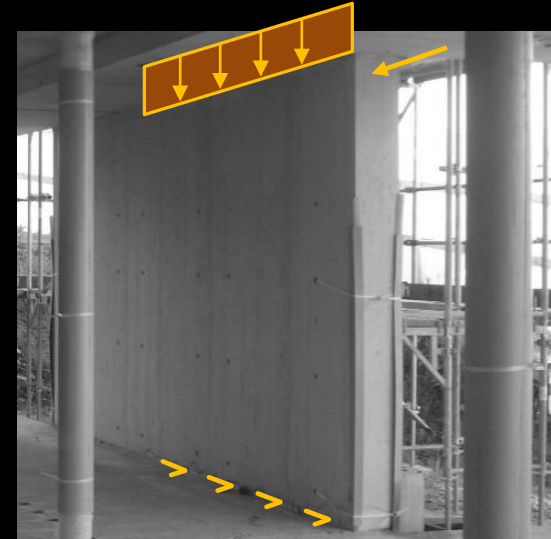


Platten - Grundlagen

Platten - Grundlagen

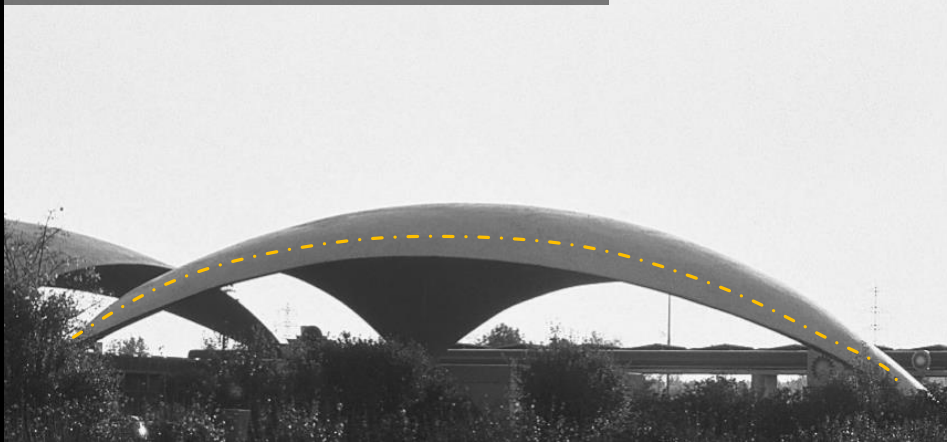
Flächentragwerke allgemein

Platten primär senkrecht zur Ebene belastet



Scheiben primär in Ebene belastet

Schalen gekrümmte Mittelfläche

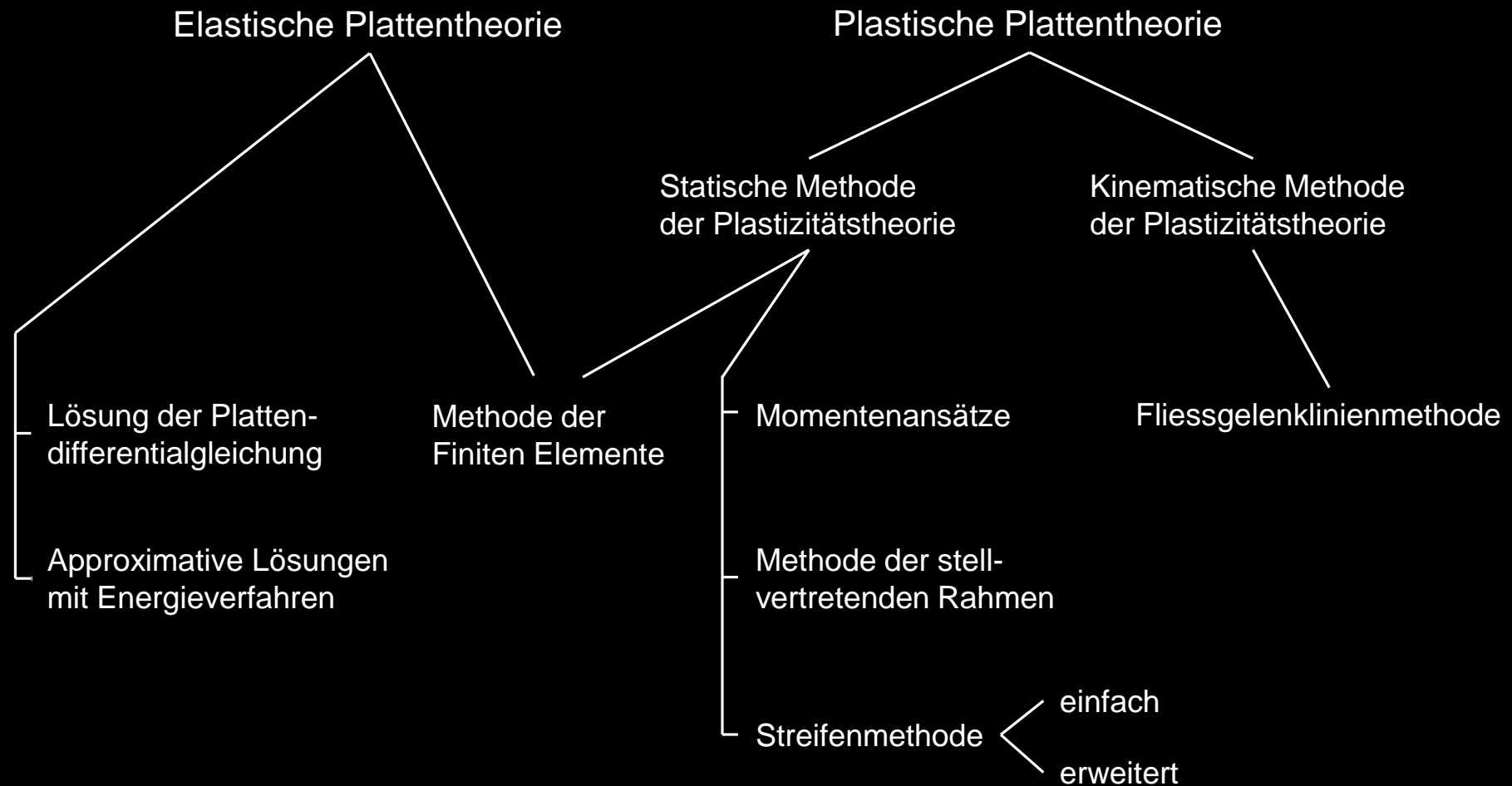


Faltwerke aus ebenen Teilflächen gebildet



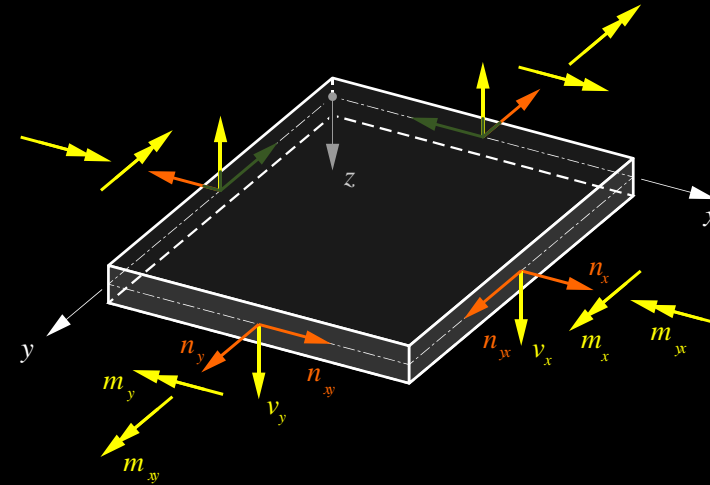
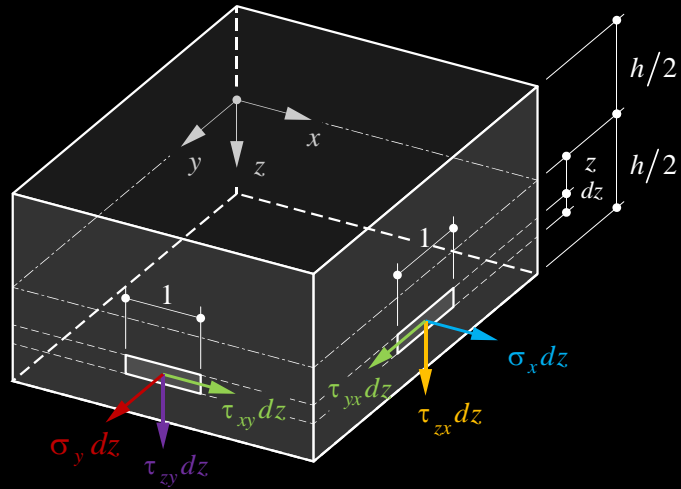
Platten - Grundlagen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht



Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsresultierende



$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad [\text{kNm/m}=\text{kN}]$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz \quad [\text{kN/m}]$$

