

# Vorspannkonzeppte

# Vorspannung – Vorspannkonzepte

Das Vorspannkonzept gliedert sich in der Tragwerksplanung praktisch auf der gleichen Stufe ein wie das Tragwerkskonzept.

Das Tragwerkskonzept umfasst:

- Tragsystem
- Hauptabmessungen und wichtigste konstruktive Details
- Baustoffe
- Bauverfahren

Das Vorspannkonzept umfasst:

- Vorspanngrad
- Vorspannlayout (Kabelprofil im Längs- und Querschnitt, Lage der Verankerungen etc.)
- Kabelgrösse
- Spannvorgang (mit Bauvorgang kompatibel)

Die Wahl der Vorspannung ist im Allgemeinen ein iterativer Prozess. Dennoch ist es wichtig, sich von Beginn weg Klarheit über die erforderlichen Platzverhältnisse für Verankerungen, Hüllrohre und Spannpressen zu verschaffen. Diese müssen der technischen Dokumentation des Spannsystems entsprechen (Zulassung). Bei der Vorbemessung können Abschätzungsformeln verwendet werden.

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Interne Kabelvorspannung mit Verbund – Abmessungen

Die Abmessungen müssen der technischen Dokumentation des Spannsystems entsprechen (Zulassung).

Bei der Vorbemessung können folgende Abschätzungsformeln in Abhängigkeit der pro Kabel vorhandenen Spannstahlquerschnittsfläche verwendet werden:



Min. Achsabstand der Spannglieder:  $X \approx 8 \cdot \sqrt{A_p}$  (\* siehe Notizen)

Durchmesser des Hüllrohrs:  $\varnothing_{ext} \approx 2 \cdot \sqrt{A_p}$

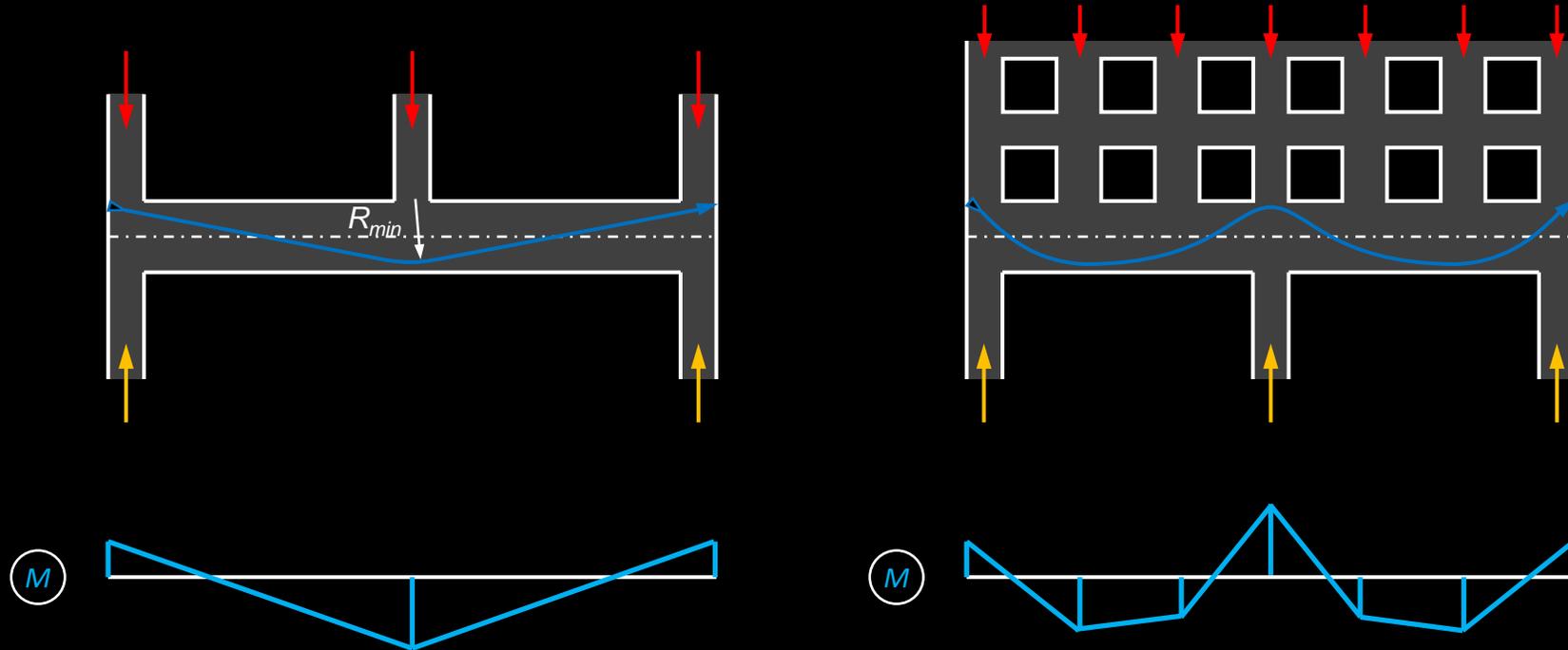
Exzentrizität des Litzenbündels:  $e \approx 0.3 \cdot \sqrt{A_p}$  (gegenüber dem Hüllrohrmittelpunkt)

Minimaler Krümmungsradius:  $R_{min} \approx 125 \cdot \sqrt{A_p}$  (\* siehe Notizen)

Minimale gerade Länge bei Ankern:  $l_{min} \approx 25 \cdot \sqrt{A_p}$

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Beispiel 1: Vorspannlayout für Abfangträger

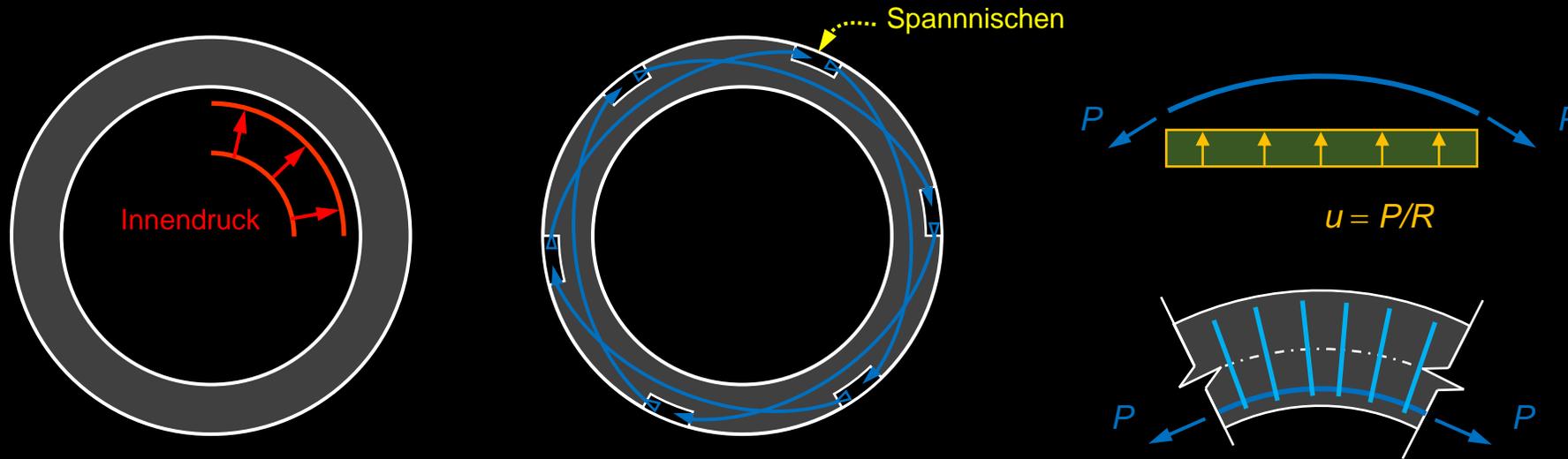


Das Kabelprofil wird etwa affin zur Momentenlinie gewählt. Die Spannkraft  $P$  wird meist etwa so festgelegt, dass der Beton unter ständigen Einwirkungen nicht dekomprimiert.

Die Vorspannung wird bei Abfangträger i.d.R. sukzessive mit dem Baufortschritt aufgebracht (Kompensation der Stützenlasten durch Umlenkkräfte).

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Beispiel 2: Vorspannlayout für Silovorspannung



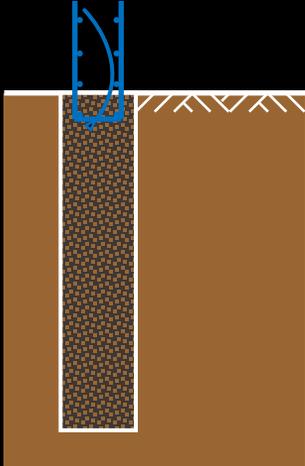
Das Ausreissen des Kabels auf der Innenseite der Krümmung muss unbedingt vermieden werden. Dazu eignen sich zum Beispiel schlaife Bügel, welche die Umlenkkräfte zur Aussenseite hin rückverankern.

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

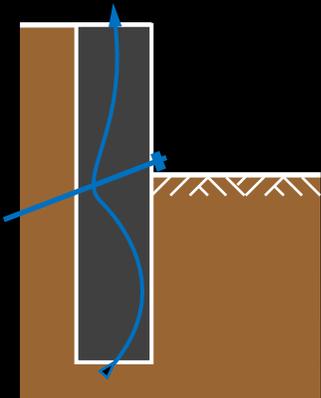
## Beispiel 3: Vorspannlayout für Schlitzwand

Bauzustände:

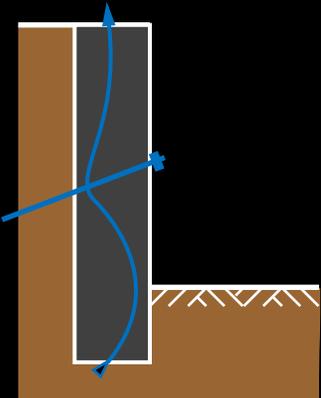
1.



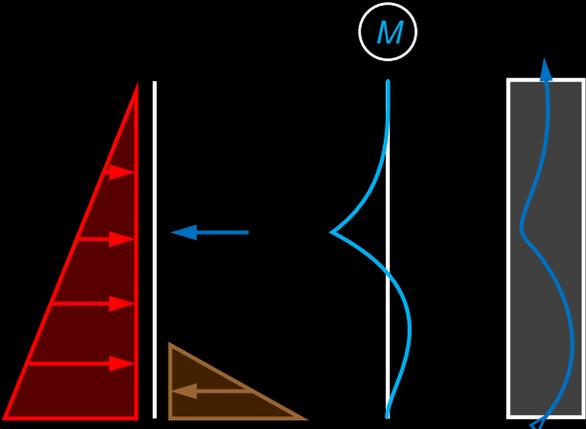
2.



3.



Endzustand:



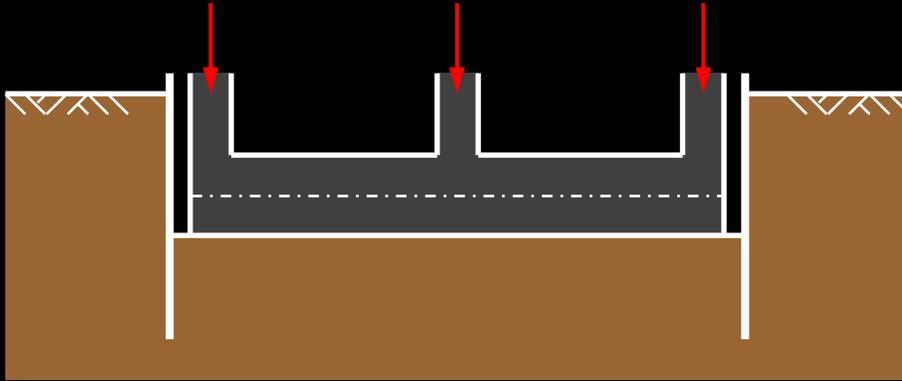
Das Spannkabel wird vor dem Betonieren mit dem Bewehrungskorb in den offenen Schlitz abgesenkt.  
Die Vorspannung erfolgt sukzessive mit fortschreitendem Aushub.

Beispiel: ETH Neubau Gloriastrasse  
(Foto © Terraqua)

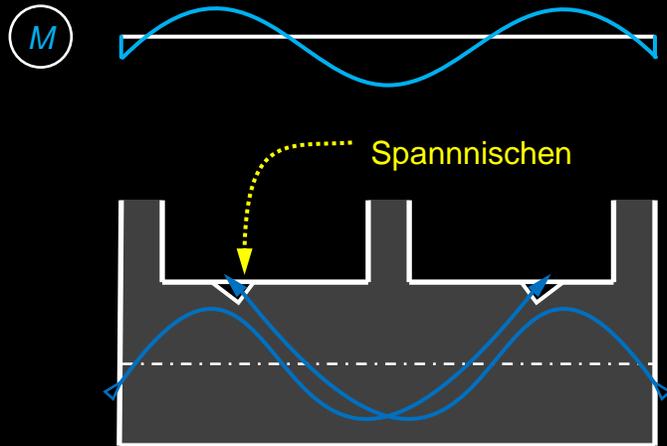


# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Beispiel 4: Vorspannlayout für Bodenplatte



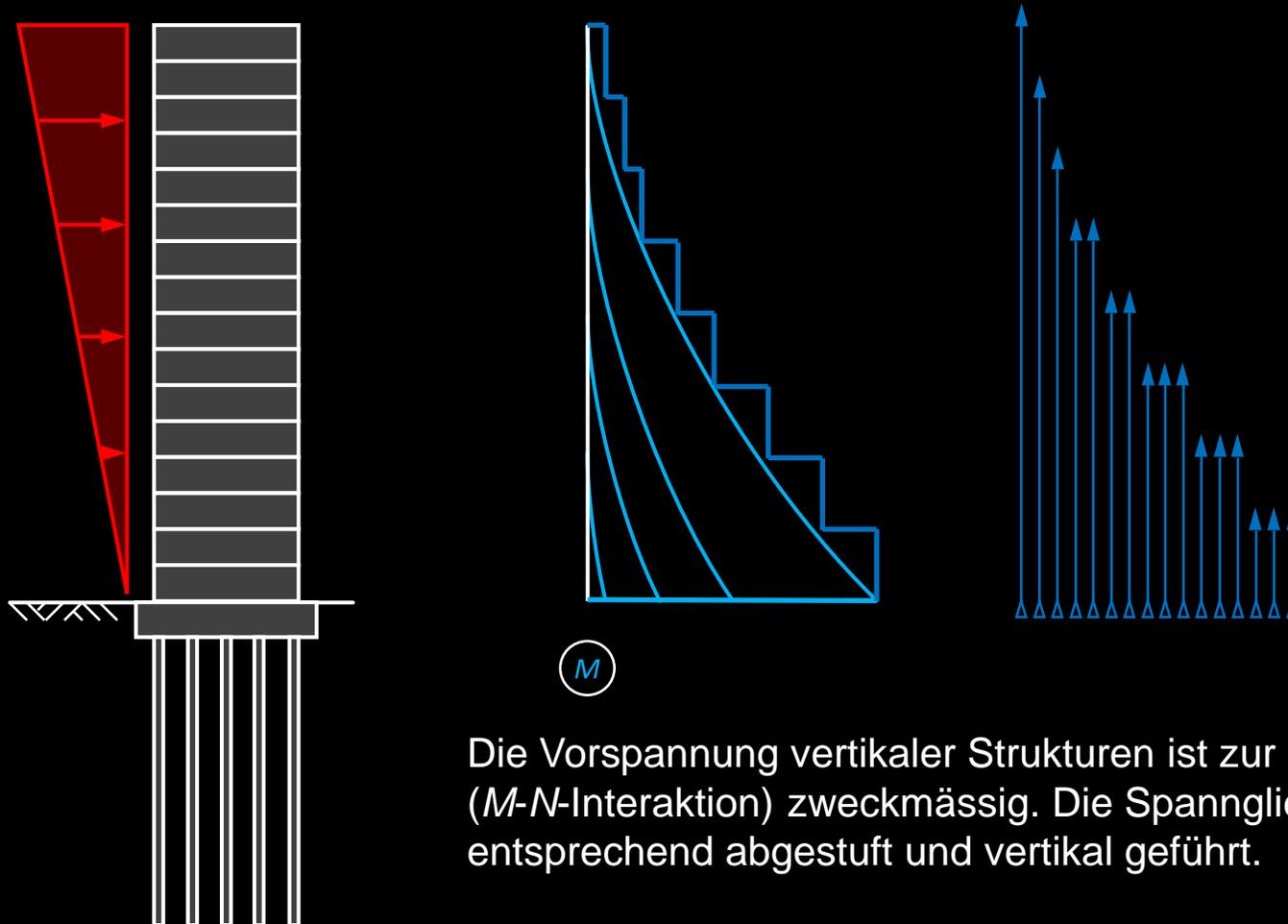
Die Platzverhältnisse zwischen Baugrubenverbau und Abschalung sind oft sehr knapp und reichen i.d.R. nicht aus, um die Spannpressen anzusetzen.



Alternativ können die Spannglieder überlappend angeordnet und von der Oberseite über Spannnischen gespannt werden. Es resultiert im Beispiel somit eine doppelte Vorspannung im Bereich unter der mittleren Stütze.

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

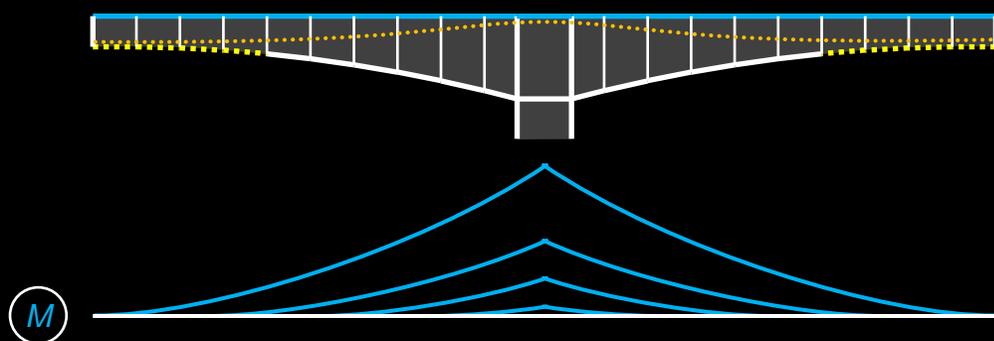
## Beispiel 5: Vorspannung für Hochhauskern



Die Vorspannung vertikaler Strukturen ist zur Erhöhung des Momentenwiderstands ( $M$ - $N$ -Interaktion) zweckmässig. Die Spannglieder werden der Momentenlinie entsprechend abgestuft und vertikal geführt.

