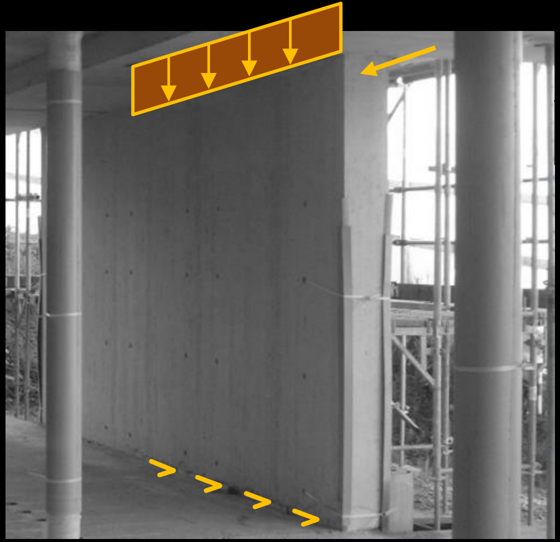
Platten - Grundlagen

Platten - Grundlagen

Flächentragwerke allgemein

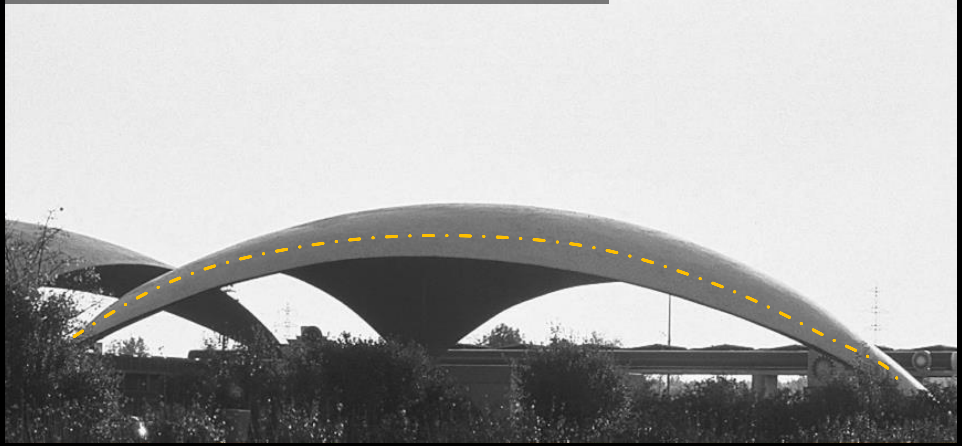
Platten primär senkrecht zur Ebene belastet



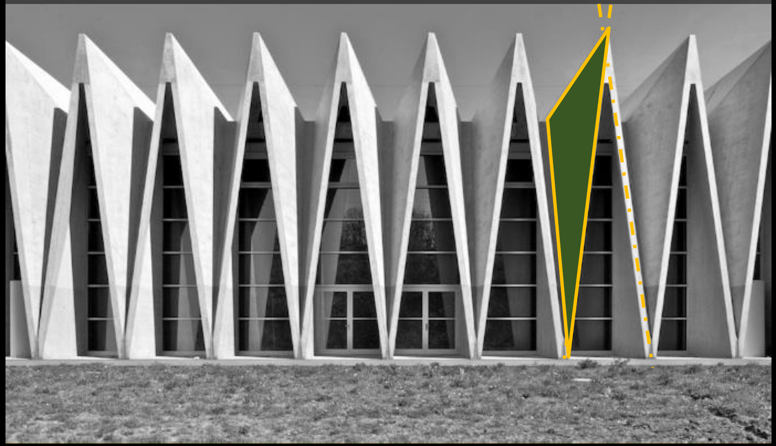
Scheiben

primär in Ebene belastet

Schalen gekrümmte Mittelfläche



Faltwerke aus ebenen Teilflächen gebildet



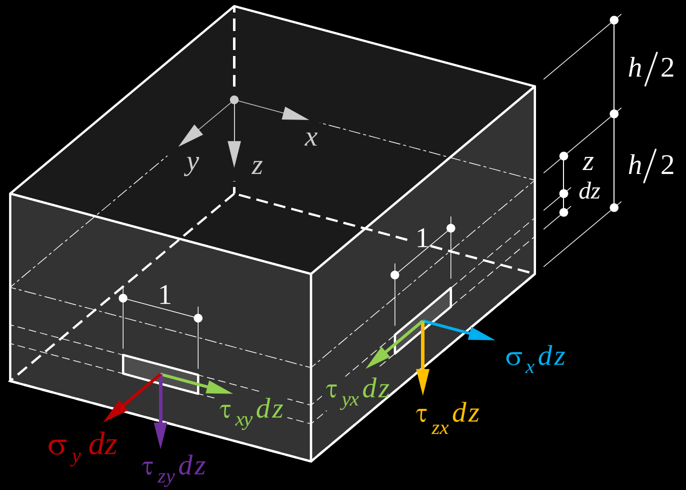
Platten - Grundlagen

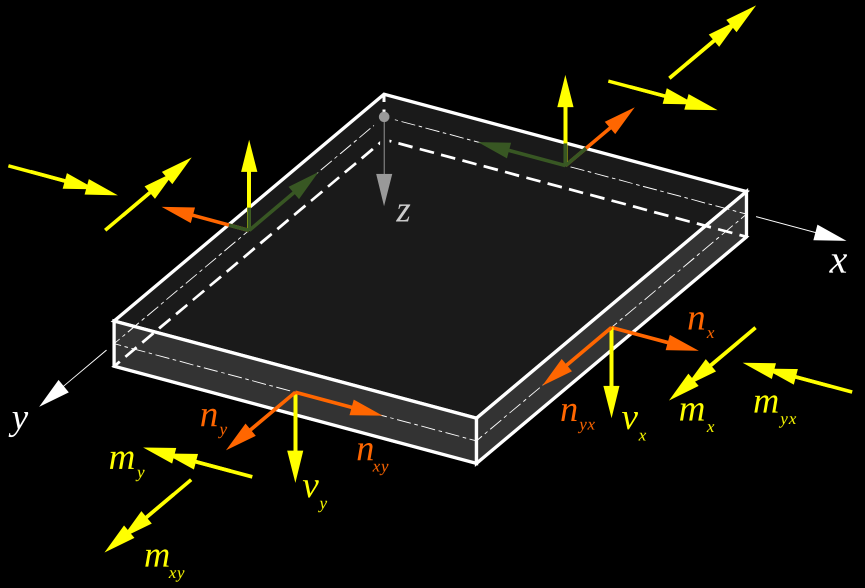
Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht

- Elastische Plattentheorie
  - Lösung der Platten-differentialgleichung
  - Approximative Lösungen mit Energieverfahren
  - Methode der Finiten Elemente
- Plastische Plattentheorie
  - Statische Methode der Plastizitätstheorie
    - Methode der Finiten Elemente
    - Momentenansätze
    - Methode der stell-vertretenden Rahmen
    - Streifenmethode
      - einfach
      - erweitert
  - Kinematische Methode der Plastizitätstheorie
    - Fliessgelenklinienmethode

Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsresultierende





$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\,dz$$ [kNm/m=kN]

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}\,dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\,dz$$ [kN/m]

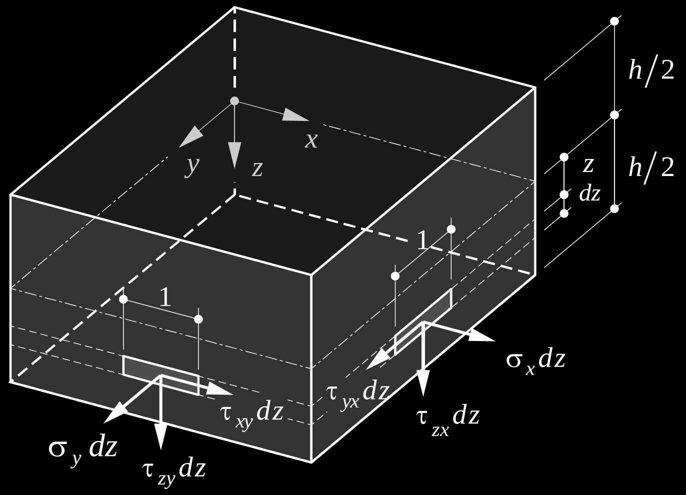
Biegespannungs-zustand (Platte): Biegemomente und Querkräfte

