oberer Grenzwert.

Durch Anwendung des **Affinitätstheorems** (\*) erhält man daraus für eine orthotrop bewehrte Platte beliebiger Geometrie den **oberen Grenzwert**:

$$Q_u \leq 2\pi \left( \sqrt{m_{xu} m_{yu}} + \sqrt{m'_{xu} m'_{yu}} \right) = 2\pi \sqrt{m_{xu} m_{yu}} (1 + \lambda)$$

(\*) Eine für eine isotop bewehrte Platte mit Biegegewiderständen  $m_u, m'_u$  unter Belastungen  $q, Q$  in den Koordinaten  $(x, y)$  gültige Lösung kann auf eine orthotrop bewehrte Platte mit  $m_{yu} = m \cdot m_{xu} = m \cdot m_u, m'_{yu} = m \cdot m'_{xu} = m \cdot m'_u$  übertragen werden. Dabei sind die Koordinaten mit  $x^* = x, y^* = y\sqrt{\mu}$  zu transformieren, die Lasten mit  $q^* = q$  und  $Q^* = Q\sqrt{\mu}$

(praktischer Nutzen begrenzt, beispielsweise entspricht einer isotrop bewehrten Quadratplatte eine orthotrop bewehrte Platte mit stärkerer Bewehrung in der längeren Richtung, was nicht sinnvoll ist).



# Platten – Bruchmechanismen

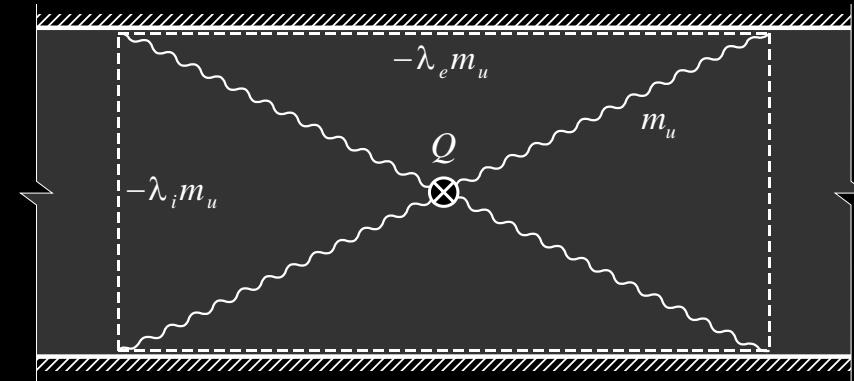
## Einzellast auf Plattenstreifen

Liefert  
Linien-/Pyramidenmechanismus  
oder  
Fächermechanismus  
den tieferen Grenzwert?

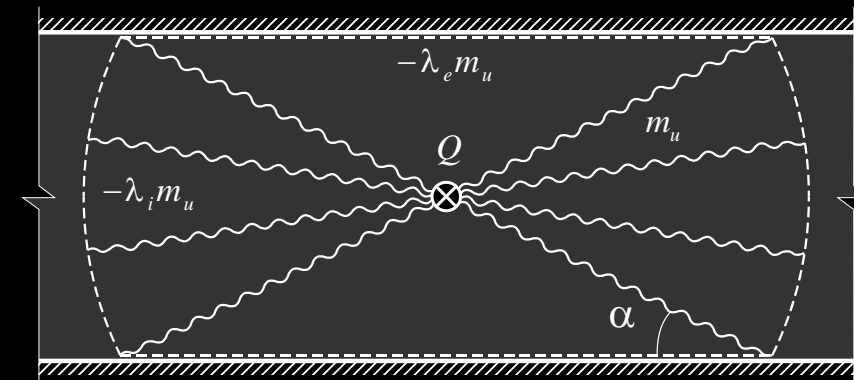
Linien-/Pyramidenmechanismus

Fächermechanismus

(a)