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

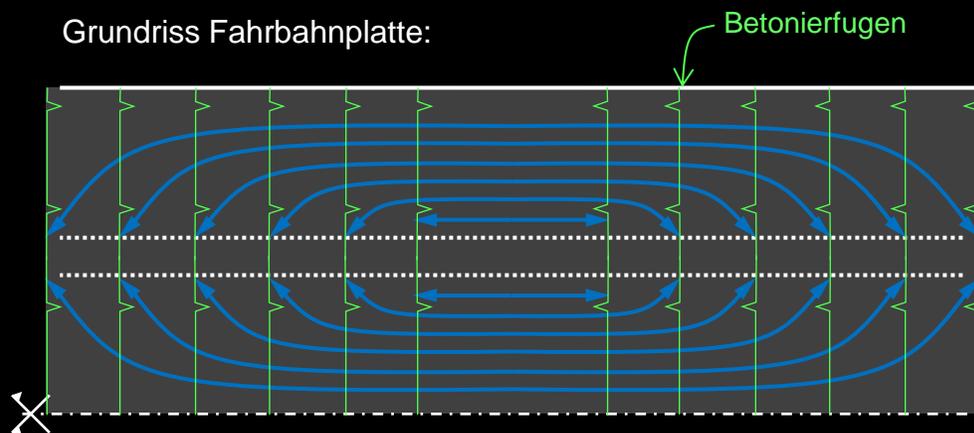
## Beispiel 6: Vorspannlayout für Freivorbaubrücke



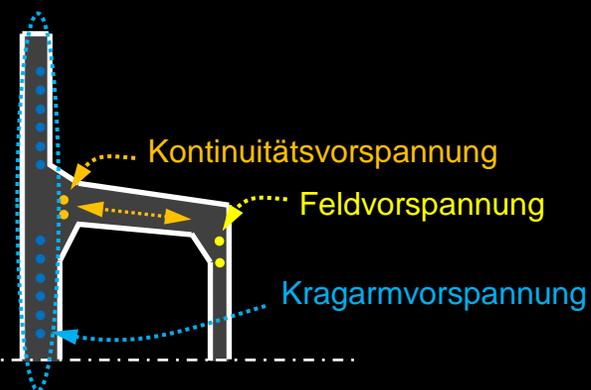
Zusätzlich zur für die Abdeckung der negativen Momente im Bauzustand erforderlichen **Kragarmvorspannung** in der Fahrbahnplatte wird in der Regel eine **Kontinuitätsvorspannung (\*)** im Steg und oft eine **Feldvorspannung (\*)** in der unteren Platte vorgesehen.

(\*) nach dem Fugenschluss gespannt

Grundriss Fahrbahnplatte:

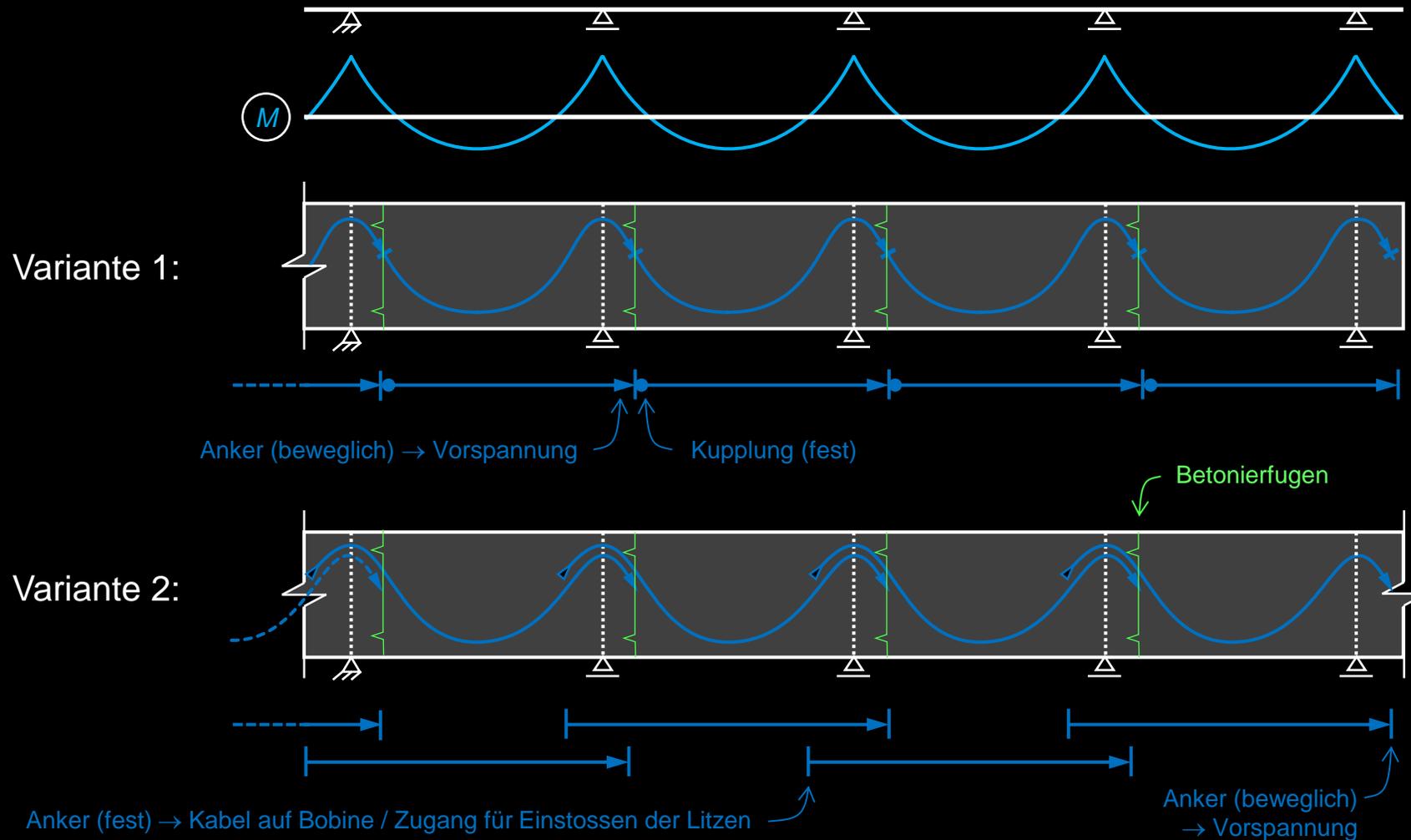


Querschnitt:



# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Beispiel 7: Vorspannlayout für Durchlaufträger

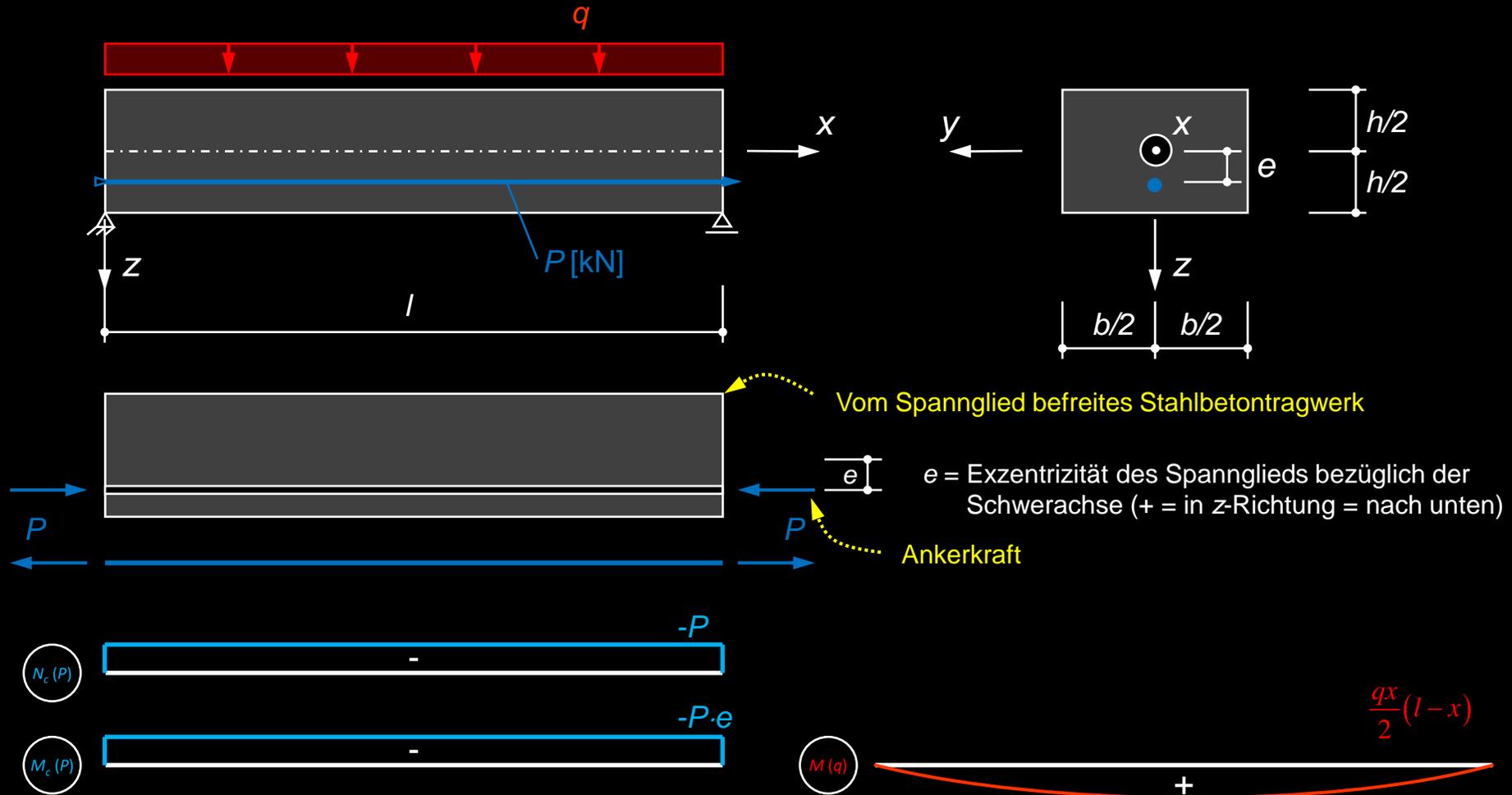


# Vorspannung

# Statisch bestimmte Systeme

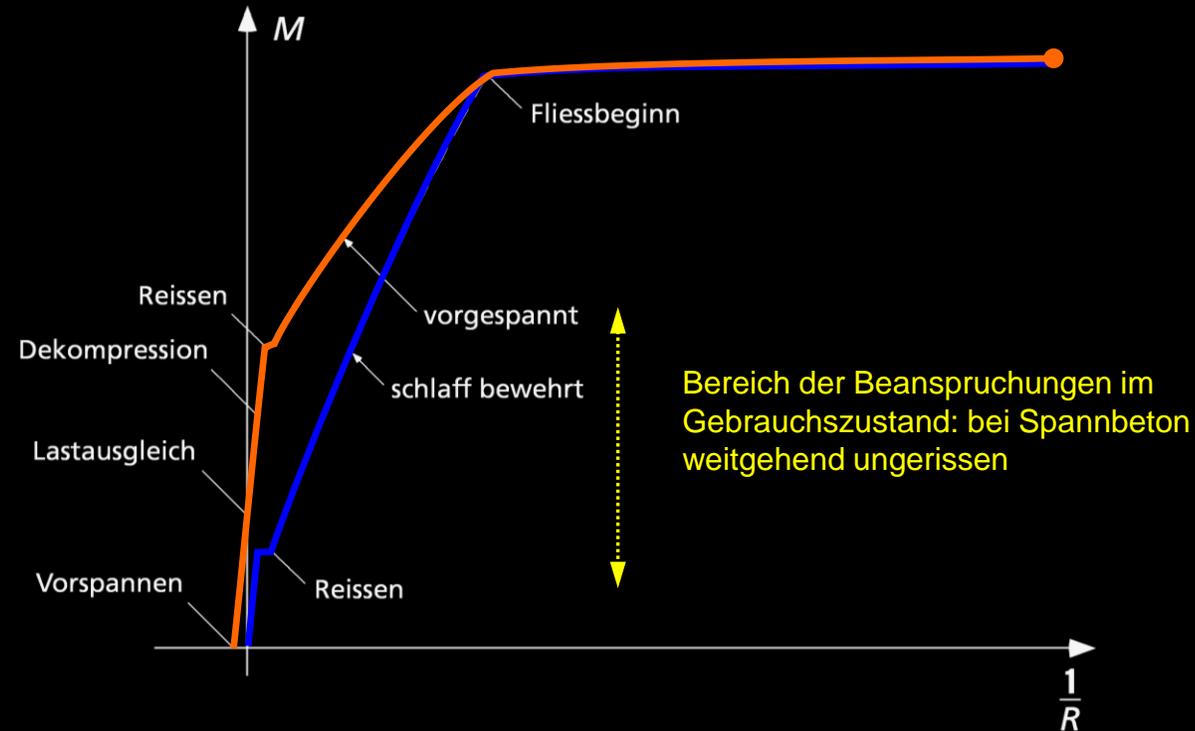
# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – gerade Kabelführung



# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Biegetragverhalten



- ungerissen-elastisches Verhalten ist bei Spannbeton viel wichtiger als bei Stahlbeton
- Spannungen am ungerissenen Querschnitt sind für das Verständnis des Tragwerkszustands zentral
- Zusätzlich zum Tragsicherheitsnachweis wird deshalb stets ein Nachweis der Spannungen im Beton und im Spannstahl geführt

# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – gerade Kabelführung

Spannungen am reinen Betonquerschnitt:

$$\sigma_c = \frac{N_c(P)}{A_c} + \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot z = -\frac{P}{A_c} + \frac{-P \cdot e + \frac{qx \cdot (l-x)}{2}}{I_c} \cdot z$$

mittlere Vorspannung

Damit der Querschnitt nicht dekomprimiert (keine Zugspannungen, volle Vorspannung), müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

- bei  $x = 0$  (Auflager):

$$\sigma_{c,\text{sup}} = \sigma_c \left( z = -\frac{h}{2} \right) = -\frac{P}{A_c} + \frac{-P \cdot e}{I_c} \cdot \frac{-h}{2} = -\frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_{c,\text{sup}}} \leq 0 \quad \rightarrow e \leq \frac{W_{c,\text{sup}}}{A_c} = k_{\text{inf}} \quad \text{mit } W_{c,\text{sup}} = \frac{I_c}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \text{ Widerstandsmoment}$$

- bei  $x = l/2$  (Feldmitte):

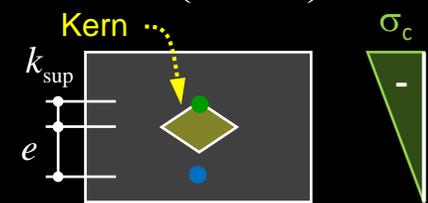
$$\sigma_{c,\text{inf}} = \sigma_c \left( z = \frac{h}{2} \right) = -\frac{P}{A_c} + \frac{-P \cdot e + \frac{ql^2}{8}}{I_c} \cdot \frac{h}{2} \leq 0 \quad \rightarrow P \left( e + \frac{W_{c,\text{inf}}}{A_c} \right) \geq \frac{ql^2}{8} \quad \rightarrow P \geq \frac{ql^2}{8 \cdot (e + k_{\text{sup}})} \quad \text{mit } W_{c,\text{sup}} = \frac{I_c}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \text{ Widerstandsmoment}$$

$$k_{\text{inf}} = \frac{W_{c,\text{sup}}}{A_c} = \frac{h}{6} \text{ untere Kernweite}$$

$$k_{\text{sup}} = \frac{W_{c,\text{inf}}}{A_c} = \frac{h}{6} \text{ obere Kernweite}$$

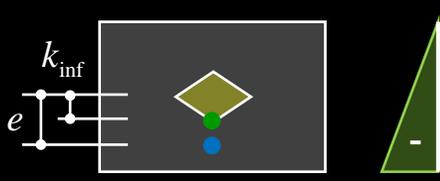
# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

Da unter der massgebenden Beanspruchung die Spannungen am Querschnittsrand gerade = 0 sind, wirkt dabei die resultierende Druckkraft im unteren («inf») resp. oberen («sup») Kernpunkt des Querschnitts:

$$\sigma_{c,inf} = \sigma_c \left( z = +\frac{h}{2} \right) \leq 0 \rightarrow \frac{N_c(P)}{A_c} + \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot z_{max} \leq 0$$


$$-\frac{P}{A_c} - \frac{P \cdot e}{W_{c,inf}} + \frac{M(q)}{W_{c,inf}} \leq 0 \quad \text{mit } W_{c,inf} = \frac{I_c}{z_{max}} = \frac{bh^2}{6}, k_{sup} = \frac{W_{c,inf}}{A_c} \text{ (obere Kernweite)}$$

$$\rightarrow P(e + k_{sup}) \geq M(q) \quad \text{Druckkraft } -P \text{ wirkt im oberen Kernpunkt}$$

$$\sigma_{c,sup} = \sigma_c \left( z = -\frac{h}{2} \right) \leq 0 \rightarrow \frac{N_c(P)}{A_c} + \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot z_{min} = \frac{N_c(P)}{A_c} - \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot |z_{min}| \leq 0$$


$$-\frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_{c,sup}} - \frac{M(q)}{W_{c,sup}} \leq 0 \quad \text{mit } W_{c,sup} = \frac{I_c}{|z_{min}|} = \frac{bh^2}{6}, k_{inf} = \frac{W_{c,sup}}{A_c} \text{ (untere Kernweite)}$$

$$\rightarrow P(-e + k_{inf}) \geq -M(q)$$

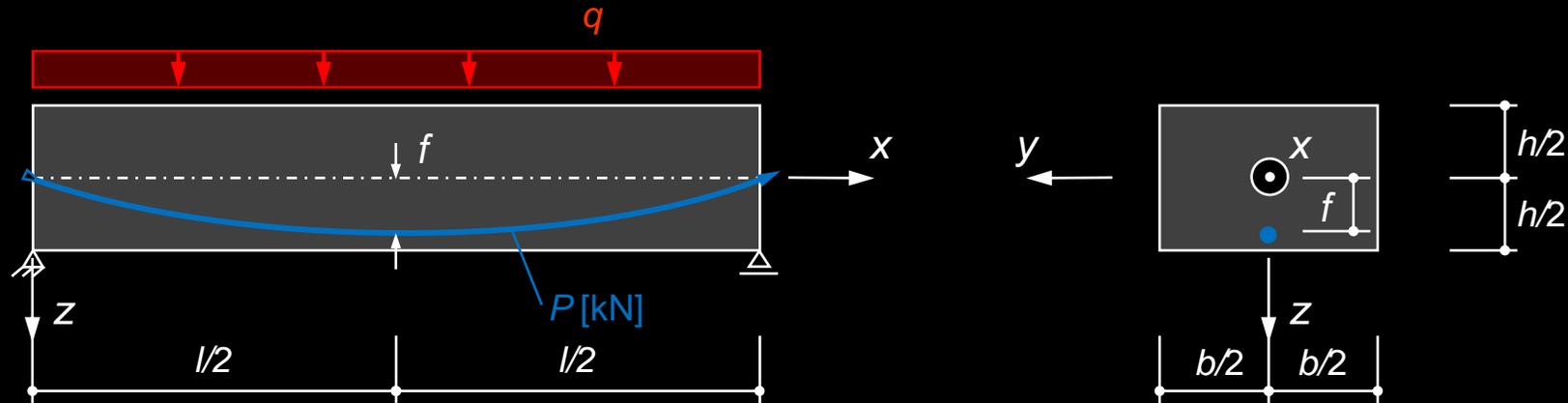


wobei wenn  $\sigma_{c,sup} = 0$  massgebend wird, im Normalfall  $e < 0$  und  $M(q) < 0$  ist und somit:

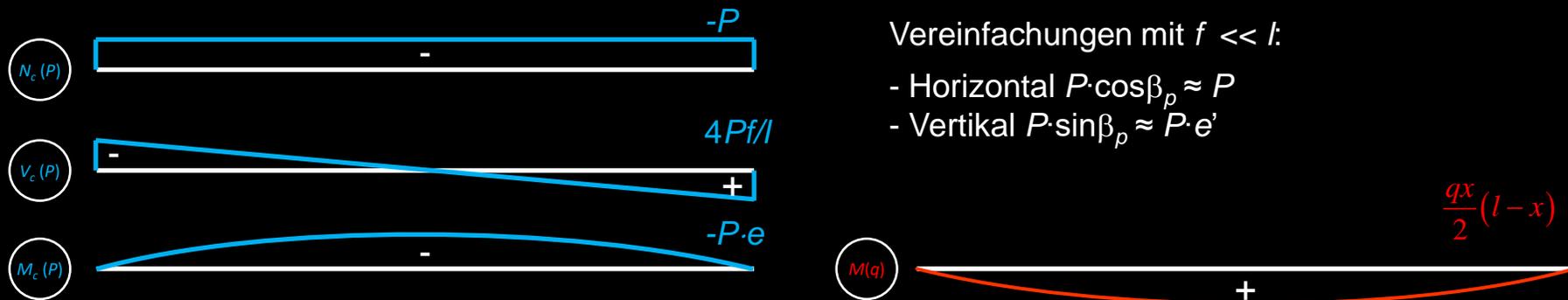
$$\rightarrow P(|e| + k_{inf}) \geq |M(q)| \quad \text{Druckkraft } -P \text{ wirkt im unteren Kernpunkt}$$

# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – parabolische Kabelführung



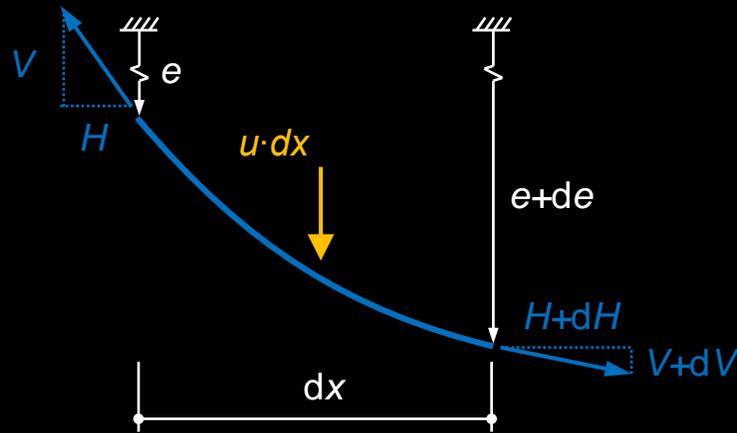
$$e(x) = \frac{4fx}{l^2} \cdot (l-x) \quad e = \text{Exzentrizität des Spannglieds bezüglich der Schwerachse (+ = in z-Richtung = nach unten)}$$



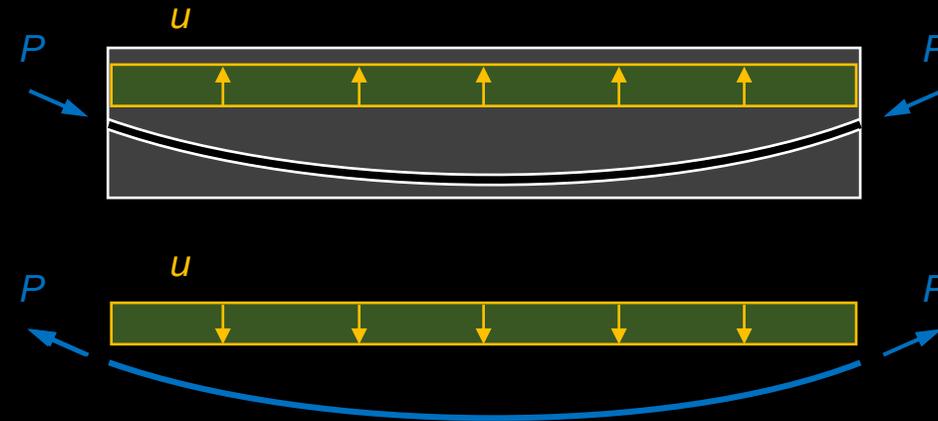
# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – parabolische Kabelführung

Umlenkräfte:



$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_H &= H + dH - H = 0 && \rightarrow dH = 0 \\ \Sigma F_V &= V + dV - V + u \cdot dx = 0 && \rightarrow u = -\frac{dV}{dx} \\ \Sigma M &= H \cdot de - V \cdot dx = 0 && \rightarrow V = H \cdot \frac{de}{dx} \end{aligned} \right\}$$



Gilt für parabolische Spannglieder mit  $P \approx H$

$$\rightarrow u = -H \cdot \frac{d^2 e}{dx^2} \approx \frac{8Pf}{l^2} \left( \rightarrow M_c(P) \Big|_{x=l/2} = -\frac{ul^2}{8} = -Pf \right)$$

NB: Mit  $u = q$  resultiert ein vollständiger Lastausgleich, in jedem Querschnitt ergibt sich ein zentrischer Druckspannungszustand:

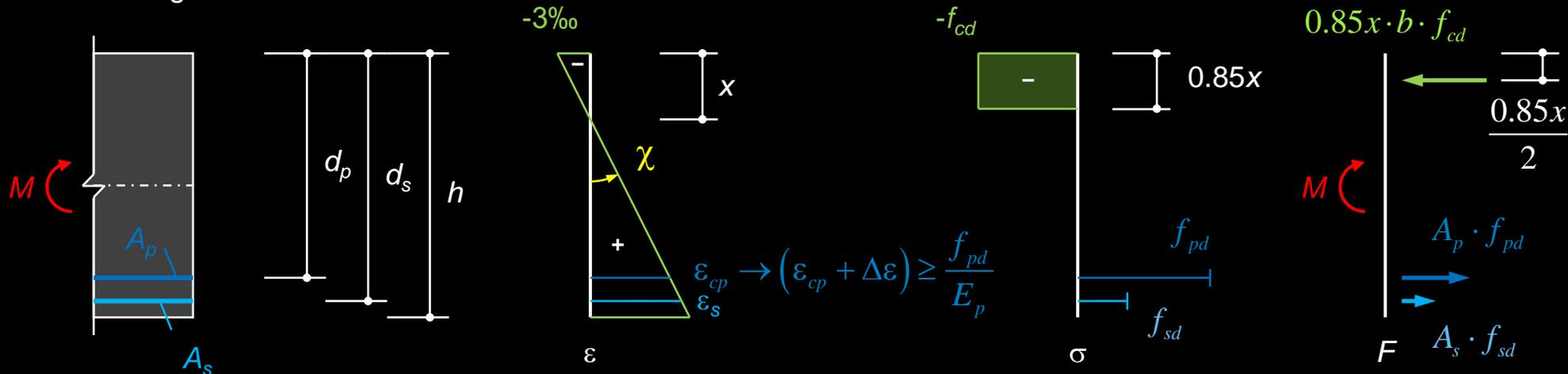
$$u = \frac{8Pf}{l^2} = q \rightarrow P = \frac{ul^2}{8f} \rightarrow M_c(P) = -M(q), V_c(P) = -V(q), \sigma_c = -\frac{P}{A_c}$$

# Vorspannung – Tragsicherheit

## Biegetragsicherheit

Der Biegezugwiderstand kann analog wie für Stahlbetonquerschnitte ermittelt werden. Bei Vorspannung mit Verbund wird in der Regel die Spannung  $f_{pd}$  erreicht (Vordehnung Spannstahl  $\Delta\varepsilon$  berücksichtigen).

Bei Spanngliedern ohne Verbund darf ohne genauere Untersuchungen nur eine Spannung von  $\sigma_{p\infty}$  (nach Abzug aller Verluste vorhandene Spannkraft) berücksichtigt werden.



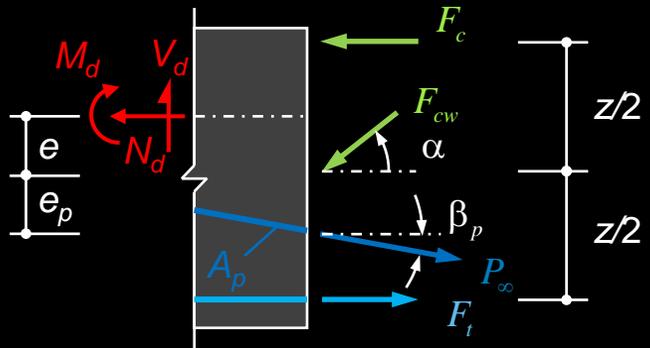
$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow 0.85x = \frac{A_p \cdot f_{pd} + A_s \cdot f_{sd}}{b \cdot f_{cd}}$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow M_{Rd} = A_p \cdot f_{pd} \cdot \left( d_p - \frac{0.85x}{2} \right) + A_s \cdot f_{sd} \cdot \left( d_s - \frac{0.85x}{2} \right) \stackrel{!}{\geq} M_{Ed} = \gamma_G \cdot M(g_k) + \gamma_Q \cdot M(q_k) + M_{ps}$$

**NB:** Betrachtung des gesamten Tragwerks inkl. Spannglied, sowohl für Widerstand als auch für Einwirkungen → bei Einwirkungen nur  $M_{ps}$  ansetzen, nicht  $M_c(P)$ !

# Querkrafttragsicherheit

«Querschnittswiderstand»  $V_{Rd}$  gemäss SIA 262:



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den Kräften im Druck- und Zuggurt  $F_c$  bzw.  $F_t$  wirkt die geneigte Spannkraft  $P_\infty$  (Vorspannung auf Widerstandsseite).

Diese leistet bei günstiger Neigung einen wesentlichen Beitrag zu  $V_{Rd}$ . Die über das geneigte Betondruckfeld abzutragende Querkraft reduziert sich näherungsweise um  $\Delta V_{Rd,p} = P_\infty \sin \beta_p$  (die Neigung der Druckgurtkraft  $F_c$  wird hier auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt; Einfluss siehe später).

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um **Terme infolge Vorspannung**.

$$\Sigma F_V: F_{cw} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha}$$

$$\Sigma M_T: F_c = \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

$$\Sigma M_C: F_T = \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

→ Erf. Widerstand der Bügel:

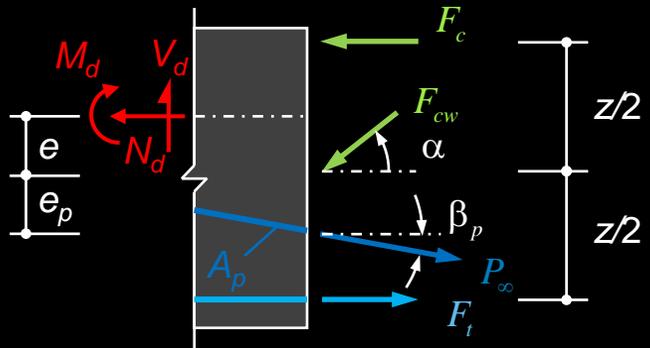
$$v_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha}$$

→ Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

# Querkrafttragsicherheit

«Querschnittswiderstand»  $V_{Rd}$  gemäss SIA 262:



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den Kräften im Druck- und Zuggurt  $F_c$  bzw.  $F_t$  wirkt die geneigte Spannkraft  $P_\infty$  (Vorspannung auf Widerstandsseite).

Diese leistet bei günstiger Neigung einen wesentlichen Beitrag zu  $V_{Rd}$ . Die über das geneigte Betondruckfeld abzutragende Querkraft reduziert sich näherungsweise um  $\Delta V_{Rd,p} = P_\infty \sin \beta_p$  (die Neigung der Druckgurtkraft  $F_c$  wird hier auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt; Einfluss siehe später).

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um **Terme infolge Vorspannung**.

Wenn die Summe der Durchmesser aller nebeneinander im Steg liegenden Hüllrohre  $b_w/8$  überschreitet, sind die Betonspannungen mit einer reduzierten nominellen Stegbreite zu ermitteln:

$$b_{w,nom} = b_w - k_H \cdot \sum \varnothing_H$$

$k_H = 0.5$  für injizierte Stahlhüllrohre

$k_H = 0.8$  für injizierte Kunststoffhüllrohre

$k_H = 1.2$  für nicht injizierte Hüllrohre

→ Erf. Widerstand der Bügel:

$$V_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha}$$

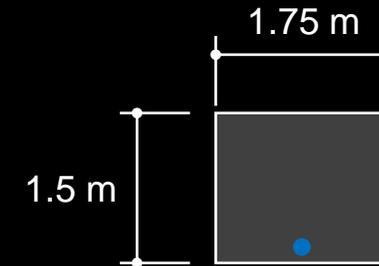
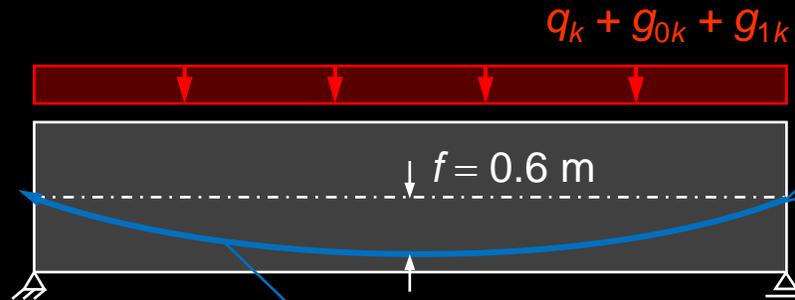
→ Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

**NB: Gleiches Resultat, wenn die Einwirkungen inkl.  $-V_c(P_\infty) = P_\infty \sin \beta_p$  ermittelt werden = Betrachtung des vom Spannglied befreiten Tragwerks, sowohl für Widerstand als auch für Einwirkungen**

# Vorspannung – Beispiel

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt



VSL 6-19 Y1770

Litzendurchmesser 0.6"

19 Litzen pro Kabel

Festigkeitsklasse Y1770,  $f_{pk} = 1770$  MPa,  $f_{pd} = 1320$  MPa

Spannweite  $l = 16$  m

Belastung:

- Eigenlast:  $g_{0k} = 1.5 \cdot 1.75 \cdot 25 = 65.6$  kN/m
- Auflast:  $g_{1k} = 28$  kN/m
- Nutzlast:  $q_k = 14$  kN/m

Bemessungswert:  $q_d = 1.35 \cdot (65.6 + 28) + 1.5 \cdot 14 = 147.2$  kN/m

Spannstahlfläche:  $A_p = 19 \cdot 150 = 2850$  mm<sup>2</sup>

Vorspannung:  $\sigma_{p0} = 0.7 \cdot f_{pk} = 1239$  MPa,  $\sigma_{p\infty} \approx 0.85 \cdot \sigma_{p0} = 1053$  MPa,

$$A_c = 1.75 \cdot 1.5 = 2.625 \text{ m}^2$$

$$I_c = \frac{1.75 \cdot 1.5^3}{12} = 0.4922 \text{ m}^4$$

# Vorspannung – Beispiel

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Biegetragsicherheit (schlaaffe Bewehrung vernachlässigt):

$$M_d = \frac{q_d l^2}{8} = \frac{147.2 \cdot 16^2}{8} = 4717 \text{ kNm}$$

$$A_p \cdot f_{pd} = 2850 \cdot 1.32 = 3762 \text{ kN} \quad (f_{pd} = 1320 \text{ MPa})$$

$$c = \frac{A_p f_{pd}}{b f_{cd}} = \frac{3762}{1750 \cdot 0.02} = 108 \text{ mm} \quad (\text{C30/37: } f_{cd} = 20 \text{ MPa} = 20 \text{ N/mm}^2 = 0.02 \text{ kN/mm}^2)$$

$$M_{Rd} = A_p f_{pd} \cdot \left( d_p - \frac{c}{2} \right) = 3762 \cdot \left( 1.35 - \frac{0.108}{2} \right) = 4876 \text{ kNm} > 4717 \text{ kNm, i.O.}$$

Vorspannkkräfte:

- Initiale Vorspannung auf 70% von  $f_{pk}$ :  $P_0 = 2850 \cdot 0.7 \cdot 1770 = 3531 \text{ kN}$
- Vorspannkraft nach Abzug der Langzeitverluste:  $P_\infty \approx 0.85 \cdot P_0 = 0.85 \cdot 3531 = 3001 \text{ kN}$