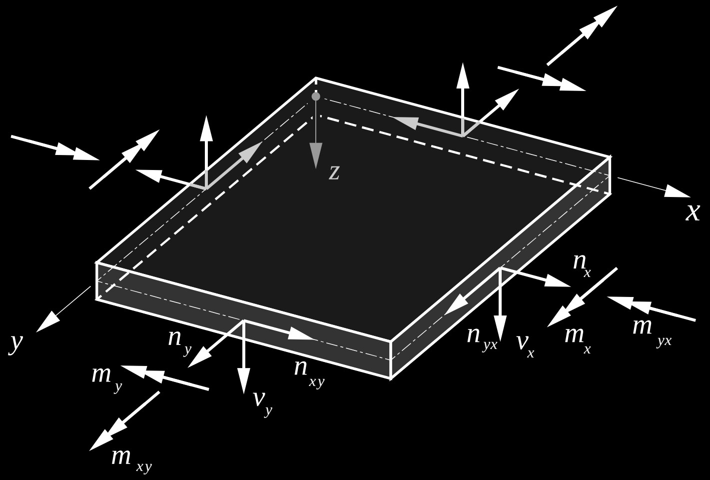
$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\,dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y\,dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\,dz$$ [kN/m]

Membranspannungs-zustand (Scheibe): Membrankräfte (Normal- /Schubkräfte)

Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsresultierende





$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz\,, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\, dz\,, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\, dz$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}\, dz\,, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\, dz$$

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\, dz\,, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y\, dz\,, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\, dz$$

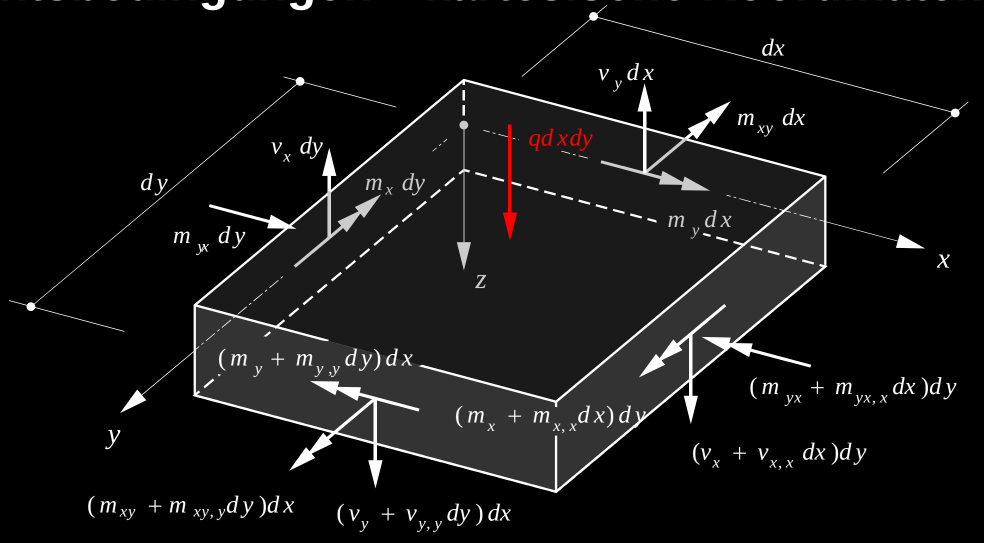
Vorzeichenkonvention

- Positive Spannungen wirken an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Achsenrichtung
- Positive Membran- und Querkräfte entsprechen positiven zugehörigen Spannungen
- Positive Momente entsprechen positiven zugehörigen Spannungen für z > 0
- Indizes: 1. Index: Richtung der Spannung
  2. Index: Normalenrichtung des Elements, an dem Spannung wirkt

Platten – Statische Beziehungen

Platten – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen – kartesische Koordinaten



→ Plattengleichgewichtsbedingung:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}}_{\text{Balken in x-Richtung}} + \underbrace{2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}}_{\text{zusätzlich: Drillmomente}} + \underbrace{\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}}_{\text{Balken in y-Richtung}} + q = 0}$$

↑

Herleitung über Gleichgewicht am differentiellen Plattenelement:

$$-v_x\,dy - v_y\,dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)dx + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx\right)dy + q\,dxdy = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0$$

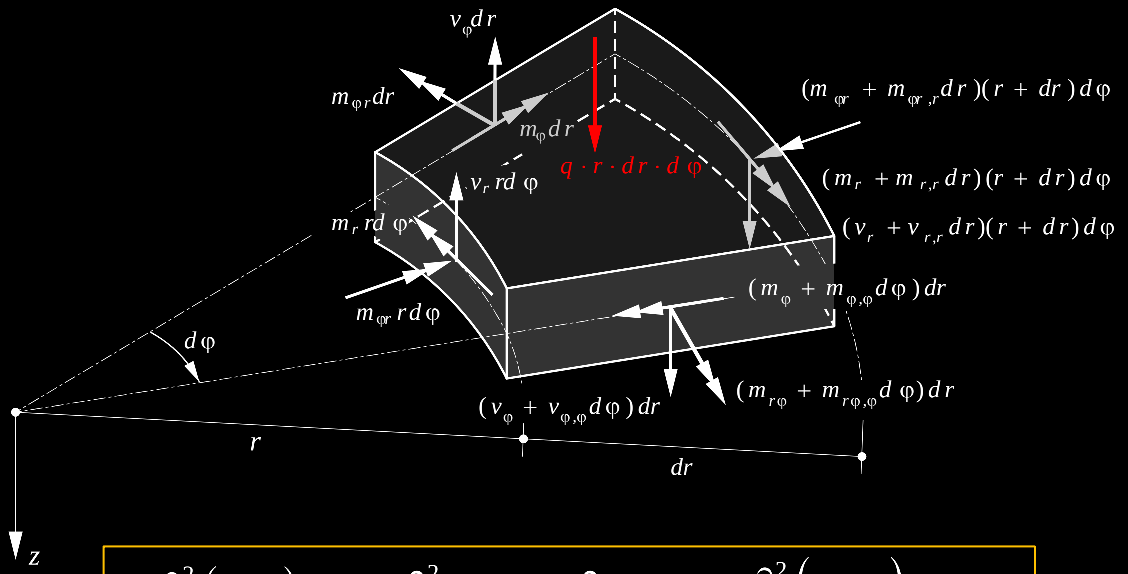
$$-m_x\,dy - m_{xy}\,dx + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy\right)dx - v_x dydx = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$-m_y\,dx - m_{yx}\,dy + \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y}dy\right)dx + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}dx\right)dy - v_y dxdy = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} - v_y = 0$$

Terme mit $(dx)^2$ bzw. $(dy)^2$ vernachlässigt

Platten – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen – Zylinderkoordinaten



$$\boxed{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(rm_r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial m_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2(rm_{r\varphi})}{\partial r\partial\varphi}+q=0}$$

Herleitung über Gleichgewicht am differentiellen Plattenelement:

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+qr=0$$

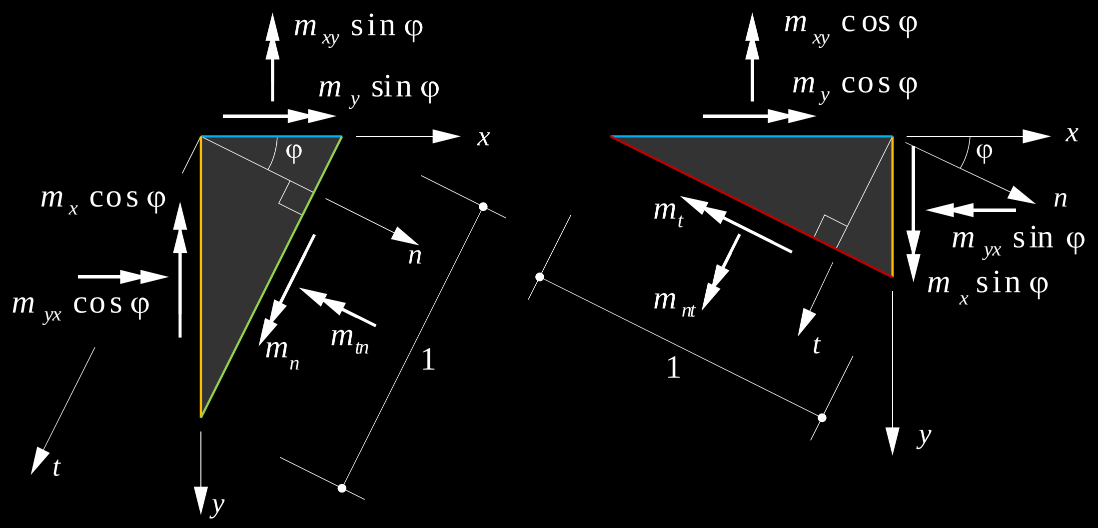
$$\frac{\partial(rm_r)}{\partial r}-m_\varphi+\frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial\varphi}-rv_r=0$$