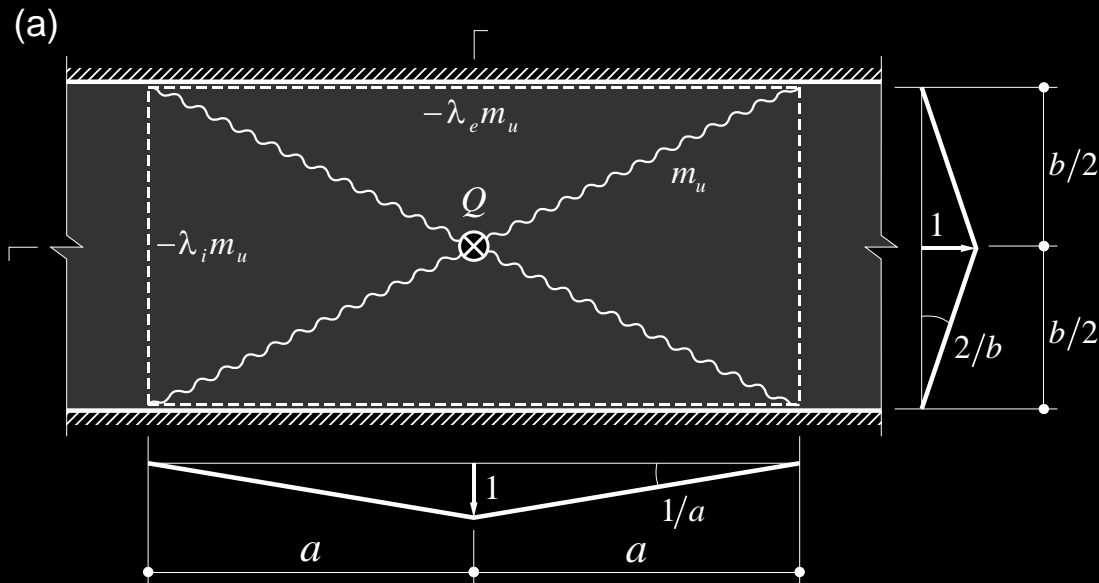


(b)



# Platten – Bruchmechanismen

## Einzellast auf Plattenstreifen – Linien-/Pyramidenmechanismus



$$Q_u \leq 8m_u \sqrt{1+\lambda_i} \sqrt{1+\lambda_e}$$

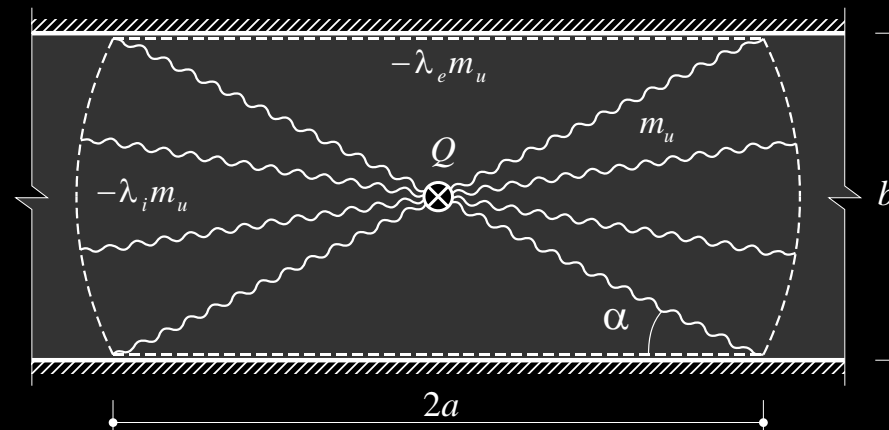
$$W = Q \cdot 1$$

$$D = 2 \cdot m_u \cdot \left( 2a \cdot \frac{2}{b} + b \cdot \frac{1}{a} \right) + \lambda_e \cdot m_u \cdot 2 \cdot 2a \cdot \frac{2}{b} + \lambda_i \cdot m_u \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{1}{a} \left. \vphantom{D} \right\} Q_u \leq 2m_u \left( \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + \lambda_e \frac{4a}{b} + \lambda_i \frac{b}{a} \right)$$

$$\frac{dQ}{da} = 2m_u \left[ \frac{4}{b}(1+\lambda_e) - \frac{b}{a^2}(1+\lambda_i) \right] \longrightarrow a_{opt} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1+\lambda_i}{1+\lambda_e}}$$

