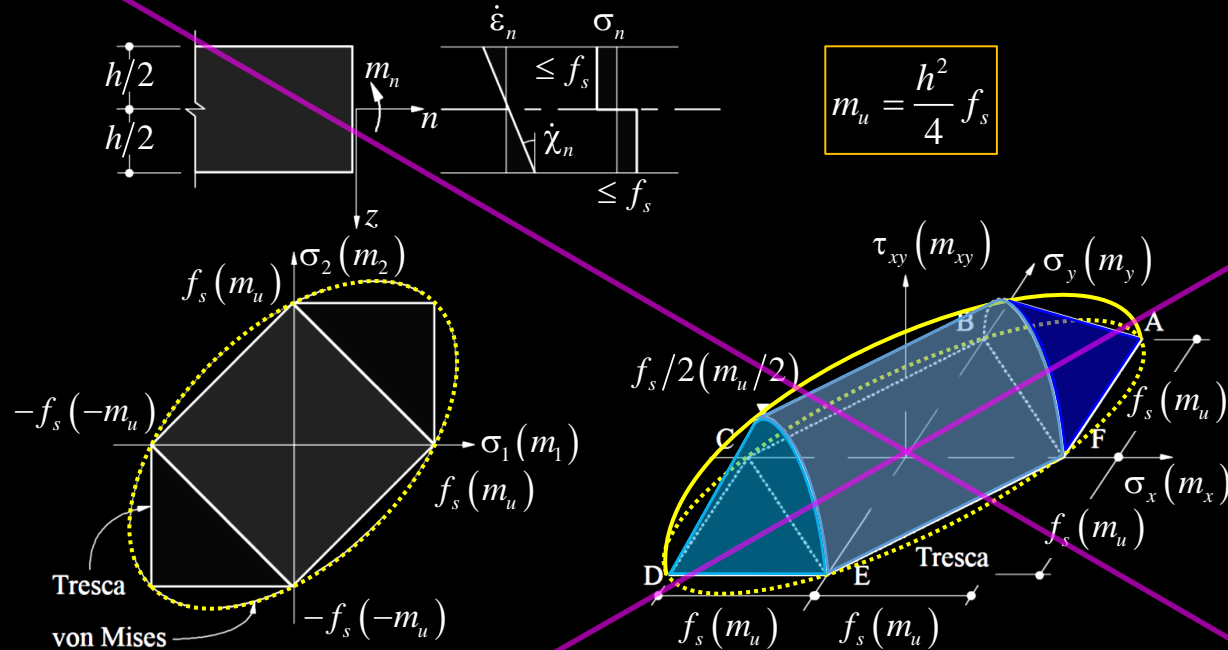


Platten - Fließbedingungen

Platten – Fließbedingungen

Fließbedingungen von Tresca und v. Mises für isotrope Platten (Stahl etc.)
 (für Stahlbeton nicht geeignet, auch bei «isotroper Bewehrung»!)



Fließregimes nach Tresca:
 (2 ellipt. Kege, ellipt. Zylinder)

ABF: $\Phi = (m_u - m_x)(m_u - m_y) - m_{xy}^2 = 0$

BCEF: $\Phi = (m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2 - m_u^2 = 0$

CDE: $\Phi = (m_u + m_x)(m_u + m_y) - m_{xy}^2 = 0$

Im vollplastifizierten Zustand (resp. starr-plastisches Verhalten) ist der Spannungszustand auf jeder Seite der Mittelebene konstant → Fließbedingung analog wie im ebenen Spannungszustand:

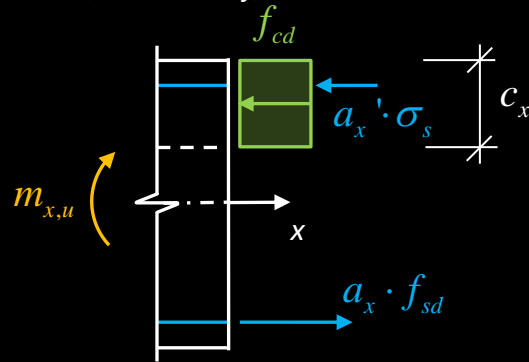
T: $\text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) - f_s = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Max}(|m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2|) - m_u = 0$

vM: $\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - f_s^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 - m_u^2 = 0$

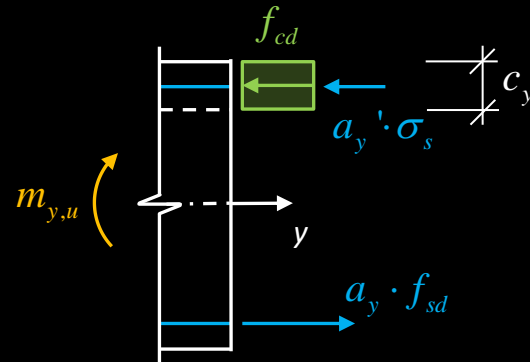
Platten – Fließbedingungen

Fließbedingungen für Stahlbetonplatten

Biege­widerstände $m_{x,u}$ und $m_{y,u}$ einer orthogonal bewehrten Platte (Bewehrung in x- und y-Richtung):



Schnitt x-Richtung

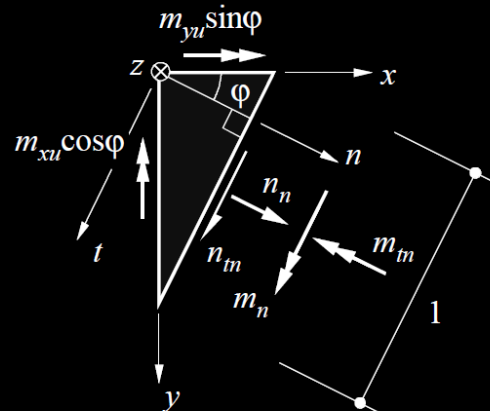


Schnitt y-Richtung

Ohne Normalkräfte ergeben sich die Druckzonenhöhen c_x und c_y und damit $m_{x,u}$ und $m_{y,u}$ aus Gleichgewicht.

Da Bewehrung orthogonal, ist $m_{xy,u} = 0$

Durch Superposition der Biege­widerstände in den Bewehrungsrichtungen und Transformation in eine beliebige Richtung (analog zu den Spannungstransformationen) ergeben sich die Biege- und Drillmomente m_n , m_t und m_{nt} in n - und t -Richtung (statisch zulässiger Spannungszustand):



$$m_{nu} = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m_{tu} = m_{xu} \cdot \sin^2 \varphi + m_{yu} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$m_{ntu} = (m_{yu} - m_{xu}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Sämtliche Membrankräfte verschwinden:

$$n_t = n_n = n_{nt} = 0$$

Platten – Fließbedingungen

Fließbedingung für Stahlbetonplatten

Der Widerstand wird anhand der Normalmomente überprüft («Normalmomenten-Fließbedingung»).

Falls die Druckzonenhöhen gleich sind, d.h. $c_x = c_y$, resultiert die **vollständige Lösung**:

- statisch zulässiger Spannungszustand (Gleichgewicht)
- Kinematisch verträglicher Bruchmechanismus (Fließgelenklinie, siehe später)

$$m_{n,u} = m_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m_{t,u} = m_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi$$

Biege­widerstand für positive Biegemomente

$$m'_{n,u} = m'_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m'_{t,u} = m'_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi$$

Biege­widerstand für negative Biegemomente («'»)
(Vorzeichen Biege­widerstand positiv)

Für $c_x \neq c_y$ liefert der statisch zulässige Spannungszustand einen unteren Grenzwert der Traglast:

$$m_{n,u} \geq m_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m_{t,u} \geq m_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$m'_{n,u} \geq m'_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m'_{t,u} \geq m'_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi$$

Die Unterschiede bzgl. der Druckzonenhöhe in x- und y-Richtung sind in der Regel gering, so dass in guter Näherung das Ungleichheitszeichen unterdrückt werden darf.

NB: Mit einem Definitionsbereich für den Winkel φ von $\{0 \leq \varphi \leq \pi\}$ ist die Beziehung für m_n ausreichend.

Platten – Fließbedingungen

Fließbedingung für Stahlbetonplatten

Wird die Einwirkung m_n gleich dem Widerstand $m_{n,u}$ gesetzt, erhält man:

$$m_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi_u + m_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi_u = m_{n,u} \stackrel{!}{=} m_n = m_x \cdot \cos^2 \varphi_u + m_y \cdot \sin^2 \varphi_u + 2m_{xy} \cdot \sin \varphi_u \cos \varphi_u$$

Unter Beachtung, dass die Bedingung $m_{n,u} \geq m_n$ für alle Richtungen φ erfüllt sein muss, resultiert (*):

für positive Biegemomente: $|\tan \varphi_u| = \sqrt{\frac{m_{x,u} - m_x}{m_{y,u} - m_y}}$

für negative Biegemomente: $|\tan \varphi'_u| = \sqrt{\frac{m'_{x,u} + m_x}{m'_{y,u} + m_y}}$

$$\begin{aligned} m_{x,u} &= m_x + m_{xy} \cdot \tan \varphi_u \\ m_{y,u} &= m_y + m_{xy} \cdot \cot \varphi_u \end{aligned}$$

Widerstand Einwirkung

$$\begin{aligned} m'_{x,u} &= -m_x - m_{xy} \cdot \tan \varphi'_u \\ m'_{y,u} &= -m_y - m_{xy} \cdot \cot \varphi'_u \end{aligned}$$

Widerstand Einwirkung

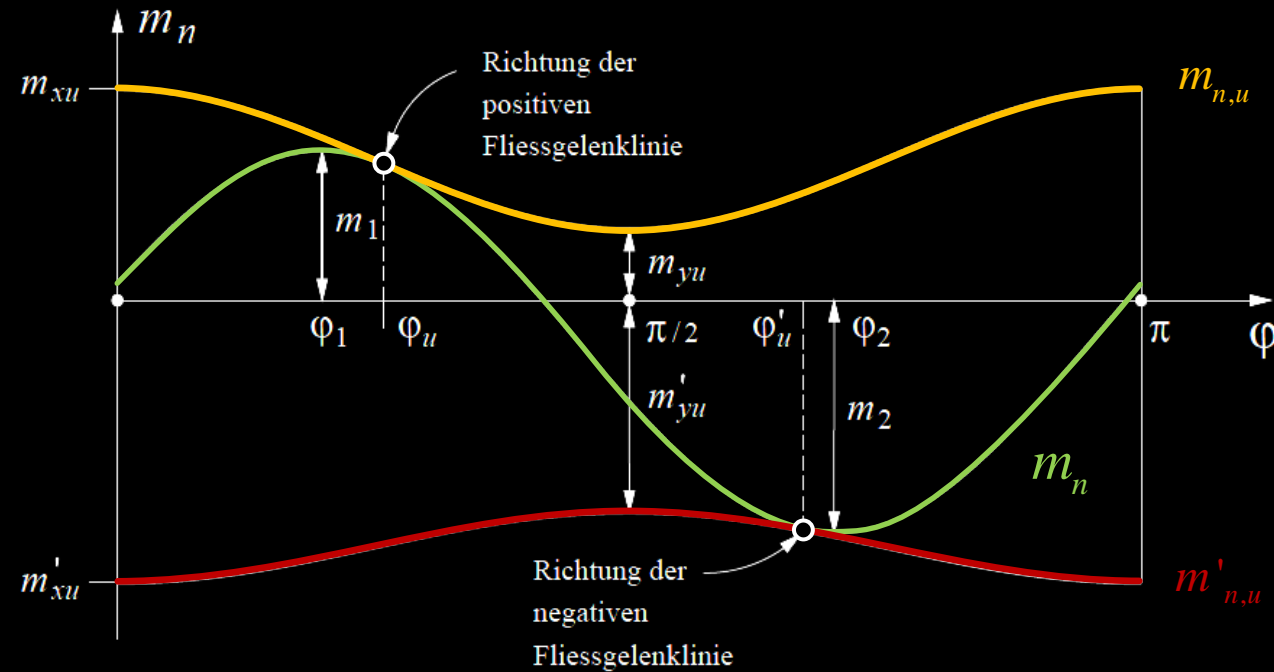
(*) In der massgebenden Richtung φ_u (Berührungspunkt $m_{n,u}(\varphi)$ und $m_n(\varphi)$) ist die Differenz $m_{n,u} - m_n$ minimal, somit:

$$m_{n,u}(\varphi) - m_n(\varphi) = \min! \quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_{n,u}(\varphi) - m_n(\varphi)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} m_{n,u}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} m_n(\varphi) \quad \rightarrow m_{y,u} - m_{x,u} = m_y - m_x + m_{xy} (\cot \varphi_u - \tan \varphi_u)$$

woraus durch Rückeinsetzen, nach einiger Umformung, die angegebenen Beziehungen folgen.

Platten – Fließbedingungen

Fließbedingungen für Stahlbetonplatten



Biegemomente m_n in Funktion von $\varphi \rightarrow$ massgebende Richtung φ_u

$\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow$ Richtungen, in der das einwirkende positive bzw. negative Moment maximal werden (Hauptmomentenrichtungen für m_n)

$\varphi_u, \varphi'_u \rightarrow$ Richtungen, in der die Einwirkungskurve die Widerstandskurve berührt. Hier ist $m_n = m_{n,u}$

Allgemein ist $\varphi_1 \neq \varphi_u$ bzw. $\varphi_2 \neq \varphi'_u \rightarrow$ Bemessung von $m_{n,u}$ auf Hauptmoment m_1 ist nicht konservativ!

Platten – Fließbedingungen

Normalmomenten-Fließbedingung

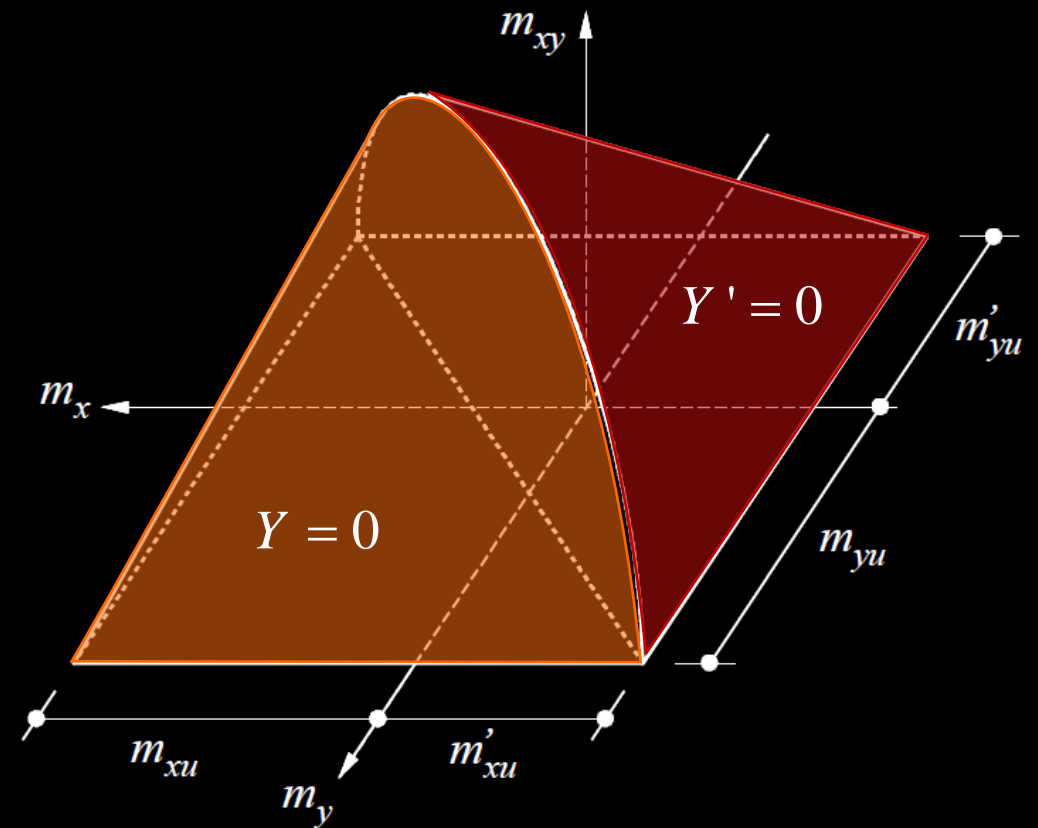
Wird φ_u , bzw. φ'_u aus den vorherigen Gleichungen eliminiert, folgt aus der Bedingung $-m'_{n,u} \leq m_n \leq m_{n,u}$ die sogenannte **Normalmomenten-Fließbedingung**:

$$Y = m_{xy}^2 - \overbrace{(m_{x,u} - m_x)}^{\geq 0} \overbrace{(m_{y,u} - m_y)}^{\geq 0} = 0$$

$$Y' = m_{xy}^2 - \overbrace{(m'_{x,u} + m_x)}^{\geq 0} \overbrace{(m'_{y,u} + m_y)}^{\geq 0} = 0$$

Ist $Y < 0$ bzw. $Y' < 0$ (aplastischer Bereich), so ist die Fließbedingung eingehalten.