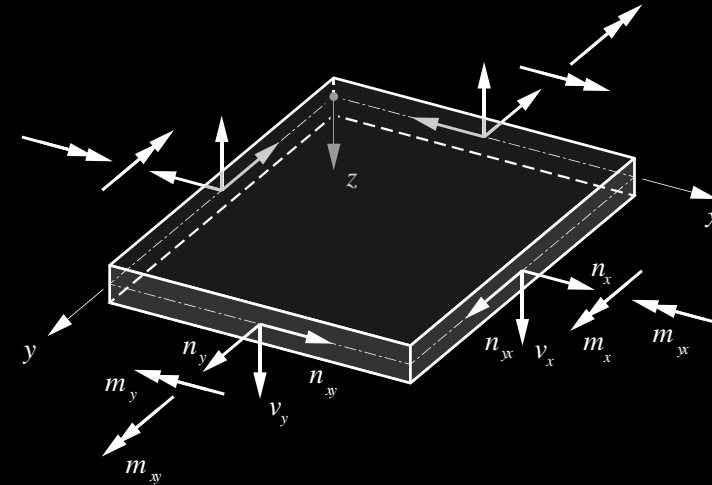
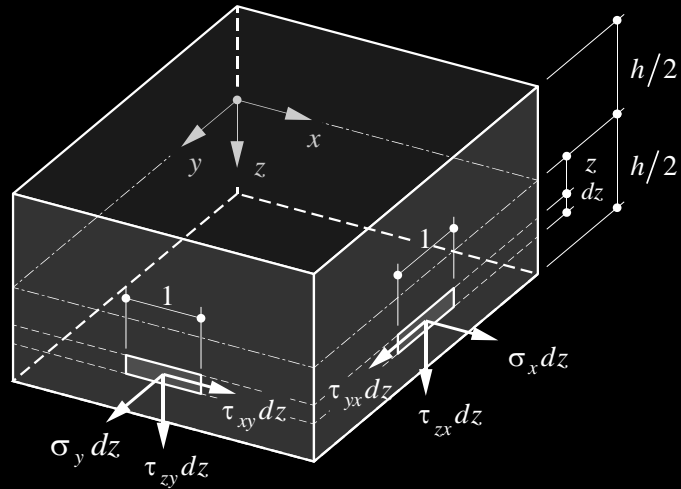
$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad [\text{kN/m}]$$

Biegespannungszustand (Platte):
Biegemomente und
Querkräfte

Membranspannungszustand (Scheibe):
Membrankräfte
(Normal- /Schubkräfte)

Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsergebnisse



$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz$$

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

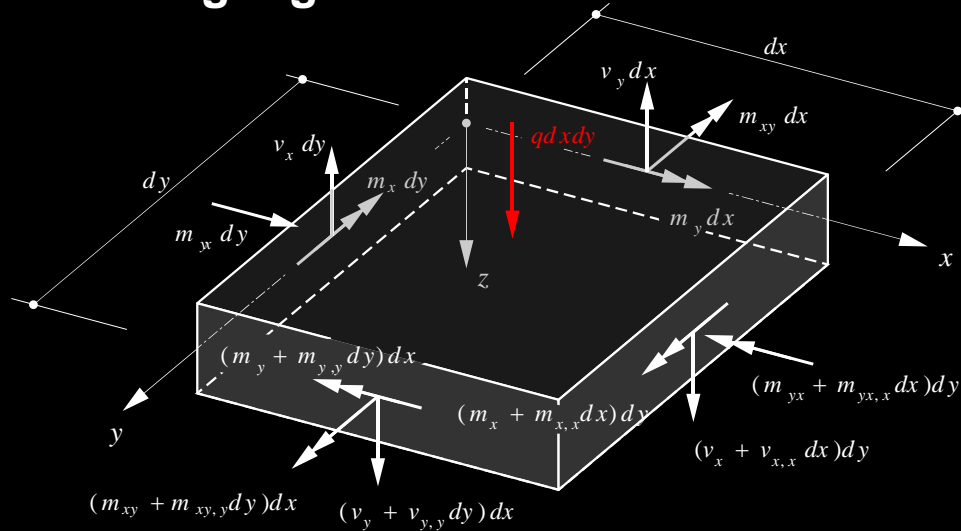
Vorzeichenkonvention

- Positive Spannungen wirken an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Achsenrichtung
- Positive Membran- und Querkräfte entsprechen positiven zugehörigen Spannungen
- Positive Momente entsprechen positiven zugehörigen Spannungen für $z > 0$
- Indizes: 1. Index: Richtung der Spannung
2. Index: Normalenrichtung des Elements, an dem Spannung wirkt

Platten – Statische Beziehungen

Platten – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen – kartesische Koordinaten



→ Plattengleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0$$

Balken in
x-Richtung

zusätzlich:
Drillmomente

Balken in
y-Richtung

Herleitung über Gleichgewicht am differentiellen Plattenelement:

$$-v_x dy - v_y dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy + q dx dy = 0$$

$$-m_x dy - m_{xy} dx + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - v_x dy dx = 0$$

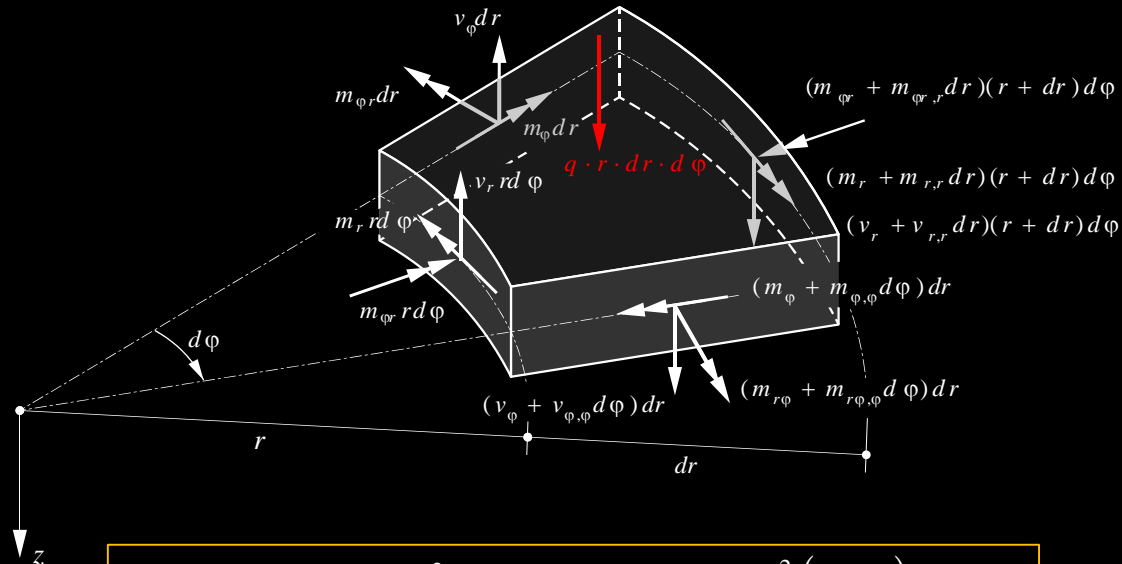
$$-m_y dx - m_{yx} dy + \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} dx \right) dy - v_y dx dy = 0$$

Terme mit $(dx)^2$ bzw. $(dy)^2$ vernachlässigt

$$\begin{aligned} \rightarrow & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0 \\ \rightarrow & \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0 \\ \rightarrow & \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} - v_y = 0 \end{aligned}$$

Platten – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen – Zylinderkoordinaten



Herleitung über Gleichgewicht am differentiellen Plattenelement:

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + qr = 0$$

$$\frac{\partial(rm_r)}{\partial r} - m_\phi + \frac{\partial m_{r\phi}}{\partial \phi} - rv_r = 0$$

$$2m_{r\phi} + r \cdot \frac{\partial(m_{r\phi})}{\partial r} + \frac{\partial m_\phi}{\partial \phi} - rv_\phi = 0$$