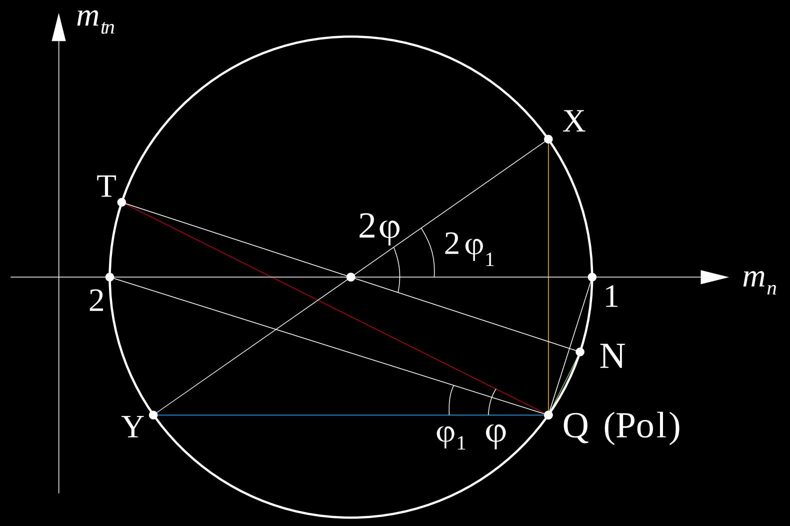
$$2m_{r\varphi}+r\cdot\frac{\partial(m_{r\varphi})}{\partial r}+\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi}-rv_\varphi=0$$

Bzw. für rotationssymmetrische Fälle: $\boxed{\frac{\partial^2(rm_r)}{\partial r^2}-\frac{\partial m_\varphi}{\partial r}+qr=0}$

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Biege- und Drillmomente





Biege- und Drillmomente in einer beliebigen Richtung φ:

$$m_n = m_x \cos^2\varphi + m_y \sin^2\varphi + m_{xy}\sin 2\varphi$$

$$m_t = m_x \sin^2\varphi + m_y \cos^2\varphi - m_{xy}\sin 2\varphi$$

$$m_{tn} = \left(m_y - m_x\right)\sin\varphi\cos\varphi + m_{xy}\cos 2\varphi$$

NB: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,\ \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

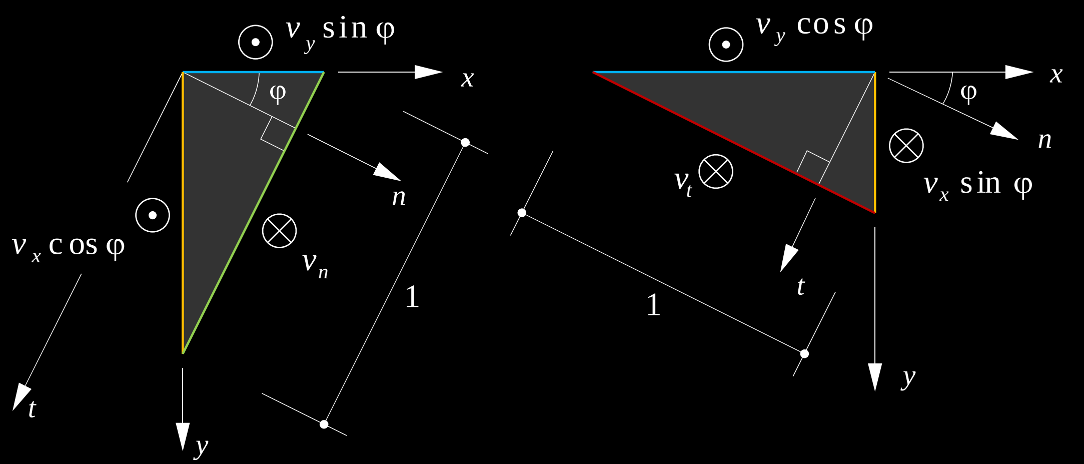
Hauptrichtung φ_1 (Drillmomente = 0) und Hauptmomente (→ Mohr'scher Kreis):

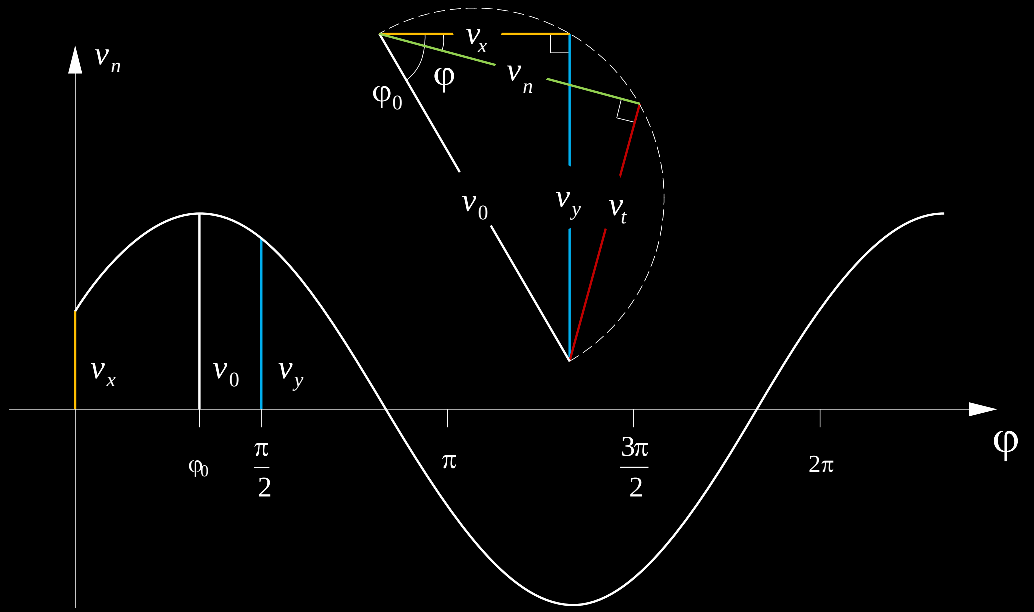
$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}$$

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(m_x - m_y\right)^2 + 4m_{xy}^2}}{2}$$

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Querkräfte





Querkräfte in einer beliebigen Richtung φ:

$$v_n = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi$$

$$v_t = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$$

Hauptquerkraft und zugehörige Richtung φ_0 (Interpretation mit Thaleskreis):

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{v_y}{v_x}$$ (allgemein ist $\varphi_0 \neq \varphi_1$)

Platten – Randbedingungen

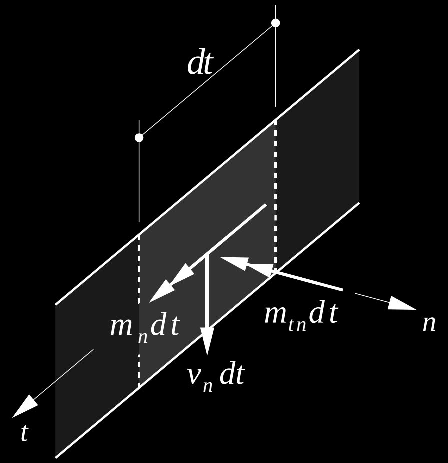
Randbedingungen allgemein (elastische Platten)

Am Rand einer Platte greifen allgemein Momente m_n, m_{tn} und eine Querkraft v_n an.

Inhomogene Bipotentialgleichung gemäss Kirchhoffscher Theorie dünner elastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta\Delta w = \frac{q}{D} \qquad mit \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}}$$

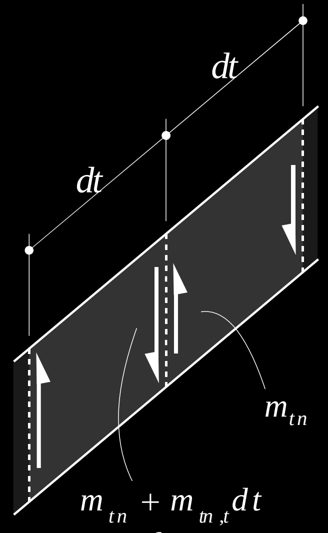
→ dabei sind nur 2 Randbedingungen an die Lösung anpassbar
→ jedoch 3 Kraftgrössen vorhanden (m_n, m_{tn}, v_n)
→ zusätzliche Bedingung erforderlich



Kräfte am Plattenrand

Weitere Bedingung für einfach gelagerte und freie Plattenränder:

→ Ersetzen der Drillmomente $m_{tn} \cdot dt$ durch stetige Verteilung von vertikalen Kräftepaaren m_{tn}, welche sich an den Grenzen zwischen den infinitesimalen Elementen jeweils bis auf den Zuwachs $m_{tn,t} \cdot dt$ aufheben



Kräftepaare

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen allgemein (elastische Platten)

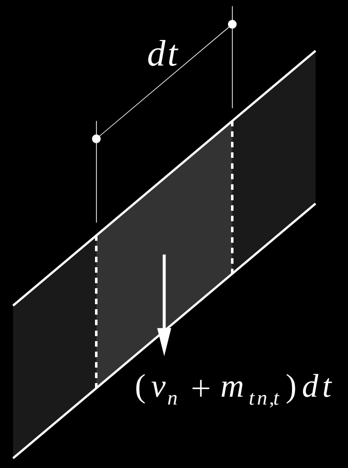
$\rightarrow$ Zuwachs pro Längeneinheit dm_{tn} / dt wird mit der Querkraft v_n zu einer Stützkraft zusammengefasst

$$\boxed{v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t}}$$

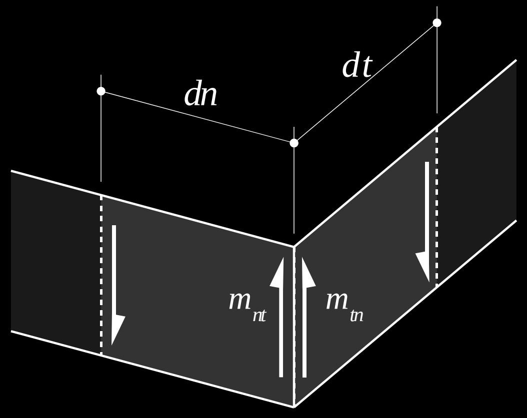
(Herleitung mit Gleichgewichtsbeziehung $\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$)

$\rightarrow$ In einer Plattenecke addieren sich die Drillmomente der beiden Ränder zu einer Eckkraft von $2\ m_{tn}$

Diese Behandlung von Drillmomenten am Plattenrand geht auf Thomson und Tait (1883) zurück und lässt sich mit dem Prinzip von de Saint Venant «begründen».