# Platten – Bruchmechanismen

## Einzellast auf Plattenstreifen – Fächermechanismus



$$\frac{2a}{b} = \cot \alpha$$

$$W = Q \cdot 1$$

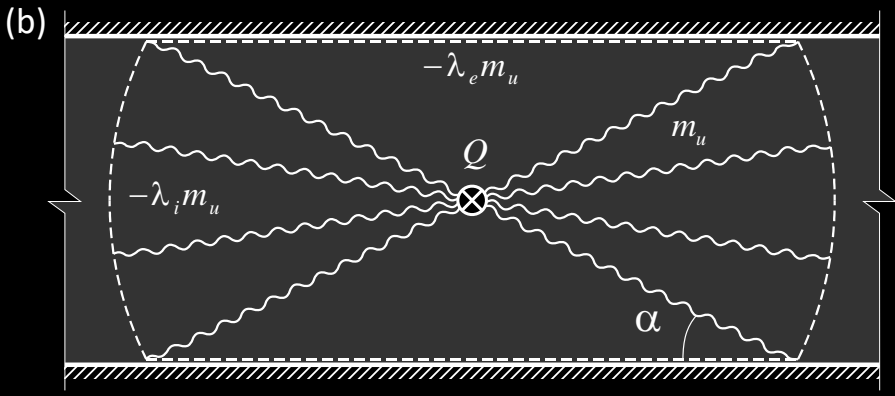
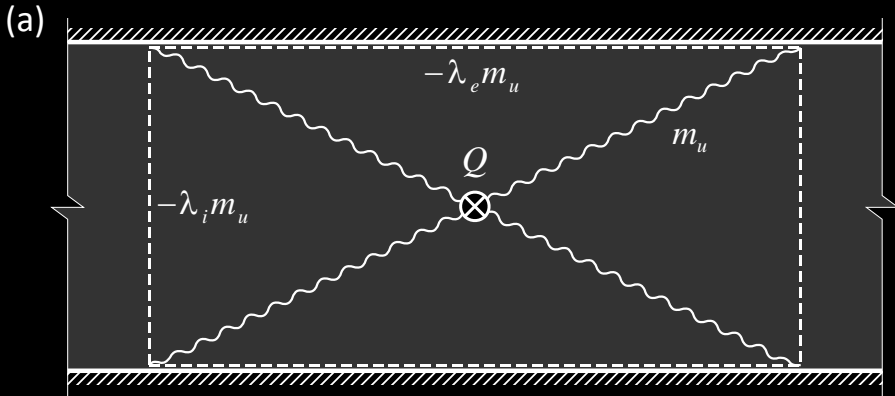
$$D = m_u (1 + \lambda_i) \cdot 2 \cdot 2\alpha + m_u (1 + \lambda_e) \cdot 2 \cdot 2a \frac{2}{b}$$

$$\sin^2 \alpha_{opt} = \frac{1 + \lambda_e}{1 + \lambda_i}$$

$$Q_u \leq 4m_u \left[ \alpha (1 + \lambda_i) + \cot \alpha (1 + \lambda_e) \right]$$