# Vorspannung – Beispiel

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Querkrafttragsicherheit (Näherung, bei Auflager):

$$V_d = \frac{q_d l}{2} = \frac{147.2 \cdot 16}{2} = 1178 \text{ kN}$$

$$\tan \beta_p = \frac{2f}{l/2} = \frac{1.2}{8} = 0.15 \rightarrow \beta_p = 149 \text{ mrad}$$

$$P_\infty \cdot \sin \beta_p = 3001 \cdot \sin(0.149) = 445 \text{ kN}$$

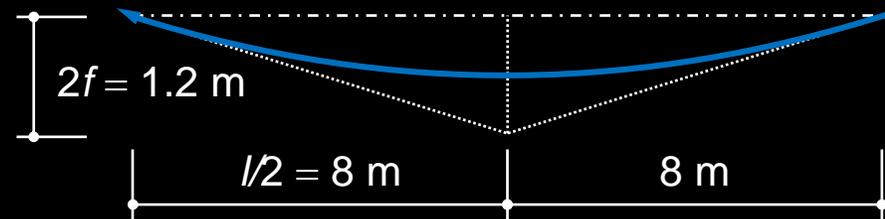
$$V_{dc} = V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p = 1178 - 445 = 733 \text{ kN}$$

$$a_{s,erf} = \frac{V_{dc}}{z \cdot f_{sd} \cdot \cot \alpha} = \frac{733}{1.3 \cdot 0.435} = 1296 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Gewählt:  $\alpha = 45^\circ$

z.B. Ø12@150, 2-schnittig,  $a_s = 1506 \text{ mm}^2/\text{m}$

$$\sigma_c = \frac{V_{dc}}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{733}{1.75 \cdot 1.3 \cdot 0.5 \cdot 1000} = 0.6 \text{ MPa} < 11 \text{ MPa} = k_c \cdot f_{cd}$$



# Vorspannung – Beispiel

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Spannungen in Feldmitte ( $e = 0.6$  m) zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

Wirksame Belastung: nur Eigengewicht  $g_0 = 65.6$  kN/m,  $M(g_{0k}) = 2100$  kNm

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c,\text{sup}} \\ \sigma_{c,\text{inf}} \end{Bmatrix} = \frac{N_c(P_0)}{A_c} + \frac{M_c(P_0)}{I_c} \cdot \begin{Bmatrix} z_{\text{sup}} \\ z_{\text{inf}} \end{Bmatrix} = \frac{-3.531}{2.625} + \frac{2.1 - 3.531 \cdot 0.6}{0.4922} \cdot \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.32 \\ -1.37 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Spannungen in Feldmitte ( $e = 0.6$  m) zum Zeitpunkt  $t \rightarrow \infty$ :

Wirksame Belastung: Eigengewicht, Auf- und Nutzlast  $q'_k = 107.6$  kN/m,  $M(q'_k) = 3443$  kNm

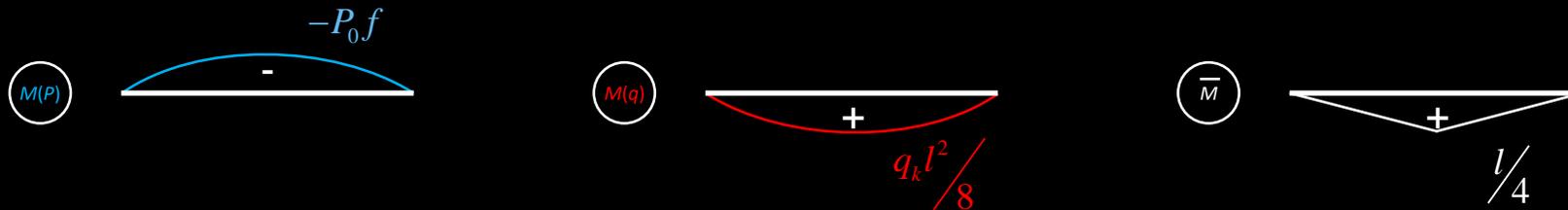
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c,\text{sup}} \\ \sigma_{c,\text{inf}} \end{Bmatrix} = \frac{N_c(P_\infty)}{A_c} + \frac{M_c(P_\infty)}{I_c} \cdot \begin{Bmatrix} z_{\text{sup}} \\ z_{\text{inf}} \end{Bmatrix} = \frac{-3.001}{2.625} + \frac{3.443 - 3.001 \cdot 0.6}{0.4922} \cdot \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.65 \\ 1.36 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Da der Querschnitt am unteren Querschnittsrand für  $t \rightarrow \infty$  dekomprimiert, müsste streng genommen ein Spannungsnachweis am gerissenen Querschnitt geführt werden. In der Praxis wird aber oft eine nominelle Zugspannung am ungerissenen Querschnitt von 1-2 MPa toleriert (siehe Vorspanngrad, zulässige Randspannungen).

# Vorspannung – Beispiel

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Durchbiegungen in Feldmitte zum Zeitpunkt  $t = 0$  (nach dem Absenken des Lehrgerüsts):



$$w = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{q_k l^2}{8} - P_0 f \right) \cdot \frac{l^2}{4EI} = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{65.6 \cdot 16^2}{8} - 3531 \cdot 0.6 \right) \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} = -0.03 \text{ mm}$$

Alternativ können die Umlenkräfte aus der Vorspannung auch direkt von der Einwirkung abgezogen werden:

$$w = \frac{5 \cdot (q_k - u) \cdot l^4}{384EI} = \frac{5 \cdot \left( q_k - \frac{8P_0 f}{l^2} \right) \cdot l^4}{384EI} = \frac{5 \cdot \left( 65.6 - \frac{8 \cdot 3531 \cdot 0.6}{16^2} \right) \cdot 16^4}{384 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} = -0.03 \text{ mm}$$

Das Eigengewicht wird leicht überkompensiert. Direkt nach dem Ausschalen treten praktisch keine Verformungen auf (da die Umlenkräfte der Vorspannung ca. 101% des Eigengewichts betragen)

# Vorspannung – Beispiel

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Durchbiegungen in Feldmitte zum Zeitpunkt  $t \rightarrow \infty$ :

$$w = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{q_k l^2}{8} - P_\infty f \right) \cdot \frac{l^2}{4EI} \cdot (1 + \phi) = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{(65.6 + 28) \cdot 16^2}{8} - 3001 \cdot 0.6 \right) \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} \cdot 3 = 5.8 \text{ mm}$$

*Kriechen*

Durchbiegung in Feldmitte infolge der veränderlichen Belastung:

$$w = \frac{5 \cdot q_k \cdot l^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 14 \cdot 16^4}{384 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} = 0.7 \text{ mm}$$

Nachweise der Gebrauchstauglichkeit nach SIA 260, Tab. 3:

Funktionstüchtigkeit:  $w = 5.8 + \psi_0 \cdot 0.7 = 6.5 \text{ mm} = l/2460 \ll l/350$

Komfort:  $w = \psi_1 \cdot 0.7 \text{ mm} = l/22'900 \ll l/350$

Aussehen:  $w = 5.8 + \psi_2 \cdot 0.7 < 6.5 \text{ mm} = l/2460 \ll l/300$

**NB:** Vereinfachend wird hier generell von einem ungerissenen Verhalten ausgegangen, obschon der Querschnitt unter  $q'_k$  kleine Zugspannungen erfährt. Streng genommen müsste der Nachweis für «Aussehen» unter Berücksichtigung der Rissbildung erfolgen.

Die Durchbiegungen dürften noch gemäss den Lastkombinationen SIA 260, Ziff. 4.4.4.4 und den Reduktionsbeiwerten  $\psi_0$  (selten),  $\psi_1$  (häufig) und  $\psi_2$  (quasi-ständig) in Tab. 2 abgemindert werden.

Im vorliegenden Fall sind die Nachweise aber auch mit  $\psi_i = 1$  problemlos erfüllt.

# Vorspannung

## Wahl des Vorspannungsgrads

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – Betrachtung der Betonspannungen (1)

Volle Vorspannung: Von einer vollen Vorspannung für eine bestimmte Last spricht man allgemein, wenn unter dieser Last kein Querschnitt dekomprimiert, d.h. unter dieser Last im ganzen Bauteil keine Zugspannungen auftreten.

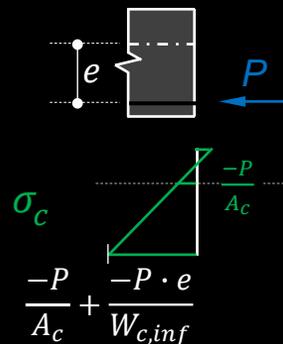
Spannkraft für eine volle Vorspannung für Last  $q$  (Annahme  $P = \text{konstant}$ ,  $N = 0$ ):

$$\sigma_{c,inf} \leq 0 \rightarrow P(e + k_{sup}) \geq M(q) + M_{ps} \rightarrow P \geq \frac{M(q) + M_{ps}}{e + k_{sup}} \quad (M(q) > 0, e > 0)$$

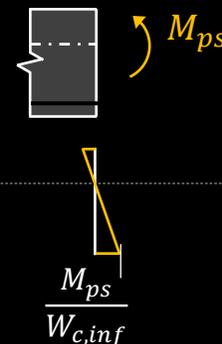
$$\sigma_{c,sup} \leq 0 \rightarrow P(-e + k_{inf}) \geq -(M(q) + M_{ps}) \rightarrow P \geq \frac{|M(q)| - M_{ps}}{|e| + k_{inf}} \quad (M(q) < 0, e < 0)$$

Herleitung (positive Momente, für negative Biegung analog):

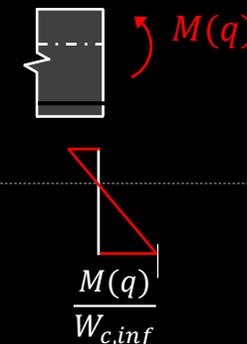
Eigenspannungszustand  
(auf vom Spannglied befreiten  
Querschnitt wirkender Teil)



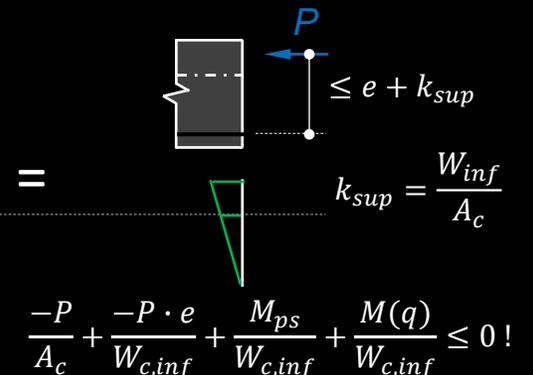
Zwangsmomente  
(bei statisch bestimmten  
Systemen = 0)



Einwirkungen, für die voll  
vorgespannt werden soll



Resultierender Spannungszustand im Querschnitt



NB: Bei statisch unbestimmten Systemen ist in der Regel ein iteratives Vorgehen nötig, da  $M_{ps}$  von  $P$  abhängig ist

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – Betrachtung der Betonspannungen (2)

Volle Vorspannung: Von einer vollen Vorspannung für eine bestimmte Last spricht man allgemein, wenn unter dieser Last kein Querschnitt dekomprimiert, d.h. unter dieser Last im ganzen Bauteil keine Zugspannungen auftreten.

Spannkraft für eine volle Vorspannung für Last  $q$  (Annahme  $P = \text{konstant}$ ,  $N = 0$ ):

$$\sigma_{c,\text{inf}} \leq 0 \rightarrow P(e + k_{\text{sup}}) \geq M(q) + M_{\text{ps}} \rightarrow P \geq \frac{M(q) + M_{\text{ps}}}{e + k_{\text{sup}}} \quad (M(q) > 0, e > 0)$$
$$\sigma_{c,\text{sup}} \leq 0 \rightarrow P(-e + k_{\text{inf}}) \geq -(M(q) + M_{\text{ps}}) \rightarrow P \geq \frac{|M(q)| - M_{\text{ps}}}{|e| + k_{\text{inf}}} \quad (M(q) < 0, e < 0)$$

Oft wird als «volle Vorspannung» eine volle Vorspannung für die gesamte Belastung (ständige und veränderliche Einwirkungen) bezeichnet. Eine solche Vorspannung ist meist unnötig und unwirtschaftlich. Sinnvoll ist dagegen in vielen Fällen eine volle Vorspannung für die ständigen Lasten, entsprechend einer teilweisen Vorspannung für die Gesamtbelastung.

Insbesondere bei stark vorgespannten Tragwerken (z.B. Bahnbrücken) kann der Querschnitt auch am entfernten Querschnittsrand dekomprimieren. Daher sind die Randspannungen grundsätzlich für folgende Zeitpunkte zu überprüfen:

(1)  $t = t_0 \rightarrow P = P_0$  d.h. initiale Spannkraft mit  $q_{\text{min}}$  = beim Vorspannen wirksame Last

(2)  $t = t_\infty \rightarrow P = P_\infty$  (minimale Spannkraft) mit  $q_{\text{max}}$  = Last für die vorgespannt wird

(Unterschied  $P_0 \leftrightarrow P_\infty$  siehe Langzeitverluste)

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – Betrachtung der Betonspannungen (3)

- Teilweise Vorspannung: Von einer teilweisen Vorspannung für eine bestimmte Last spricht man allgemein, wenn für diese Last keine volle Vorspannung vorliegt.  
Oft wird als «teilweise Vorspannung» eine teilweise Vorspannung für die gesamte Belastung (ständige und veränderliche Einwirkungen) bezeichnet.  
Mit dem Konzept der teilweisen Vorspannung können die Anforderungen an Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit unter Ausnutzung der schlaffen Bewehrung optimal erfüllt werden.
- Zul. Randspannungen: Anstelle der Forderung, dass keine Dekompression auftreten darf, werden bei einer vollen Vorspannung oft gewisse Zugspannungen am Querschnittsrand (in der Größenordnung von  $f_{ct}$ ) toleriert.  
Solche (unter der Annahme eines ungerissenen Querschnitts ermittelte) «zulässige Randspannungen» haben im Falle einer Rissbildung unter den gegebenen Einwirkungen oder auch bei bestehenden Rissen aus Bauzuständen keine mechanische Bedeutung. Implizit wird damit aber eine Begrenzung der Rissbreiten unter der entsprechenden Last gewährleistet.
- Mittlere Vorspannung: Ein Richtwert für den Grad der Vorspannung ist die mittlere («zentrische») Vorspannung  $-P/A_c$  (Druckspannung in Schwerachse). Typische Werte:  
0.8 – 2.0 MPa bei Hochbaudecken  
2.5 – 5.0 MPa bei Strassenbrücken  
4.0 – 7.0 MPa bei Bahnbrücken

**NB: Ältere Bauwerke sind oft deutlich höher vorgespannt.**

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – «Load Balancing» und «Formtreue Vorspannung»

Anstelle der Betrachtung von Betonspannungen am Querschnittsrand kann der Vorspanngrad auch aufgrund der von den Umlenkkräften kompensierten Belastung oder der Verformungen festgelegt werden.

Load Balancing:

Die Idee des «Load Balancing» (Lastausgleich) besteht darin, die Umlenkkräfte so festzulegen, dass sie einen bestimmten Teil der Belastung kompensieren ( $u = q$ ). Falls die Ankerkräfte im Schwerpunkt des Querschnitts angreifen, resultiert unter der Belastung  $q = u$  in jedem Querschnitt ein zentrischer Druckspannungszustand.

Eine volle Vorspannung resultiert für eine bestimmte Einwirkung, wenn etwa 80% dieser Einwirkung durch die Umlenkkräfte kompensiert werden ( $u \approx 0.8 \cdot q$ ).

Oft ist ein Lastausgleich für 80...100% der ständigen Lasten sinnvoll, so dass praktisch keine (Langzeit-) Durchbiegungen auftreten.

Ein Lastausgleich für die gesamte Belastung (ständige und veränderliche Einwirkungen) erfordert noch höhere Vorspannkkräfte als eine volle Vorspannung (zentrischer Druck anstatt Dekompression) und ist i.d.R. nicht sinnvoll.

Formtreue Vorspannung:

Die Idee der formtreuen Vorspannung besteht darin, die Vorspannung so festzulegen, dass unter einer bestimmten Last, in Kombination mit der Vorspannung, keine Durchbiegungen (an einer bestimmten Stelle) auftreten.

Dieses Vorgehen kann als Verallgemeinerung der Idee des Load Balancing aufgefasst werden: Die Umlenkkräfte müssen die Last nicht in jedem Punkt kompensieren, das «Load Balancing» wird stattdessen anhand der Durchbiegung (= Integral von  $(q - u)$ ) definiert resp. kontrolliert.

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Spannkraftverluste

In den vorangehenden Folien wurde von einer konstanten Kraft  $P$  im Spannglied ausgegangen. Dies trifft jedoch nur näherungsweise zu.

Die beim Vorspannen am aktiven Ende aufgebrauchte Kraft wird durch *Spannkraftverluste* reduziert, wobei folgende Effekte zu beachten sind:

- *Reibungsverluste*  
Reduktion der Kraft im Spannglied durch Reibungskräfte zwischen Spannglied und Hüllrohr beim Aufbringen der Vorspannung
- *Langzeitverluste*  
Reduktion der Kraft im Spannglied durch die zeitabhängige Verkürzung des Betons infolge Schwinden und Kriechen sowie durch den Spannungsabfall im Spann Stahl infolge Relaxation

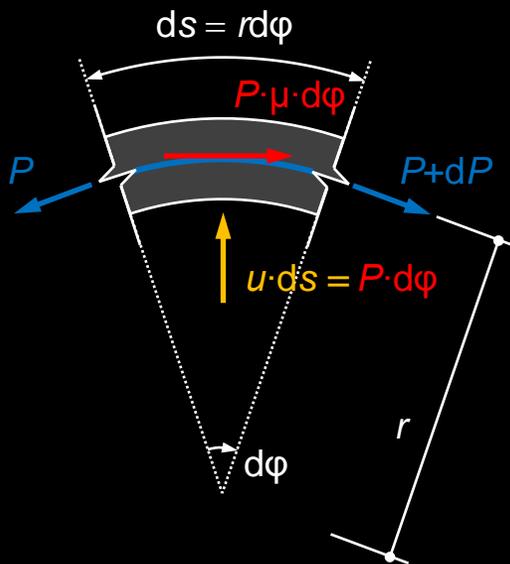
NB: Wird nur ein Kabel gespannt, wird die elastische Verkürzung des Betons beim Aufbringen der Vorspannung durch einen entsprechend grösseren Spannweg kompensiert.

Werden im gleichen Bauteil resp. Querschnitt mehrere Spannglieder nacheinander gespannt, so resultieren in den zuerst gespannten Kabeln zusätzliche Verluste infolge der elastischen Verkürzung des Betons beim Spannen der nachfolgenden Kabel. Diese Verluste können bei Bedarf durch eine geeignete Wahl des Spannvorgangs (Spannstufen) reduziert werden.