Stützkraft



Eckkraft

Platten – Randbedingungen

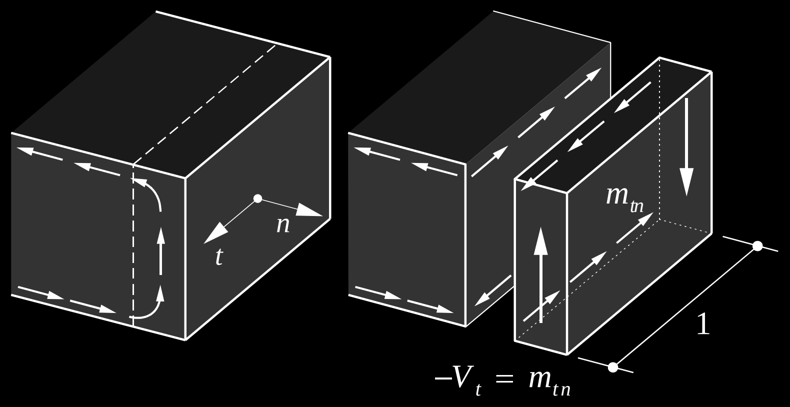
Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

Statische Methode der Plastizitätstheorie – Erklärung mit Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern, welche nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruht:

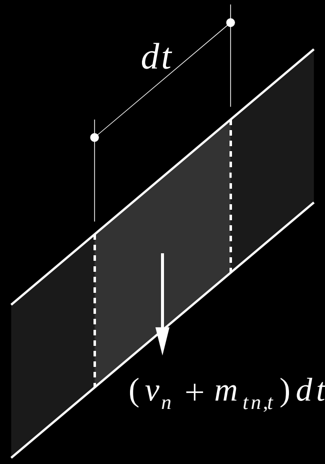
→ Aus Gleichgewicht in einer schmalen Randzone der Platte folgt die Randquerkraft: $V_t = -m_{tn}$

→ *sofern*: Plattenrand ist spannungsfrei und die in der Randzone auftretenden Spannungen σ_t ändern sich nicht in t-Richtung (Clyde, 1979).

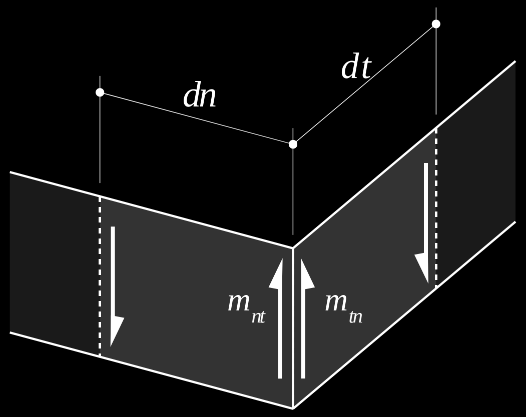
→ Aus der Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$ folgen die Eckkräfte 2 m_{tn} und der Beitrag von $m_{tn,t}$ zur Stützkraft



Querkraft in Randzone



Stützkraft



Eckkraft

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

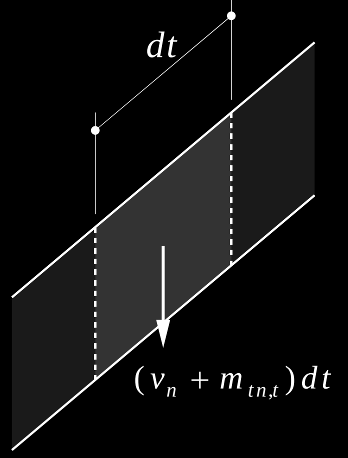
$\rightarrow$ Randbedingungen auf Basis von Gleichgewichtsüberlegungen:

- eingespannter Rand: m_n, m_{tn} und v_n beliebig
- einfach gelagerter Rand: m_n = 0, resultierende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$$

- freier Rand: m_n = 0, verschwindende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$$



Stützkraft

Platten – Randbedingungen

Randbewehrung

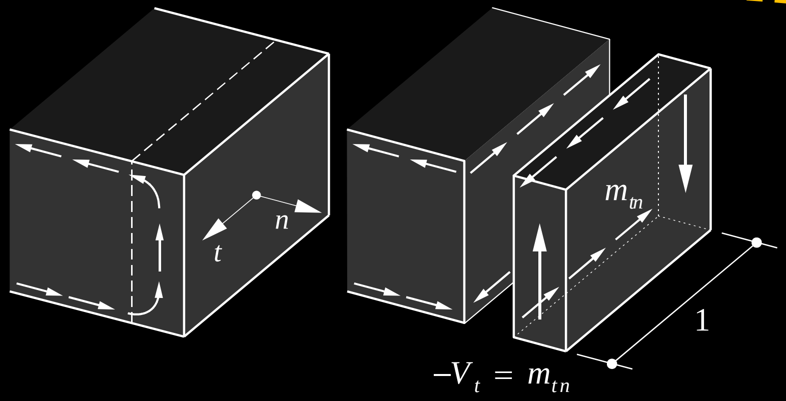
Werden entlang von einfach gelagerten und freien Rändern Drillmomente in Rechnung gestellt, so ist eine Bewehrung zur Aufnahme von $V_t = -m_{tn}$ anzuordnen.

Veranschaulichung (Ecke, reine Drillung):

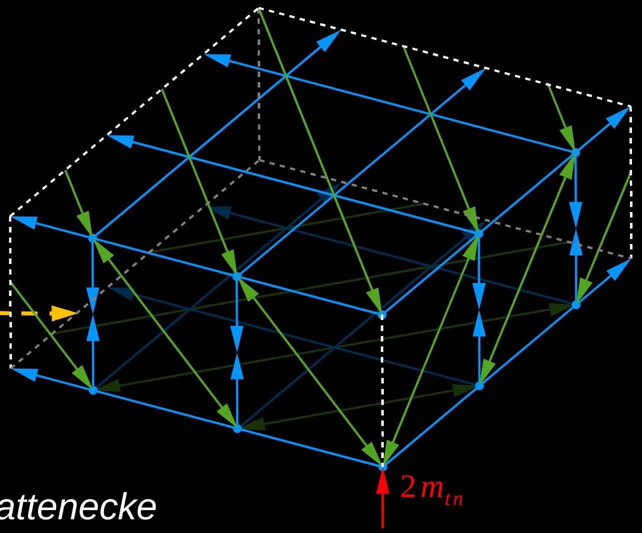
→ Ober- und Unterseite: zueinander senkrechte, unter 45° zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben, Aufnahme der randnormalen Komponenten durch randparallele Bewehrung

→ Komponenten in Richtung der Plattenränder werden durch geneigte Betondruckstreben in den Randstreifen weitergeleitet; Vertikalkomponenten entsprechen den Randquerkräften $V_t = -m_{tn}$

→ Aufnahme von $V_t = -m_{tn}$ mit Steckbügeln oder entsprechender Abbiegung der Biegebewehrung



Querkraft in Randzone



Kraftfluss in Plattenecke

Platten – Randbedingungen

Diskontinuitäten

Im Platteninnern sind statische Diskontinuitätslinien zulässig (↔ Äquivalenz von Drillmomenten am Plattenrand und Randquerkräften, man füge in Gedanken zwei freie Plattenränder zusammen).