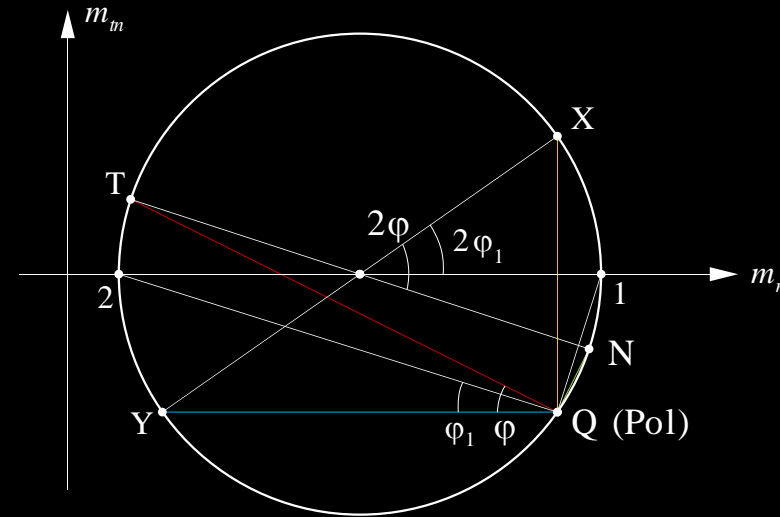
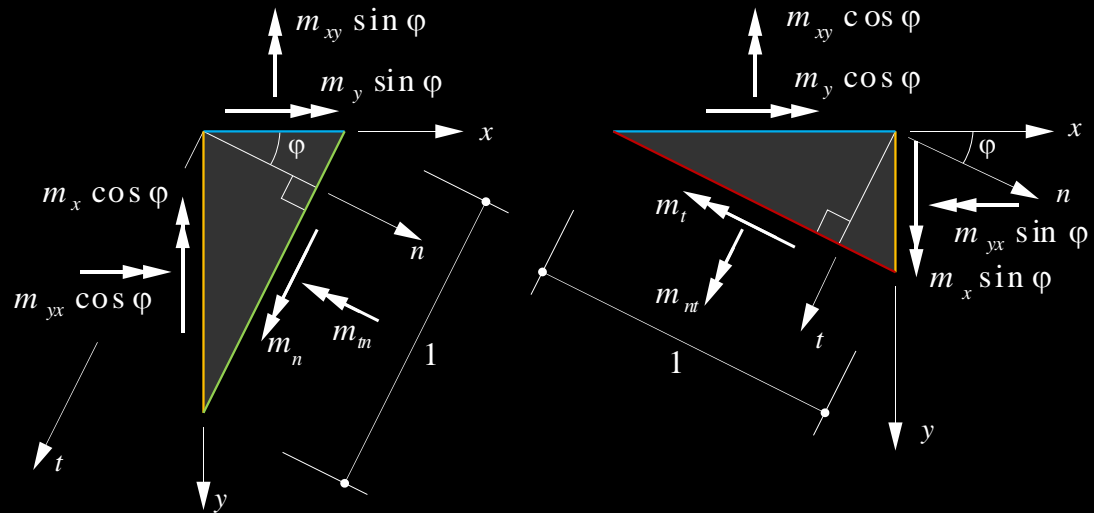
$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(rm_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 m_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial m_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2(rm_{r\phi})}{\partial r \partial \phi} + q = 0$$

Bzw. für rotationssymmetrische Fälle:

$$\frac{\partial^2(rm_r)}{\partial r^2} - \frac{\partial m_\phi}{\partial r} + qr = 0$$

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Biege- und Drillmomente



Biege- und Drillmomente in einer beliebigen Richtung φ :

$$m_n = m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi$$

$$m_t = m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - m_{xy} \sin 2\varphi$$

$$m_m = (m_y - m_x) \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} \cos 2\varphi$$

NB: $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$

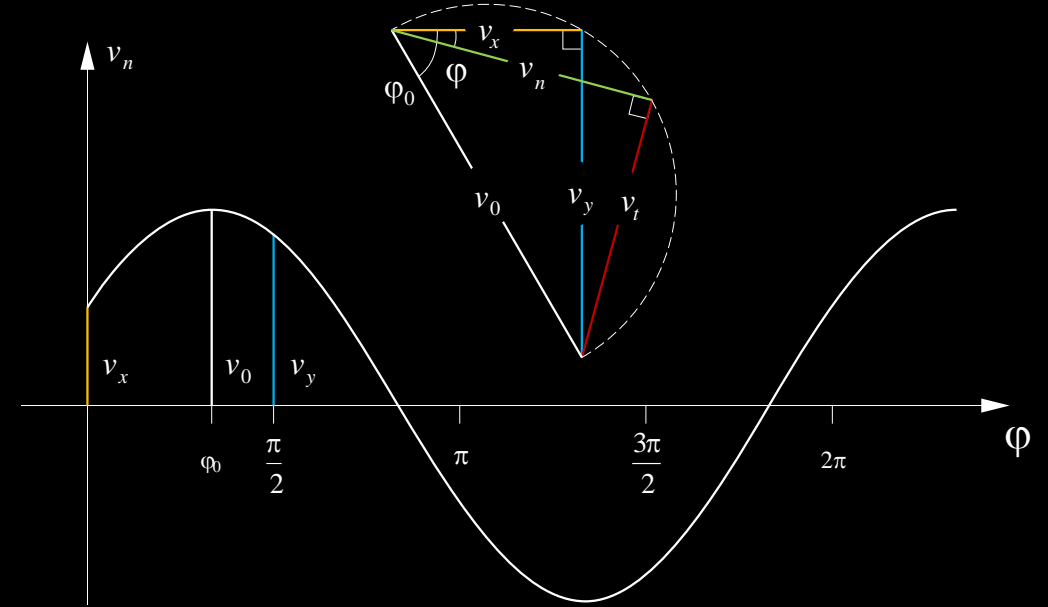
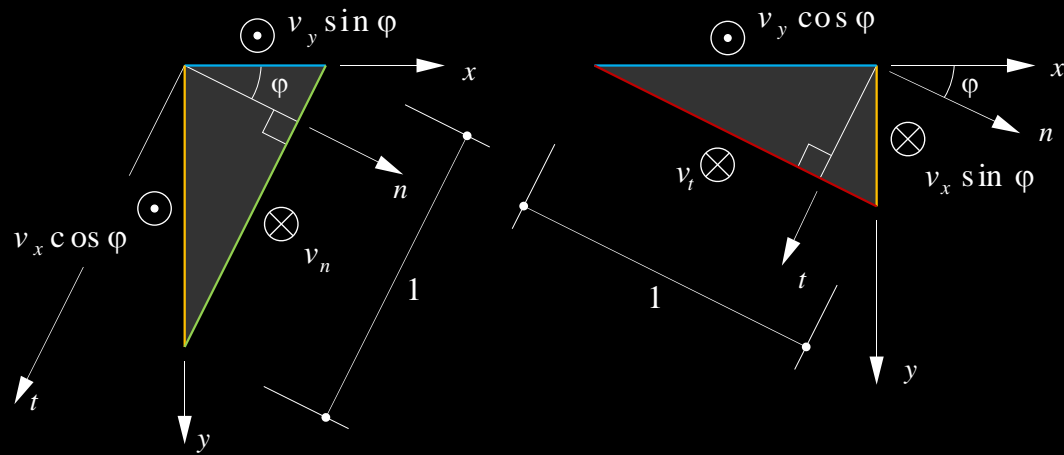
Hauptrichtung φ_1 (Drillmomente = 0) und Hauptmomente
(→ Mohr'scher Kreis):

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}$$

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2}}{2}$$

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Querkräfte



Querkräfte in einer beliebigen Richtung φ :

$$v_n = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi$$

$$v_t = -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi$$

Hauptquerkraft und zugehörige Richtung φ_0
(Interpretation mit Thaleskreis):

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{v_y}{v_x} \quad (\text{allgemein ist } \varphi_0 \neq \varphi_1)$$

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen allgemein (elastische Platten)

Am Rand einer Platte greifen allgemein Momente m_n , m_{tn} und eine Querkraft v_n an.

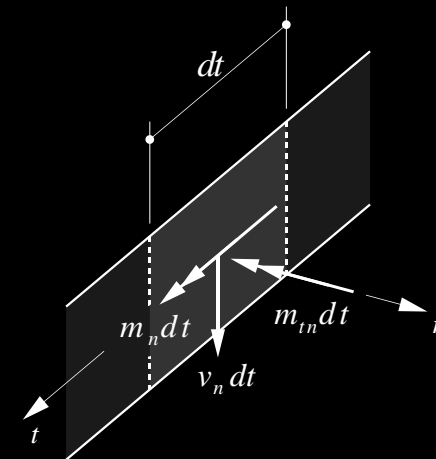
Inhomogene Bipotentialgleichung gemäss Kirchhoffscher Theorie dünner elastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad \text{mit} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

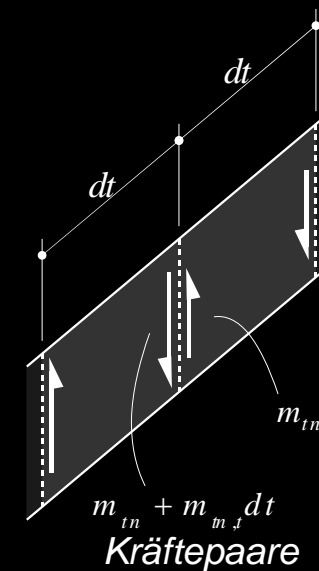
- dabei sind **nur 2 Randbedingungen** an die Lösung anpassbar
- **jedoch 3 Kraftgrössen** vorhanden (m_n , m_{tn} , v_n)
- zusätzliche Bedingung erforderlich

Weitere Bedingung für einfach gelagerte und freie Plattenränder:

- Ersetzen der Drillmomente $m_{tn} \cdot dt$ durch stetige Verteilung von vertikalen **Kräftepaaren** m_{tn} , welche sich an den Grenzen zwischen den infinitesimalen Elementen jeweils bis auf den Zuwachs $m_{tn,t} \cdot dt$ aufheben



Kräfte am Plattenrand



Kräftepaare

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen allgemein (elastische Platten)

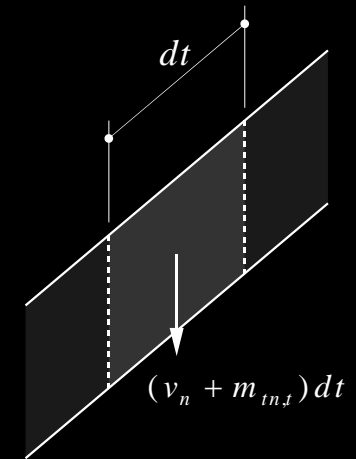
→ Zuwachs pro Längeneinheit dm_{tn} / dt wird mit der Querkraft v_n zu einer **Stützkraft** zusammengefasst

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$$

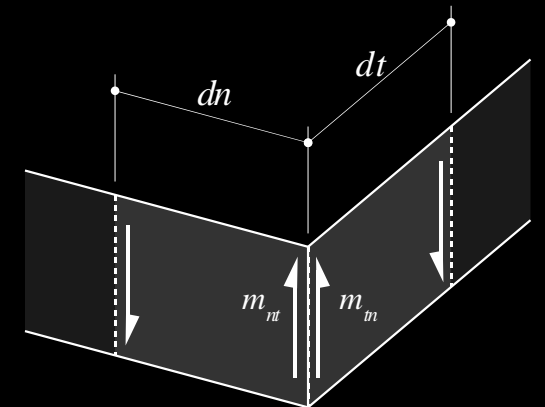
(Herleitung mit Gleichgewichtsbeziehung $\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$)

→ In einer Plattenecke addieren sich die Drillmomente der beiden Ränder zu einer **Eckkraft** von $2 m_{tn}$

Diese Behandlung von Drillmomenten am Plattenrand geht auf Thomson und Tait (1883) zurück und lässt sich mit dem Prinzip von de Saint Venant «begründen».