Die Normalmomenten-Fließbedingung bildet im (m_x, m_y, m_{xy}) - Raum zwei elliptische Kegel. Auf den Kegelflächen ist $\chi_1 \chi_2 = 0$ (aus Fließgesetz), d.h. eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet. Die verträglichen Mechanismen entsprechen daher abwickelbaren Flächen.



Platten – Fließbedingungen

Normalmomenten-Fließbedingung

Wird φ_u , bzw. φ'_u aus den vorherigen Gleichungen eliminiert, folgt aus der Bedingung $-m'_{n,u} \leq m_n \leq m_{n,u}$ die sogenannte **Normalmomenten-Fließbedingung**:

$$\begin{array}{c}
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 Y = m_{xy}^2 - (m_{x,u} - m_x)(m_{y,u} - m_y) = 0 \\
 Y' = m_{xy}^2 - (m'_{x,u} + m_x)(m'_{y,u} + m_y) = 0 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0
 \end{array}$$

Dito, mit Schreibweise nach SIA 262:

$$\begin{array}{c}
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 Y = m_{xy,d}^2 - (m_{x,Rd} - m_{x,d})(m_{y,Rd} - m_{y,d}) = 0 \\
 Y' = m_{xy,d}^2 - (m'_{x,Rd} + m_{x,d})(m'_{y,Rd} + m_{y,d}) = 0 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0
 \end{array}$$

Platten – Fließbedingungen

Bemessungsmomente

Normalmomenten-Fließbedingung in parametrisierter Form: mit $k = |\tan \varphi_u|$ und $k' = |\tan \varphi'_u|$

Daraus folgen die Bemessungsmomente:

für positive
Biegemomente:

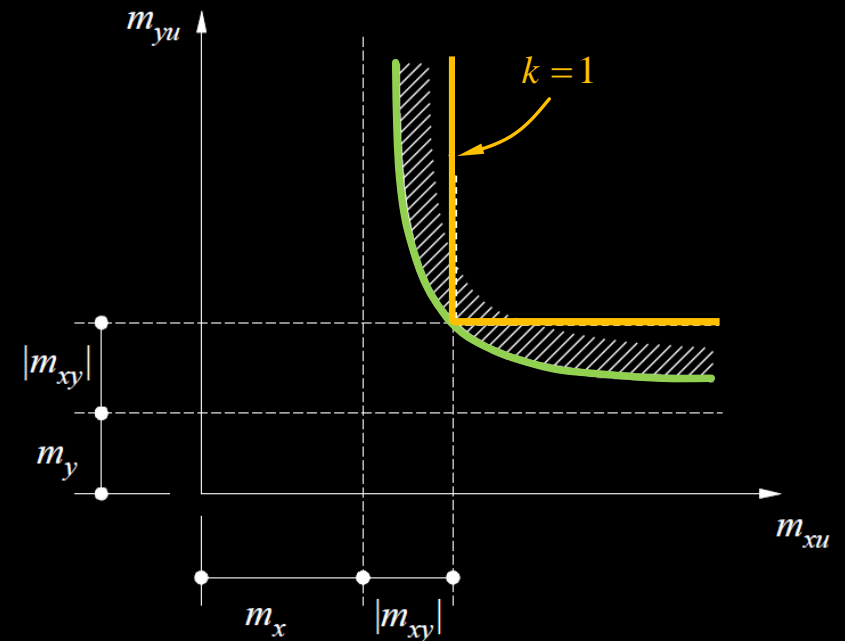
$$\begin{aligned} m_{x,u} &\geq m_x + k \cdot |m_{xy}| \\ m_{y,u} &\geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}$$

für negative
Biegemomente:

$$\begin{aligned} m'_{x,u} &\geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m'_{y,u} &\geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}$$

Der Parameter k kann frei gewählt und die Bewehrung direkt bemessen werden. Wird $k = 1$ gesetzt, so folgt daraus die **linearisierte Fließbedingung**, welche auch von vielen Computerprogrammen verwendet wird.

NB: Die Normalmomenten-Fließbedingung überschätzt den Drillwiderstand von Platten. Vorsicht ist geboten bei hoher Drillbeanspruchung mit unterschiedlichem Vorzeichen der Hauptmomente, beispielsweise bei Eckstützen.



Platten – Fließbedingungen

Bemessungsmomente

Normalmomenten-Fließbedingung in parametrisierter Form: mit $k = |\tan \varphi_u|$ und $k' = |\tan \varphi'_u|$

Daraus folgen die Bemessungsmomente:

für positive
Biegemomente:

$$\begin{aligned} m_{x,u} &\geq m_x + k \cdot |m_{xy}| \\ m_{y,u} &\geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}$$

für negative
Biegemomente:

$$\begin{aligned} m'_{x,u} &\geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m'_{y,u} &\geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}$$

Dito, mit Schreibweise nach SIA 262:

$$\begin{aligned} m_{x,Rd} &\geq m_{x,d} + k \cdot |m_{xy,d}| \\ m_{y,Rd} &\geq m_{y,d} + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy,d}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'_{x,Rd} &\geq -m_{x,d} + k' \cdot |m_{xy,d}| \\ m'_{y,Rd} &\geq -m_{y,d} + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy,d}| \end{aligned}$$

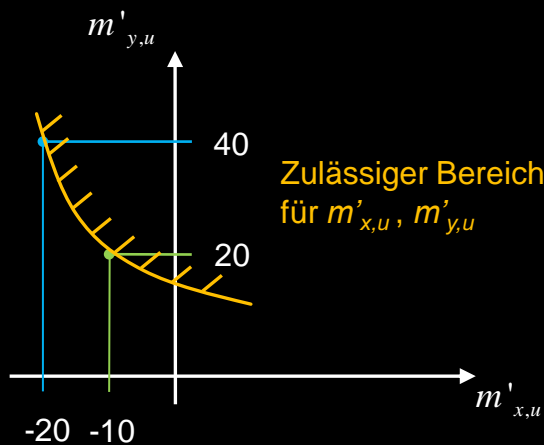
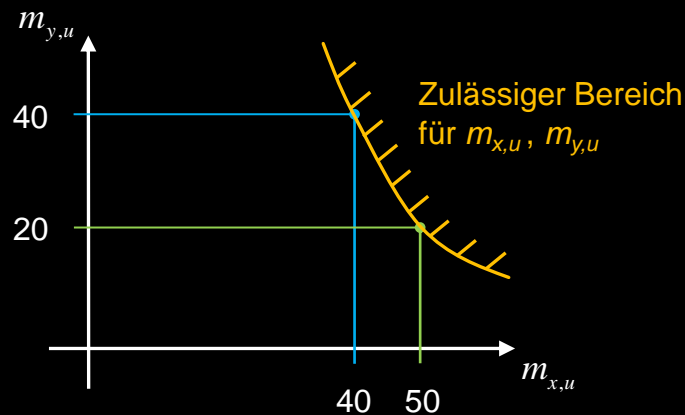
NB: Bei mehreren Beanspruchungen resp. Beanspruchungskombinationen ist der erforderliche Biege­widerstand $(m_x, m_y)_{Rd}$ grundsätzlich für zugehörige Schnittgrößen $(m_x, m_y, m_{xy})_d$ zu ermitteln. Die in vielen FE-Programmen implementierte Ermittlung der Biege­widerstände $(m_x, m_y)_{Rd}$ aus nicht zugehörigen, separat ermittelten «Grenzwerten» für $m_{x,d}$, $m_{y,d}$ und $m_{xy,d}$ ist oft stark auf der sicheren Seite.

Platten – Fließbedingungen

Bemessungsmomente – Beispiel 1

Gegeben: Biegemomente $\{m_x = 30 \text{ kN}, m_y = 0 \text{ kN}, m_{xy} = 20 \text{ kN}\}$

Gesucht: Bemessungsmomente für $k = k' = 1$ und $k = k' = 0.5$



$k = 1$:

$$m_{x,u} \geq 30 + 1 \cdot 20 = 50 \text{ kN}$$

$$m_{y,u} \geq 0 + 1 \cdot 20 = 20 \text{ kN}$$

$$m'_{x,u} \geq -30 + 1 \cdot 20 = -10 \text{ kN}$$

$$m'_{y,u} \geq 0 + 1 \cdot 20 = 20 \text{ kN}$$

$k = 0.5$:

$$m_{x,u} \geq 30 + 0.5 \cdot 20 = 40 \text{ kN}$$

$$m_{y,u} \geq 0 + \frac{1}{0.5} \cdot 20 = 40 \text{ kN}$$

$$m'_{x,u} \geq -30 + 0.5 \cdot 20 = -20 \text{ kN}$$

$$m'_{y,u} \geq 0 + \frac{1}{0.5} \cdot 20 = 40 \text{ kN}$$

$$m_{x,u} \geq m_x + k \cdot |m_{xy}|$$

$$m_{y,u} \geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}|$$

$$m'_{x,u} \geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}|$$

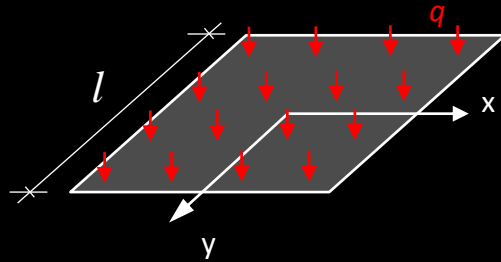
$$m'_{y,u} \geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}|$$

N.B.: Bei negativen Bemessungsmomenten ist rechnerisch keine entsprechende Bewehrung notwendig (die für die Aufnahme des Drillmoments notwendige Zugkraft ist durch die Biegedruckkraft aus dem Normalmoment überdrückt)

Platten – Fließbedingungen

Bemessungsmomente – Beispiel 2

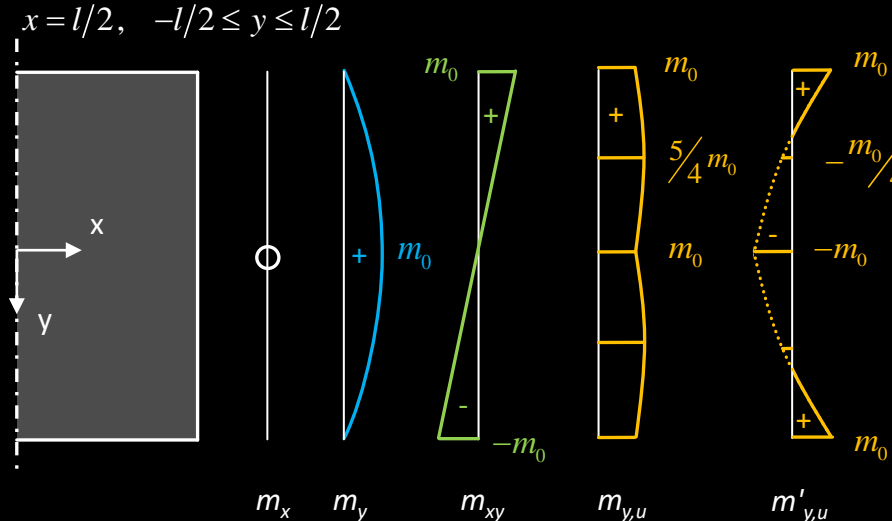
Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast q mit Ansätzen für Biegemomente m_x , m_y und Drillmoment m_{xy}



$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_0 \quad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_0 \quad m_{xy} = -\frac{4xy}{l^2} \cdot m_0$$

Gleichgewicht: $\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \frac{24m_0}{l^2}$

Gesucht: Erforderliche Biege widerstände in y -Richtung entlang Rand $x = l/2$ mit linearisierter Fließbedingung



Positives Bemessungsmoment:
(= erf. Biege widerstand untere Bewehrung in y -Richtung)

Negatives Bemessungsmoment:
(= erf. Biege widerstand obere Bewehrung in y -Richtung)

$$m_{y,u} \geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}|$$

$$k = k' = 1$$

$$m_{y,u} \geq m_y + |m_{xy}|$$

$$m_{y,u,\max} = \frac{5}{4} m_0$$

$$m'_{y,u} \geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}|$$

$$m'_{y,u} \geq -m_y + |m_{xy}|$$

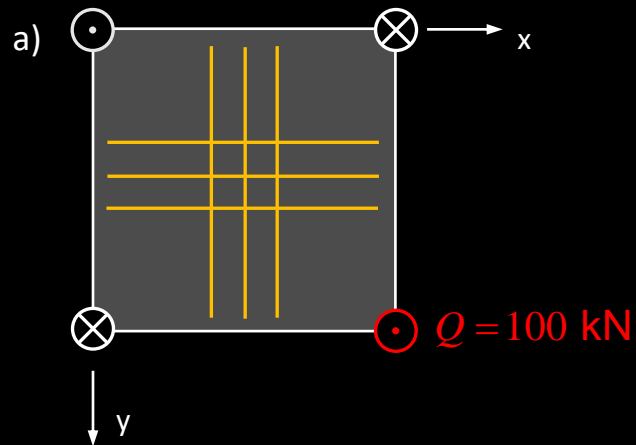
$$m'_{y,u,\max} = m_0$$

Platten – Fließbedingungen

Bemessungsmomente – Beispiel 3

Gegeben: An 3 Ecken gestützte Quadratplatte mit Seitenlänge l , angreifende Eckkraft $Q = 100 \text{ kN}$

Gesucht: Bemessungsmomente bei Bewehrung in Koordinatenrichtung und unter 45° dazu



Einwirkung: Eckkraft $2m_{xy} = Q = 100 \text{ kN}$
 (= reine Drillung bezüglich der Bewehrungsrichtungen (x,y))

$$m_x = m_y = 0$$

$$m_{xy} = 50 \text{ kN}$$

Linearisierte Fließbedingungen:

$$m_{x,u} \geq m_x + k \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

$$m_{y,u} \geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

$$m'_{x,u} \geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

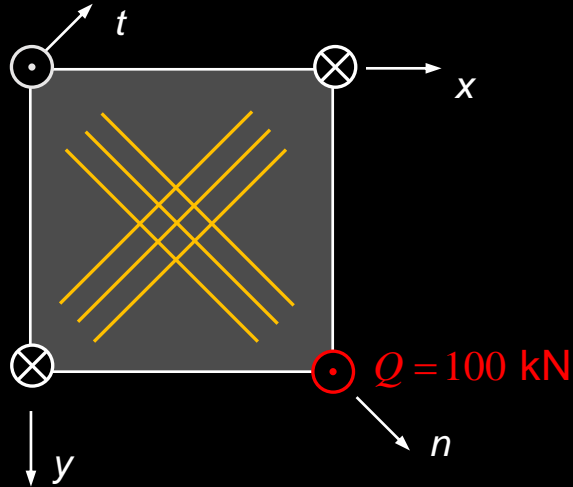
$$m'_{y,u} \geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

→ alle vier Bewehrungslagen (oben und unten in x - und y -Richtung) müssen auf $m_u \geq 50 \text{ kN}$ bemessen werden