An Diskontinuitätslinien

→ müssen Biegemomente m_n stetig sein ($m_n^+ = m_n^-$)

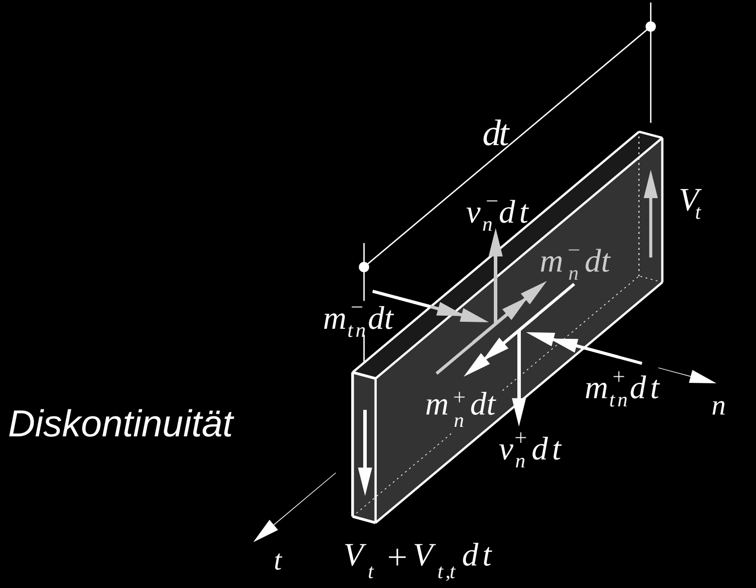
→ dürfen Drillmomente m_{nt} und Querkräfte v_n springen ($m_{nt}^+ \neq m_{nt}^-$, $v_n^+ \neq v_n^-$)

Somit gelten für eine statische Diskontinuitätslinie, entlang welcher eine Querkraft V_t abgetragen wird, folgende Bedingungen:

$$m_n^- = m_n^+$$

$$V_t = m_{nt}^+ - m_{nt}^-$$

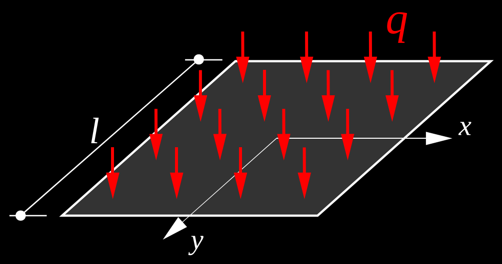
$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = v_n^- - v_n^+$$



Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 1 (Gleichgewichtslösung)

Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast q mit Ansätzen für Biegemomente m_x, m_y und Drillmoment m_{xy}

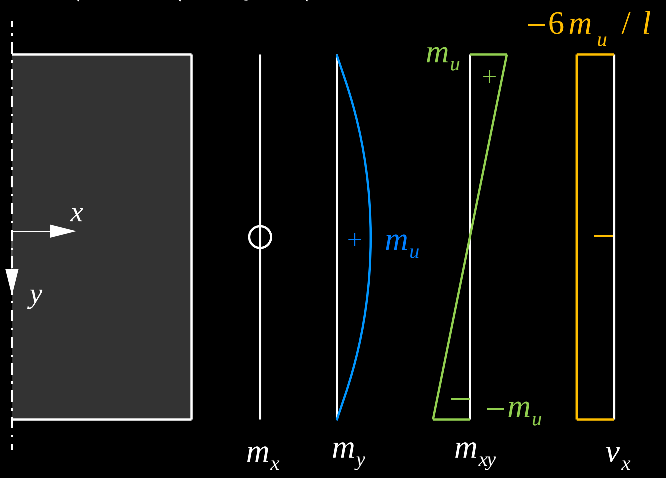


$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right)\cdot m_u \qquad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right)\cdot m_u \qquad m_{xy} = -\frac{4xy}{l^2}\cdot m_u$$

Gleichgewicht: $\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \frac{24 m_u}{l^2}$

Gesucht: Schnittkraftverläufe am Plattenrand, Stützkraft, Eckkraft, Lagerung der Platte

$x = l/2, \quad -l/2 \le y \le l/2$



Drillmoment entlang Plattenrand: $m_{xy} = -\frac{2y}{l}\cdot m_u$

Querkraft entlang Plattenrand:

aus $\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$ folgt: $v_x = -\frac{8x}{l^2}\cdot m_u - \frac{4x}{l^2}\cdot m_u = -\frac{6}{l}\cdot m_u$

Stützkraft: $v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{6}{l}\cdot m_u - \frac{4x}{l^2}\cdot m_u = -\frac{8}{l}\cdot m_u$

Eckkraft: $-2\cdot(-m_u) = 2\cdot m_u$

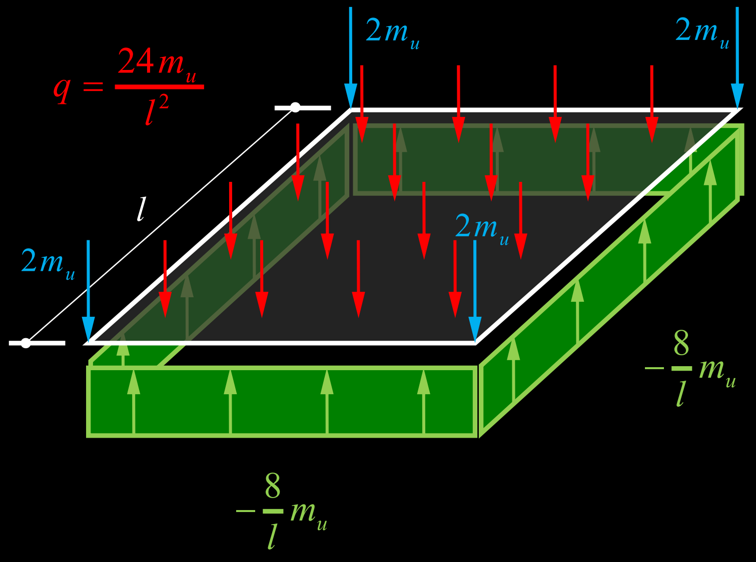
Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 1 (Gleichgewichtslösung)

Lagerung der Platte: Aus der konstanten Stützkraft folgt, dass die Platte entlang ihrer Ränder einfach gelagert sein muss. Die Ecken sind gegen Abheben gesichert ($\rightarrow$ nach unten gerichtete Eckkräfte)

Stützkraft: $v_x + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\dfrac{8}{l} \cdot m_u$

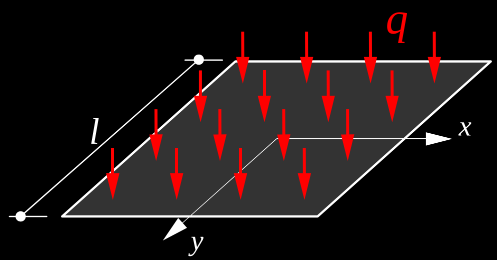
Eckkraft: $2 \cdot m_u$



Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 2 (Gleichgewichtslösung)

Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast q mit Ansätzen für Biegemomente m_x, m_y und Drillmoment m_{xy}

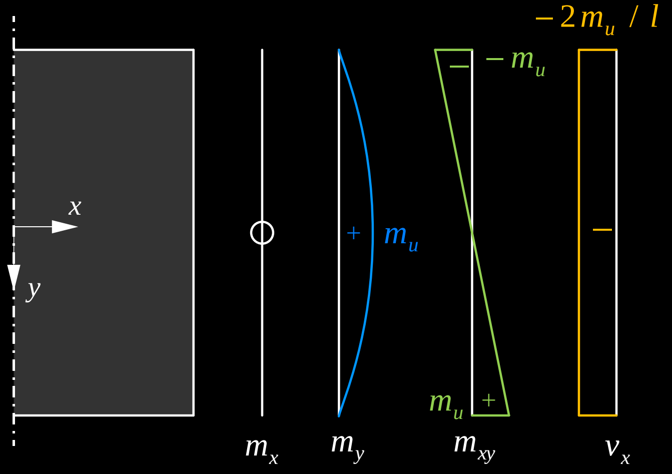


$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_u \qquad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_u \qquad m_{xy} = + \frac{4xy}{l^2} \cdot m_u$$

Gleichgewicht: $\dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \dfrac{8 m_u}{l^2}$

Gesucht: Schnittkraftverläufe am Plattenrand, Stützkraft, Eckkraft, Lagerung der Platte

$x = l/2, \quad -l/2 \leq y \leq l/2$



Drillmoment entlang Plattenrand: $m_{xy} = \dfrac{2y}{l} \cdot m_u$

Querkraft entlang Plattenrand:

aus $\dfrac{\partial m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$ folgt: $v_x = -\dfrac{8x}{l^2} \cdot m_u + \dfrac{4x}{l^2} \cdot m_u = -\dfrac{2}{l} \cdot m_u$

Stützkraft: $v_x + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\dfrac{2}{l} \cdot m_u + \dfrac{4x}{l^2} \cdot m_u = 0$

Eckkraft: $-2 \cdot (+m_u) = -2 \cdot m_u$

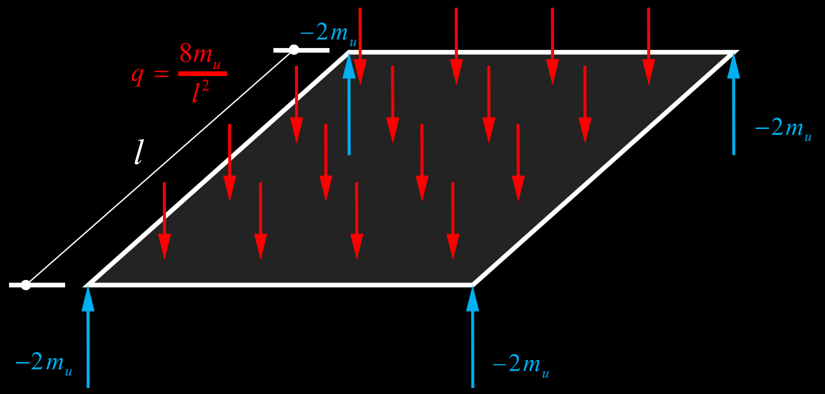
Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 2 (Gleichgewichtslösung)

Lagerung der Platte: Aus der verschwindenden Stützkraft folgt, dass die Platte entlang ihrer Ränder frei und lediglich an den Ecken gestützt ist.