# Platten – Bruchmechanismen

## Einzellast auf Plattenstreifen



Traglast für Mechanismen gemäss Bild (a) und (b) für verschiedene Werte von  $\lambda_i$  und  $\lambda_e$

| $\lambda = \frac{m_u'}{m_u}$ |             | Traglast $Q_u/m_u$ für Mechanismus nach |       | Lagerung und Bewehrungslayout     |
|------------------------------|-------------|-----------------------------------------|-------|-----------------------------------|
| $\lambda_e$                  | $\lambda_i$ | (a)                                     | (b)   |                                   |
| 0                            | 0           | 8                                       | 6.28  | aufgelagert, ohne obere Bewehrung |
| 1                            | 0           | 11.31                                   | 10.28 | aufgelagert, mit oberer Bewehrung |
| 1                            | 1           | 16                                      | 12.56 | eingespannt, mit oberer Bewehrung |

Vergleich:

.....> Fächermechanismen massgebend

# Platten – Bruchmechanismen

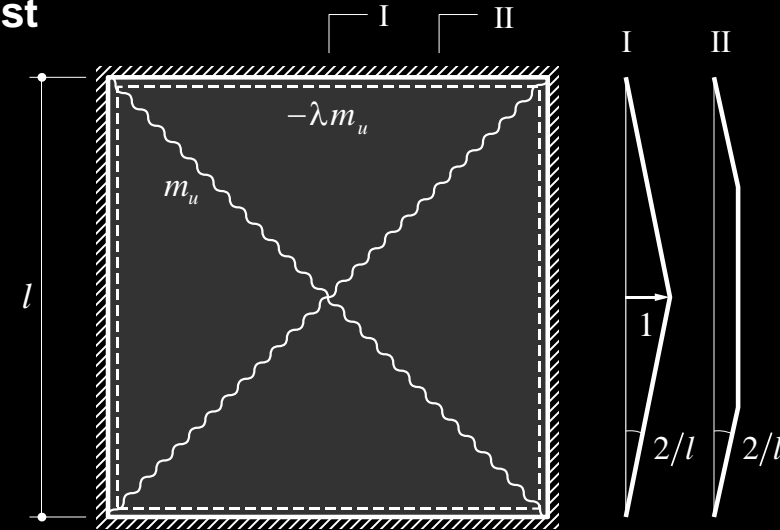
## Eingespannte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast

$$m_{ux} = m_{uy} = m_u$$

$$W = \frac{ql^2}{3}^{(*)}$$

$$D = 4 \cdot l \cdot \frac{2}{l} \cdot m_u + 4 \cdot l \cdot \frac{2}{l} \cdot m'_u$$

$$q_u \leq 24 \frac{m_u}{l^2} (1 + \lambda)$$

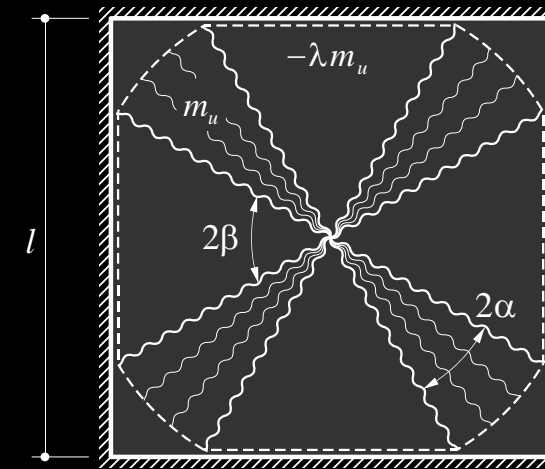


$$\frac{W}{8} = q \left[ \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \tan \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{l \alpha}{4 \cos \beta} \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{ql^2}{24} \left[ \tan \beta + \frac{\alpha}{\cos^2 \beta} \right]$$

$$\frac{D}{8} = m_u (1 + \lambda) \alpha + m_u (1 + \lambda) \cdot \frac{2}{l} \cdot \frac{l}{2} \tan \beta = m_u (1 + \lambda) (\alpha + \tan \beta)$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha \quad \alpha_{opt} = 14.3^\circ$$

$$q_u \leq 21.75 \frac{m_u}{l^2} (1 + \lambda)$$



NB: vollständige Lösung (Fox, 1972):