Platten – Fließbedingungen

Bemessungsmomente – Beispiel 3

b) Drehen der Bewehrung um 45° in die n - t -Richtung



Einwirkungen: $\varphi = 45^\circ$
(Bewehrung in Hauptmomentenrichtungen angeordnet!)

$$m_n = m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi = m_{xy} = 50 \text{ kN}$$

$$m_t = m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - m_{xy} \sin 2\varphi = -m_{xy} = -50 \text{ kN}$$

$$m_{nt} = (m_y - m_x) \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

Linearisierte Fließbedingungen:

$$m_{n,u} \geq m_n + k \cdot |m_{nt}| = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$$

$$m_{t,u} \geq m_t + \frac{1}{k} \cdot |m_{nt}| = -50 + 0 = -50 \text{ kN} \rightarrow 0$$

$$m'_{n,u} \geq -m_n + k' \cdot |m_{nt}| = -50 + 0 = -50 \text{ kN} \rightarrow 0$$

$$m'_{t,u} \geq -m_t + \frac{1}{k'} \cdot |m_{nt}| = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$$

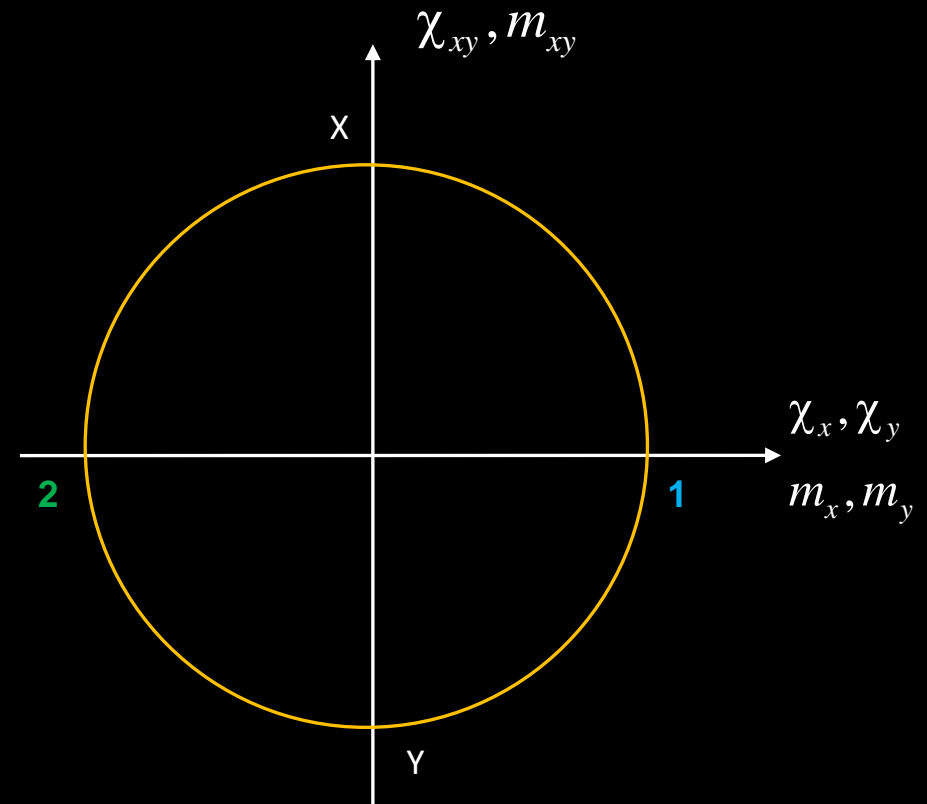
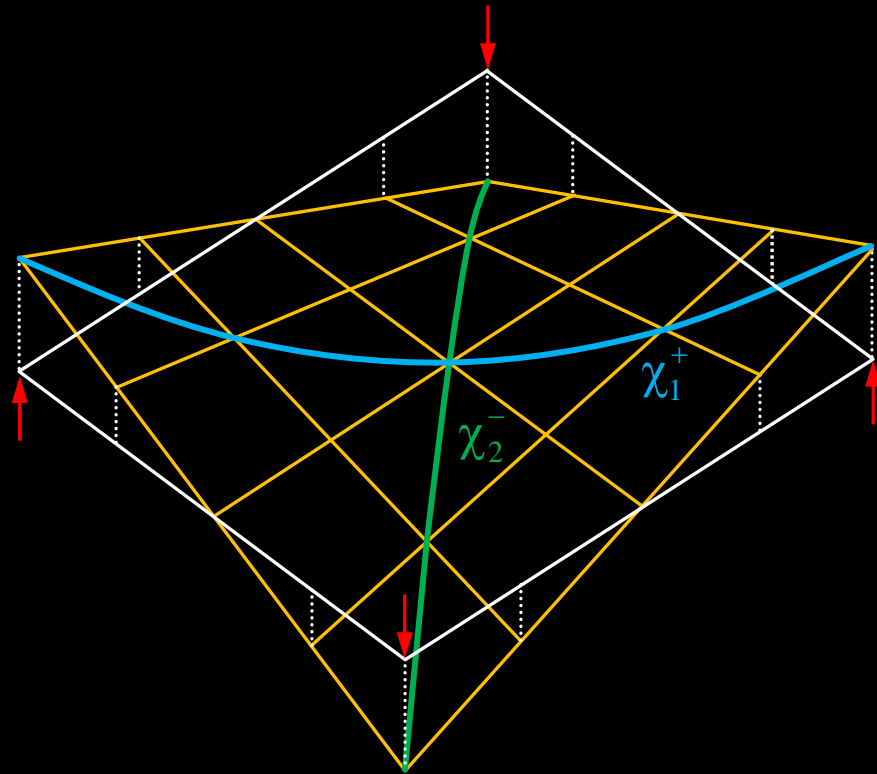
→ Bei Bewehrung in Hauptmomentenrichtung ist die halbe Bewehrungsmenge ausreichend: untere Bewehrung in n -Richtung, obere Bewehrung in t -Richtung je für $m_u \geq 50 \text{ kN}$

(negative Bemessungsmomente: keine Bewehrung erforderlich)

→ «Trajektorienbewehrung» optimal, aber selten praktikabel (Bewehrungslayout kompliziert, Hauptrichtungen ändern infolge veränderlicher Einwirkungen)

Platten – Fließbedingungen

Reine Drillung χ_{xy} ($\chi_x = \chi_y = 0$)



Platten – Fließbedingungen

Ergänzende Bemerkungen

In dieser Vorlesung werden nur Fließbedingungen für orthogonal bewehrte Platten behandelt. Für schiefe Bewehrungen und mehrere Bewehrungslagen können analoge Beziehungen hergeleitet werden, siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete».

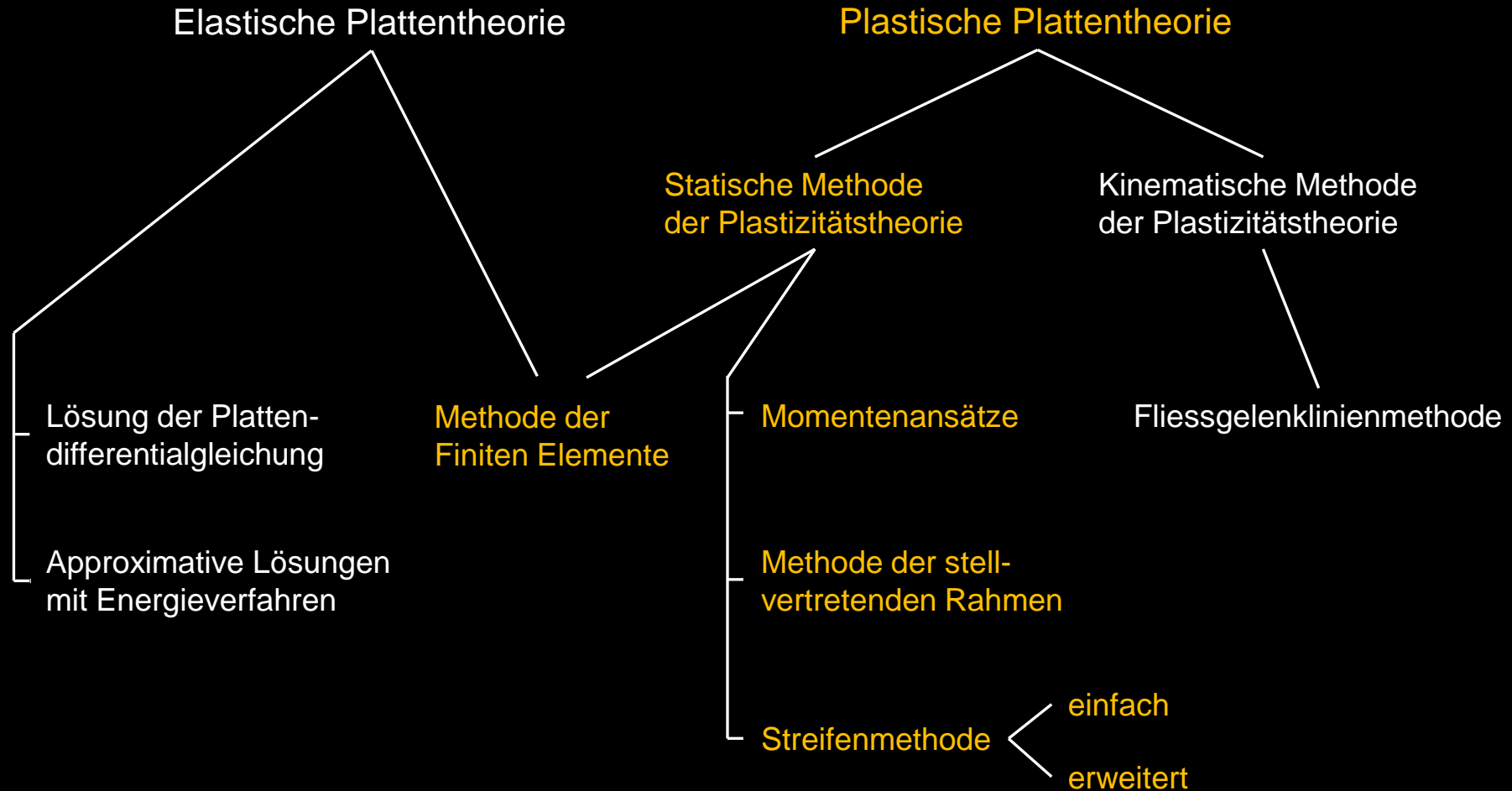
Bei schiefer Bewehrung ist zu beachten, dass die Maxima und Minima der Biegegewiderstände nicht in den Bewehrungsrichtungen auftreten. Vielmehr tritt ein Minimum im Bereich der Winkelhalbierenden des stumpfen Winkels auf, und der Widerstand ist bereits bei geringer Schiefe deutlich reduziert (Beispiel: zwei gleiche Bewehrungen, 30° schief → Biegegewiderstand in Richtung der Winkelhalbierenden des stumpfen Winkels nur 50% des Widerstands jeder einzelnen Bewehrungsrichtung, in Richtung der Winkelhalbierenden des spitzen Winkels dafür 125%).

Die Fließbedingungen können auch mit einer Sandwichmodell-Betrachtung hergeleitet werden (siehe Querkraft in Platten). Damit können auch Bewehrungen im Fall allgemeiner Beanspruchung durch acht Spannungsergebende (Membrankräfte, Biege- und Drillmomente sowie Plattenquerkräfte) ermittelt werden, siehe «Advanced Structural Concrete».

Platten – Gleichgewichtslösungen

Platten – Gleichgewichtslösungen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht



Platten – Gleichgewichtslösungen

Übersicht

Gleichgewichtslösungen beruhen auf dem unteren bzw. **statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie**.

Voraussetzungen: → statisch **zulässiger Spannungszustand** (Gleichgewicht und statische Randbedingungen erfüllt)
→ **Fliessbedingungen** nirgends verletzt

Ermittlung statisch zulässiger Spannungszustände:

- **Elastische Plattentheorie:** Neben Gleichgewicht und statischen Randbedingungen sind hier auch die elastischen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt. Mit der **Methode der Finiten Elemente** können Fälle mit beliebiger Geometrie und Belastungen behandelt werden (heute am weitesten verbreitetes Vorgehen). Daneben existieren verschiedene Lehrbücher mit entsprechenden Tabellenwerken.
- **Momentenansätze:** Kombination verschiedener Momentenfelder für ausgewählte Geometrien und Belastungen
- **Streifenmethode:** Diese auf HILLERBORG zurückgehende Methode geht von **streifenförmigen Biegeelementen** in zwei orthogonalen Richtungen aus (einfache Streifenmethode). Mit der erweiterten Streifenmethode lassen sich Einzelkräfte unter Zuhilfenahme entsprechender Momentenansätze resp. Lastverteilerelemente behandeln.
- **Stellvertretende Rahmen:** Globale Gleichgewichtslösung für **Flach- und Pilzdecken** (Verteilung der Momente in Querrichtung in Anlehnung an elastische Lösungen).

Platten – Gleichgewichtslösungen

Übersicht

Gleichgewichtslösungen eignen sich insbesondere für die **Bemessung** von Platten. Wird eine Platte nach diesen Verfahren bemessen und ist ihr Verformungsvermögen ausreichend, so liegt ihre Traglast in keinem Fall unter der zugehörigen Belastung.

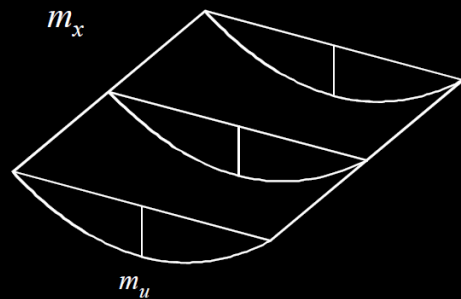
Mit der statischen Methode der Plastizitätstheorie wird ein ausreichender Biege­widerstand sichergestellt. Der Einfluss von **Querkräften** ist jedoch nicht berücksichtigt und separat zu untersuchen.

Findet sich zu einer Gleichgewichtslösung ein verträglicher Bruchmechanismus (siehe Kapitel Fließgelenklinienmethode), so entspricht die gefundene Lösung einer **vollständigen Lösung** der Plastizitätstheorie. Es resultiert die (theoretisch) korrekte Traglast.