Stützkraft: $v_x + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$

Eckkraft: $-2 \cdot m_u$

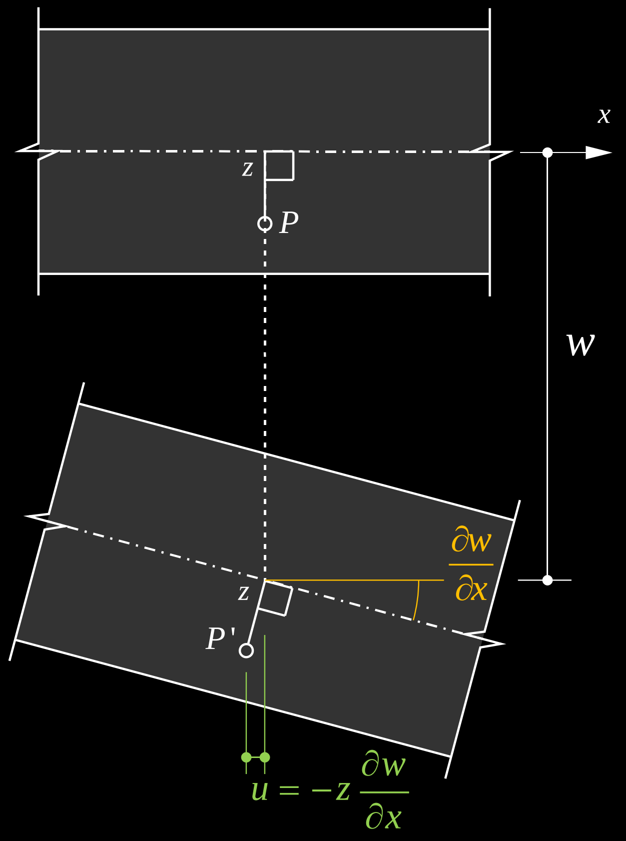


Platten –
Kinematische Beziehungen

Platten – Kinematische Beziehungen

Beziehungen für dünne Platten

Nach der Theorie von Kirchhoff über dünne Platten wird angenommen, dass die Normalen zur Plattenmittelebene während der Verformung gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben.



Verschiebungen:

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{x - Richtung}$$

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{y - Richtung}$$

Verzerrungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \cdot \chi_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \cdot \chi_y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z \cdot \chi_{xy}$$

Krümmungen:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

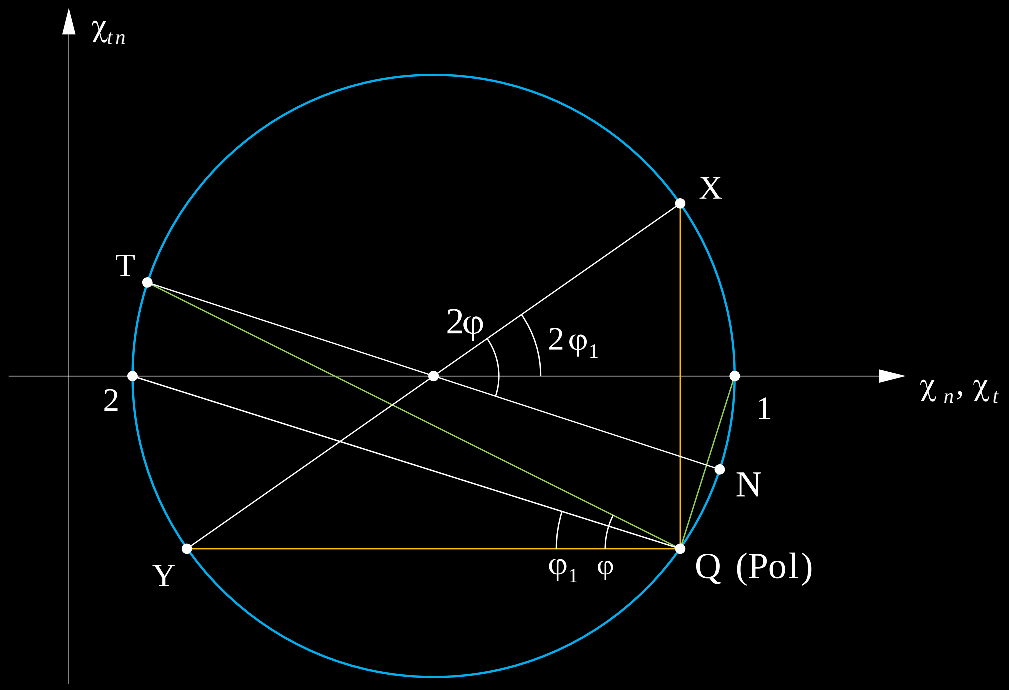
Drillung:

$$\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Platten – Kinematische Beziehungen

Transformation der Krümmungen und Drillungen

Analog zur Transformation der Normal- und Schubspannungen



Elastische Platten

Elastische Platten

Annahmen der elastischen Plattentheorie

Die Theorie von Gustav Robert KIRCHHOFF für dünne Platten gründet auf folgenden Annahmen:

1. Die Plattendicke *h* ist konstant und klein gegenüber anderen Abmessungen.
   → Die Normalspannungen σ_z werden vernachlässigt. Die Spannungsverteilung in der Platte darf damit als eben und über *h* linear angenommen werden.

2. Die Normalen zur Plattenmittelebene bleiben gerade und senkrecht zur verformten Mittelebene.
   → Die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} verschwinden in der Folge (schubstarre Platten). Damit ist *z* eine Hauptrichtung.

3. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Plattenschichten wird als gelöst betrachtet.
   → Zusammen mit Annahme 2 entspricht dies den Grundannahmen der Balkentheorie.

4. Die Durchbiegungen *w* sind klein gegenüber *h* und unabhängig von *z*.
   → Das Gleichgewicht kann damit am unverformten System gebildet werden, es treten i.d.R. keine Membrankräfte auf. In Kombination mit Annahme 2 ergeben sich die kinematischen Beziehungen.

5. Der Werkstoff ist homogen, isotrop und linear elastisch.

Elastische Platten

Plattengleichung

Aus dem Stoffgesetz (linear elastisch, Hooke'sches Gesetz), den kinematischen Beziehungen sowie dem Gleichgewicht am infinitesimalen Element folgt die sogenannte Plattengleichung.

Hooke'sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand: $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y\right)$ $\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x\right)$ $\quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}$

Plattengleichung:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}}_{\text{Balken in x-Richtung}} + \underbrace{2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}}_{\text{Zusatz-term}} + \underbrace{\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}}_{\text{Balken in y-Richtung}} = \Delta\Delta w = \frac{q}{D} \qquad mit \qquad \underbrace{D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}}_{\text{Plattensteifigkeit}}}$$

Inhomogene Differentialgleichung 4. Ordnung (inhomogene Bipotentialgleichung)
→ 2 Randbedingungen anpassbar, jedoch 3 Grössen vorhanden (m_n, m_{nt} und v_t) → Stützkraft

- eingespannter Rand: m_n, m_{tn} und v_n beliebig
- einfach gelagerter Rand: $m_n = 0$, resultierende Stützkraft: $\quad v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$
- freier Rand: $m_n = 0$, verschwindende Stützkraft: $\quad v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$

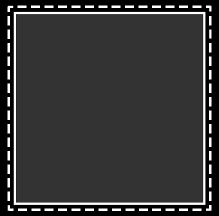
Vergleiche Folie zu den Randbedingungen

Elastische Platten

Abschätzung der Durchbiegungen

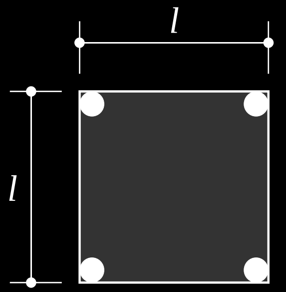
Die Durchbiegungen in Plattenmitte können als Vielfaches derjenigen des einfachen Balkens gleicher Spannweite abgeschätzt werden (nach Bachmann, 1991):

$$w = c \cdot \frac{5}{384}\frac{ql^4}{D} \qquad D = \frac{EI}{1-\nu^2} \qquad q = const.$$