Stützkraft



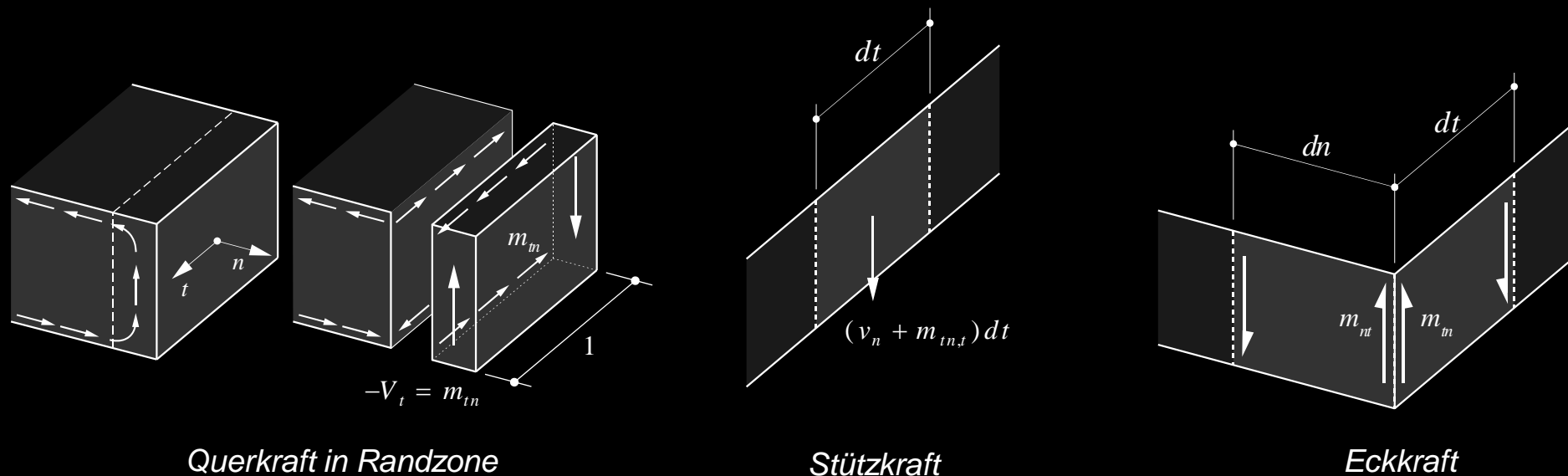
Eckkraft

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

Statische Methode der Plastizitätstheorie – Erklärung mit Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern, welche nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruht:

- Aus **Gleichgewicht** in einer schmalen Randzone der Platte folgt die Randquerkraft: $V_t = -m_{tn}$
- *sofern*: Plattenrand ist spannungsfrei und die in der Randzone auftretenden Spannungen σ_t ändern sich nicht in t-Richtung (Clyde, 1979).
- Aus der Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$ folgen die **Eckkräfte** $2 m_{tn}$ und der Beitrag von $m_{tn,t}$ zur **Stützkraft**



Platten – Randbedingungen

Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

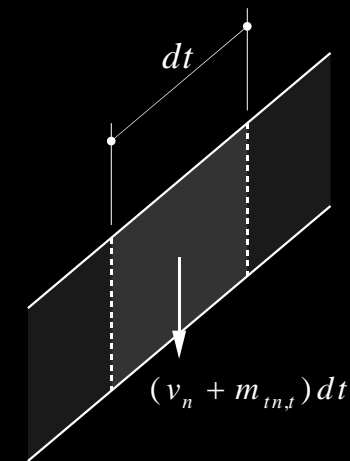
→ Randbedingungen auf Basis von Gleichgewichtsüberlegungen:

- eingespannter Rand: m_n , m_{tn} und v_n beliebig
- einfach gelagerter Rand: $m_n = 0$, resultierende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$$

- freier Rand: $m_n = 0$, verschwindende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$$



Stützkraft

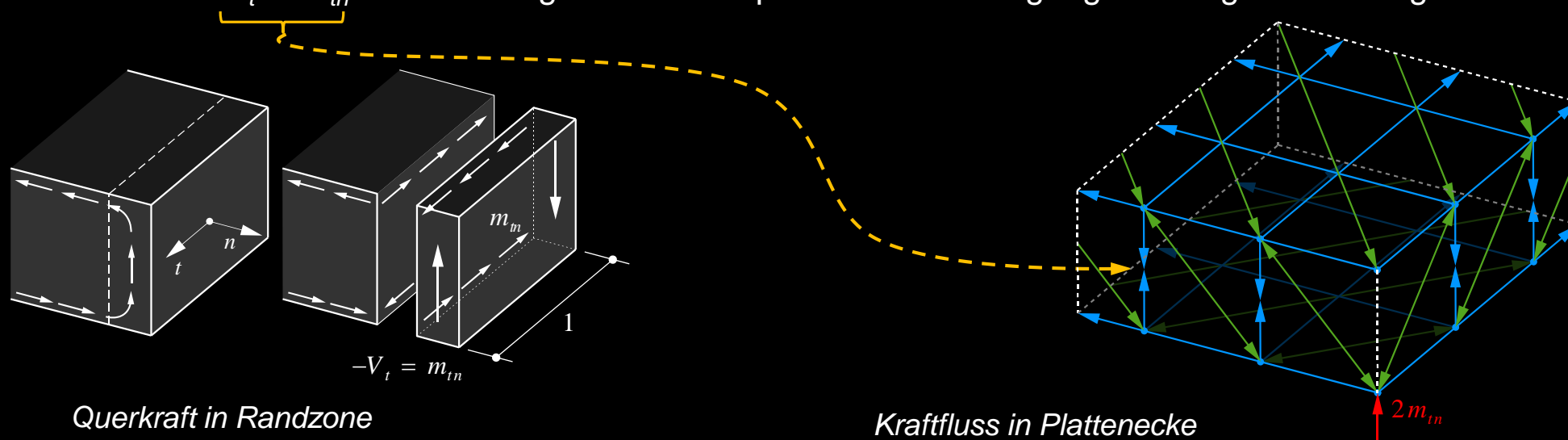
Platten – Randbedingungen

Randbewehrung

Werden entlang von einfach gelagerten und freien Rändern Drillmomente in Rechnung gestellt, so ist eine **Bewehrung zur Aufnahme von $V_t = -m_{tn}$** anzuordnen.

Veranschaulichung (Ecke, reine Drillung):

- Ober- und Unterseite: zueinander senkrechte, unter 45° zu den Plattenrändern geneigte **Betondruckstreben**, Aufnahme der randnormalen Komponenten durch randparallele **Bewehrung**
- Komponenten in Richtung der Plattenränder werden durch geneigte Betondruckstreben in den Randstreifen weitergeleitet; Vertikalkomponenten entsprechen den Randquerkräften $V_t = -m_{tn}$
- Aufnahme von $V_t = -m_{tn}$ mit Steckbügeln oder entsprechender Abbiegung der Biegebewehrung



Platten – Randbedingungen

Diskontinuitäten

Im Platteninnern sind statische Diskontinuitätslinien zulässig (\leftrightarrow Äquivalenz von Drillmomenten am Plattenrand und Randquerkräften, man füge in Gedanken zwei freie Plattenränder zusammen).