Platten – Gleichgewichtslösungen

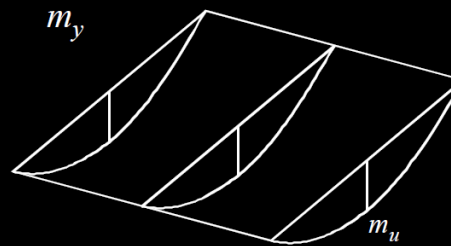
Momentenfelder: Einführungsbeispiel Quadratplatte

Ansätze: $m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_u$



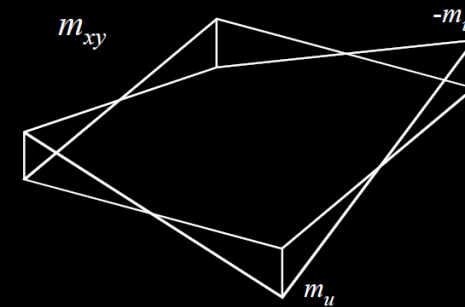
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\frac{8m_u}{l^2}$$

$m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_u$



$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\frac{8m_u}{l^2}$$

$m_{xy} = \frac{4xy}{l^2} \cdot m_u$



$$\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{4m_u}{l^2}$$

Gleichgewicht: $\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \rightarrow q = \frac{8m_u}{l^2}$

$$v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{4x}{l^2} \cdot m_u$$

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{4m_u}{l^2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -\frac{4y}{l^2} \cdot m_u$$

$$\tan(\varphi_0) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y}{x}$$

Die Stützkraft verschwindet:

$$v_n + \frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$$

Die Ansätze entsprechen damit der Momentenverteilung einer **eckgestützten Quadratplatte** unter der Last $q = 8m_u/l^2$

Vgl. Bsp. 2 zu den Randbedingungen

Platten – Gleichgewichtslösungen

Momentenfelder: Grundlagen

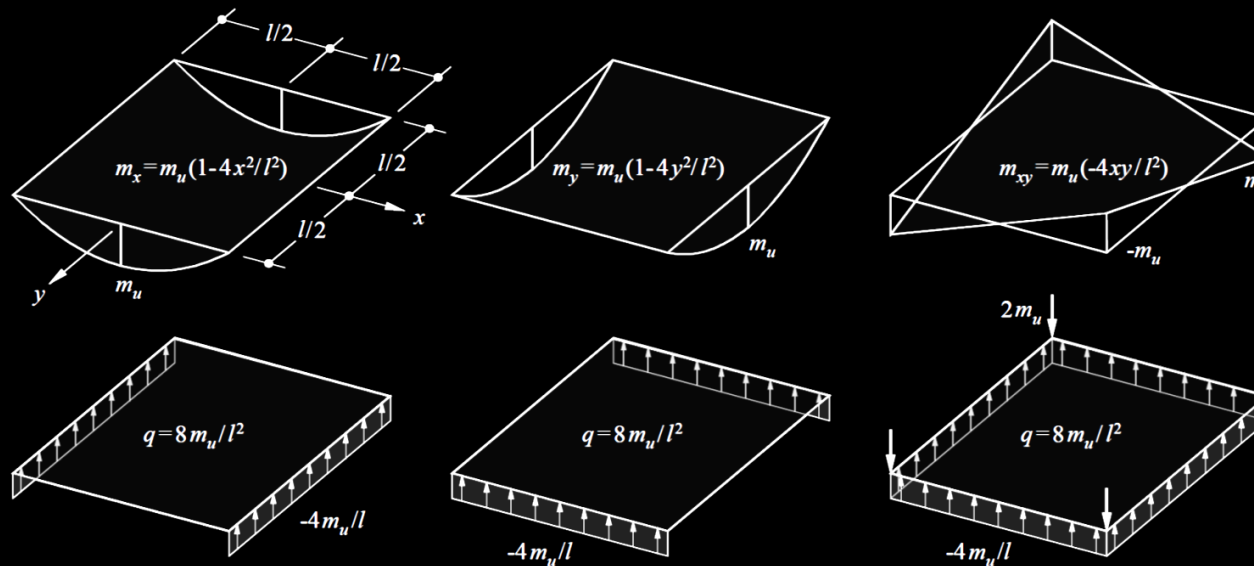
Aufteilen der Last in die Anteile q_x , q_y und q_{xy} ergibt:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = q_x + q_y + q_{xy} \quad \underbrace{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q_x}_{\text{Balken x-Richtung}} \quad \underbrace{\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q_y}_{\text{Balken y-Richtung}} \quad \underbrace{2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q_{xy}}_{\text{Drillung}}$$

Balken x-Richtung Balken y-Richtung Drillung

Die Aufteilung kann frei und prinzipiell an jeder Stelle der Platte anders vorgenommen werden.

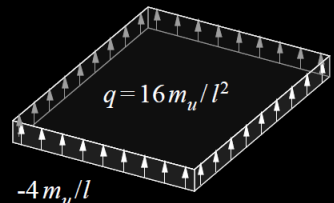
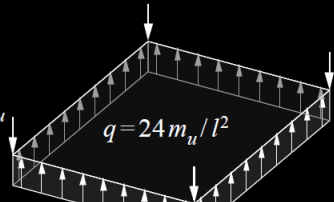
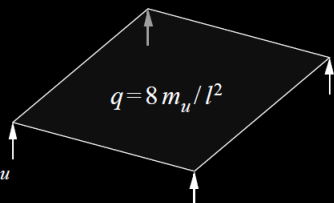
Drei mögliche Grundfälle für m_x , m_y , und m_{xy} zur Aufnahme einer gleichmässig verteilten Flächenlast:



Platten – Gleichgewichtslösungen

Momentenfelder: Kombination der Grundfälle

Die möglichen Grundfälle lassen sich für verschiedene Randbedingungen superponieren (lineare Kombination):

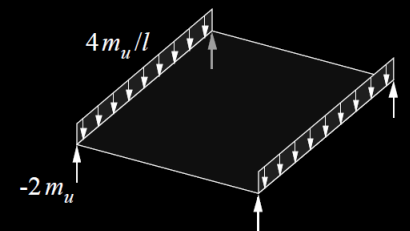
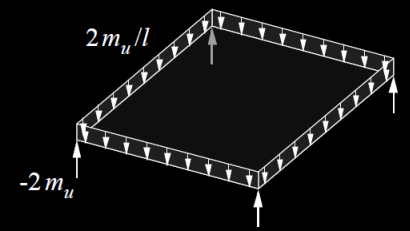
m_x $m_u(1-4x^2/l^2)$	m_y $m_u(1-4y^2/l^2)$	m_{xy} $m_u(-4xy/l^2)$	Belastung und Lagerung (statische Randbedingungen)
1	1	0	 <ul style="list-style-type: none"> - gleichmässig verteilte Flächenlast - umfanggelagert, Ecken nicht gehalten
1	1	1	 <ul style="list-style-type: none"> - gleichmässig verteilte Flächenlast - umfanggelagert, Ecken gehalten
1	1	-1	 <ul style="list-style-type: none"> - gleichmässig verteilte Flächenlast - eckgestützt

N.B.:
Vollständige Lösungen
nach Plastizitätstheorie

Platten – Gleichgewichtslösungen

Momentenfelder: Kombination der Grundfälle

Die möglichen Grundfälle lassen sich für verschiedene Randbedingungen superponieren (lineare Kombination):

0	1	-1	 <ul style="list-style-type: none"> - gleichmässig verteilte Randlast auf 2 Rändern - eckgestützt
0.5	0.5	-1	 <ul style="list-style-type: none"> - gleichmässig verteilte Randlast auf 4 Rändern - eckgestützt
$\frac{m_x}{m_u(1-4x^2/l^2)}$	$\frac{m_y}{m_u(1-4y^2/l^2)}$	$\frac{m_{xy}}{m_u(-4xy/l^2)}$	Belastung und Lagerung (statische Randbedingungen)

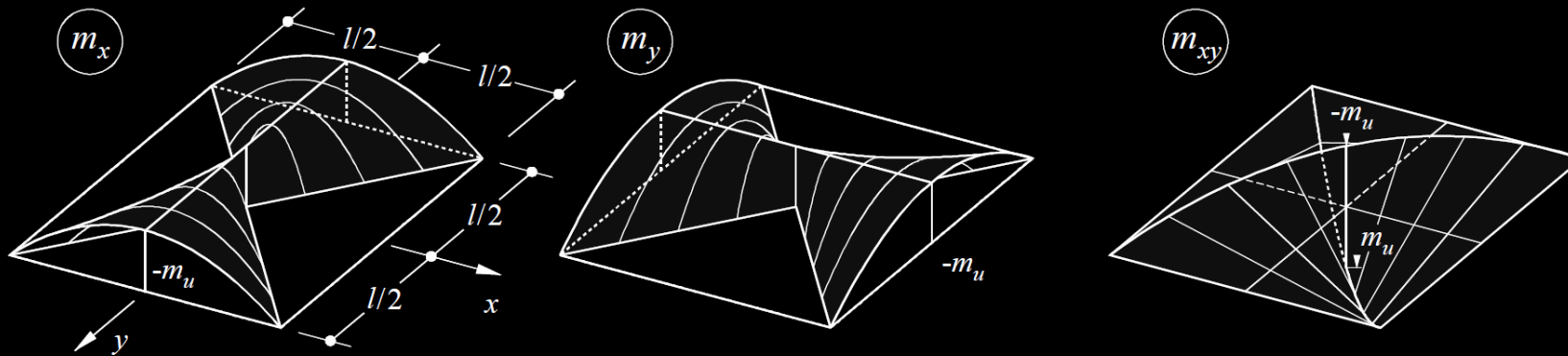
Platten – Gleichgewichtslösungen

Momentenfelder: Einzellasten und punktförmige Stützungen

Ansätze:

$$m_x = 0 \quad m_y = m_u \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) \quad m_{xy} = m_u \left(\frac{y}{x} - \frac{4xy}{l^2} \right) \quad \text{für } (x^2 > y^2)$$

$$m_x = m_u \left(\frac{x^2}{y^2} - 1 \right) \quad m_y = 0 \quad m_{xy} = m_u \left(\frac{x}{y} - \frac{4xy}{l^2} \right) \quad \text{für } (x^2 < y^2)$$



Die Kombination entspricht einer in der Mitte gestützten Quadratplatte mit freien Rändern unter gleichmässiger Flächenlast $q = 8m_u/l^2$. Die Fließbedingungen sind mit $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$ nirgends verletzt (für positive Momente im Plattenzentrum, für negative Momente entlang der Koordinaten-achsen gerade erfüllt).

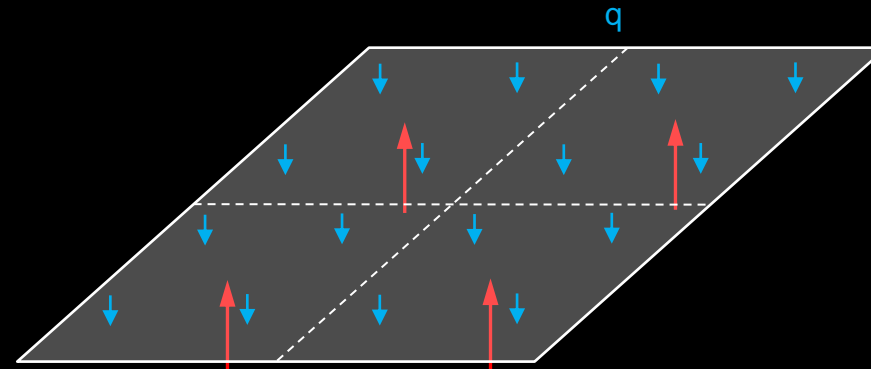
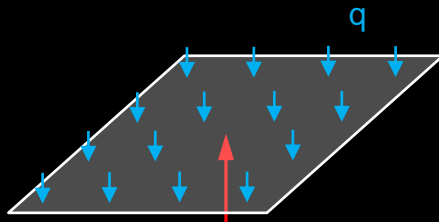
Platten – Gleichgewichtslösungen

Momentenfelder: Einzellasten und punktförmige Stützungen

Diese Momentenfelder sind als «Lastverteilerelemente» zur **Umwandlung von Punktlasten in Flächenlasten** geeignet (siehe später erweiterte Streifenmethode).

Überlagert man ihnen konstante positive Momente m_x und m_y , so erhält man mit $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$ den unteren Grenzwert für die **Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung** (Marti 1981):

$$q \geq 4(1 + \lambda) \frac{m_u}{l^2}, \quad \lambda = \frac{m'_{xu}}{m_u} = \frac{m'_{yu}}{m_u}$$



N.B.: Momentenfelder für Eck- und Randfelder von Flachdecken sind ebenfalls verfügbar.

Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Grundidee

Grundidee:

→ Vernachlässigen der Drillmomente, Gleichgewichtsbedingungen nur mit m_x und m_y erfüllen

→ Aufteilen der Belastung q in die Anteile q_x und q_y ($q_{xy} = 0$)

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow q = q_x + q_y, \quad \underbrace{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q_x}_{\text{Balken in x-Richtung}}, \quad \underbrace{\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q_y}_{\text{Balken in y-Richtung}}$$

→ gesamte Belastung q wird damit durch Balkentragwirkung in x- und y-Richtung abgetragen

→ Aufteilung der Last kann grundsätzlich frei gewählt werden.

→ um ein ausreichendes Verformungsvermögen und zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand zu gewährleisten, ist eine gewisse Vorsicht bei der Wahl von q_x und q_y angebracht

→ ebenso bei der Wahl allfälliger überzähliger Größen bei der Berechnung der einzelnen Streifen nach Balkentheorie

Die Idee, eine Platte als zueinander orthogonale Schar von Balken aufzufassen, wurde sehr früh entwickelt. Marcus (1931) schlug beispielsweise vor, die Aufteilung der Belastung so zu wählen, dass die elastischen Durchbiegungen der fiktiven Balken in Plattenmitte übereinstimmen (→ verteilte Last: pro Richtung $\sim L^{-4}$).

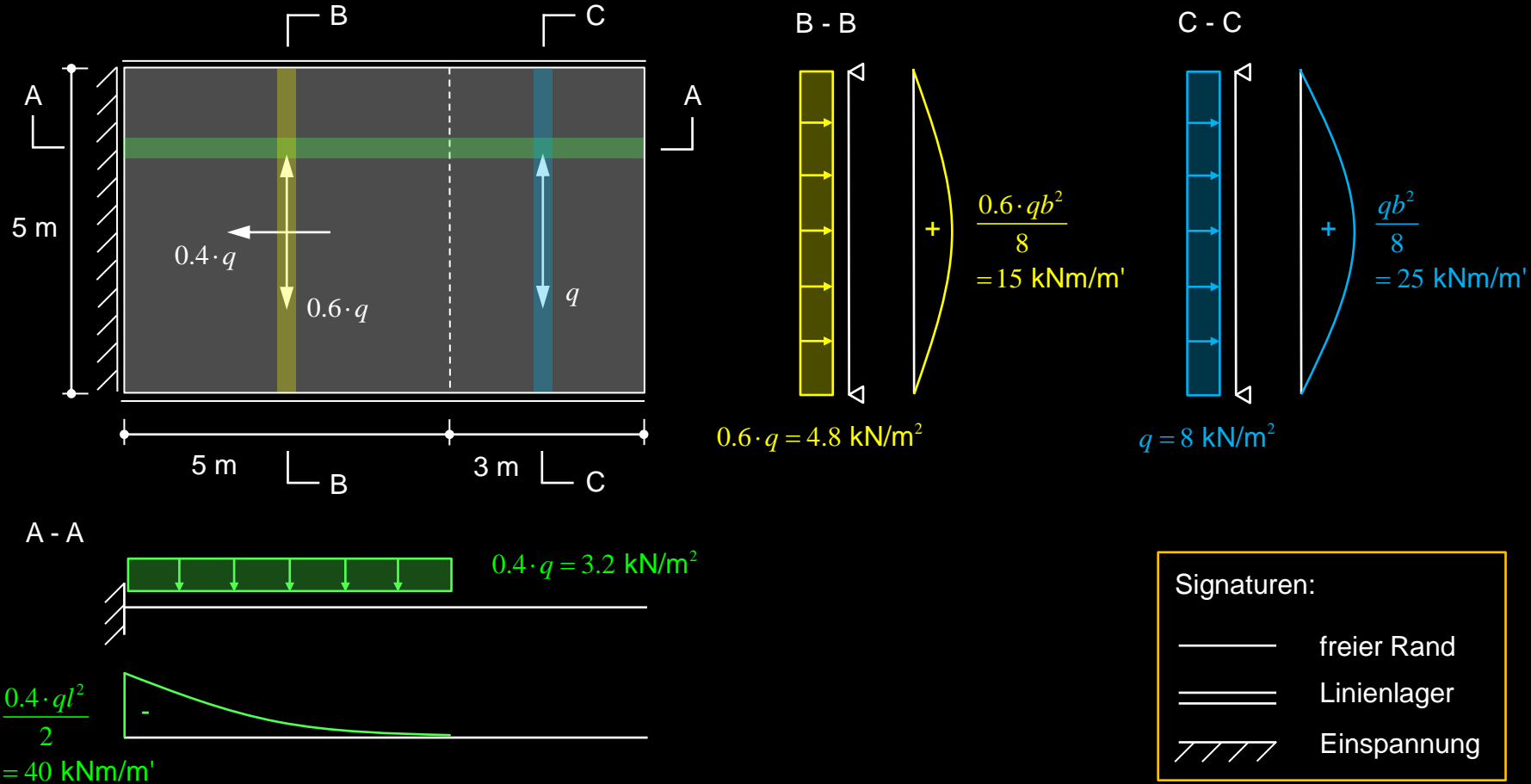
HILLERBORG zeigte, dass es sich bei der Streifenmethode um eine Anwendung des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie handelt und verallgemeinerte die Methode.

Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Einführungsbeispiel

Gegeben: Rechteckplatte (8 x 5 Meter), $h = 0.32$ m unter Eigengewicht ($q = 8$ kN/m²)

Gesucht: Bemessungsmomente mit Streifenmethode

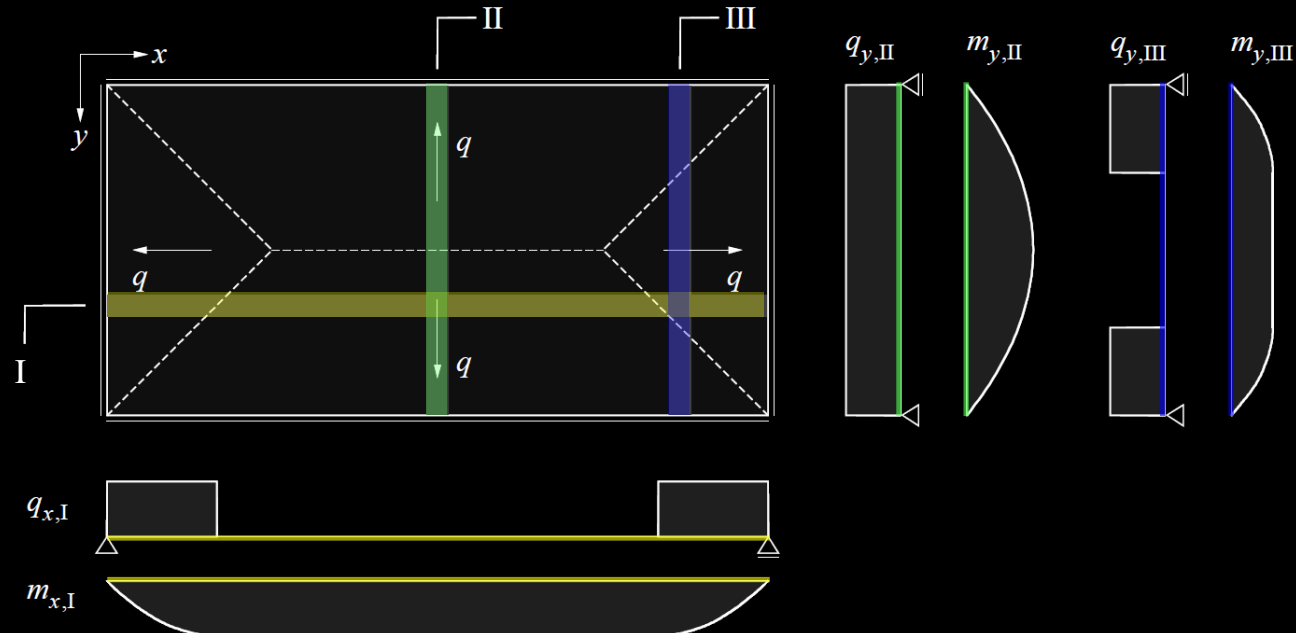


Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Effizienteste Lastaufteilung

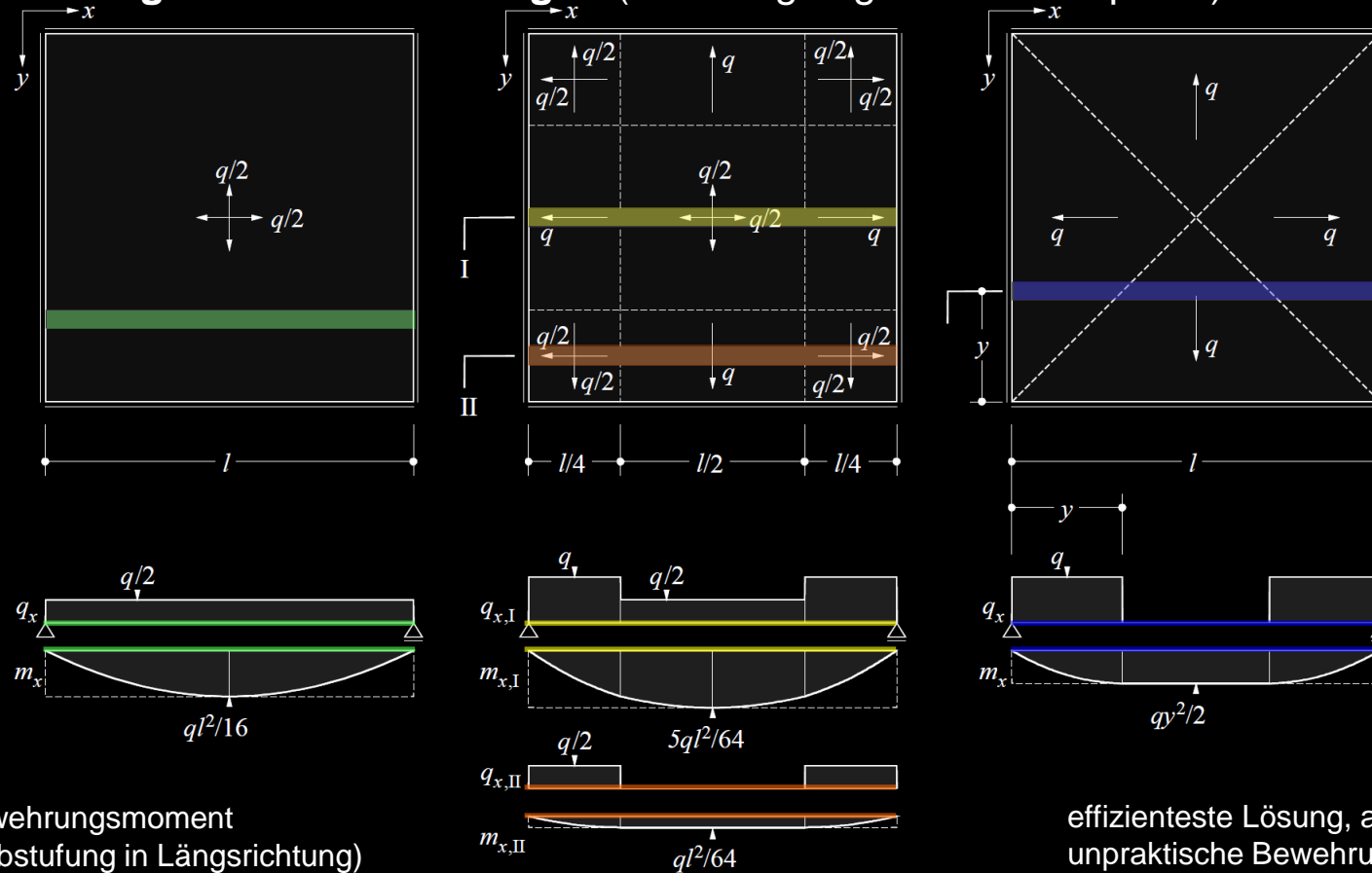
Für die effizienteste Aufteilung wird die volle Last an jeder Stelle der Platte zum nächsten Rand abgetragen (an jeder Stelle jeweils $q_x = q, q_y = 0$ resp. $q_y = q, q_x = 0$)

- geringe Bewehrungsaufwände (daher von Hillerborg ursprünglich bevorzugt)
- jedoch **unpraktische Bewehrungsanordnungen** (kontinuierliche Variation des Biegesteifigkeitswertes in den Streifen I und III erforderlich)
- in der Praxis sind daher alternative Lösungen mit konstanter Lastaufteilung pro Streifen besser geeignet ($q_x = \beta \cdot q, q_y = (1-\beta) \cdot q$)



Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Mögliche Lastaufteilungen (einfach gelagerte Quadratplatte)



Mittleres Bewehrungsmoment
(ohne / mit Abstufung in Längsrichtung)

Ohne Abstufung $m_{av} = \frac{q l^2}{16} = 0.0625 \cdot q l^2$

Mit Abstufung $m_{av} = \frac{2}{3} \cdot \frac{q l^2}{16} = 0.0417 \cdot q l^2$

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{5 q l^2}{64} + \frac{q l^2}{64} \right\} = 0.0469 \cdot q l^2$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{q l^2}{64} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4 q l^2}{64} = 0.0339 \cdot q l^2$$

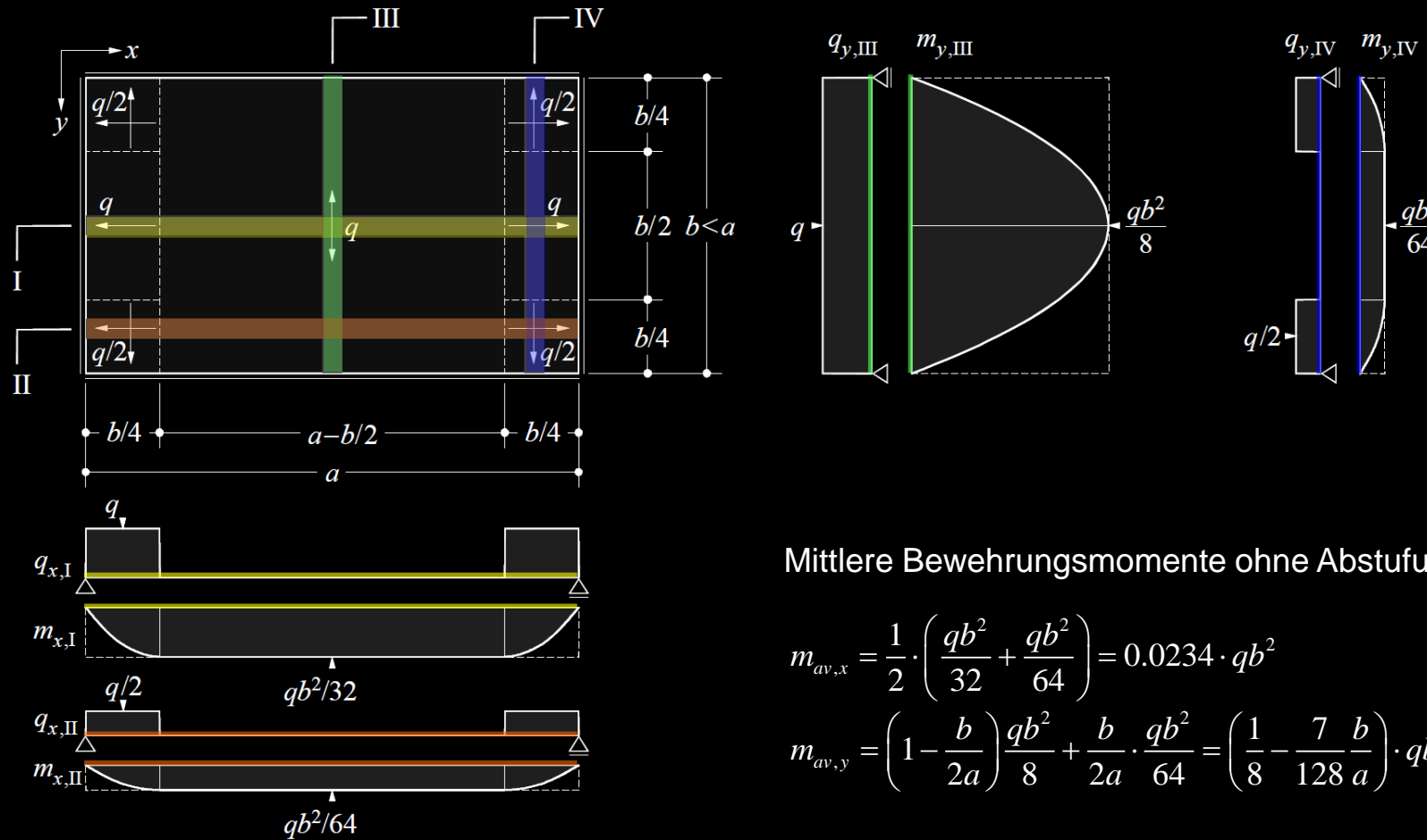
effizienteste Lösung, aber
unpraktische Bewehrung

$$\frac{2}{l} \cdot \int_0^{l/2} \frac{q \cdot y^2}{2} dy = \frac{q l^2}{24} = 0.0417 \cdot q l^2$$

$$\frac{2}{l} \cdot \int_0^{l/2} \frac{q \cdot y^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{l/2} \right) dy = 0.0313 \cdot q l^2$$

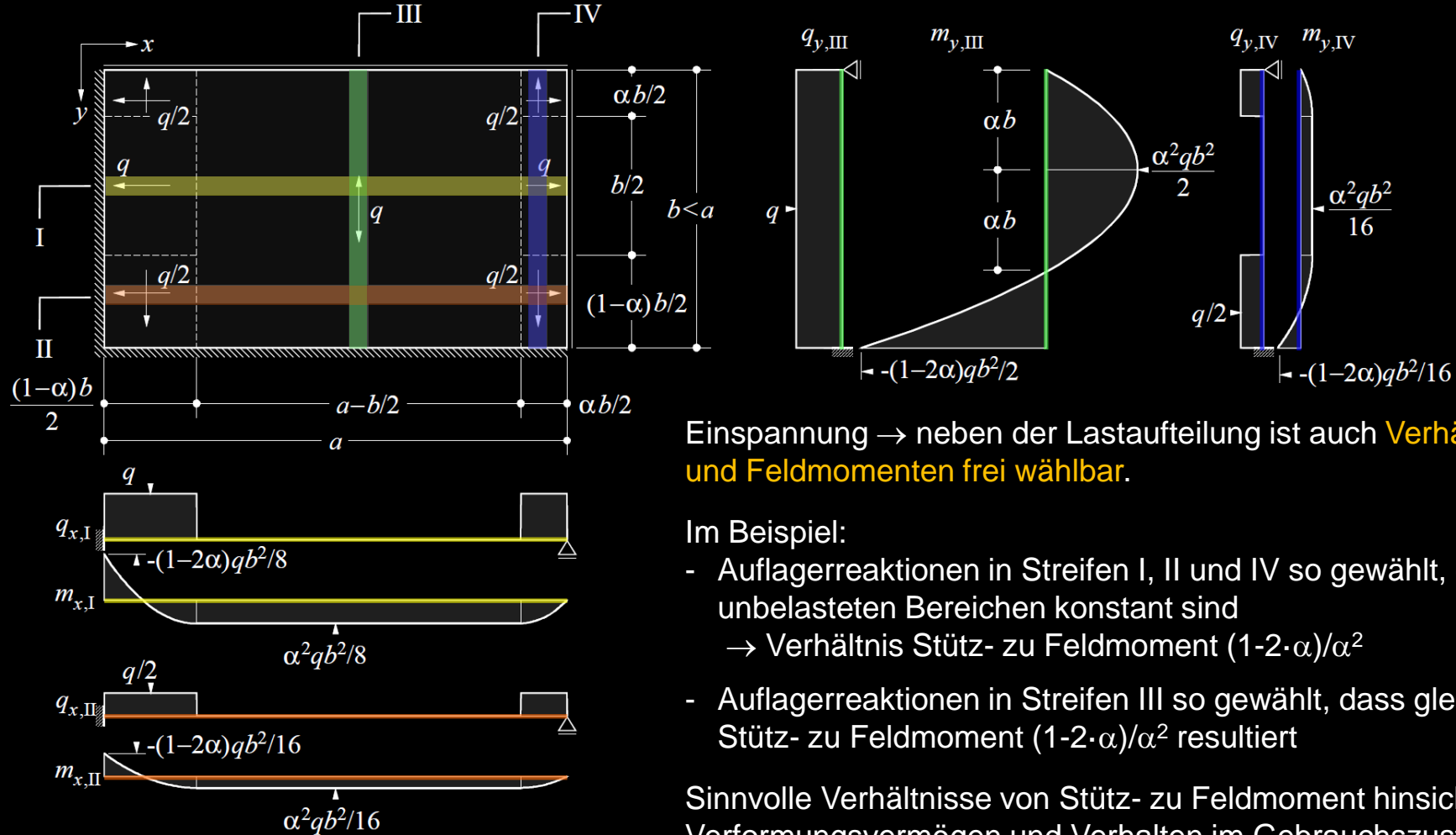
Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Mögliche Lastaufteilungen (einfach gelagerte Rechteckplatte)



Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Mögliche Lastaufteilungen (Rechteckplatte, 2 Ränder eingespannt)



Einspannung → neben der Lastaufteilung ist auch **Verhältnis zwischen Stütz- und Feldmomenten frei wählbar**.