$$q_u = 21.425 \frac{m_u}{l^2} (1 + \lambda)$$

(\*) Druckfehler in [5], hier korrekt

# Platten – Bruchmechanismen

## Einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast

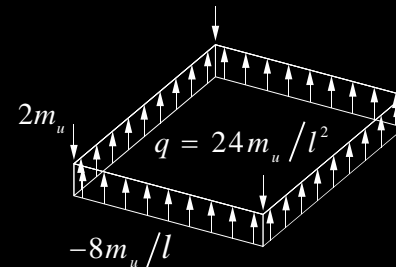
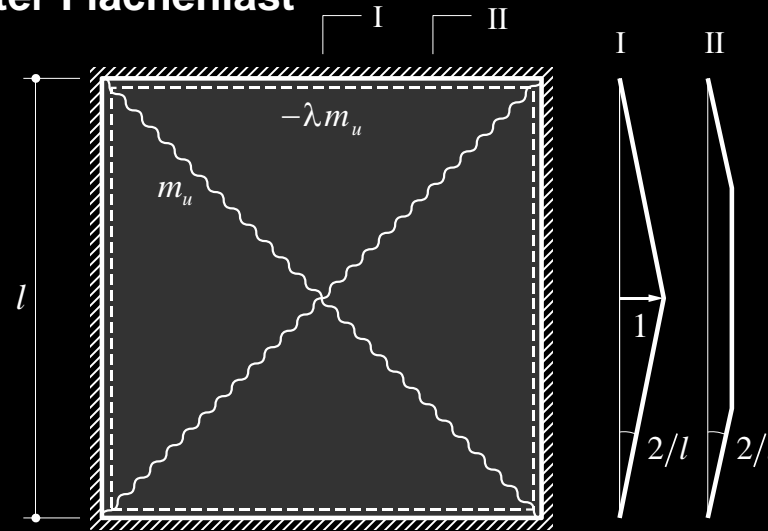
Der Pyramidenmechanismus ergibt bei einfacher Lagerung (Ränder frei drehbar) die Traglast

$$q_u \leq 24m_u / l^2$$

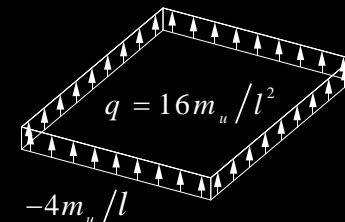
Diese stimmt mit dem unteren Grenzwert aus dem Momentenfeld für diesen Fall überein, sofern die Ecken nach unten gehalten sind und die negativen Biegegewiderstände  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  in den Eckbereichen vorhanden sind  
 → vollständige Lösung ('=' statt ≤).

Bei fehlender oberer Bewehrung wird der Fächermechanismus massgebend, und mit dem entsprechenden unteren Grenzwert gemäss Momentenfeldern II resultiert die Eingabelung:

$$16m_u / l^2 \leq q_u \leq 21.425m_u / l^2$$



- gleichmässig verteilte Flächenlast
- umfanggelagert, Ecken gehalten



- gleichmässig verteilte Flächenlast
- umfanggelagert, Ecken nicht gehalten

# Platten – Bruchmechanismen

## Unendlich ausgedehnte Flachdecke unter gleichmässiger Last – Linienmechanismus

Bei nicht abgestufter Bewehrung ( $m_{ux}$  über Feldbreite  $b$  konstant) erhält man für die  $x$ -Richtung den oberen Grenzwert für die Traglast ( $W$  und  $D$  alles pro Einheitsbreite in  $y$ -Richtung):

$$W = \frac{1}{2} \cdot q \cdot (1 - \xi) a \quad D = 2 \cdot m_u (1 + \lambda) \cdot \frac{2}{(1 - \xi) a} \quad q_u \leq \frac{8 m_u (1 + \lambda)}{a^2 (1 - \xi)^2}$$