An Diskontinuitätslinien

→ müssen **Biegemomente m_n stetig** sein ($m_n^+ = m_n^-$)

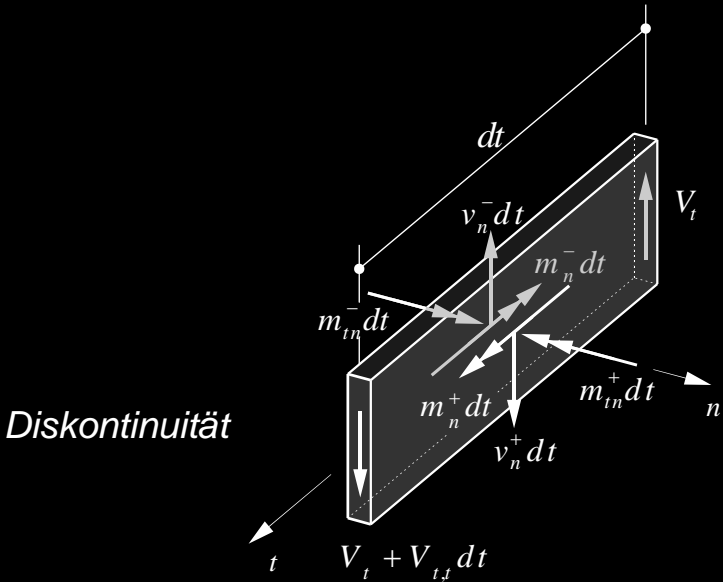
→ dürfen **Drillmomente m_{nt} und Querkräfte v_n springen** ($m_{nt}^+ \neq m_{nt}^-$, $v_n^+ \neq v_n^-$)

Somit gelten für eine statische Diskontinuitätslinie, entlang welcher eine Querkraft V_t abgetragen wird, folgende **Bedingungen**:

$$m_n^- = m_n^+$$

$$V_t = m_{nt}^+ - m_{nt}^-$$

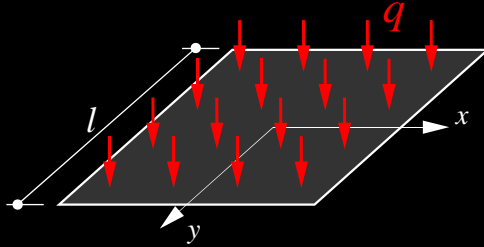
$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = v_n^- - v_n^+$$



Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 1 (Gleichgewichtslösung)

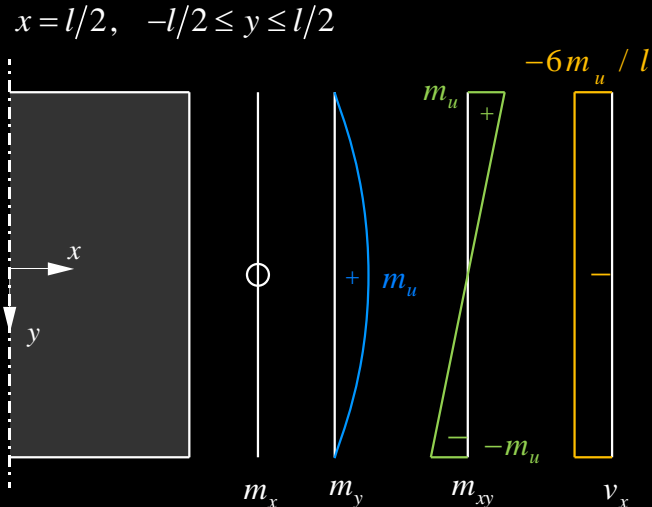
Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast q mit Ansätzen für Biegemomente m_x , m_y und Drillmoment m_{xy}



$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_u \quad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_u \quad m_{xy} = -\frac{4xy}{l^2} \cdot m_u$$

$$\text{Gleichgewicht: } \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \frac{24m_u}{l^2}$$

Gesucht: Schnittkraftverläufe am Plattenrand, Stützkraft, Eckkraft, Lagerung der Platte



$$\text{Drillmoment entlang Plattenrand: } m_{xy} = -\frac{2y}{l} \cdot m_u$$

Querkraft entlang Plattenrand:

$$\text{aus } \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0 \quad \text{folgt: } v_x = -\frac{8x}{l^2} \cdot m_u - \frac{4x}{l^2} \cdot m_u = -\frac{6}{l} \cdot m_u$$

$$\text{Stützkraft: } v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{6}{l} \cdot m_u - \frac{4x}{l^2} \cdot m_u = -\frac{8}{l} \cdot m_u$$

$$\text{Eckkraft: } -2 \cdot (-m_u) = 2 \cdot m_u$$

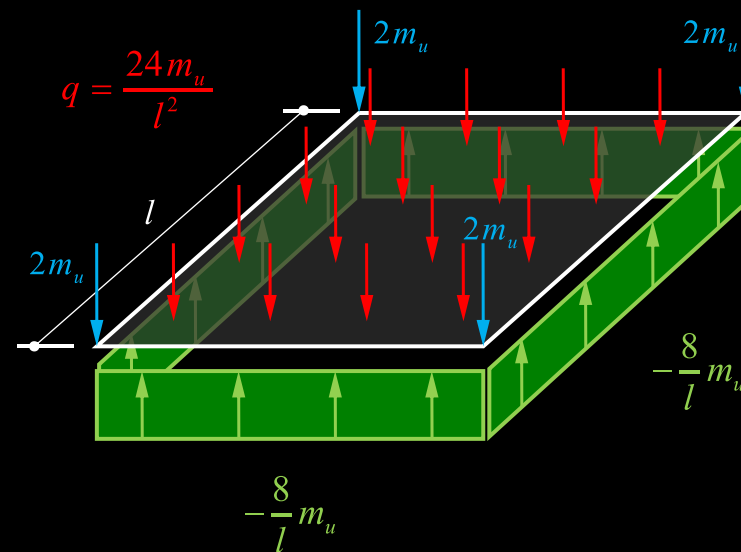
Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 1 (Gleichgewichtslösung)

Lagerung der Platte: Aus der konstanten Stützkraft folgt, dass die Platte entlang ihrer Ränder einfach gelagert sein muss. Die Ecken sind gegen Abheben gesichert (→ nach unten gerichtete Eckkräfte)

Stützkraft: $v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{8}{l} \cdot m_u$

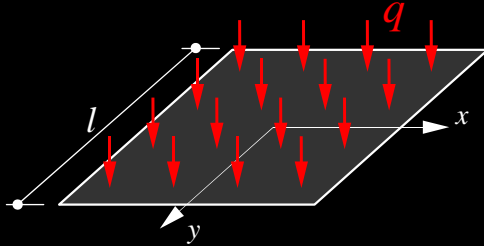
Eckkraft: $2 \cdot m_u$



Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 2 (Gleichgewichtslösung)

Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast q mit Ansätzen für Biegemomente m_x , m_y und Drillmoment m_{xy}

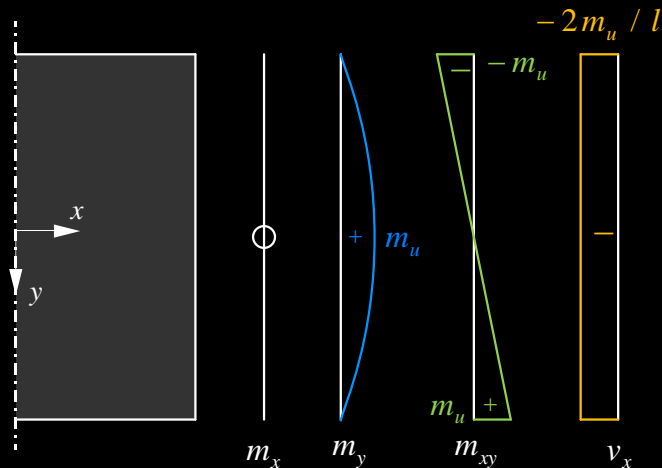


$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_u \quad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_u \quad m_{xy} = \oplus \frac{4xy}{l^2} \cdot m_u$$

$$\text{Gleichgewicht: } \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \frac{8m_u}{l^2}$$

Gesucht: Schnittkraftverläufe am Plattenrand, Stützkraft, Eckkraft, Lagerung der Platte

$$x = l/2, \quad -l/2 \leq y \leq l/2$$



$$\text{Drillmoment entlang Plattenrand: } m_{xy} = \frac{2y}{l} \cdot m_u$$

Querkraft entlang Plattenrand:

$$\text{aus } \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0 \quad \text{folgt: } v_x = -\frac{8x}{l^2} \cdot m_u + \frac{4x}{l^2} \cdot m_u = -\frac{2}{l} \cdot m_u$$

$$\text{Stützkraft: } v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{2}{l} \cdot m_u + \frac{4x}{l^2} \cdot m_u = 0$$

$$\text{Eckkraft: } -2 \cdot (+m_u) = -2 \cdot m_u$$

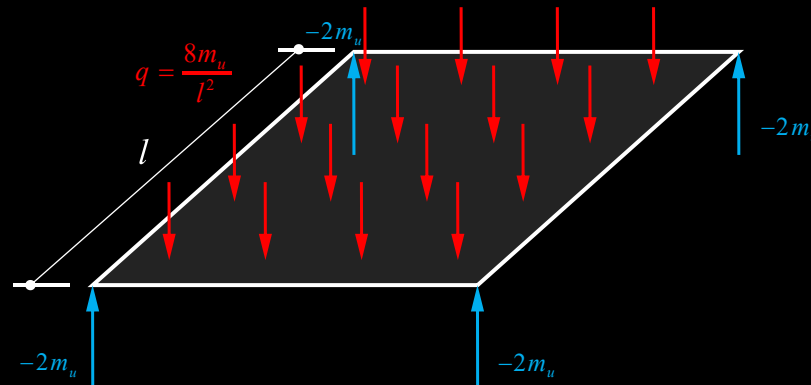
Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 2 (Gleichgewichtslösung)

Lagerung der Platte: Aus der verschwindenden Stützkraft folgt, dass die Platte entlang ihrer Ränder frei und lediglich an den Ecken gestützt ist.