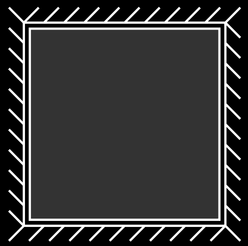
Einfach gelagerte Platte

c = 0.312



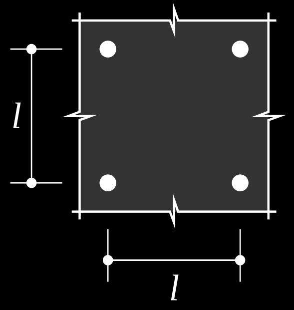
In den Ecken gestützte Platte

c = 2.25



Eingespannte Platte

c = 0.098



Mittelfeld einer unendlich ausgedehnten Flachdecke

c = 0.446

Zu beachten ist der Steifigkeitsabfall infolge Kriechen ($E_{c\infty} \approx E_{c0}/3$) und Rissbildung bzw. die Steifigkeitserhöhung infolge Zugversteifung und die kleineren Durchbiegungen bei Vorspannung

Elastische Platten

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden – Übersicht

- Elastische Plattentheorie
  - Lösung der Platten-differentialgleichung
  - Approximative Lösungen mit Energieverfahren
  - Methode der Finiten Elemente
- Plastische Plattentheorie
  - Statische Methode der Plastizitätstheorie
    - Methode der Finiten Elemente
    - Momentenansätze
    - Methode der stell-vertretenden Rahmen
    - Streifenmethode
      - einfach
      - erweitert
  - Kinematische Methode der Plastizitätstheorie
    - Fliessgelenklinienmethode

Elastische Platten

Lösungsverfahren

- Direkte Lösung der Plattengleichung
  → für spezielle Problemstellungen möglich (z.B. rotationssymmetrische Platten)
  → Resultate sind in Literatur vorhanden und insbesondere für Abschätzungen und Plausibilitätskontrollen wertvoll

- Approximative Lösung der Plattengleichung mit Fourier-Reihenansätzen oder Energieverfahren
  → z.B. für Rechteckplatten mit unterschiedlichen Randbedingungen und Belastungsanordnungen

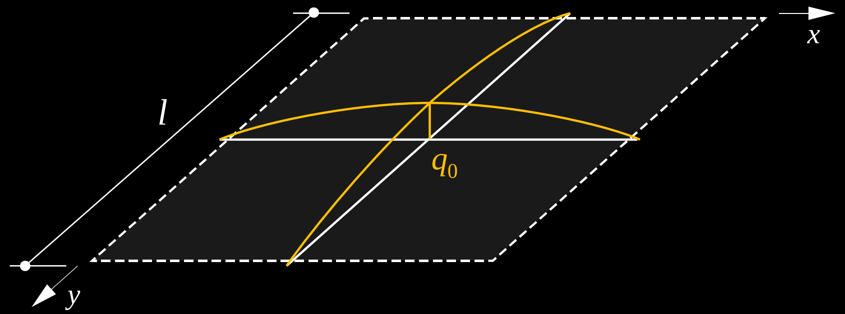
- Lösung der Plattengleichung mit der Methode der Finiten Elemente
  → Lösung der Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Element
  → beliebige Randbedingungen und Belastungen möglich
  → heute meistens verwendet

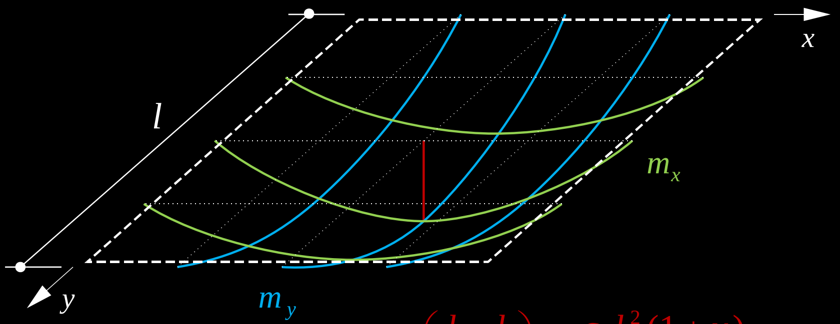
Elastische Platten

Direkte Lösung der Plattendifferentialgleichung – Beispiel

Einfach gelagerte Quadratplatte unter sinusförmiger Flächenlast *q* (*x*,*y*) (Lsg. n. Navier)

ν: Querdehnungszahl





$$m_x\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)=\frac{q_0 l^2(1+\nu)}{4\pi^2}$$

Last: $q = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

Differentialgleichung: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta\Delta w = \frac{q}{D}$

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

Ansatz: $w = C \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

Randbedingungen: $w(0,y) = w(l,y) = w(x,0) = w(x,l) = 0$

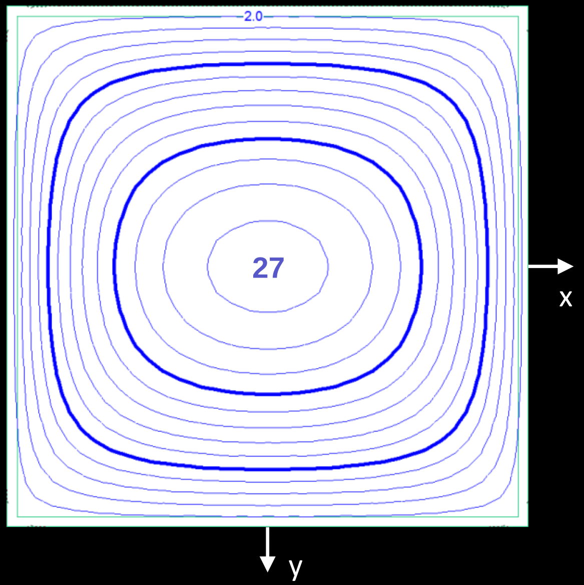
$$m_x(0,y) = m_x(l,y) = m_y(x,0) = m_y(x,l) = 0$$

Lösung: $C = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D}$ $\quad w = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

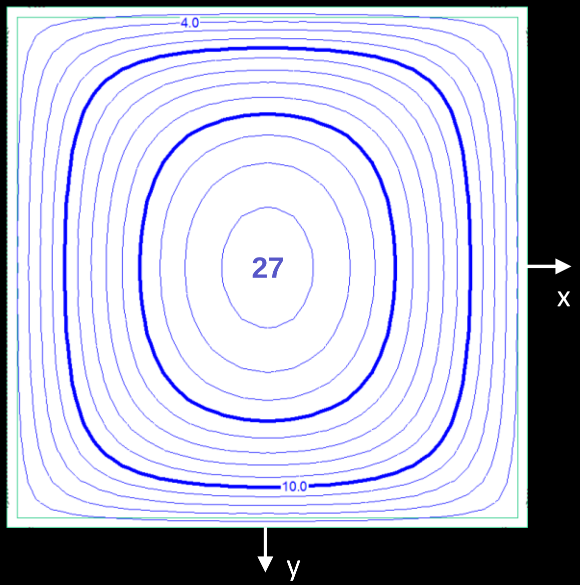
Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

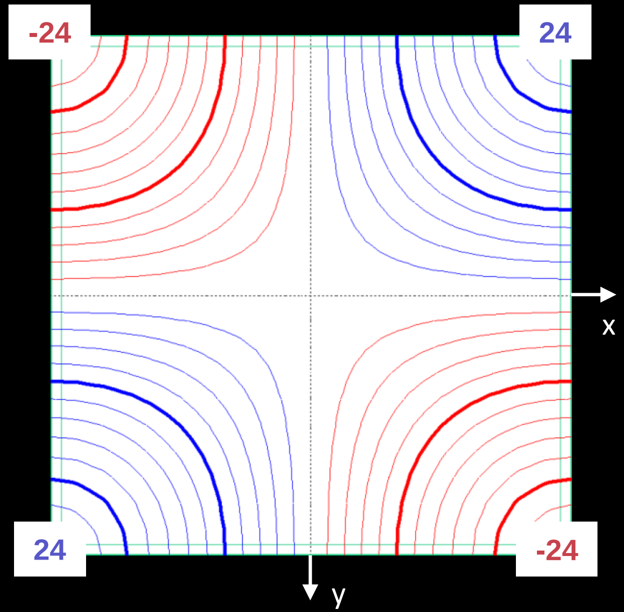
Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast (l = 10 m, h = 0.25 m)