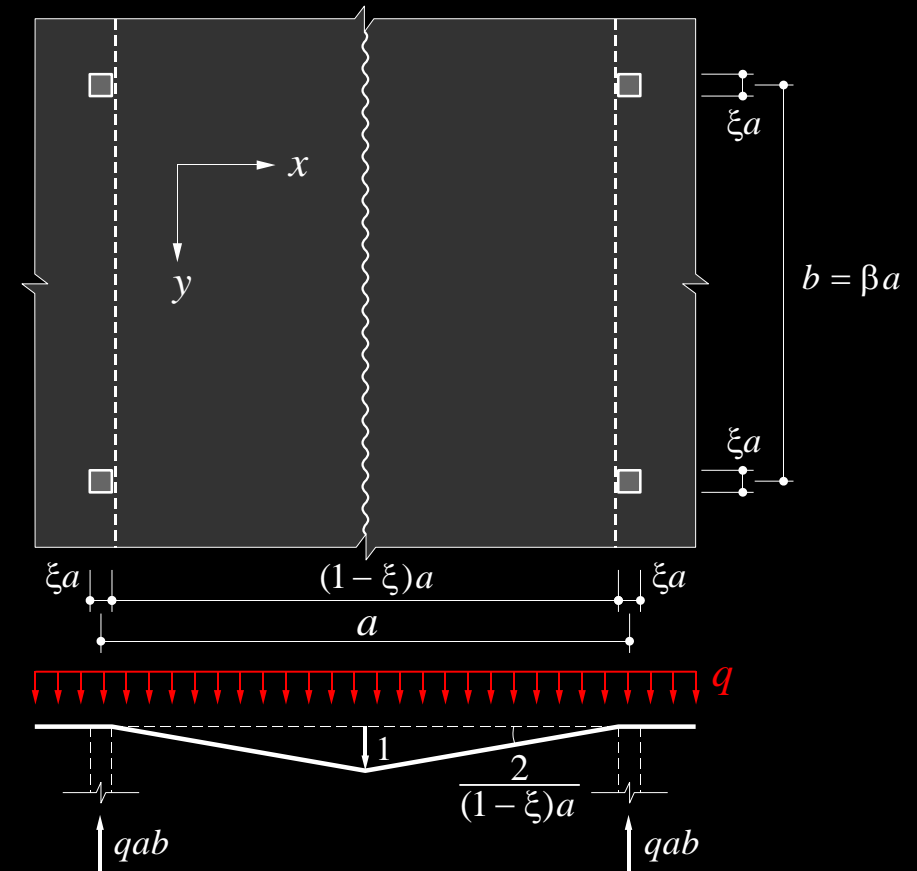
Bei abgestufter Bewehrung ist anstelle von  $m_u$  der Mittelwert des Biege widerstands einzusetzen (Integral von  $m_{ux}$  über Feldbreite  $b$  respektive von  $m_{uy}$  über  $a$ ):

$$q_u \leq \frac{8}{a^2 (1 - \xi)^2} \cdot \frac{\int_b (m_{xu} + m'_{xu}) dy}{b} \quad q_u \leq \frac{8}{b^2 (1 - \xi a / b)^2} \cdot \frac{\int_a (m_{yu} + m'_{yu}) dx}{a}$$

wobei der kleinere Wert massgebend wird.

Das Resultat entspricht in Richtung  $x$  resp.  $y$  tragenden, in Stützenachsen (resp. parallel dazu am Stützenrand) senkrecht zur betrachteten Richtung liniengelagerten Plattenstreifen unter voller Belastung  $q_u$

→ bei punktgestützten Platten ist pro Richtung die volle Last abzutragen!