Stützkraft: $v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$

Eckkraft: $-2 \cdot m_u$

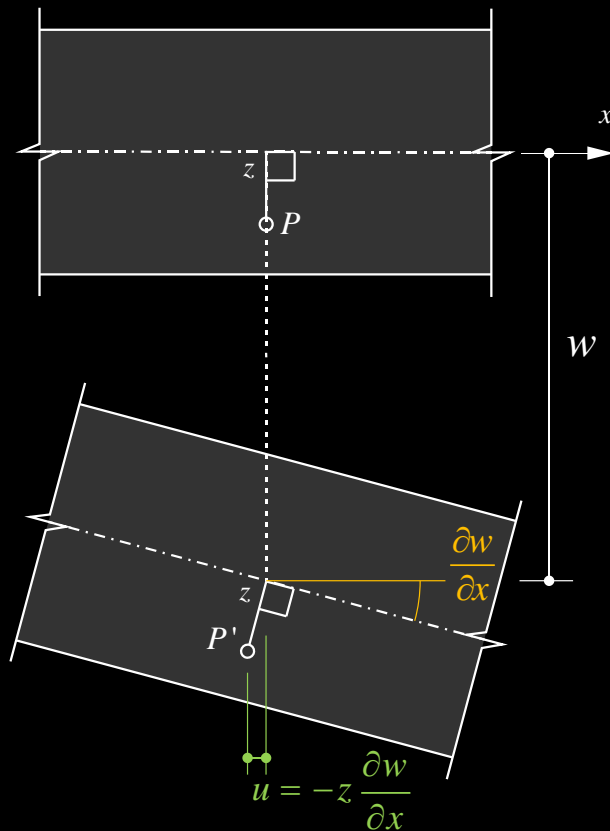


Platten – Kinematische Beziehungen

Platten – Kinematische Beziehungen

Beziehungen für dünne Platten

Nach der Theorie von Kirchhoff über dünne Platten wird angenommen, dass die Normalen zur Plattenmittelebene während der Verformung **gerade** und **senkrecht** zur verformten Mittelfläche bleiben.



Verschiebungen: $u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ x - Richtung

$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$ y - Richtung

Verzerrungen: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \cdot \chi_x$

$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \cdot \chi_y$

$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z \cdot \chi_{xy}$

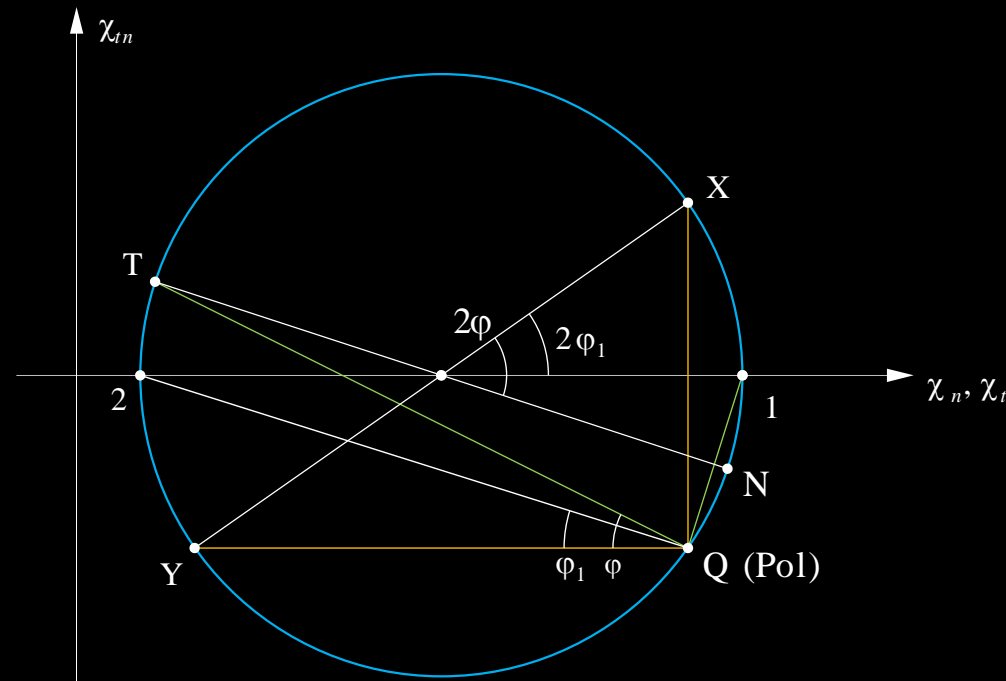
Krümmungen: $\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

Drillung: $\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

Platten – Kinematische Beziehungen

Transformation der Krümmungen und Drillungen

Analog zur Transformation der Normal- und Schubspannungen



Elastische Platten

Elastische Platten

Annahmen der elastischen Plattentheorie

Die Theorie von Gustav Robert KIRCHHOFF für dünne Platten gründet auf folgenden Annahmen:

1. Die Plattendicke h ist **konstant und klein** gegenüber anderen Abmessungen.
→ Die Normalspannungen σ_z werden vernachlässigt. Die **Spannungsverteilung** in der Platte darf damit als **eben und über h linear** angenommen werden.
2. Die **Normalen** zur Plattenmittelebene bleiben **gerade und senkrecht** zur verformten Mittelebene.
→ Die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} verschwinden in der Folge (**schubstarre Platten**). Damit ist z eine Hauptrichtung.
3. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen **Plattenschichten** wird als **gelöst** betrachtet.
→ Zusammen mit Annahme 2 entspricht dies den Grundannahmen der Balkentheorie.
4. Die Durchbiegungen w sind **klein gegenüber h und unabhängig von z** .
→ Das Gleichgewicht kann damit am unverformten System gebildet werden, es treten i.d.R. keine Membrankräfte auf. In Kombination mit Annahme 2 ergeben sich die kinematischen Beziehungen.
5. Der Werkstoff ist **homogen, isotrop und linear elastisch**.

Elastische Platten

Plattengleichung

Aus dem **Stoffgesetz** (linear elastisch, Hooke'sches Gesetz), den **kinematischen Beziehungen** sowie dem **Gleichgewicht** am infinitesimalen Element folgt die sogenannte Plattengleichung.

Hooke'sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand: $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y)$ $\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x)$ $\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}$

Plattengleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}}_{\text{Balken in x-Richtung}} + 2 \underbrace{\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}}_{\text{Zusatz-term}} + \underbrace{\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}}_{\text{Balken in y-Richtung}} = \Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad \text{mit} \quad \underbrace{D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}_{\text{Plattensteifigkeit}}$$

Inhomogene Differentialgleichung 4. Ordnung (inhomogene Bipotentialgleichung)

→ 2 Randbedingungen anpassbar, jedoch 3 Größen vorhanden (m_n , m_{nt} und v_t) → Stützkraft

- eingespannter Rand: m_n , m_{tn} und v_n beliebig
- einfach gelagerter Rand: $m_n = 0$, resultierende Stützkraft:
- freier Rand: $m_n = 0$, verschwindende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$$

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$$

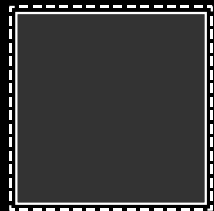
} Vergleiche Folie zu den Randbedingungen

Elastische Platten

Abschätzung der Durchbiegungen

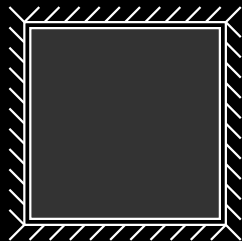
Die Durchbiegungen in Plattenmitte können als Vielfaches derjenigen des einfachen Balkens gleicher Spannweite abgeschätzt werden (nach Bachmann, 1991):

$$w = c \cdot \frac{5}{384} \frac{ql^4}{D} \quad D = \frac{EI}{1-\nu^2} \quad q = \text{const.}$$