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Reibungsverluste

Bei Kabelumlenkungen entsteht zwischen dem Hüllrohr und dem Spannkabel infolge des Anpressdruckes eine Reibungskraft. Sie hat zur Folge, dass die Spannkraft entlang des Spannglieds ausgehend vom Maximalwert bei der spannbaren Verankerung kontinuierlich abnimmt.



$$\Sigma F_V = P \cdot d\varphi - u \cdot ds = 0 \quad \rightarrow \quad u \cdot ds = P \cdot d\varphi$$

$$\Sigma F_H = dP + P \cdot \mu \cdot d\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\mu \cdot d\varphi$$

$$\text{Randbedingung } P(\varphi = 0) = P_{\max} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{P}{P_{\max}}\right) = -\mu \cdot \varphi$$

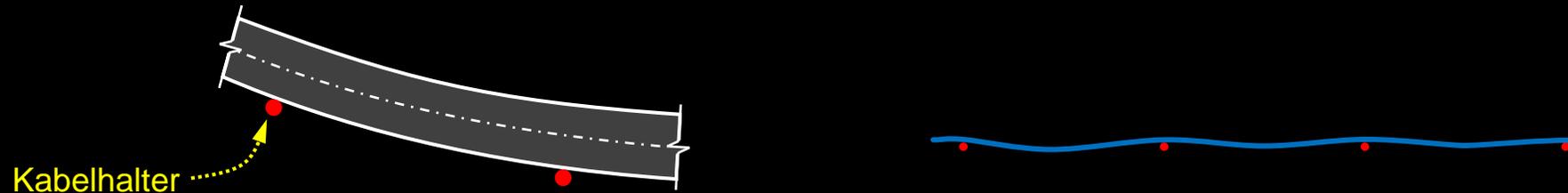
$$\Rightarrow P(x) = P_{\max} \cdot e^{-\mu \cdot \varphi_x} \approx P_{\max} \cdot (1 - \mu \cdot \varphi_x)$$

Dabei bezeichnet  $\varphi_x$  das Integral der planmässigen Umlenkungen des Spannglieds vom aktiven Ende bis zur Stelle  $x$ .

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Reibungsverluste

Bei Kabelumlenkungen entsteht zwischen dem Hüllrohr und dem Spannkabel infolge des Anpressdruckes eine Reibungskraft. Sie hat zur Folge, dass die Spannkraft entlang des Spannglieds ausgehend vom Maximalwert bei der spannbaren Verankerung kontinuierlich abnimmt.



Zusätzlich zu den planmässigen Umlenkungen entstehen ungewollte Umlenkungen  $\Delta\varphi$  [mrad/m] des Hüllrohrs infolge Girlandenwirkung zwischen den Kabelhaltern.

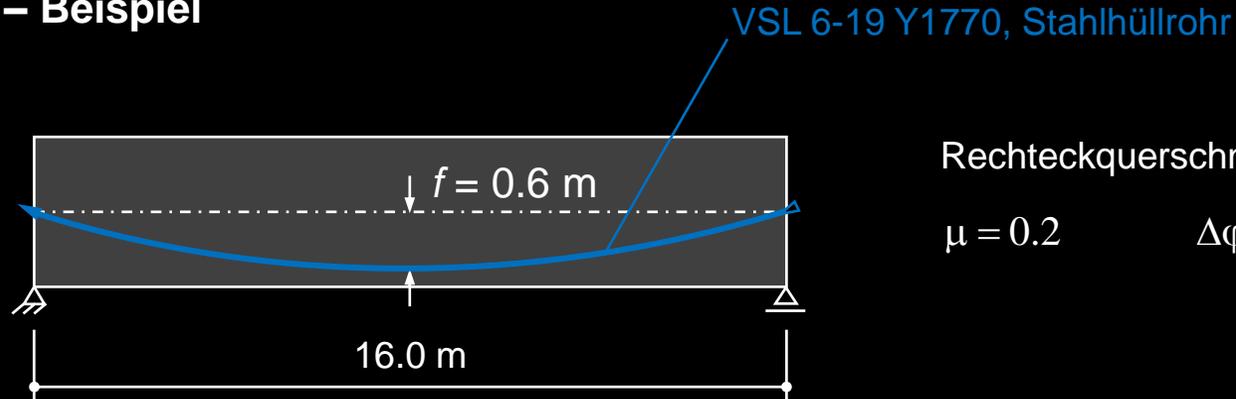
$$P(x) = P_{\max} \cdot e^{-\mu \cdot (\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)} \approx P_{\max} \cdot [1 - \mu \cdot (\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)]$$

Die Werte  $\mu$  und  $\Delta\varphi$  sind vom gewählten Spannsystem abhängig und können der technischen Dokumentation entnommen werden. Typische Werte sind:

$\mu = 0.2$	$\Delta\varphi = 5 \text{ mrad/m}$	für Stahlhüllrohre
$\mu = 0.14$	$\Delta\varphi = 7 \text{ mrad/m}$	für Kunststoffhüllrohre

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Reibungsverluste – Beispiel

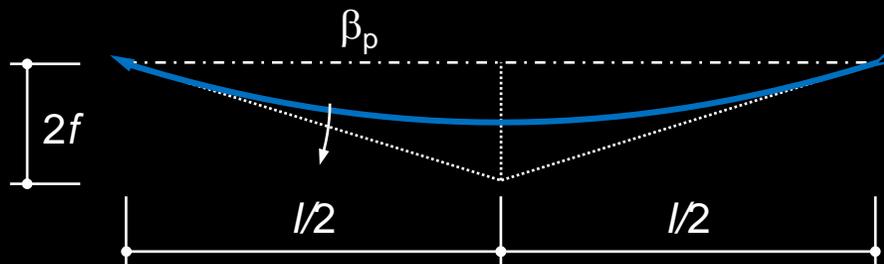


Rechteckquerschnitt  $b \times h = 1.75 \times 1.5 \text{ m}$

$$\mu = 0.2 \quad \Delta\varphi = 5 \text{ mrad/m}$$

Das Spannglied wird einseitig auf  $\sigma_{p,\max} = 0.75 \cdot f_{pk} = 0.75 \cdot 1770 = 1327 \text{ MPa}$  gespannt.

Die Spannkraft am aktiven Ende beträgt  $P_{\max} = A_p \cdot \sigma_{p,\max} = 2850 \cdot 1.327 = 3783 \text{ kN}$



$$\tan \beta_p = \frac{2f}{l/2} = \frac{1.2}{8} = 0.15 \rightarrow \beta_p = 149 \text{ mrad}$$

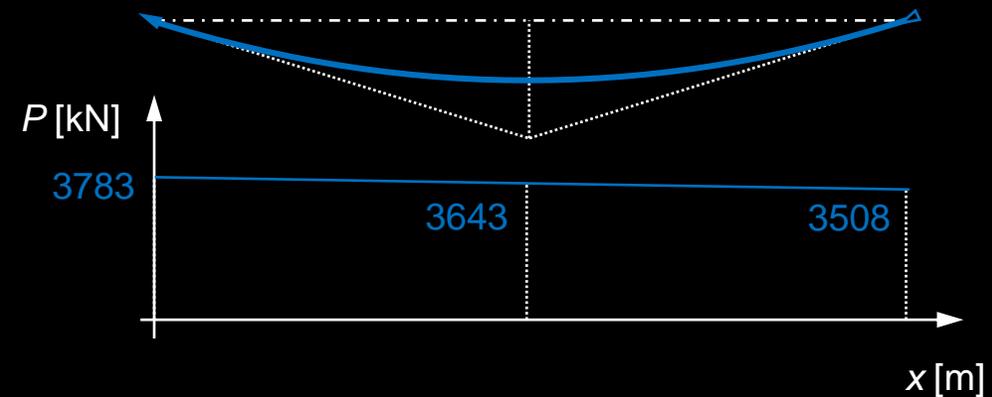
$x$ [m]	$\varphi_x$ [mrad]	$\mu \cdot (\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)$ [mrad]	$P$ [kN]
0	0	0	3783
8	149	37.8	3643
16	298	75.6	3508

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Reibungsverluste – Beispiel

Verlängerung des Spannglieds:

$x$ [m]	$P$ [kN]	$\Delta l$ [m]	$\varepsilon_m = \frac{P}{A_p E_p}$ [‰]	$\Delta l_p = \varepsilon_m \cdot \Delta l$ [mm]
0	3783	8	6.68	53.4
8	3643			
16	3508	8	6.43	51.5



$$\rightarrow \Sigma \Delta l_p = 53.4 + 51.5 = 104.9 \text{ mm}$$

Die Relativverschiebung zwischen Spannglied und Beton (wird beim Vorspannen in der Regel gemessen, meist als Verschiebung der Litzen gegenüber der Ankerbüchse) enthält zusätzlich die elastische Betonstauchung:

$$\varepsilon_{cm} = -\frac{P}{EA} = \frac{-3643 \cdot 10^3}{30 \cdot 1750 \cdot 1500} = -0.046 \text{ ‰}$$

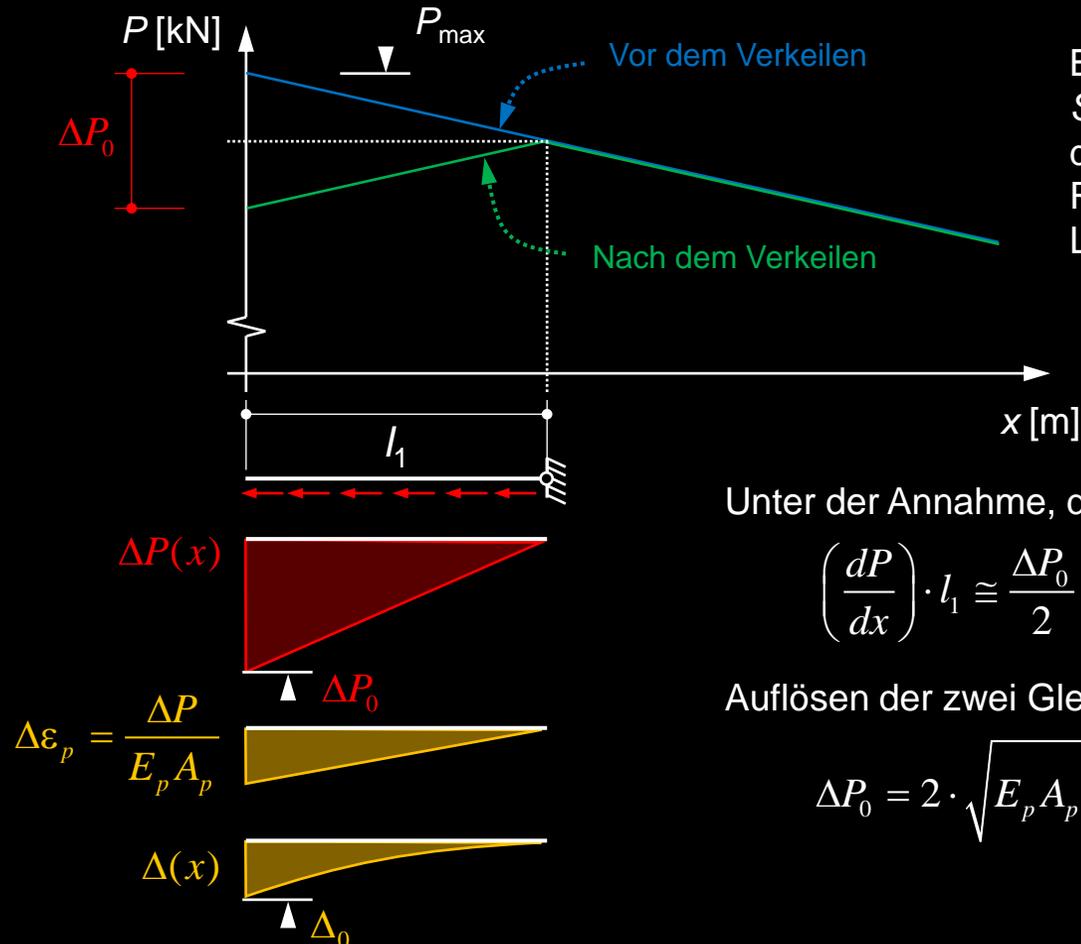
$$\rightarrow \Delta l_c = 0.7 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \text{Spannweg: } l_p = \Sigma \Delta l_p + \Delta l_c = 104.9 + 0.7 = 105.6 \text{ mm}$$

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Verankerungsschlupf

Beim Ablassen des Öldrucks in der Spannpressen verkeilen sich die Litzen. Dabei ergibt sich ein Verankerungsschlupf (Klemmeinzug) von etwa  $\Delta_0 = 6$  mm (siehe technische Dokumentation).



Beim Verkeilen findet im Endbereich des Spannkabels eine *Schlupfumkehr* statt (Kabel bewegt sich zurück ins Hüllrohr, bis am Ende der Klemmeinzug  $\Delta_0$  kompensiert ist). Dadurch wechseln die Relativverschiebungen und die Reibungskräfte auf einer bestimmten Länge  $l_1$  das Vorzeichen.

Unter der Annahme, dass  $P(x)$  ungefähr linear verläuft, gilt:

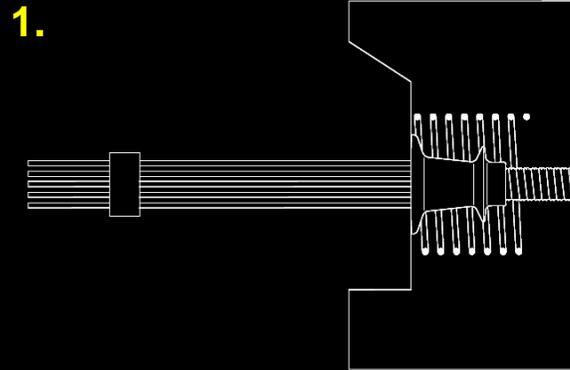
$$\left(\frac{dP}{dx}\right) \cdot l_1 \cong \frac{\Delta P_0}{2} \quad \Delta_0 = \int_{l_1} (\varepsilon_v(x) - \varepsilon_n(x)) \cdot dx \cong l_1 \cdot \frac{\Delta P_0}{E_p A_p} \cdot \frac{1}{2}$$

Auflösen der zwei Gleichungen nach  $l_1$  und  $\Delta P$ :

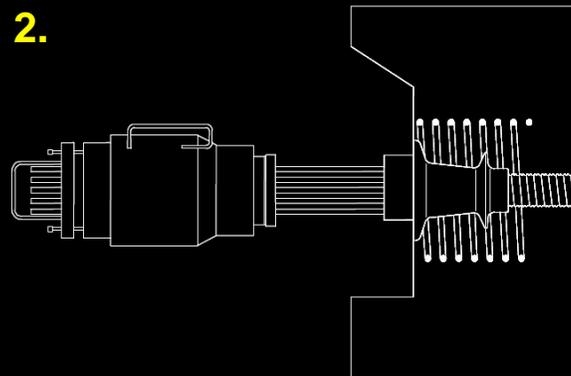
$$\Delta P_0 = 2 \cdot \sqrt{E_p A_p \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \Delta_0} \quad l_1 = \sqrt{\frac{E_p A_p \cdot \Delta_0}{\frac{dP}{dx}}}$$

# Vorspannung – Spannkraftverluste

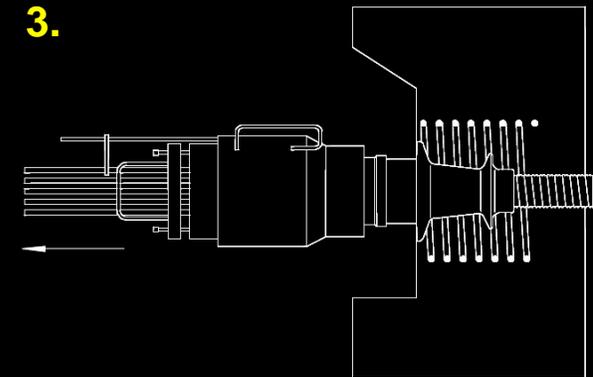
## Verankerungsschlupf – Spannvorgang



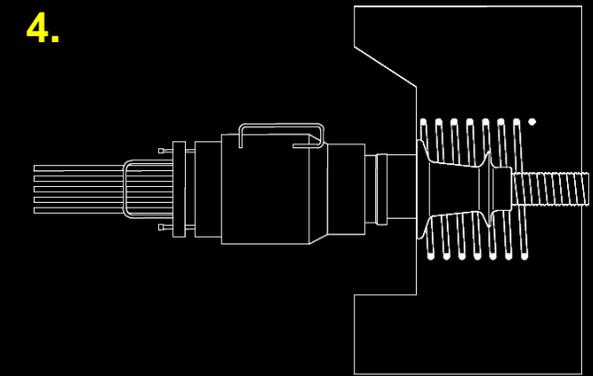
Setzen der Ankerbüchse und der Klemmen



Ansetzen der Spannpresse



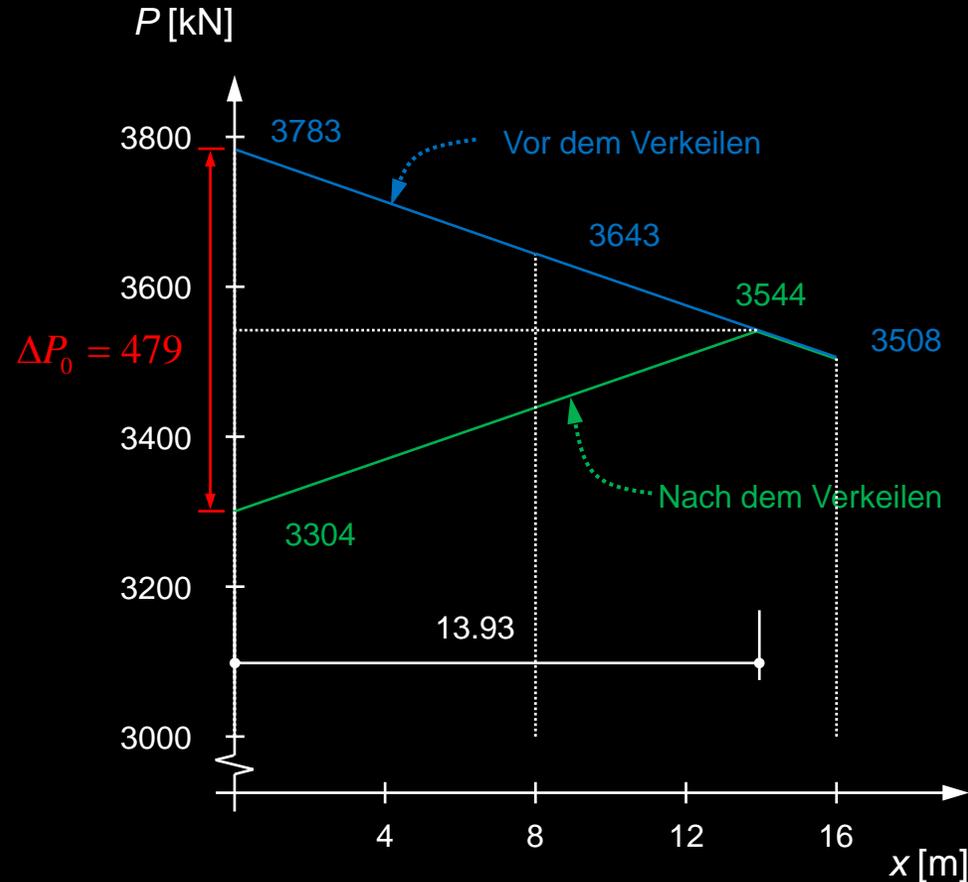
Spannen



Verkeilen

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Verankerungsschlupf – Beispiel



$$l_1 = \sqrt{\frac{195000 \cdot 2850 \cdot 6}{3783 - 3508}} = 13.93 \text{ m}$$

$$\Delta P_0 = 2 \cdot l_1 \cdot \frac{dP}{dx} = 2 \cdot \frac{3783 - 3508}{16} \cdot 13.93 = 478.8 \text{ kN}$$

$$3508 + \frac{3783 - 3508}{16} \cdot (16 - 13.93) = 3544 \text{ kN}$$

Die maximale Vorspannkraft nach dem Verkeilen entspricht einer Spannung im Spannstahl von

$$\frac{3544}{2.85} = 1244 \text{ MPa} \hat{=} 0.7 f_{pk}$$

was gem. SIA 262, 4.1.5.2 gerade noch zulässig ist.