Im Beispiel:

- Auflagerreaktionen in Streifen I, II und IV so gewählt, dass Momente in den unbelasteten Bereichen konstant sind
→ Verhältnis Stütz- zu Feldmoment $(1-2 \cdot \alpha)/\alpha^2$
- Auflagerreaktionen in Streifen III so gewählt, dass gleiches Verhältnis Stütz- zu Feldmoment $(1-2 \cdot \alpha)/\alpha^2$ resultiert

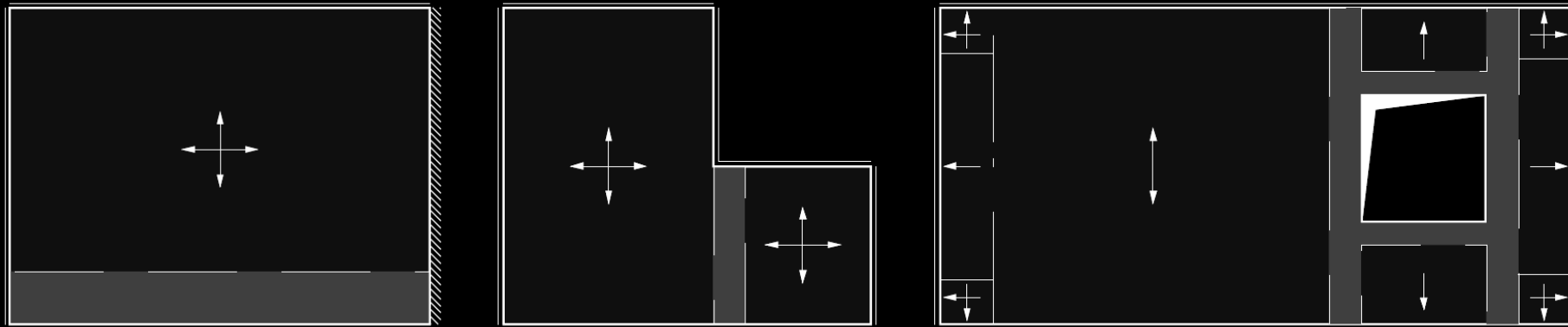
Sinnvolle Verhältnisse von Stütz- zu Feldmoment hinsichtlich Verformungsvermögen und Verhalten im Gebrauchszustand:
ca. $(1-2 \cdot \alpha)/\alpha^2 = 1.5 \dots 2.5 \rightarrow \alpha = 0.35 \dots 0.39$

Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Versteckte Unterzüge («strong bands»)

Versteckte Unterzüge übernehmen die Last anderer (indirekt gelagerter) Streifen und tragen sie zu den Auflagern ab.

- In einem ersten Schritt werden die versteckten Unterzüge als **Flächenlager** betrachtet (am einfachsten mit gleichmässiger Pressung).
- Anschliessend werden die **Reaktionen** des Flächenlagers als **Belastung** auf den versteckten Unterzug aufgebracht und schliesslich die Beanspruchungen superponiert.

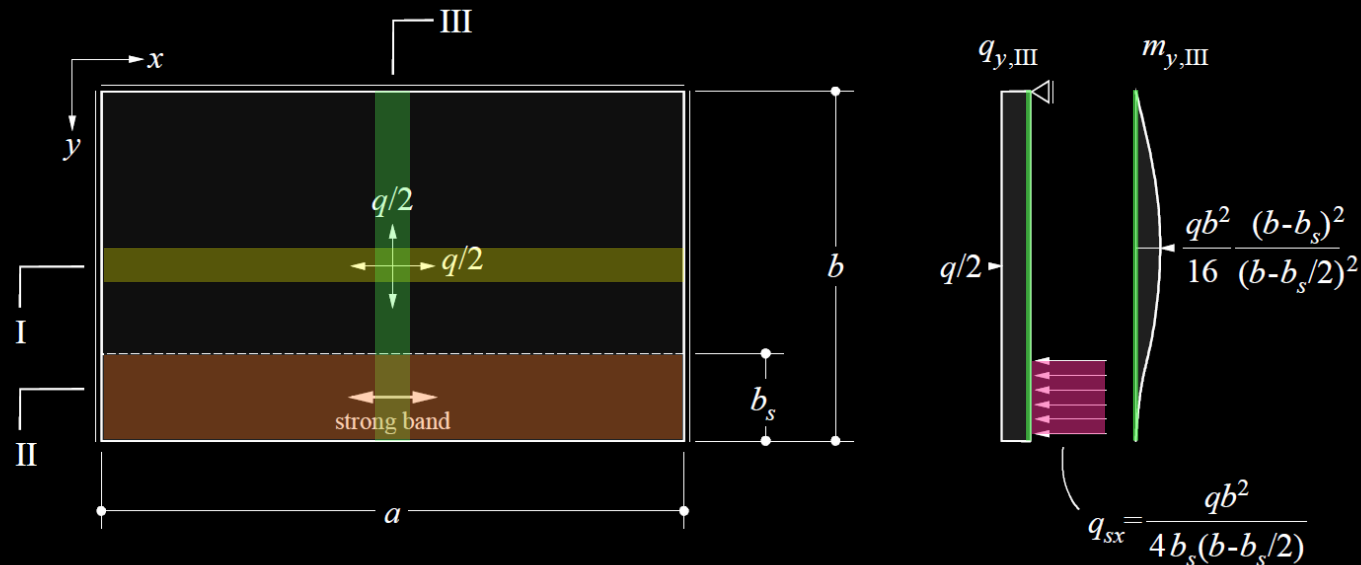


Wichtig: Kraftfluss konsequent vom Lastangriffspunkt bis zu den Auflagern verfolgen!

Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Beispiel versteckter Unterzug

Gegeben: Rechteckplatte, dreiseitig frei drehbar gelagert, vierter Rand frei, unter gleichmässiger Flächenlast q
Gesucht: Lastabtragung

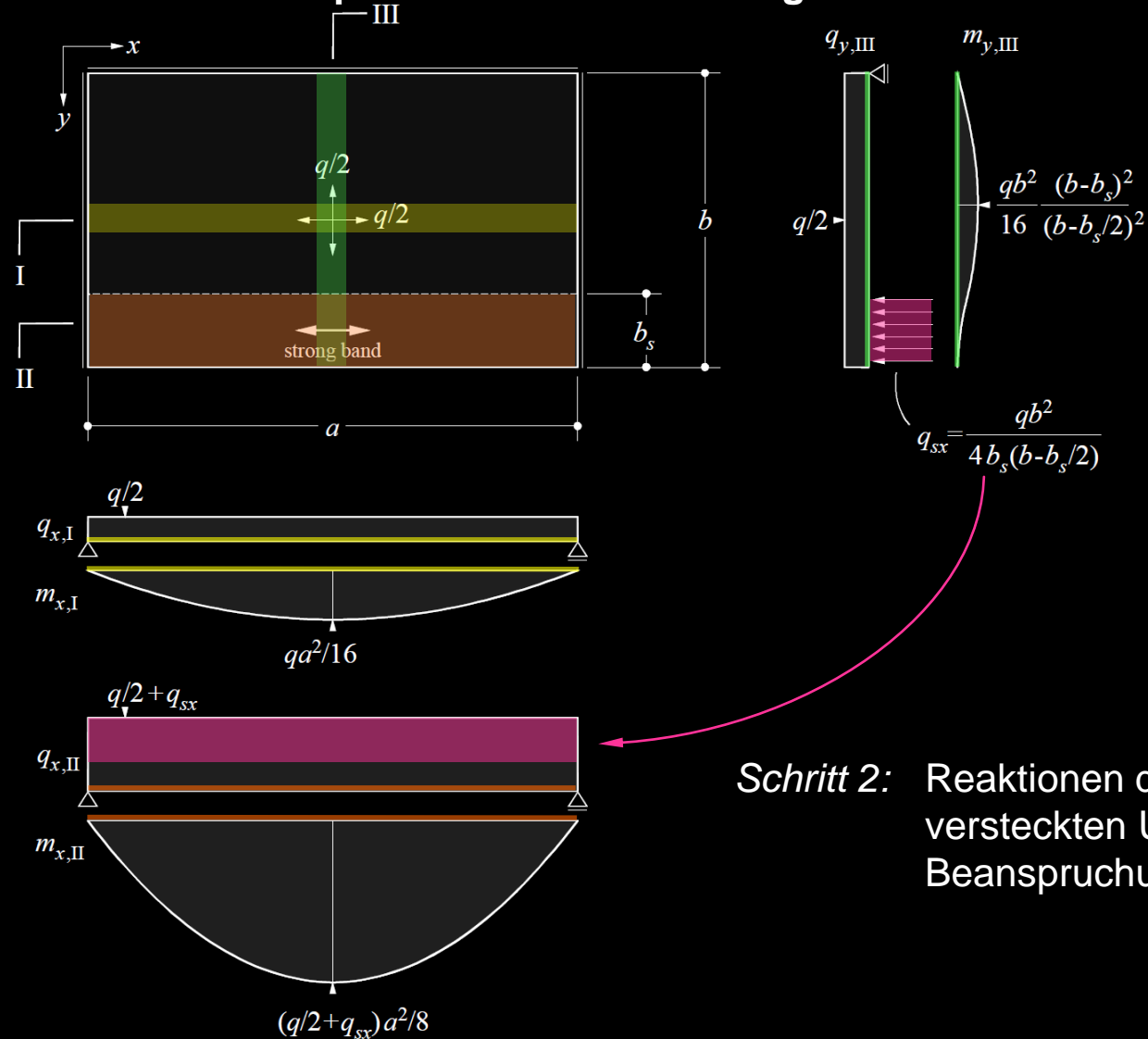


Schritt 1: versteckter Unterzug als Flächenlager betrachten (hier mit gleichmässiger Pressung)

$$\sum V = 0: \quad \frac{qb}{2} = q_{sx} b_s + A \quad \sum M = 0: \quad \frac{qb^2}{4} = \frac{q_{sx} b_s^2}{2} + A \cdot b \quad \longrightarrow \quad q_{sx} = \frac{qb^2}{4b_s \left(b - \frac{b_s}{2} \right)}$$

Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Beispiel versteckter Unterzug



Schritt 2: Reaktionen des Flächenlagers als Belastung auf versteckten Unterzug aufbringen und Beanspruchungen superponieren ($q/2 + q_{sx}$)

Platten – Gleichgewichtslösungen

Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilerelemente

Um Stützen und Einzellasten mit der Streifenmethode behandeln zu können, werden **Lastverteilerelemente** eingesetzt. Diese wandeln eine Punktlast in eine Flächenlast um oder umgekehrt. Sie entsprechen somit den Lösungen für (in der Mitte) punktgestützte Platten unter gleichmässig verteilter Last.

Stützen: Die Lastverteilerelemente werden als **Flächenlager mit gleichmässiger Pressung** betrachtet, welche durch indirekt gelagerte Streifen oder (in der Regel) versteckte Unterzüge belastet werden. Den resultierenden Biege widerständen aus den Unterzügen werden die für die Lastabtragung im Stützenbereich erforderlichen Biege widerstände superponiert.

Einzellasten: Die Einzellasten werden als **gleichmässig verteilte Flächenlasten** auf die Platte aufgebracht, welche durch Streifen oder (in der Regel) versteckte Unterzüge zu den Auflagern abgetragen werden. Den resultierenden Biege widerständen werden die für die Umwandlung der Punktlast in eine gleichmässig verteilte Belastung erforderlichen Biege widerstände superponiert.

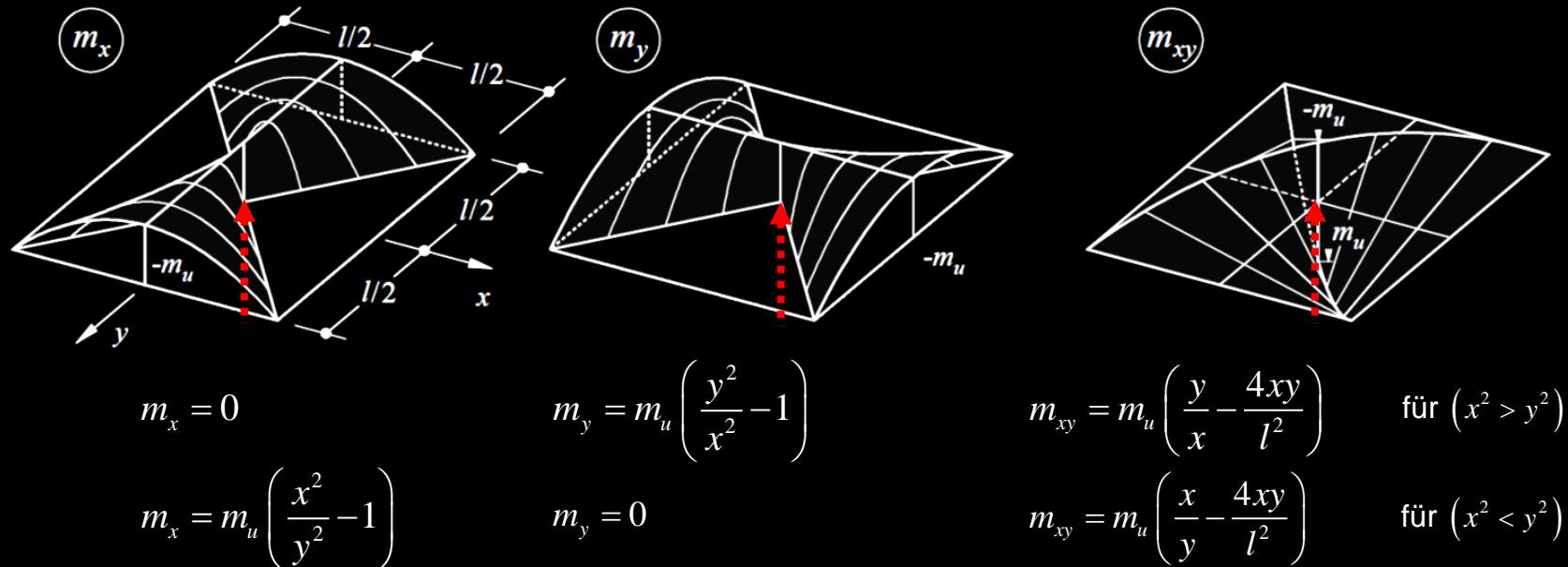
Platten – Gleichgewichtslösungen

Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilenelemente – Repetition Momentenfelder

Die untenstehenden Momentenfelder sind als «Lastverteilenelemente» zur **Umwandlung von Punktlasten in Flächenlasten** geeignet.