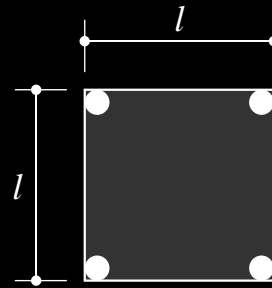
Einfach gelagerte Platte

$$c = 0.312$$



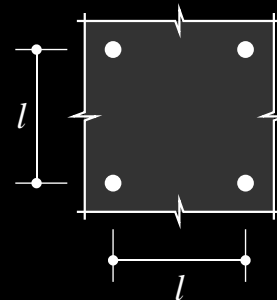
Eingespannte Platte

$$c = 0.098$$



In den Ecken gestützte Platte

$$c = 2.25$$



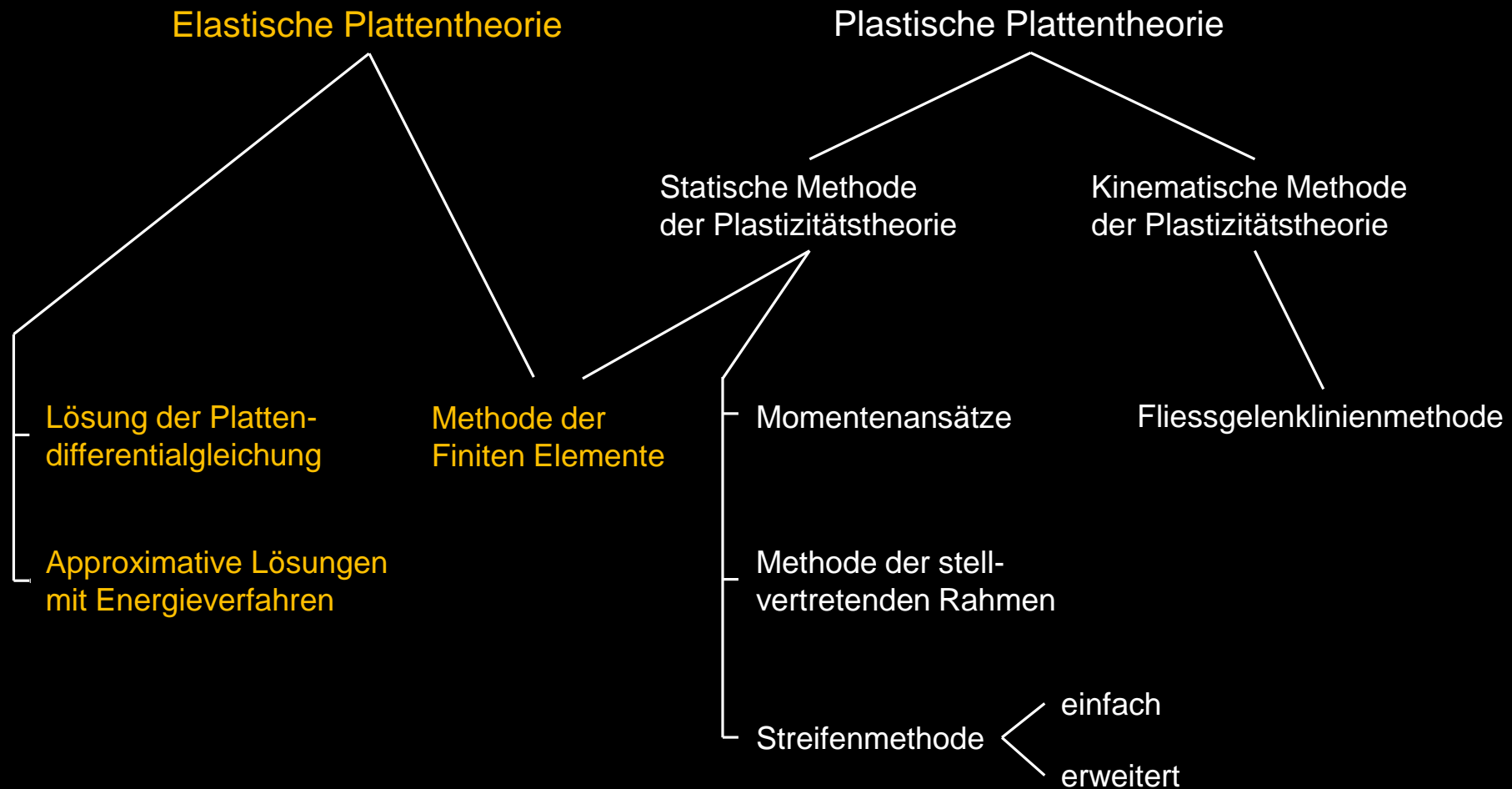
Mittelfeld einer unendlich ausgedehnten Flachdecke

$$c = 0.446$$

Zu beachten ist der Steifigkeitsabfall infolge Kriechen ($E_{c\infty} \approx E_{c0}/3$) und Rissbildung bzw. die Steifigkeitserhöhung infolge Zugversteifung und die kleineren Durchbiegungen bei Vorspannung

Elastische Platten

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden – Übersicht



Elastische Platten

Lösungsverfahren

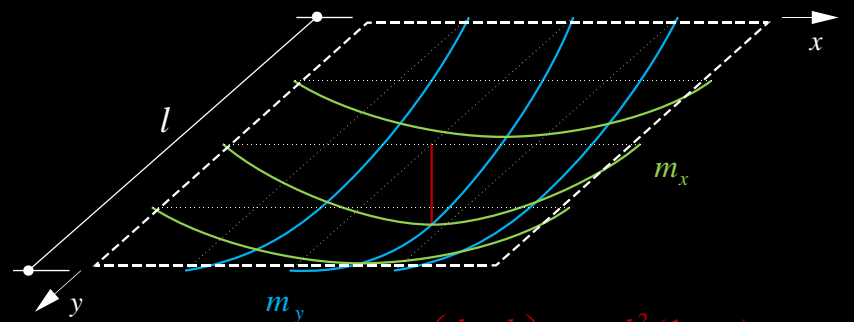
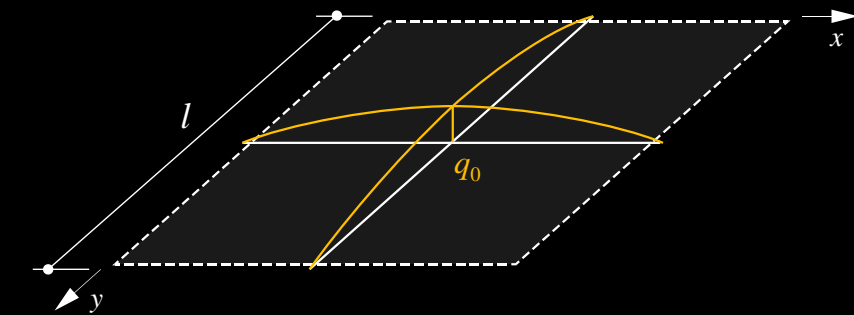
- **Direkte Lösung** der Plattengleichung
 - für spezielle Problemstellungen möglich (z.B. rotationssymmetrische Platten)
 - Resultate sind in Literatur vorhanden und insbesondere für Abschätzungen und Plausibilitätskontrollen wertvoll
- **Approximative Lösung** der Plattengleichung mit Fourier-Reihenansätzen oder Energieverfahren
 - z.B. für Rechteckplatten mit unterschiedlichen Randbedingungen und Belastungsanordnungen
- Lösung der Plattengleichung mit der **Methode der Finiten Elemente**
 - Lösung der Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Element
 - beliebige Randbedingungen und Belastungen möglich
 - heute meistens verwendet

Elastische Platten

Direkte Lösung der Plattendifferentialgleichung – Beispiel

Einfach gelagerte Quadratplatte unter sinusförmiger Flächenlast $q(x,y)$ (Lsg. n. Navier)

ν : Querdehnungszahl



$$m_x\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = \frac{q_0 l^2 (1+\nu)}{4\pi^2}$$

Last: $q = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

Differentialgleichung: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta \Delta w = \frac{q}{D}$

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Ansatz: $w = C \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

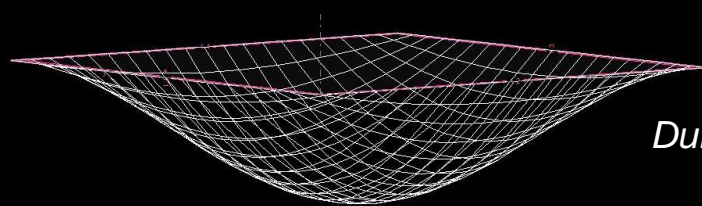
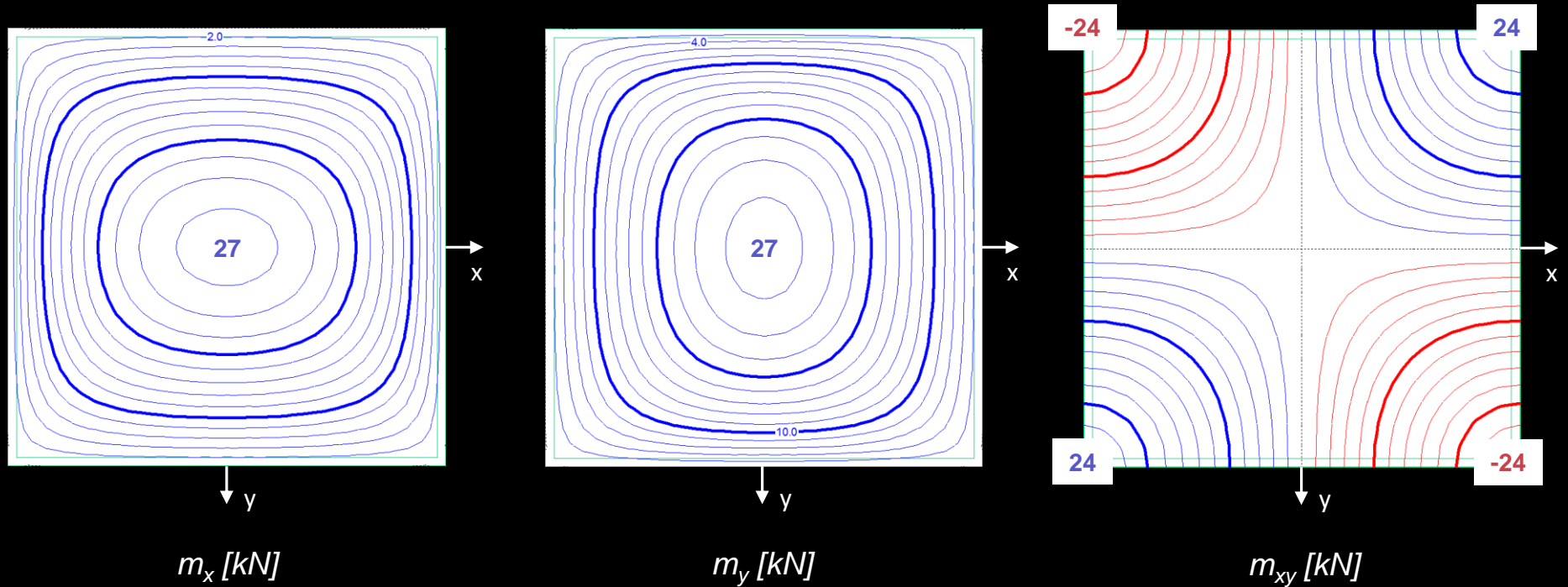
Randbedingungen: $w(0, y) = w(l, y) = w(x, 0) = w(x, l) = 0$
 $m_x(0, y) = m_x(l, y) = m_y(x, 0) = m_y(x, l) = 0$