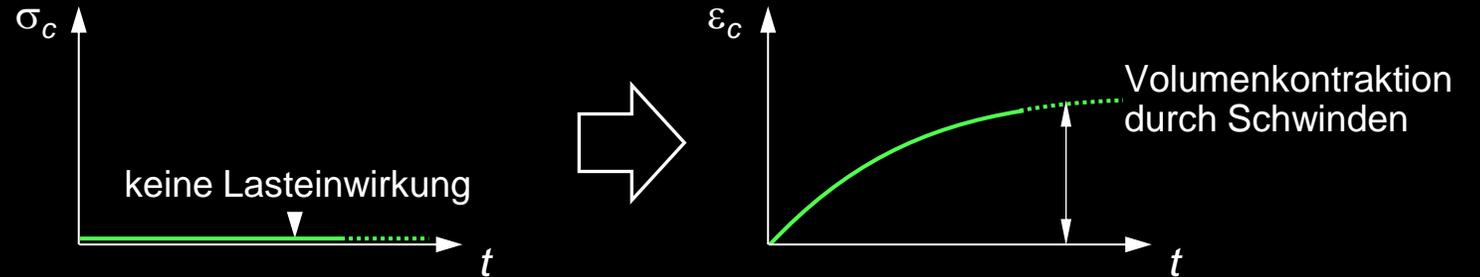
# Zeitabhängiges Verhalten von Beton

**Langzeitverhalten** (siehe auch Stahlbeton I)

## Schwinden des Betons

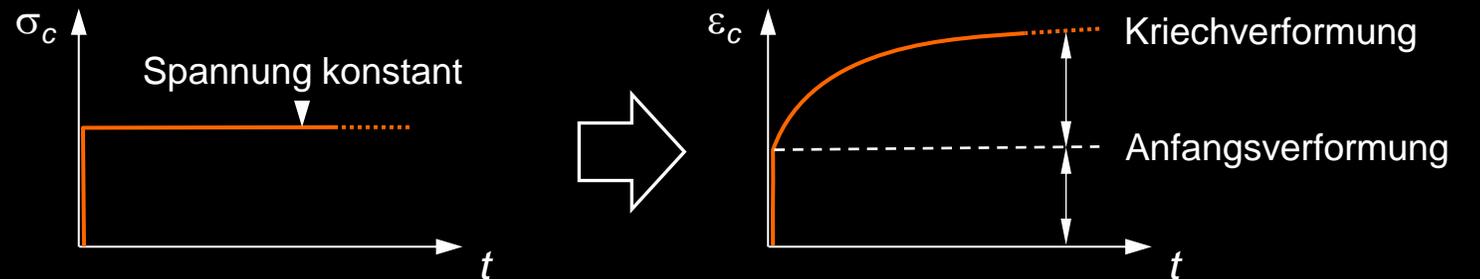
*Volumenkontraktion ohne Lasteinwirkung*

(Darstellung für freie = unbehinderte Verformungen  
→ keine Zwängungen)



## Kriechen des Betons

*Zunahme der Verformungen unter konstanter Spannung*



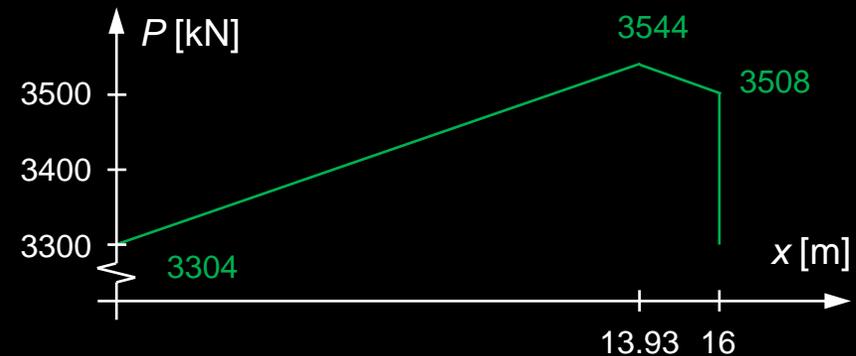
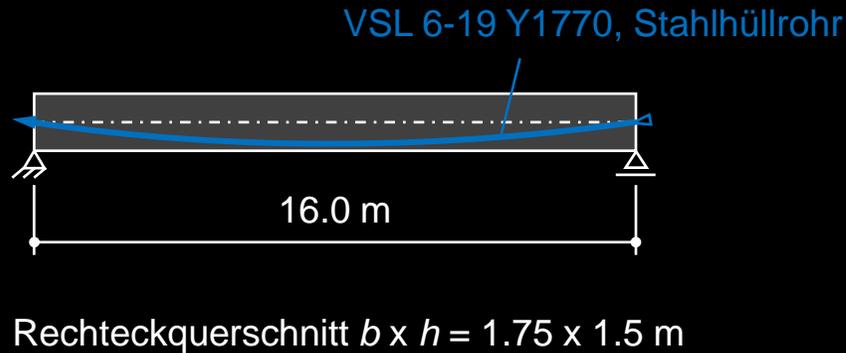
## Relaxation des Spannstahls

*Abfall der Spannungen unter konstanter Dehnung*



# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Langzeitverluste – Beispiel



Mittlere Vorspannkraft zu Beginn der Langzeiteinflüsse:

$$P_i = \frac{13.93 \cdot \frac{3544 + 3304}{2} + 2.07 \cdot \frac{3544 + 3508}{2}}{16} = 3437 \text{ kN} \quad \hat{=} \quad \sigma_{pi} = \frac{3437}{2.85} = 1206 \text{ MPa} = 0.68 f_{pk}$$

- Relaxation (SIA 262, 3.3.2.7):  $\Delta\sigma_{pr} = 2.2\% \cdot \sigma_{pi} = 0.022 \cdot 1206 = 26.5 \text{ MPa}$

SIA 262 Fig. 8 (Verlust nach 1000 h)

SIA 262 3.3.2.7.1 (Abschätzung des Endwertes)

$$\Delta\sigma_{pr\infty} = 3 \cdot \Delta\sigma_{pr} = 3 \cdot 26.5 = 79.6 \text{ MPa} \quad (\text{entsprechend einer fiktiven Dehnung } \varepsilon_{pr\infty} = \frac{79.6}{195 \cdot 10^3} = 0.4\text{‰} = 400 \cdot 10^{-6})$$

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Langzeitverluste – Beispiel

- Schwinden (SIA 262, 3.1.2.7):

Bezogene Bauteildicke  $h_0 = \frac{2A_c}{U} = \frac{2 \cdot 1750 \cdot 1500}{2 \cdot (1750 + 1500)} = 808 \text{ mm}$

Beiwert  $\varepsilon_{cd,\infty} = 0.32 \text{ ‰}$   $f_{ck} = 30 \text{ MPa}, RH = 75\%$

Trockenschwindmass  $\varepsilon_{cd} = \beta(t - t_s) \cdot \varepsilon_{cd,\infty} = 0.7 \cdot 0.32 \text{ ‰} = 0.22 \text{ ‰}$  SIA 262, 3.1.2.7.7 – 3.1.2.7.8

Autogenes Schwindmass  $\varepsilon_{ca} = 0.07 \text{ ‰}$  SIA 262, Fig. 4

Totales Schwindmass  $\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 0.22 + 0.07 = 0.29 \text{ ‰} = 290 \cdot 10^{-6}$  SIA 262, 3.1.2.7.6

- Kriechen (SIA 262, 3.1.2.6):

$\varphi_{RH} = 1.5$      $\beta(t_0) = 0.5$      $\beta(t - t_0) = 1.0$      $\beta_{fc} = 2.7$  SIA 262 Fig. 2 + Tab. 4

$\varphi = \varphi_{RH} \cdot \beta_{fc} \cdot \beta(t_0) \cdot \beta(t - t_0) = 1.5 \cdot 2.7 \cdot 0.5 \cdot 1.0 = 2.03$  SIA 262, 3.1.2.6.2

$\varepsilon_{cc} = \varphi \cdot \varepsilon_{c,el} = \varphi \cdot \frac{P_i}{E_c A_c} = 2.03 \cdot \frac{3437}{33.6 \cdot 1500 \cdot 1750} = 0.079 \text{ ‰} = 79 \cdot 10^{-6}$  SIA 262, 3.1.2.6.1

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Langzeitverluste – Beispiel

- Totaler Spannkraftverlust infolge Langzeiteffekte:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{p\infty} &= \Delta\sigma_{pr\infty} + (\varepsilon_{cs} + \varepsilon_{cc}) \cdot E_p = 79.6 + (0.29 + 0.08) \cdot 195 = 151.8 \text{ MPa resp.} \\ &= (\varepsilon_{pr\infty} + \varepsilon_{cs} + \varepsilon_{cc}) \cdot E_p = (400 + 290 + 79) \cdot 10^{-6} \cdot 195 \cdot 10^3 = 151.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Relaxation      Schwinden      Kriechen

- Verbleibende Spannung im Spannstahl nach Abzug der Langzeiteffekte:

$$\sigma_{p\infty} = \sigma_{pi} - \Delta\sigma_{p\infty} = 1206 - 151.8 = 1054.2 \text{ MPa} \cong 0.87 \cdot \sigma_{pi}$$

Für Abschätzungen darf mit 15% Spannkraftverlusten gerechnet werden.

NB: Die Verluste werden etwas überschätzt, da die Kriechverkürzungen mit der initialen Vorspannkraft ermittelt werden. Tatsächlich nimmt die Spannkraft durch Schwinden, Kriechen und Relaxation ab, so dass etwas kleinere Kriechverformungen resultieren. Der Einfluss ist aber in der Regel vernachlässigbar.

Für «genauere» Abschätzungen kann die Berechnung iteriert werden (Ermittlung der Verluste mit dem Mittelwert der Spannungen über die Zeit aus der ersten Näherung; dies hat insbesondere bei den Relaxationsverlusten einen Einfluss):

$$\sigma_{pm} \approx \frac{\sigma_{pi} + \sigma_{p\infty}}{2}$$

# Vorspannung

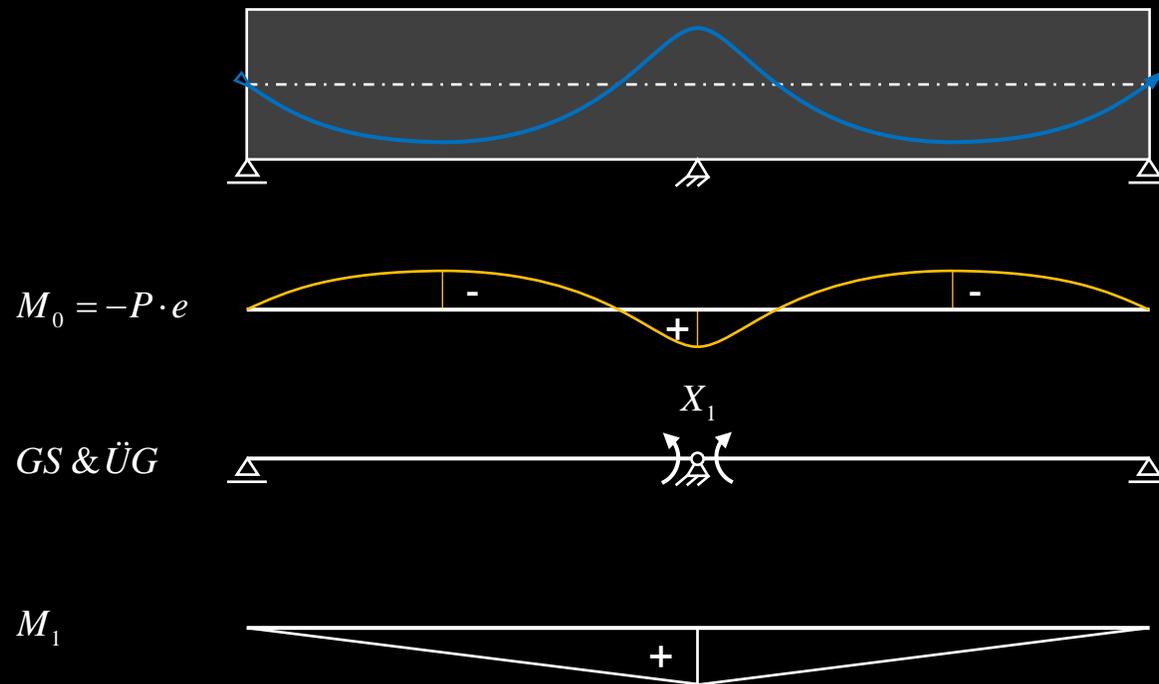
# Statisch unbestimmte Systeme

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Einführung

Die Vorspannung erzeugt im Tragwerk einen Eigenspannungszustand, der – ähnlich wie bei Temperatureinwirkungen – Tragwerksverformungen zur Folge hat.

Bei statisch unbestimmt gelagerten Trägern sind diese Tragwerksverformungen im Allgemeinen nicht mit der Lagerung verträglich. Daher resultieren Reaktionen und Schnittgrößen. Diese werden als **Zwangsschnittgrößen**  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  bezeichnet (s: «Sekundärschnittgrößen»).



$$\delta_{10} = \int M_1 \frac{M_0}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int M_1 \frac{M_1}{EI} dx$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$$

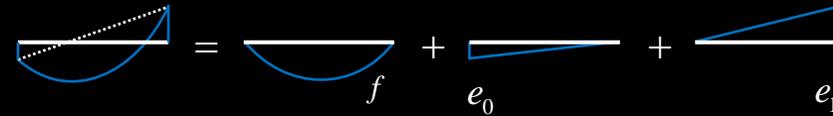
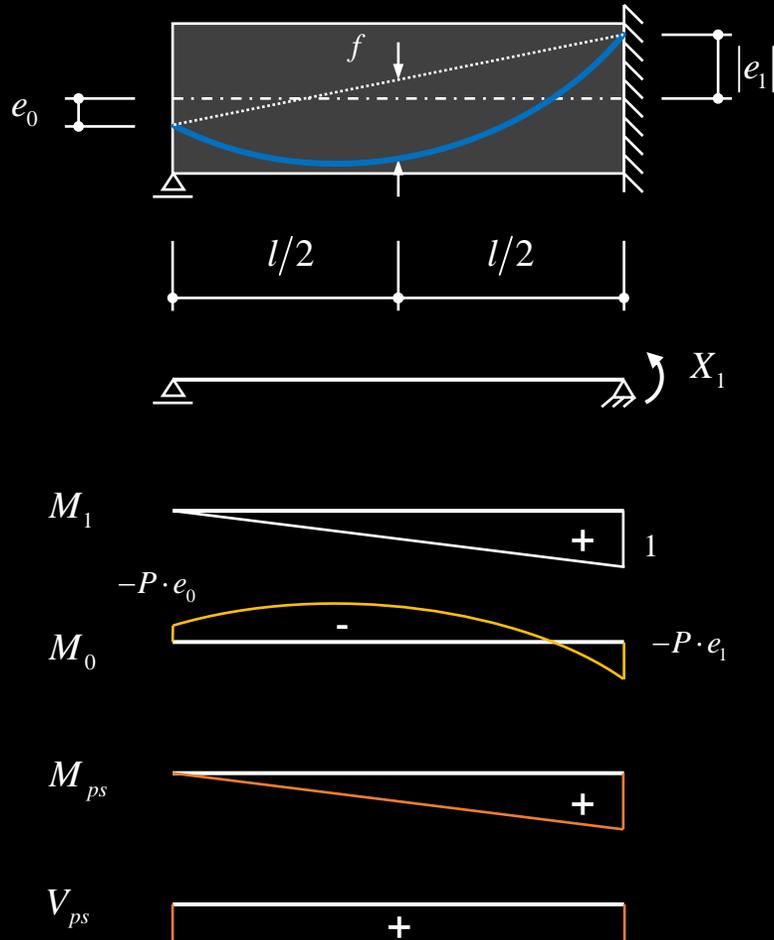
$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

$$M = M_0 + X_1 M_1$$

Zwangsanteil  $M_{ps}$

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: a) einseitig eingespannter Träger



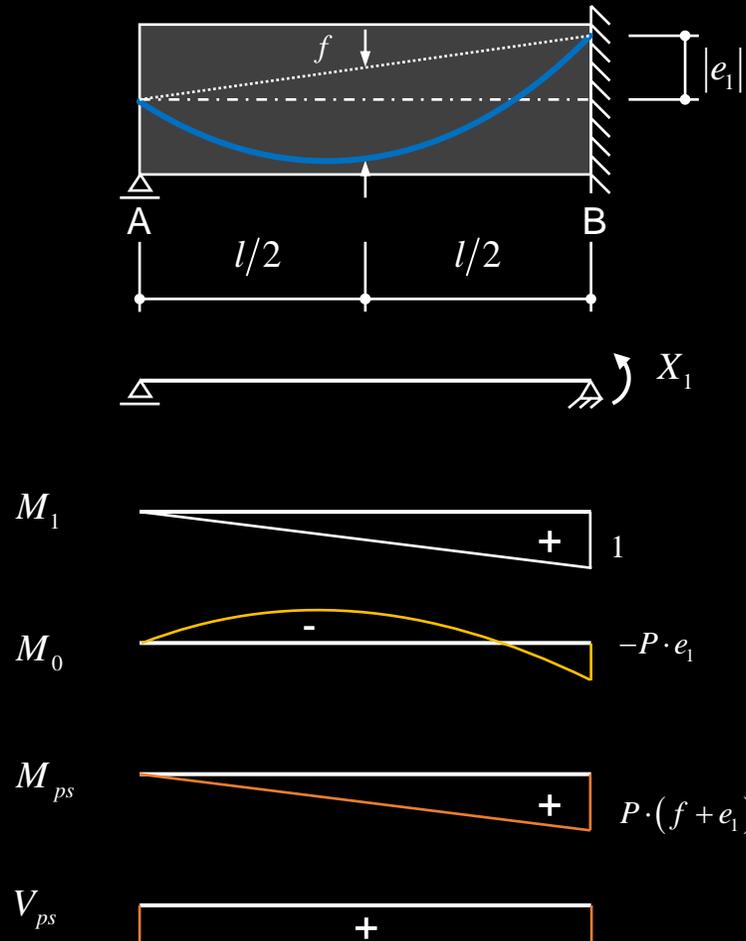
Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{f}{3} + \frac{e_0}{6} + \frac{e_1}{3} \right) \quad \delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = P \cdot \left( f + \frac{e_0}{2} + e_1 \right)$$

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Grundfälle: a) einseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Der Spannungszustand im vom Spannglied befreiten Träger ist (bei gleichem  $f$ ) unabhängig von der Exzentrizität  $e_1$ . Im hier dargestellten Spezialfall  $e_0 = 0$  resultiert beispielsweise stets

$$-P \cdot e_1 + X_1 = P \cdot f$$

(folgt auch direkt aus der Betrachtung mit Anker- und Umlenkkraften).