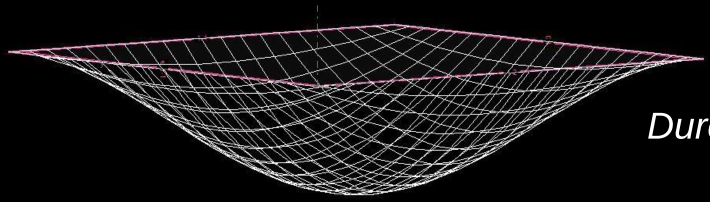
m_x [kN]



m_y [kN]



m_{xy} [kN]

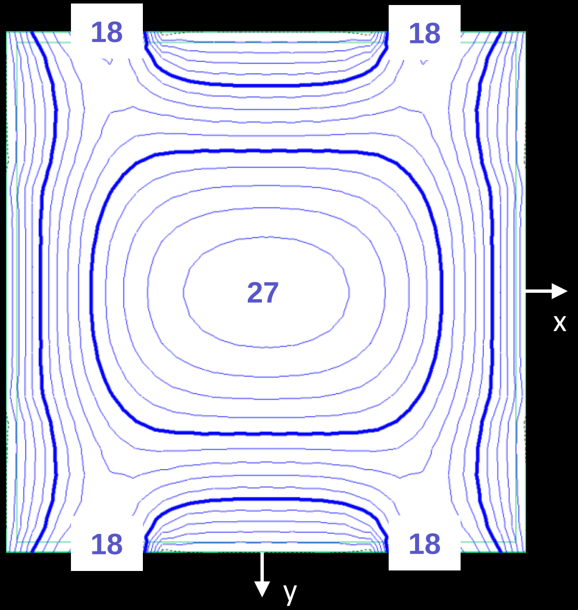


Durchbiegungen qualitativ und überhöht
$w_{max} = w(l/2, l/2) = 5.6$ mm

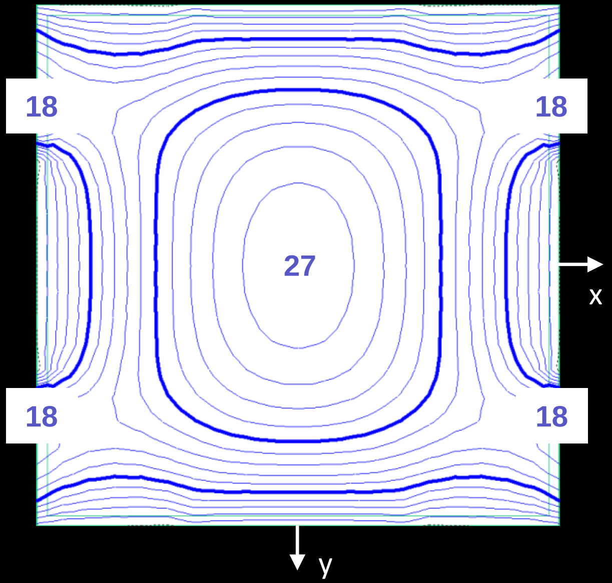
Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

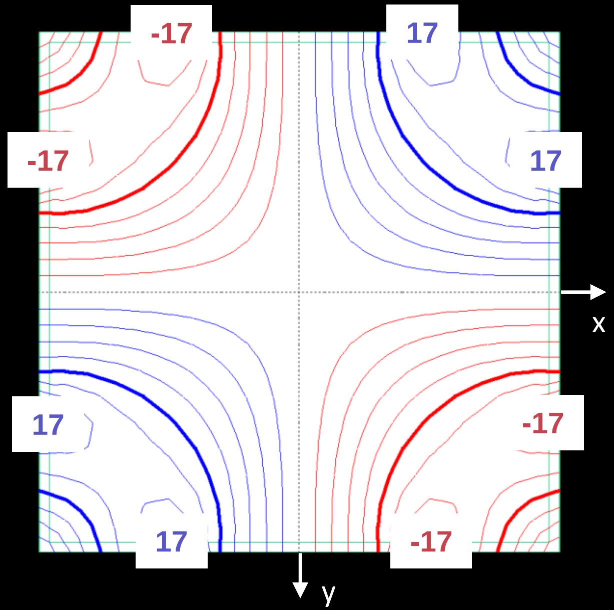
Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast (l = 10 m, h = 0.25 m) – ohne negative Stützkräfte (=Eckkräfte)



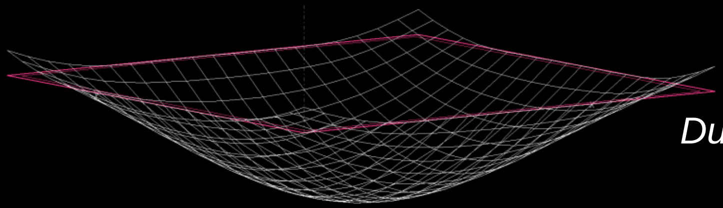
m_x [kN]



m_y [kN]



m_{xy} [kN]

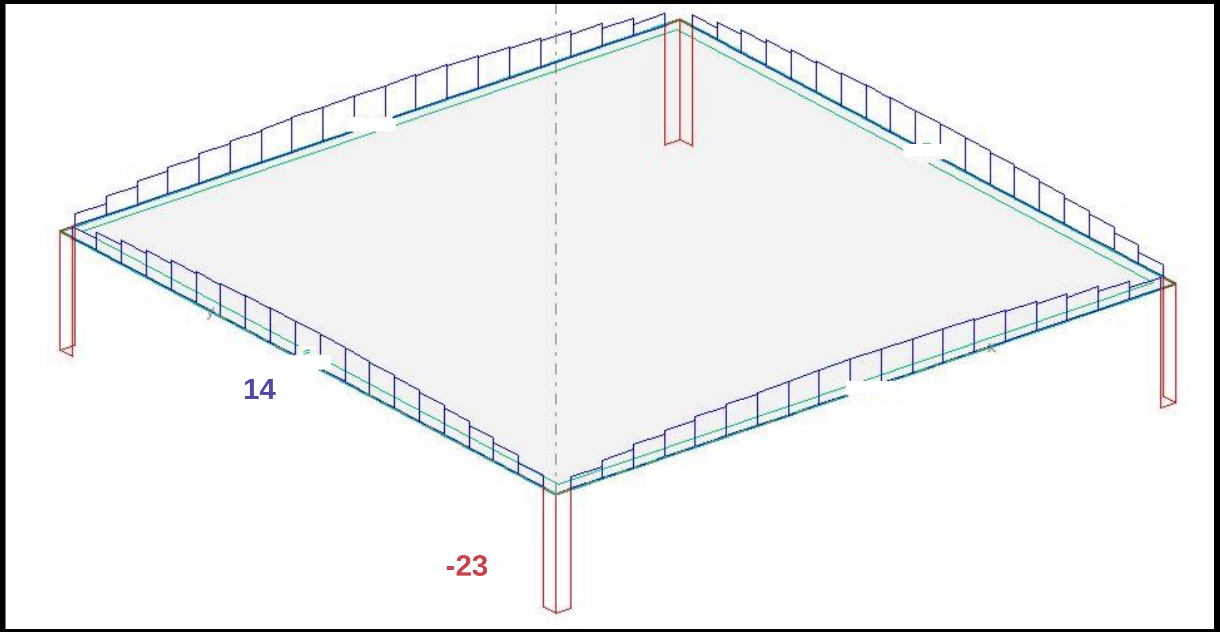


Durchbiegungen qualitativ und überhöht
$w_{max} = w(l/2, l/2) = 6.6$ mm

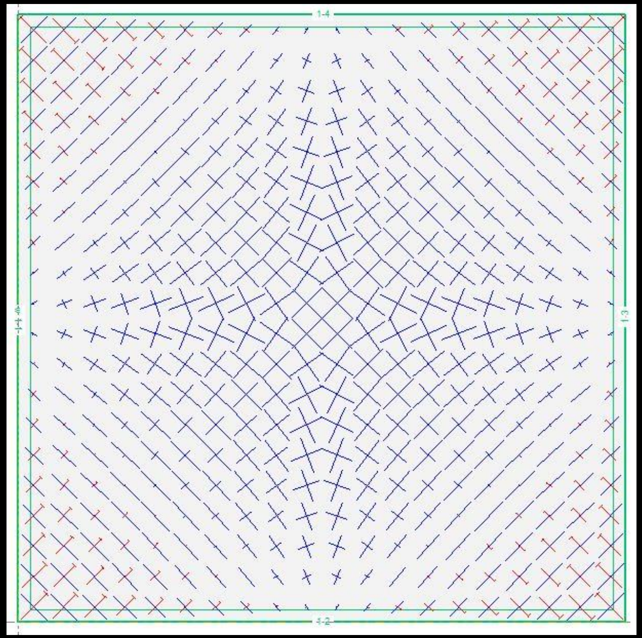
Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast (l = 10 m, h = 0.25 m)



Stützkraft am Rand [kN pro Abschnitt]



Richtungen der Hauptmomente (blau: positiv, rot: negativ)