Lösung: $C = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D}$ $w = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast ($l = 10 \text{ m}$, $h = 0.25 \text{ m}$)



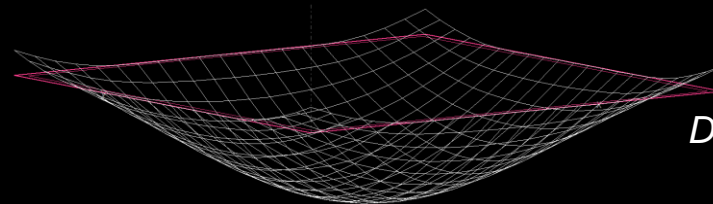
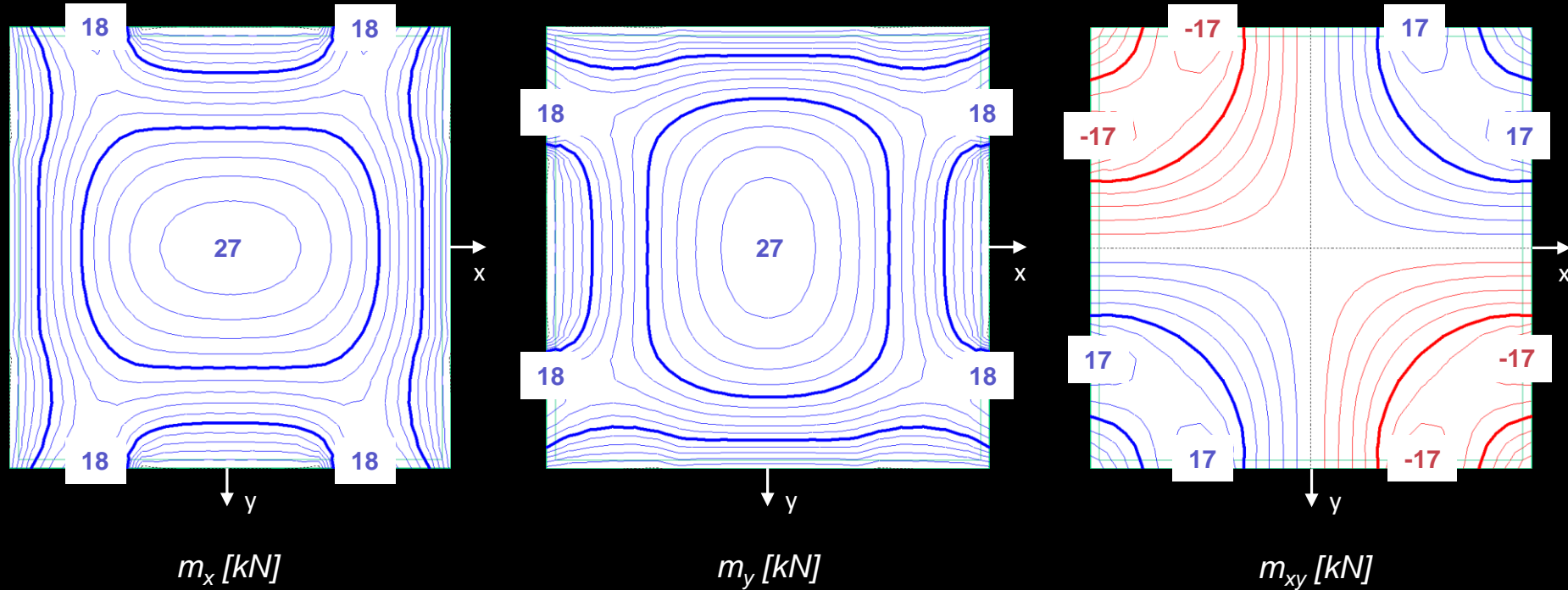
Durchbiegungen qualitativ und überhöht

$$w_{max} = w(l/2, l/2) = 5.6 \text{ mm}$$

Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast ($l = 10 \text{ m}$, $h = 0.25 \text{ m}$) – ohne negative Stützkräfte (=Eckkräfte)



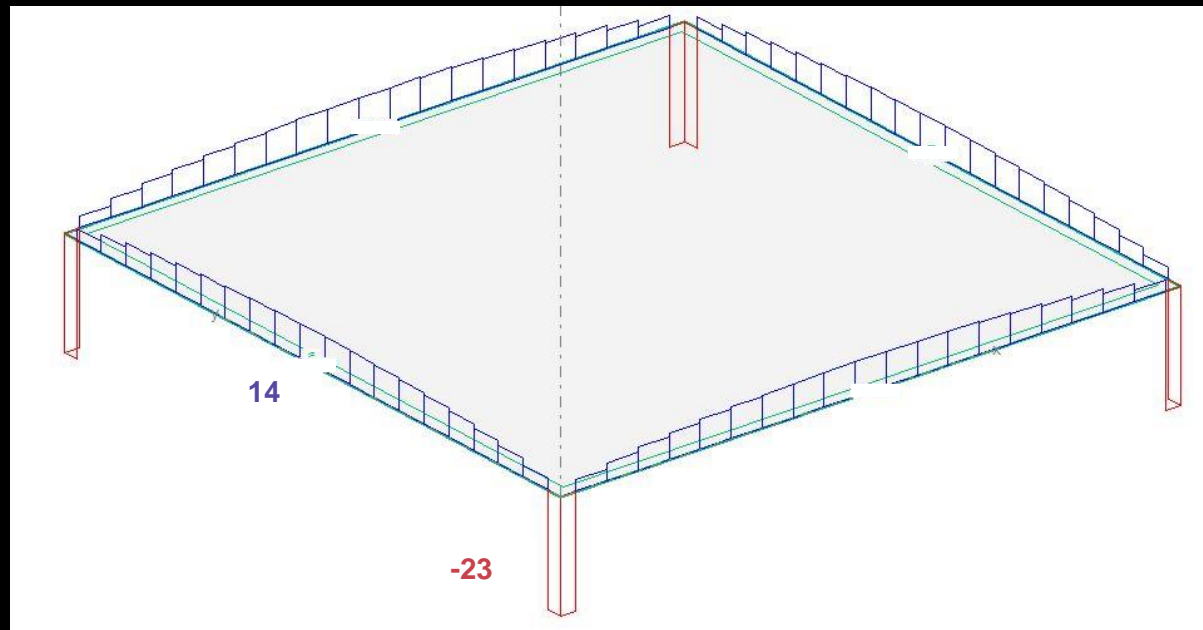
Durchbiegungen qualitativ und überhöht

$$w_{max} = w(l/2, l/2) = 6.6 \text{ mm}$$

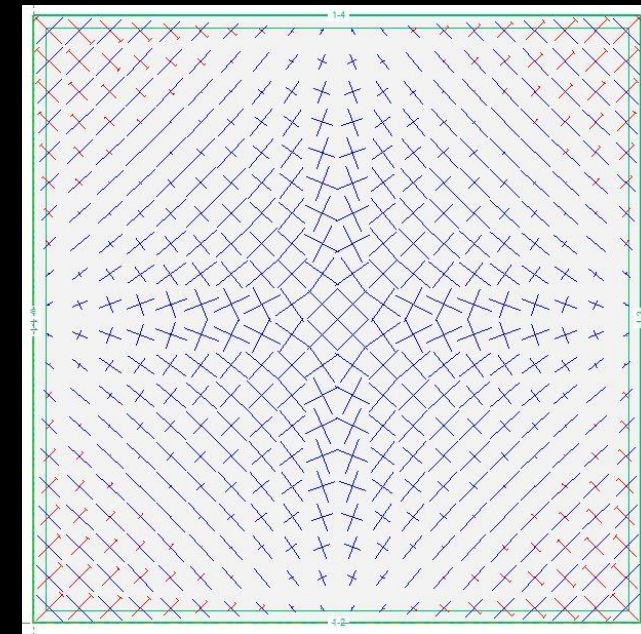
Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast ($l = 10\text{ m}$, $h = 0.25\text{ m}$)



Stützkraft am Rand [kN pro Abschnitt]



*Richtungen der Hauptmomente
(blau: positiv, rot: negativ)*