Dennoch soll die Exzentrizität über den Auflagern möglichst ausgenutzt werden, womit einerseits ein grösseres  $f$  resultiert und andererseits der Tragwiderstand erhöht wird.

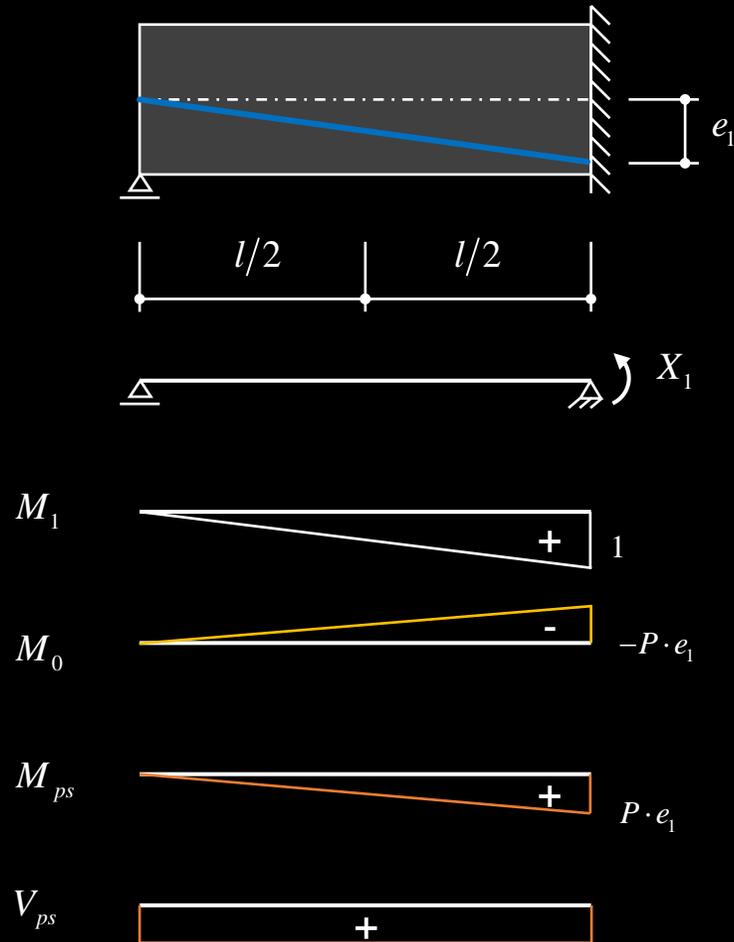
$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{3EI} \cdot (f + e_1) \quad \delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = P \cdot (f + e_1)$$

$$\rightarrow M_c(P)|_B = M_0 + M_{ps}|_B = -P \cdot e_1 + P \cdot (f + e_1) = P \cdot f$$

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: a) einseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Im Spezialfall  $e_0 = f = 0$  sind die Zwangsschnittgrößen entgegengesetzt gleich gross wie die Schnittgrößen  $-P \cdot e$ . Aus der Vorspannung resultiert somit unabhängig von  $e_1$  ein zentrischer Druckspannungszustand im vom Spannglied befreiten Träger.

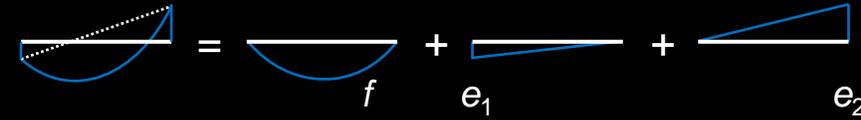
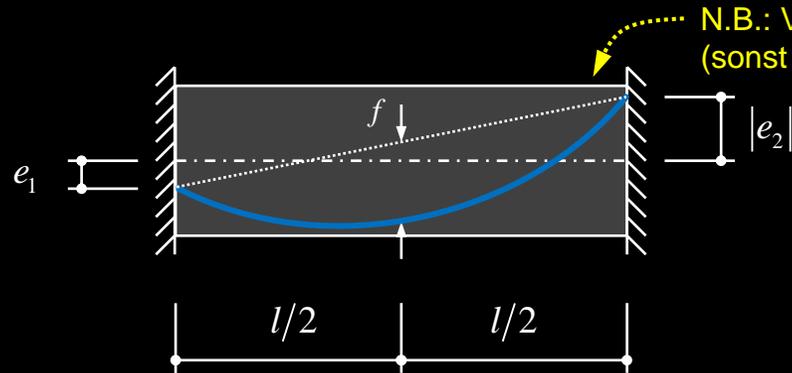
$$\delta_{10} = -\frac{Pe_1 l}{3EI} \quad \delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = P \cdot e_1$$

$$\rightarrow M_c(P) = M_0 + M_{ps} = -P \cdot e + M_{ps} = 0$$

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: b) beidseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{f}{3} + \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{6} \right) \quad \delta_{20} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{f}{3} + \frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{3} \right)$$

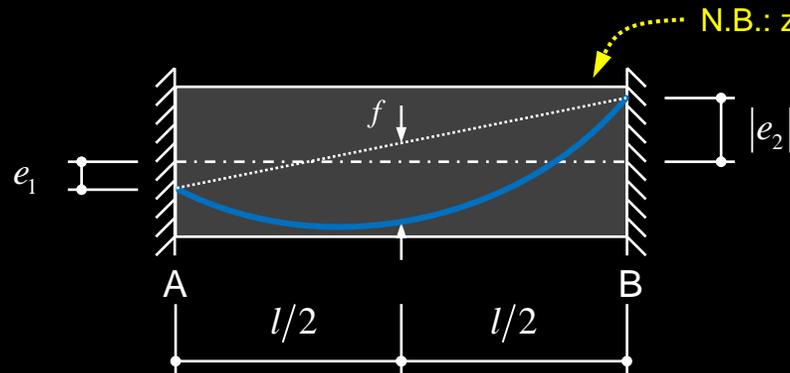
$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EI}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} e_1 + \frac{2f}{3} \\ e_2 + \frac{2f}{3} \end{Bmatrix}$$



# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

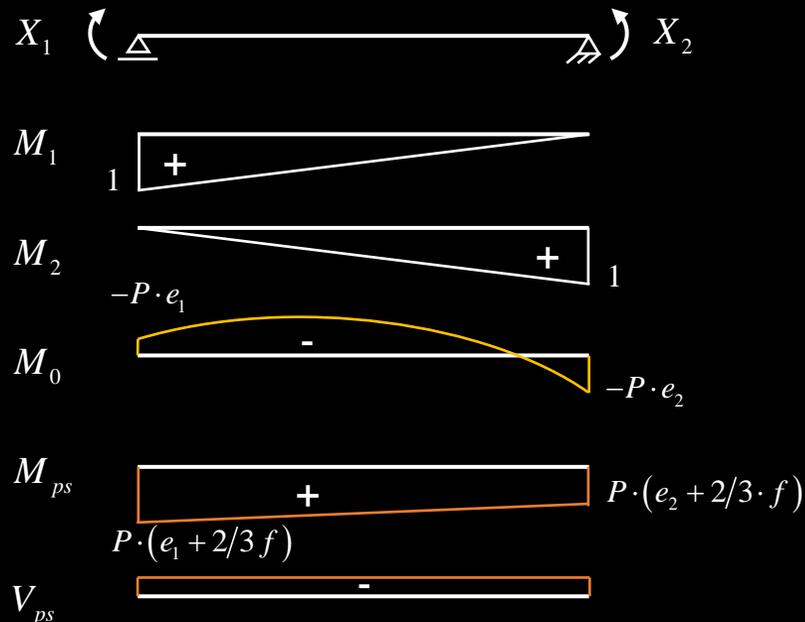
## Grundfälle: b) beidseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Der Spannungszustand im vom Spannglied befreiten Träger ist (bei gleichem  $f$ ) unabhängig von den Exzentrizitäten  $e_1$  und  $e_2$ . Es resultiert stets  $-P \cdot e_1 + X_1 = -P \cdot e_2 + X_2 = 2 \cdot P \cdot f / 3$ . (folgt auch direkt aus der Betrachtung mit Anker- und Umlenkkraften).

Dennoch soll die Exzentrizität über den Auflagern möglichst ausgenutzt werden, womit einerseits ein grösseres  $f$  resultiert und andererseits der Tragwiderstand erhöht wird.

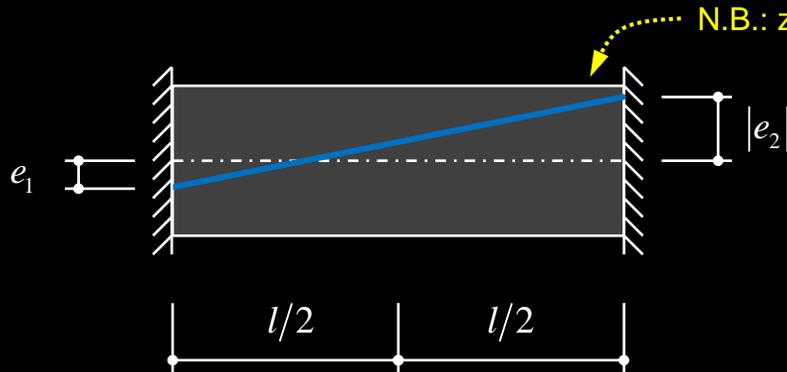


$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} e_1 + \frac{2f}{3} \\ e_2 + \frac{2f}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow M_c(P)|_{A,B} = M_0 + M_{ps}|_{A,B} = \frac{2}{3} P \cdot f$$

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Grundfälle: b) beidseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Im Spezialfall  $f = 0$  sind die Zwangsschnittgrößen entgegengesetzt gleich gross wie die Schnittgrößen  $-P \cdot e$ . Aus der Vorspannung resultiert somit unabhängig von  $e_1$  und  $e_2$  ein zentrischer Druckspannungszustand im vom Spannlied befreiten Träger.



$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{6} \right) \quad \delta_{20} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{3} \right)$$

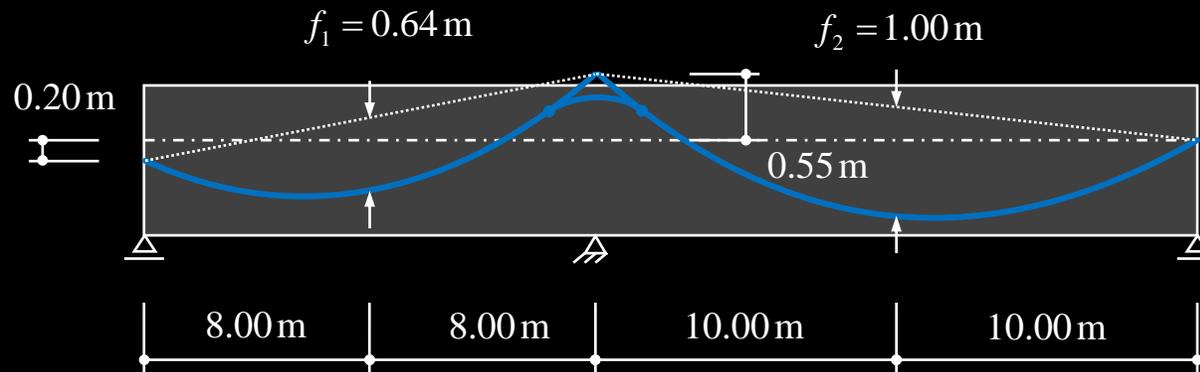
$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EI}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow M_c(P) = M_0 + M_{ps} = -P \cdot e + M_{ps} = 0$$

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Beispiel: Zweifeldträger mit unterschiedlichen Spannweiten



## Lösung durch Kombination der Grundfälle und Momentenausgleich



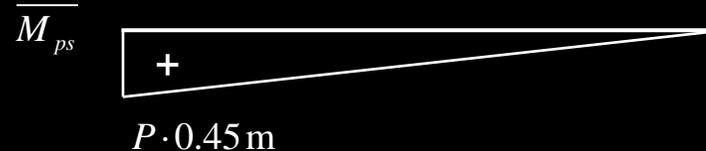
$$X_1 = P \cdot \left( f + \frac{e_0}{2} + e_1 \right)$$

$$= P \cdot \left( 0.64 + \frac{0.20}{2} - 0.55 \right) = P \cdot 0.19 \text{ m}$$



$$X_1 = P \cdot \left( f + \frac{e_0}{2} + e_1 \right)$$

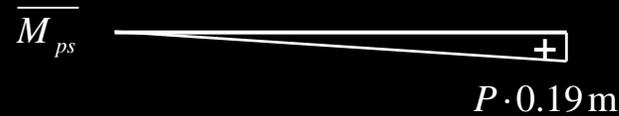
$$= P \cdot (1.00 - 0.55) = P \cdot 0.45 \text{ m}$$



# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Beispiel: Zweifeldträger mit unterschiedlichen Spannweiten

Momentenausgleich:



Stabsteifigkeiten:  $s_{21} = \frac{3EI}{16\text{ m}}$

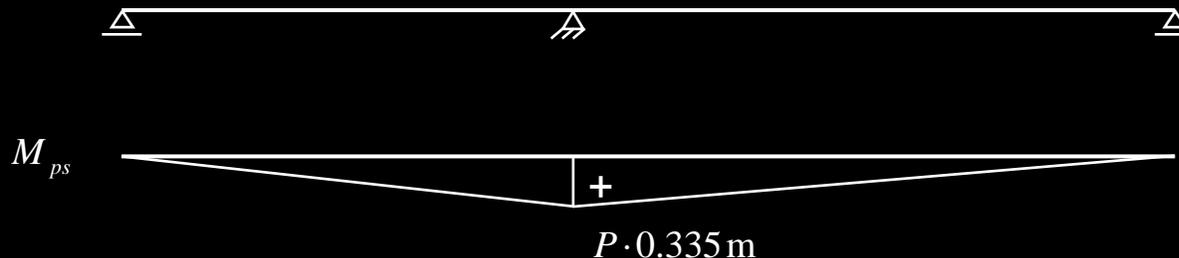
$s_{23} = \frac{3EI}{20\text{ m}}$

Verteilzahlen:  $\kappa_{21} = \frac{s_{21}}{s_{21} + s_{23}} = 0.555$

$\kappa_{23} = \frac{s_{23}}{s_{21} + s_{23}} = 0.444$

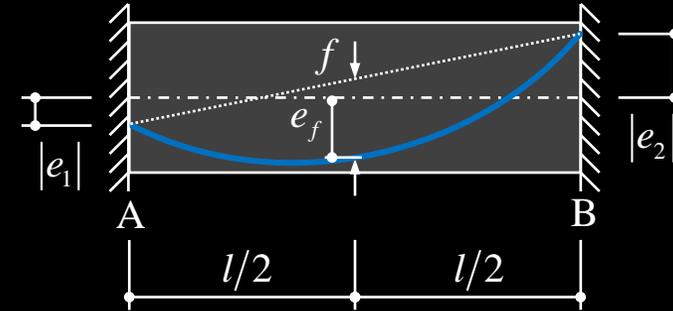
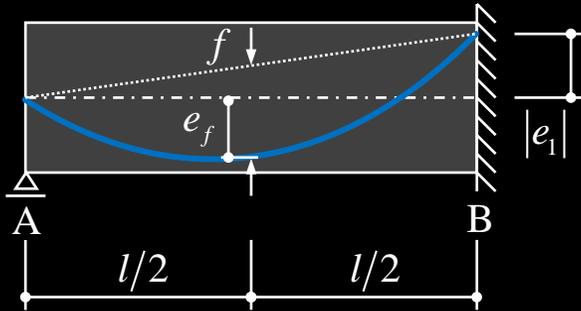
Momente:  $M_{21} = 0.19 + 0.555 \cdot (0.45 - 0.19)$   
 $= P \cdot 0.335\text{ m}$

$M_{23} = 0.45 - 0.444 \cdot (0.45 - 0.19)$   
 $= P \cdot 0.335\text{ m}$



# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: Spannkraft für volle Vorspannung ( $M_{ps}$  für Grundfälle bekannt)



Zwischenaufleger:  $P(-e_{1,2} + k_{inf}) \geq -(M(q) + M_{ps})$  (siehe Vorspanngrad)

$$M_{ps} = P \cdot (f + e_1) \quad \rightarrow P \geq \frac{|M(q)|}{f + k_{inf}}$$

$$M_{ps} = P \cdot \left( \frac{2f}{3} + e_{1,2} \right) \quad \rightarrow P \geq \frac{|M(q)|}{\frac{2f}{3} + k_{inf}}$$

Feldmitte:  $P(e_f + k_{sup}) \geq M(q) + M_{ps}$  (siehe Vorspanngrad)

$$M_{ps} = P \cdot \left( \frac{f + e_1}{2} \right) \quad \rightarrow P \geq \frac{M(q)}{\frac{f}{2} + k_{sup}}$$