# Platten – Bruchmechanismen

## Unendlich ausgedehnte Flachdecke unter gleichmässiger Last – Fächermechanismus

$$W = q \cdot a \cdot \beta a \cdot 1 - q \cdot (\xi a)^2 \cdot 1 - 4 \frac{q \cdot \xi a \cdot \eta a}{2} - \frac{1}{3} \cdot q \cdot \pi (\eta a)^2 \quad D = 4 \cdot m_u (1 + \lambda) \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\xi a}{\eta a} \right)$$

$$q_u \leq \frac{2m_u (1 + \lambda) (\pi + 2\xi / \eta)}{a^2 (\beta - \xi^2 - 2\xi\eta - \pi\eta^2 / 3)}$$

Minimieren nach  $\eta$ ,  $dq/d\eta = 0$  liefert  $\frac{\pi^2 \eta^3}{3} + 2\pi\xi\eta^2 + 4\xi^2\eta - \xi(\beta - \xi^2) = 0$

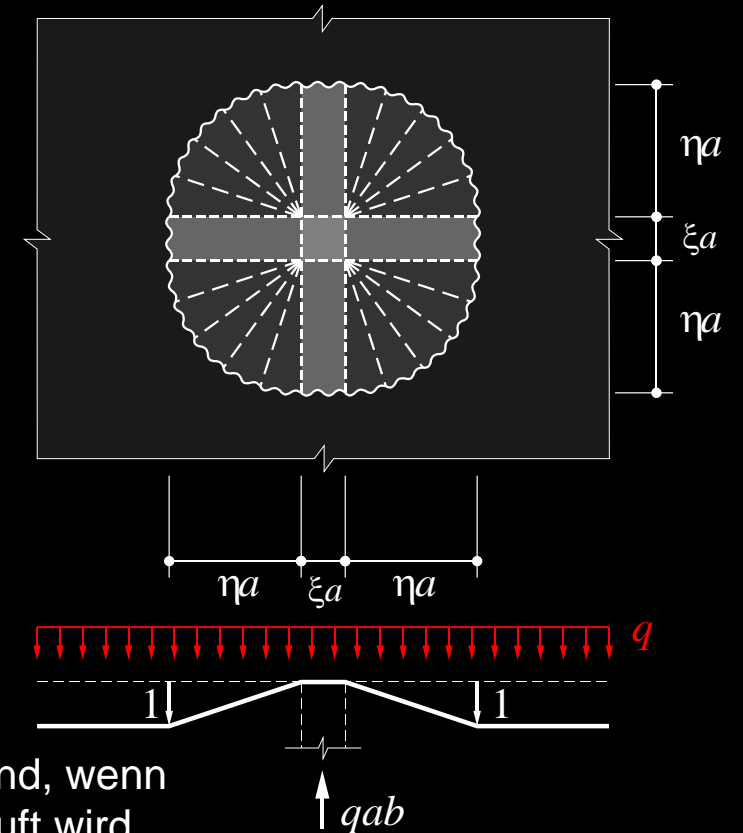
→ optimales  $\eta$  bei gegebener Geometrie ( $\beta$ ,  $\xi$ ).

Vergleich der Mechanismen für verschiedene  $\xi$ :

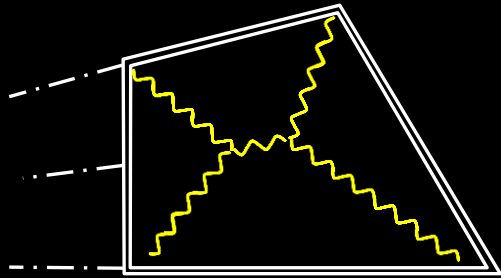
| $\xi$ | $\eta$ | $qa^2 / [m_u(1 + \lambda)]$ |            |
|-------|--------|-----------------------------|------------|
|       |        | (a) Linien                  | (b) Fächer |
| 0     | 0      | 8                           | 6.28       |
| 0.04  | 0.2045 | 8.68                        | 7.53       |
| 0.08  | 0.2387 | 9.45                        | 8.51       |
| 0.12  | 0.255  | 10.33                       | 9.54       |
| 0.16  | 0.2627 | 11.34                       | 10.66      |