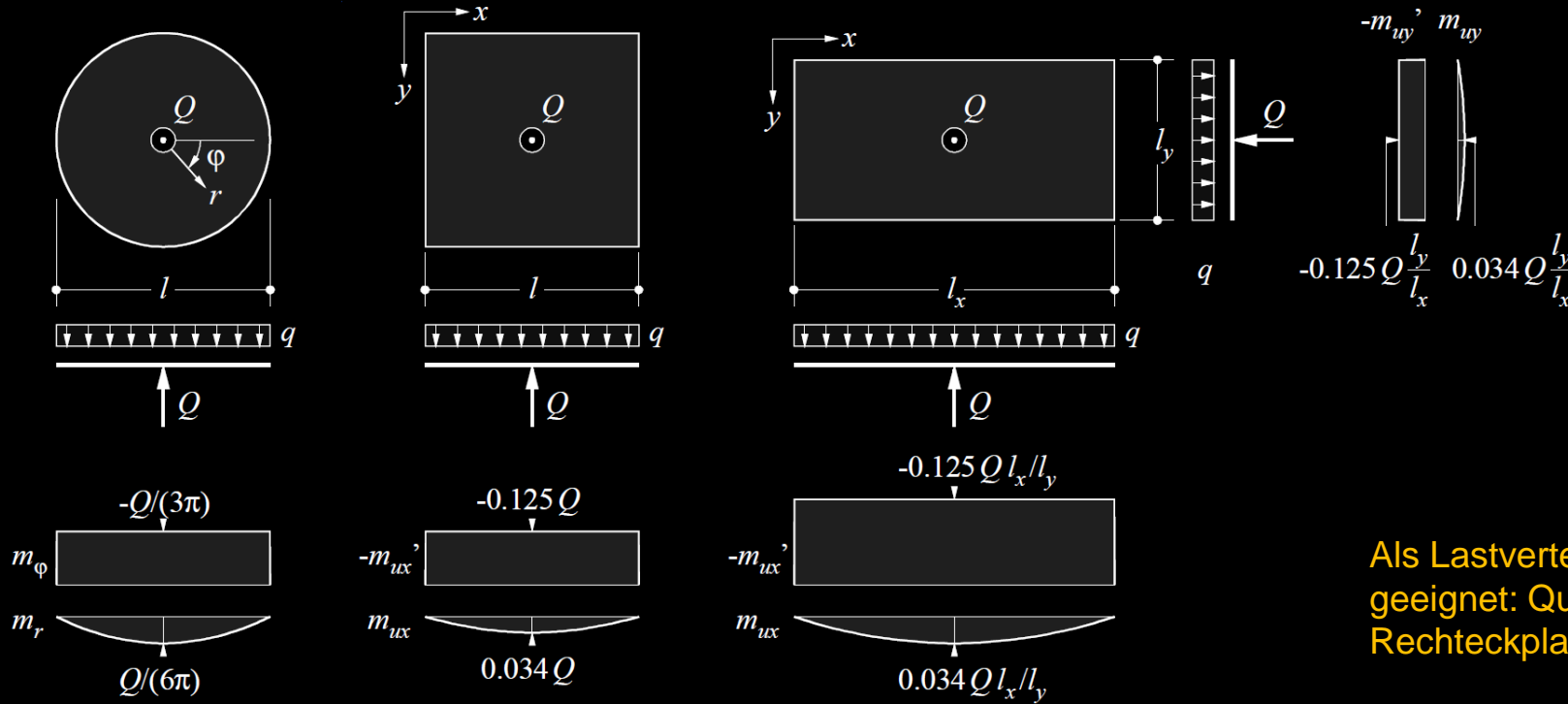
Überlagert man ihnen konstante positive Momente m_x und m_y , so erhält man mit $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ und $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$ den unteren Grenzwert für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung (Marti 1981):

$$q \geq 4(1 + \lambda) \frac{m_u}{l^2}, \quad \lambda = \frac{m'_{xu}}{m_u} = \frac{m'_{yu}}{m_u}$$



Platten – Gleichgewichtslösungen

Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilungselemente



Als Lastverteilungselemente
geeignet: Quadrat- und
Rechteckplatte

$$(m_u + m'_u) \geq \frac{Q}{2\pi}$$

$$m'_u \geq \frac{Q}{8}$$

$$m_u \geq \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8} \right) Q = 0.034 \cdot Q$$

$$m'_{x,u} \geq \frac{Q l_x}{8 l_y} \quad m_{x,u} \geq 0.034 \cdot q l_x^2 = 0.034 \cdot Q \frac{l_x}{l_y}$$

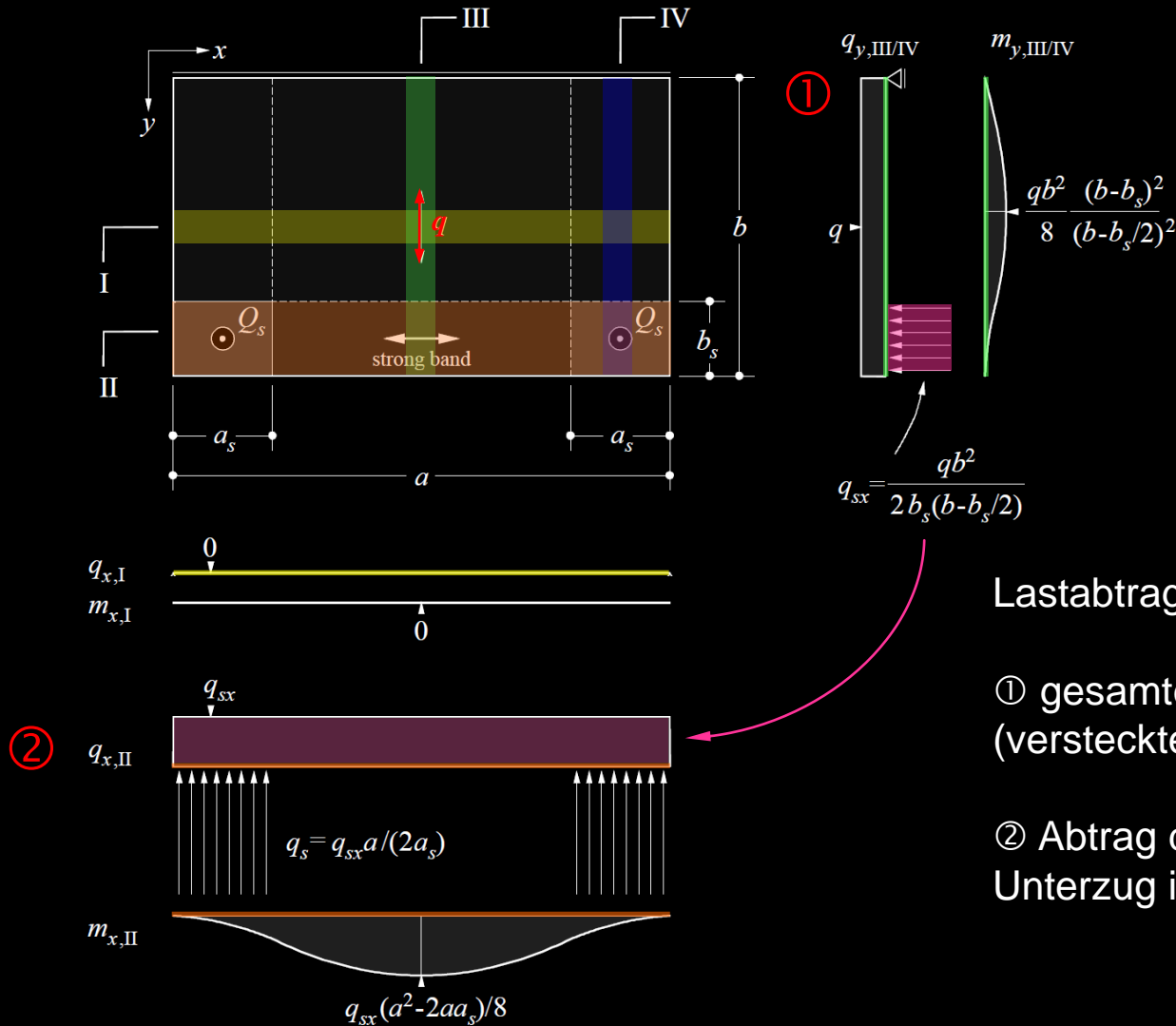
$$m'_{y,u} \geq \frac{Q l_y}{8 l_x} \quad m_{y,u} \geq 0.034 \cdot q l_y^2 = 0.034 \cdot Q \frac{l_y}{l_x}$$

(vollständige Lösung)

(Lösungen entsprechen oberen Grenzwerten, aber Stützenabmessungen sind endlich und unterer Grenzwert $q \geq 4(1+\lambda)m_u/l^2$ aus Momentenfeldern liegt stark auf sicherer Seite → für Bemessung ok)

Platten – Gleichgewichtslösungen

Erweiterte Streifenmethode: Beispiel Rechteckplatte, einseitig aufgelegt, auf 2 Stützen gelagert

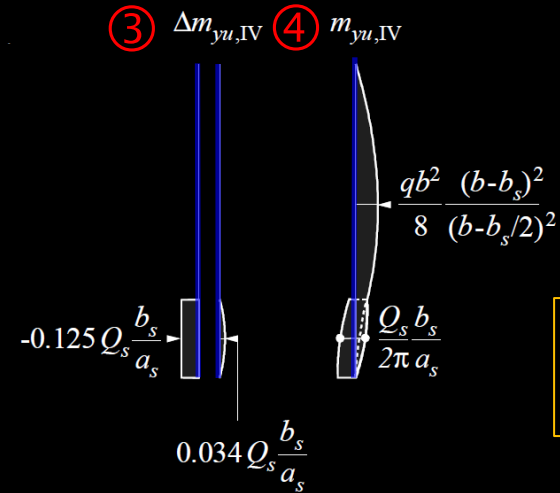
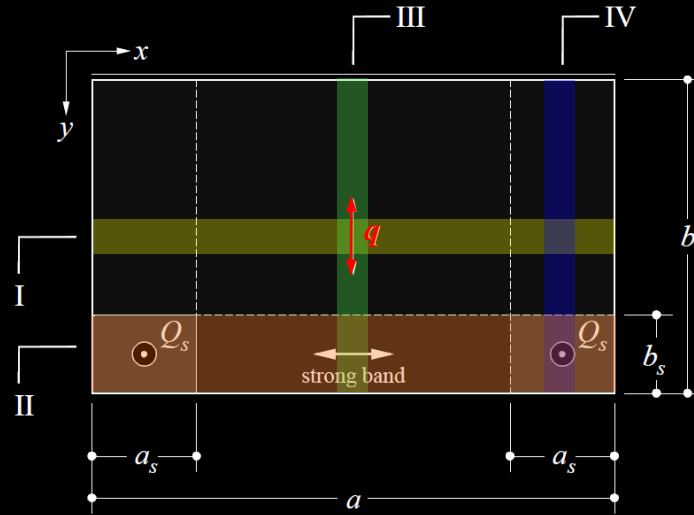


Lastabtrag:

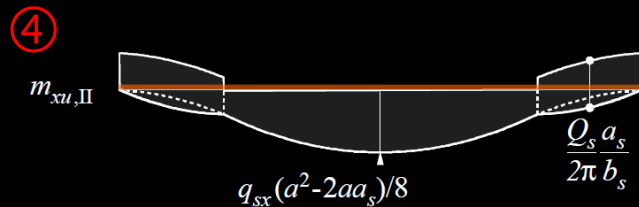
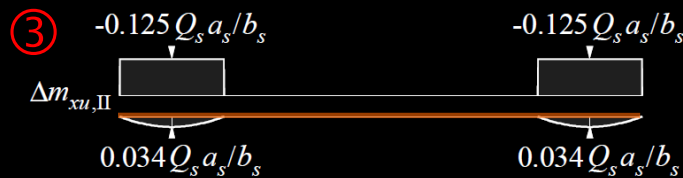
- ① gesamte Belastung zuerst in y-Richtung abgetragen (versteckter Unterzug als Flächenlager $a \cdot b_s$)
- ② Abtrag der Reaktionen auf $a \cdot b_s$ durch den versteckten Unterzug in x-Richtung (Stützen als Flächen-lager $a_s \cdot b_s$)

Platten – Gleichgewichtslösungen

Erweiterte Streifenmethode: Beispiel Rechteckplatte, einseitig aufgelegt, auf 2 Stützen gelagert



$$Q_s = q_s a_s b_s = \frac{qab}{4} \frac{b}{\left(b - \frac{b_s}{2}\right)}$$



Lastabtrag:

- ③ Ermitteln der erforderlichen Biegesteifigkeiten für die Umwandlung der Flächenlast q_s auf $a_s \cdot b_s$ in eine Einzellast Q_s
- ④ Überlagerung sämtlicher erforderlicher Biegesteifigkeiten

Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: Übersicht der Möglichkeiten zur Bemessung

1. Momentenfelder

Verwendung der behandelten Lösungen für in der Mitte gestützte Quadrat- oder Rechteckplatten mit freien Rändern unter gleichmässig verteilter Flächenlast (bei Anwendung der Momentenfelder nach statischer Methode resultiert ein strenger unterer Grenzwert für die Traglast).

2. «Trägerrost in Stützenachsen» (Anwendung der Streifenmethode) (*)

- (a) Trägerrost in Stützenachsen (Breite $\rightarrow 0$) annehmen, Schnittgrößen und Auflagerreaktionen für eine umfanggelagerte Quadratplatte nach der einfachen Streifenmethode ermitteln.
- (b) Auflagerreaktionen der Plattenberechnung umgekehrt als Belastung auf den (torsionsweichen) Trägerrost aufbringen, Schnittgrößen im Trägerrost ermitteln, auf endliche Breite der Platte verteilen
- (c) Schnittgrößen des Trägerrosts mit Momenten aus der Plattenberechnung superponieren
(Integration der Momente in Feldmitte über die Plattenbreite liefert in jedem Fall $\int m_x dy = \int m_y dx = ql^2/8$
d.h. in x - und y -Richtung wird jeweils die volle Belastung q abgetragen)

→ siehe nachfolgendes Beispiel

Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: Übersicht der Möglichkeiten zur Bemessung

3. Stellvertretende Rahmen (in Praxis früher oft verwendet) (*)

- (a) Ermittlung der Beanspruchung von Rahmen in den Stützenachsen, wobei in x - und y -Richtung je die volle Belastung q abgetragen werden muss. (Beliebige Lastfallkombinationen, ggf. Aufnahme von Momenten durch Stützen und die Modellierung von (Rand-)unterzügen als torsionssteife Elemente sind dabei möglich.)
- (b) Momente der Rahmenelemente in Querrichtung auf Platte verteilen. Die hierbei angewandten Regeln orientieren sich an elastischen Lösungen. (Es resultieren unterschiedliche Querverteilungen für Pilzdecken mit Stützenkopfverstärkungen und für Flachdecken.)
→ siehe nachfolgendes Beispiel

4. Linear elastische Plattenberechnung mit Finite-Element-Methode

Anwendung entsprechender Computerprogramme zur Berechnung der Bemessungsschnittgrößen.

- (*) Kraftfluss im Stützenbereich wird nicht untersucht → es resultiert kein strenger unterer Grenzwert → **Biegesteifigkeit im Stützenbereich überprüfen!** Richtwerte:

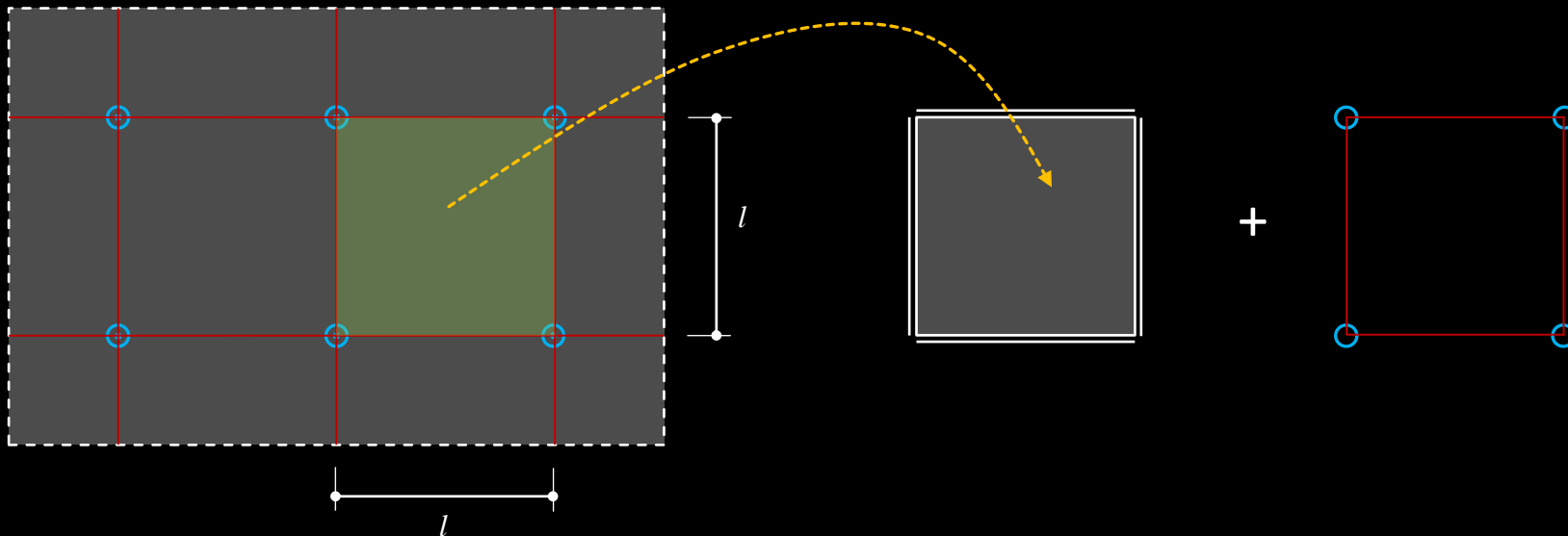
Innenstützen: $m_u' \geq Q/8$ im Mittel über eine Breite von $0.3 \cdot l_x$ resp. $0.3 \cdot l_y$; $Q =$ Stützenlast

Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: «Trägerrost in Stützenachsen»

Ausgangslage: Flachdecke mit in quadratischem Raster angeordneten Stützen.