→ Linienmechanismus nur massgebend, wenn Bewehrung in Querrichtung abgestuft wird

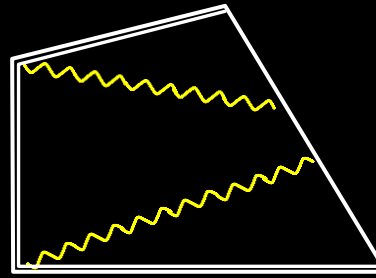
→ Abstufung sinnvoll (z. B. nach Methode der stellvertretenden Rahmen), damit Stützenmechanismen nicht massgebend werden



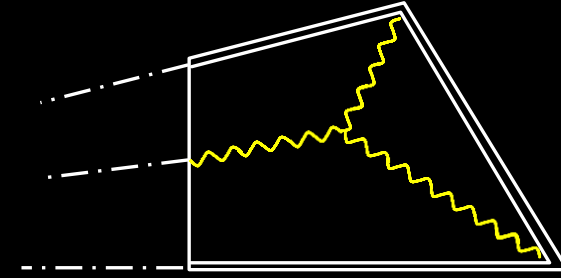
# Platten – Bruchmechanismen



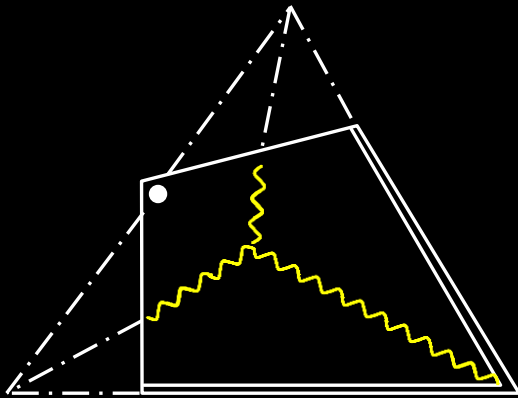
3-parametrischer Mechanismus



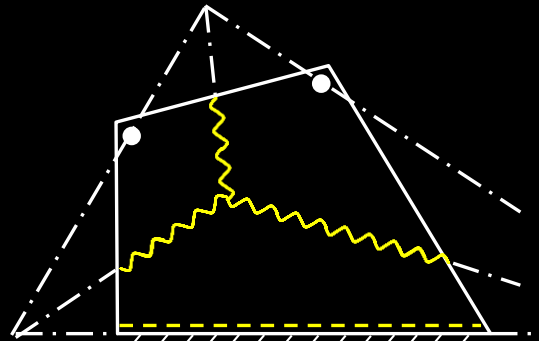
2-parametrischer Mechanismus



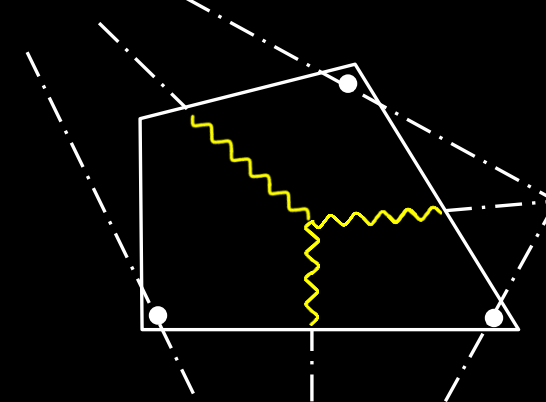
2-parametrischer Mechanismus



3-parametrischer Mechanismus



4-parametrischer Mechanismus



5-parametrischer Mechanismus

Die Fließgelenklinien bzw. deren Verlängerungen gehen durch den Schnittpunkt der Rotationsachsen der in den Fließgelenklinien verbundenen, gegenseitig rotierenden, starren Plattenteile.

# Platten – Bruchmechanismen

## Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht