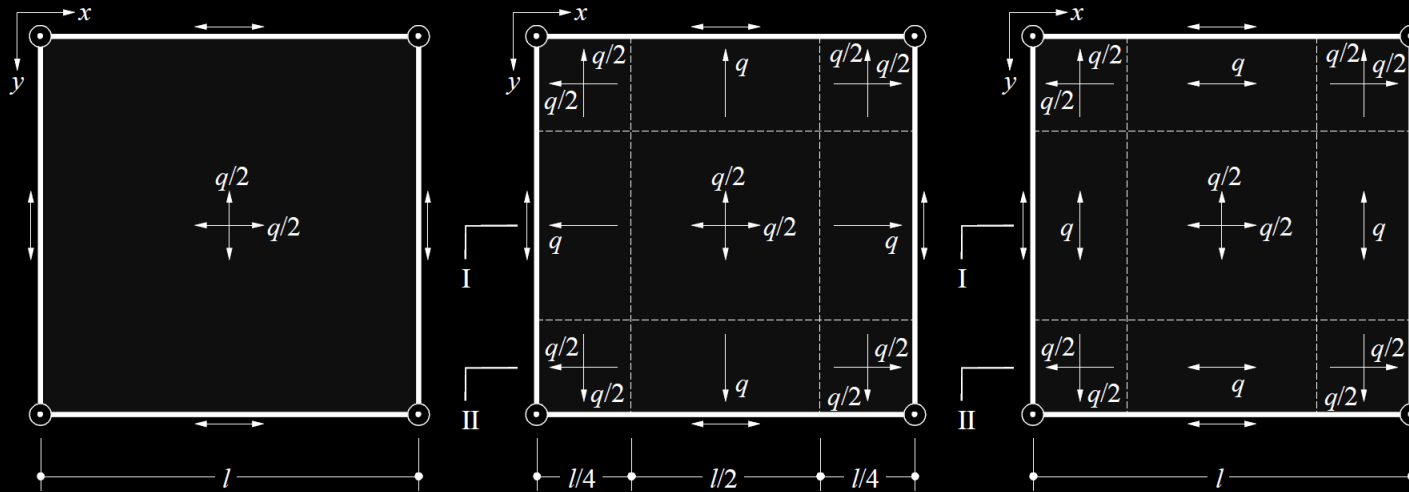
- Modellierung als Aneinanderreihung einfach gelagerter Quadratplatten und Lastabtrag nach Streifenmethode
- Lastabtragung der «Auflagerreaktionen» über fiktive Trägerroste zu den Stützen
- Durchlaufwirkung wird hier vernachlässigt, kann aber durch nachträgliche Momentenumlagerung (in Richtung der betrachteten Streifen) berücksichtigt werden



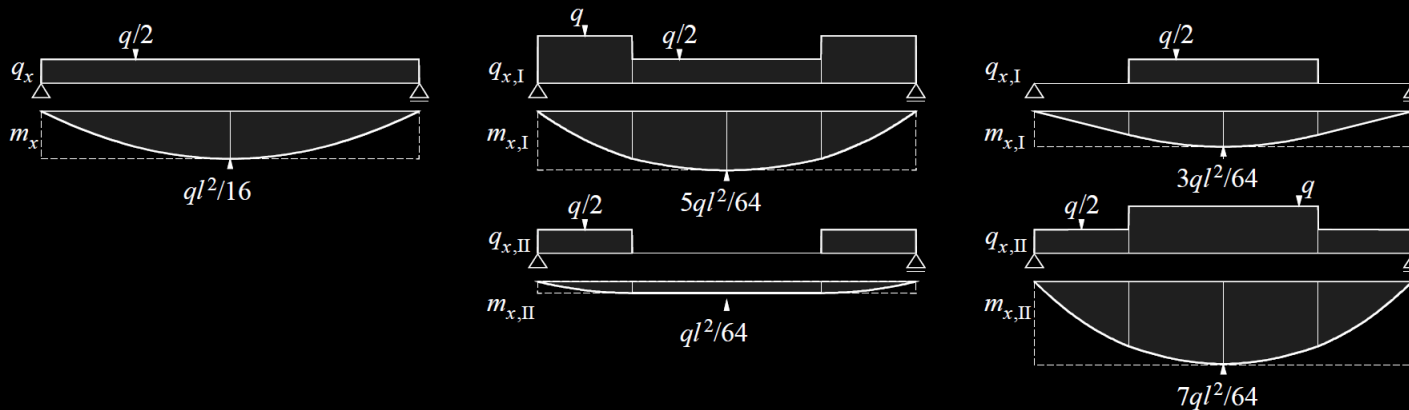
Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: «Trägerrost in Stützenachsen»

Einfach gelagerte Quadratplatte: Mögliche Lastaufteilungen



Belastung und Beanspruchung der Platte nach dem Prinzip der einfachen Streifenmethode



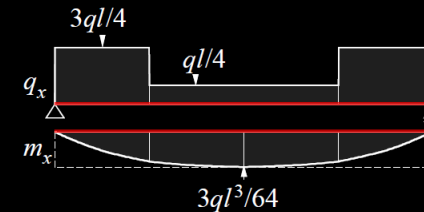
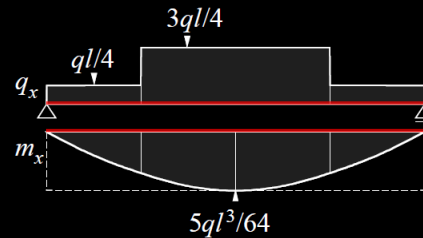
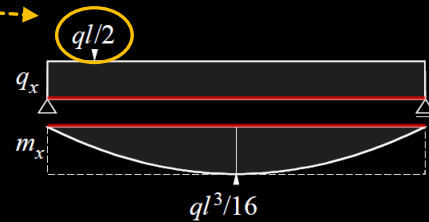
Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: «Trägerrost in Stützenachsen»

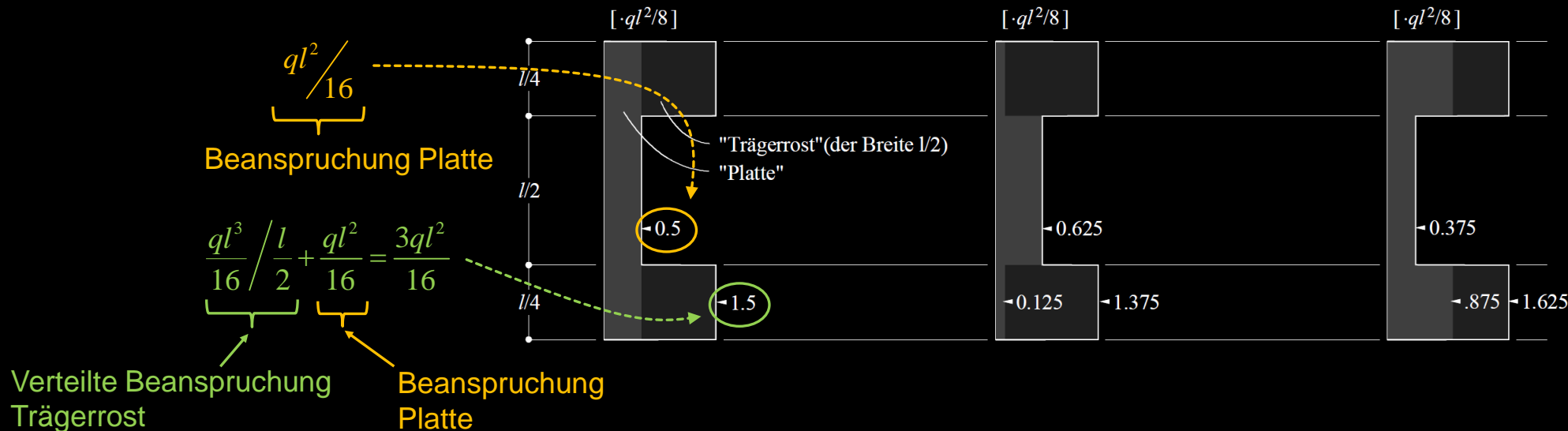
«Auflagerreaktionen» der Platte als Belastung des **Trägerrostes**

Auflagerreaktionen beider angrenzender Quadratplatten:

$$2 \cdot \frac{ql}{4} = \frac{ql}{2}$$



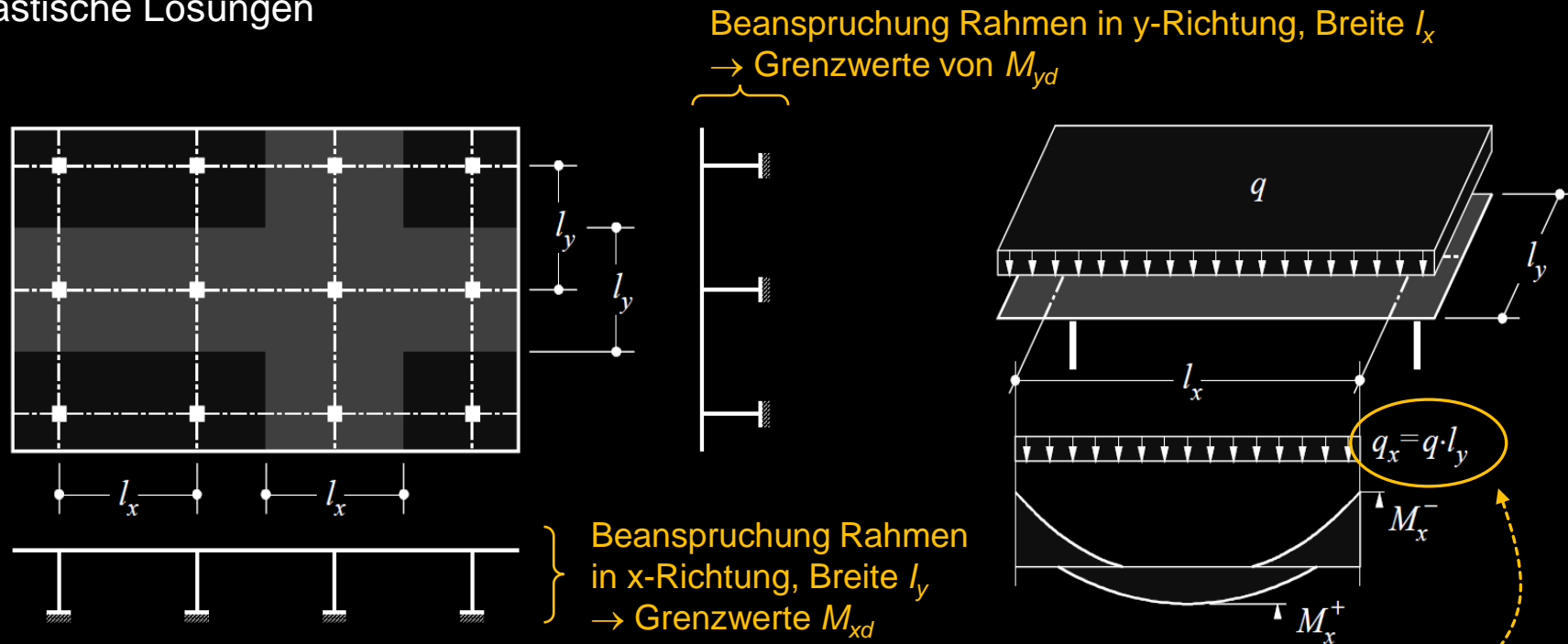
Verteilung der Beanspruchung des Trägerrostes auf eine Plattenbreite von $l/2$
Abgebildet ist die Beanspruchung in x-Richtung in Feldmitte



Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: Stellvertretende Rahmen

Vorgehen ähnlich wie beim «Trägerrost in Stützenachsen», jedoch unter Berücksichtigung einer Durchlaufwirkung und in Anlehnung an elastische Lösungen

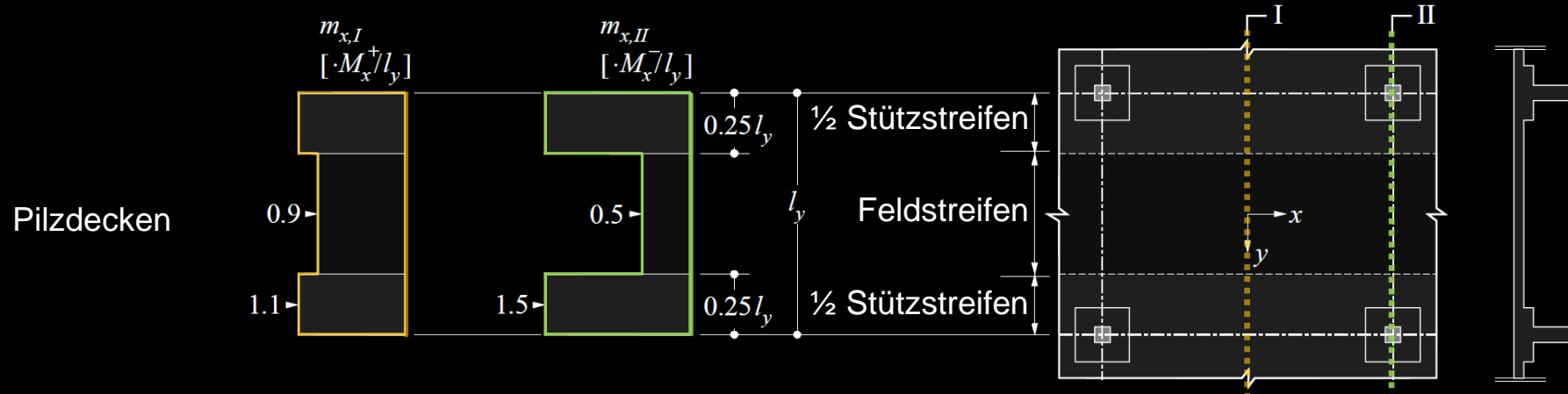


Beanspruchung des Rahmens mit Breite $\rightarrow 0$ in x-Richtung ergibt die Momente M_x^+ und M_x^- (Grenzwerte) pro Richtung ist die volle Last abzutragen!

Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: Stellvertretende Rahmen

Verteilung der Momente M_x^+ und M_x^- über die Breite l_y . Die Verteilzahlen sind in Anlehnung an elastische Lösungen festgelegt.



Bsp.: Moment in Feldmitte in x-Richtung zwischen den Stützen: $m_{x,I} = 0.9 \cdot \frac{M_x^+}{l_y}$
 über und neben den Stützen: $m_{x,I} = 1.1 \cdot \frac{M_x^+}{l_y}$

In y-Richtung analoges Vorgehen (Verteilung M_y^+ und M_y^- über die Breite l_x)

Platten – Gleichgewichtslösungen

Flachdecken: Stellvertretende Rahmen

Unterschiedliche Verteilzahlen für Pilz- und Flachdecken