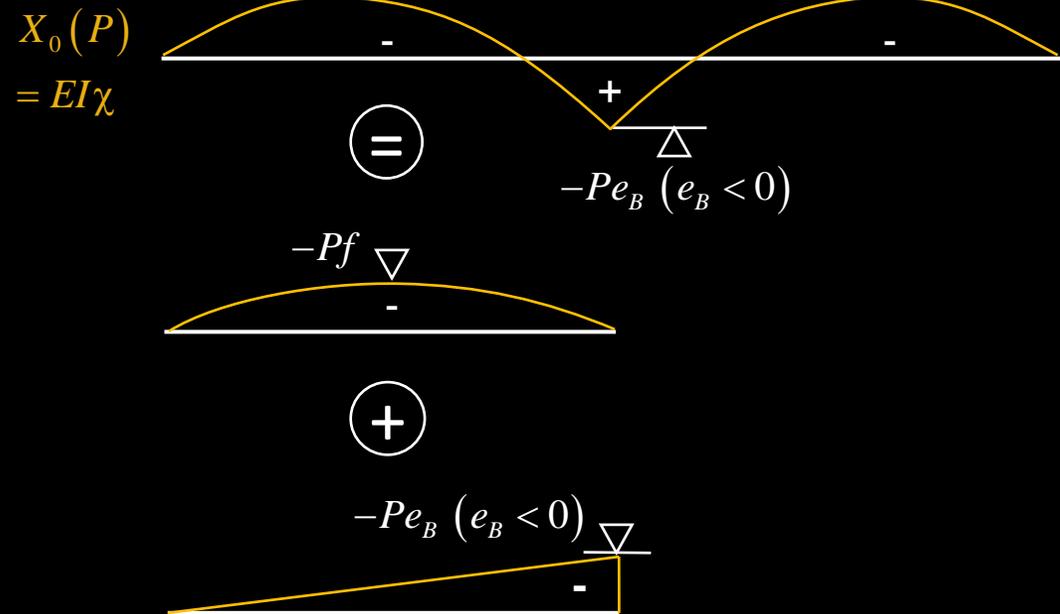
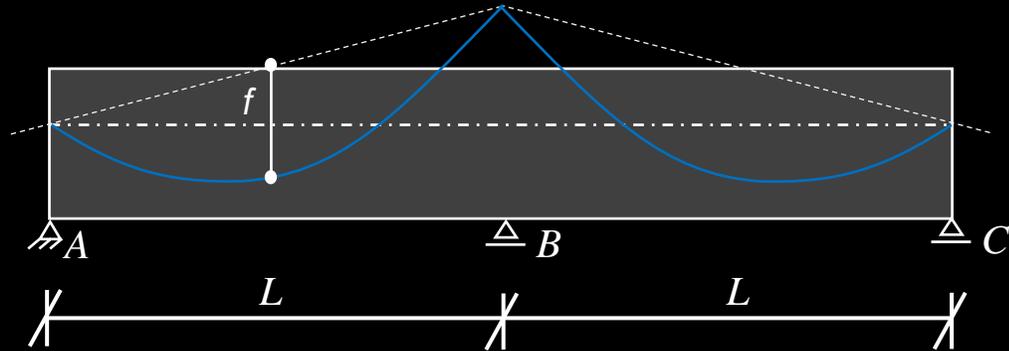
$$M_{ps} = P \cdot \left( \frac{2f}{3} + \frac{e_1 + e_2}{2} \right) \quad \rightarrow P \geq \frac{M(q)}{\frac{f}{3} + k_{sup}}$$

$$\left( \text{mit } e_f = f + \frac{e_1}{2} \right)$$

$$\left( \text{mit } e_f = f + \frac{e_1 + e_2}{2} \right)$$

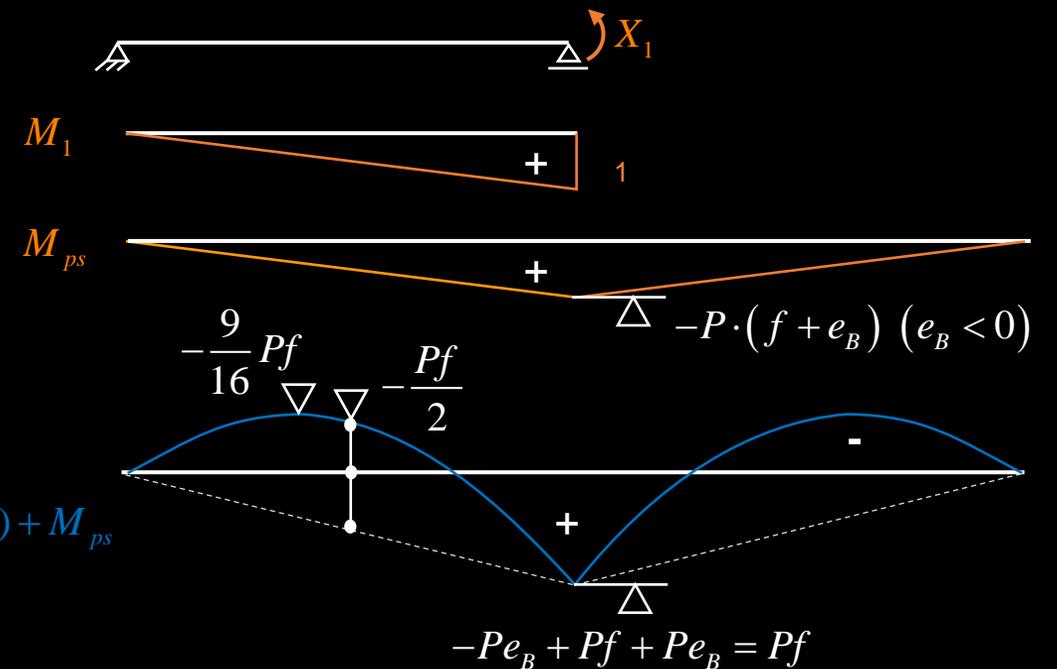
# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

Grundfall (a)  $e_A = e_C = 0$



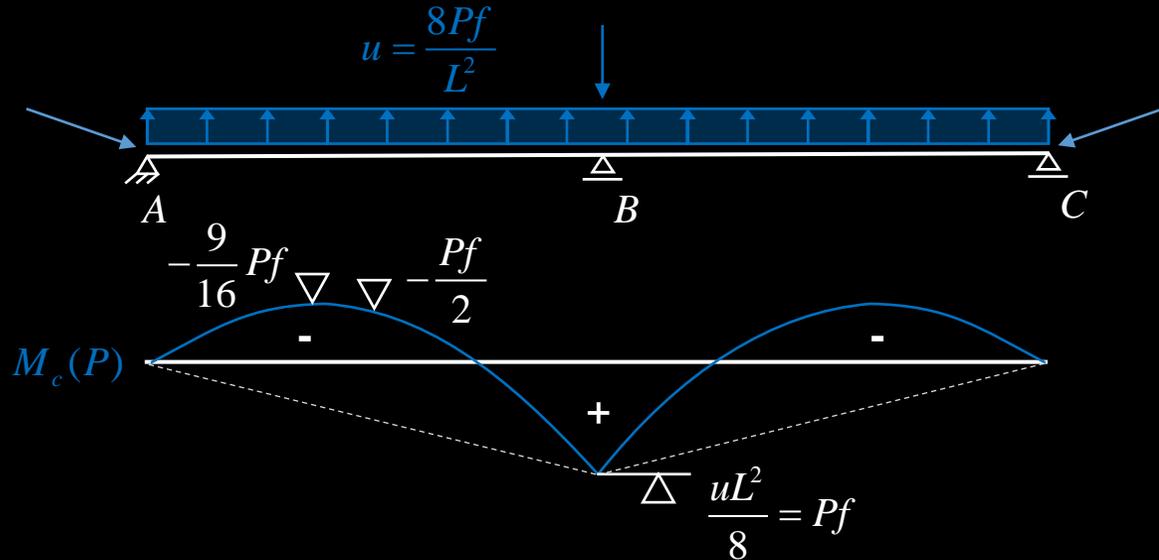
$$\delta_{10} = \frac{L}{EI} \left( -\frac{Pf}{3} - \frac{Pe_B}{3} \right), \delta_{11} = \frac{L}{3EI}$$

$$\rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = Pf + Pe_B (e_B < 0)$$



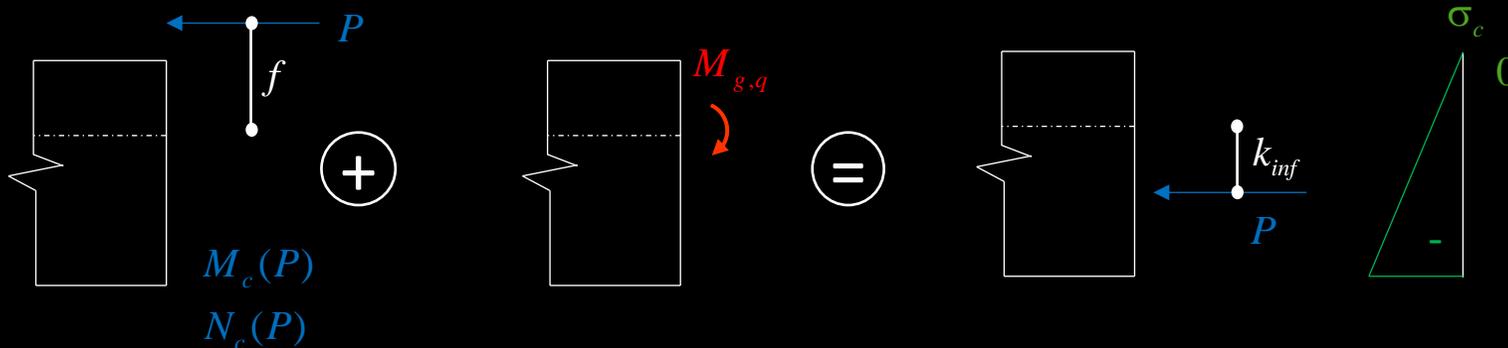
# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

Anker- und Umlenkräfte (direktere Betrachtung)



Unabhängig von  $e_B$  resultiert  $M_c(B) = Pf$ .  
 $e_B$  ist trotzdem möglichst gross zu wählen  
 ( $M_{Rd}$ ,  $f$  grösser)

Volle Vorspannung in B:



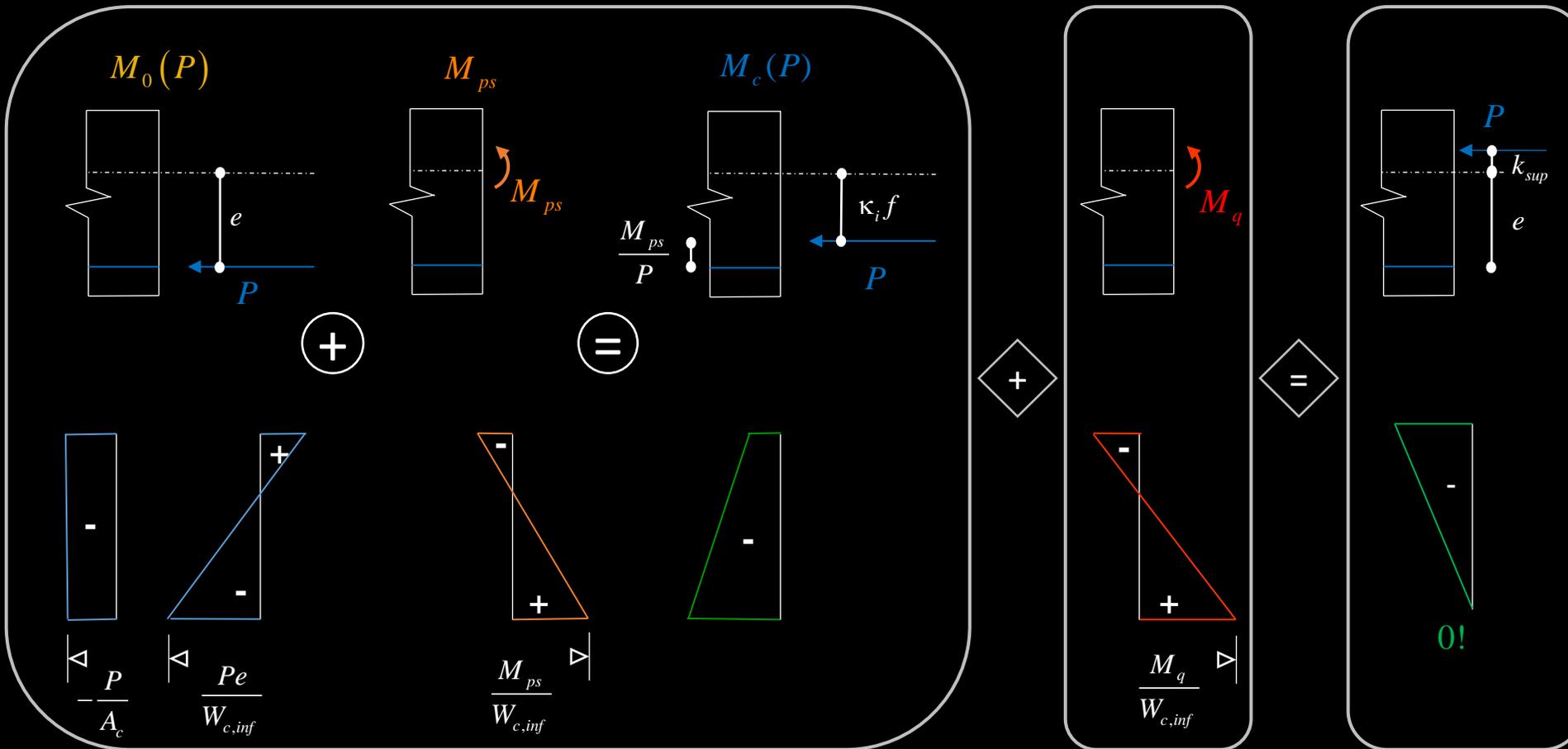
$$|M_{g,q}| \leq P(f + k_{inf})$$

$$P \geq \frac{|M_{g,q}|}{f + k_{inf}}$$



# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

Allgemeiner Fall – positive Biegung ( $M_q > 0, e > 0$ )



$$M_p(P)$$

$$-P \cdot e + M_{ps} + M_q = P \cdot k_{sup}$$

$$P \geq \frac{M_q + M_{ps}}{e + k_{sup}}$$

$$\left( W_{c,inf} = \frac{I_c}{z_{inf}}, k_{sup} = \frac{W_{c,inf}}{A_c} \right)$$

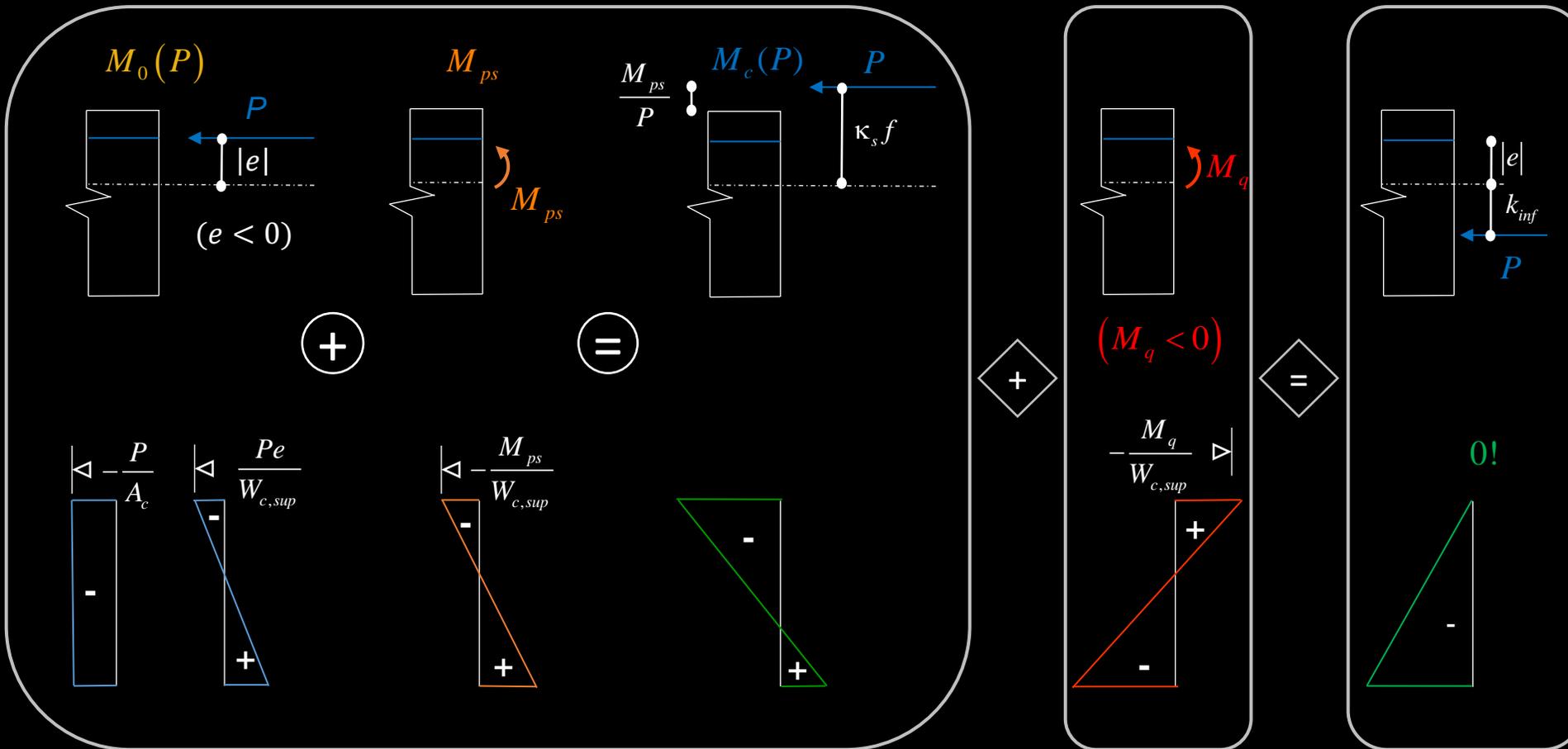
$$-\frac{P}{A_c} + \frac{-P \cdot e + M_{ps} + M_q}{W_{c,inf}} = 0$$

$$\frac{M_q + M_{ps}}{W_{c,inf}} \leq \frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_{c,inf}}$$

$$P \geq \frac{M_q + M_{ps}}{e + k_{sup}}$$

# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

Allgemeiner Fall – negative Biegung ( $M_q < 0, e < 0$ )



$$M_p(P)$$

$$-P \cdot e + M_{ps} + M_q = -P \cdot k_{inf}$$

$$P \geq \frac{-M_q - M_{ps}}{-e + k_{inf}}$$

$$\left( W_{c,sup} = \frac{I_c}{z_{sup}}, k_{inf} = \frac{W_{c,sup}}{A_c} \right)$$

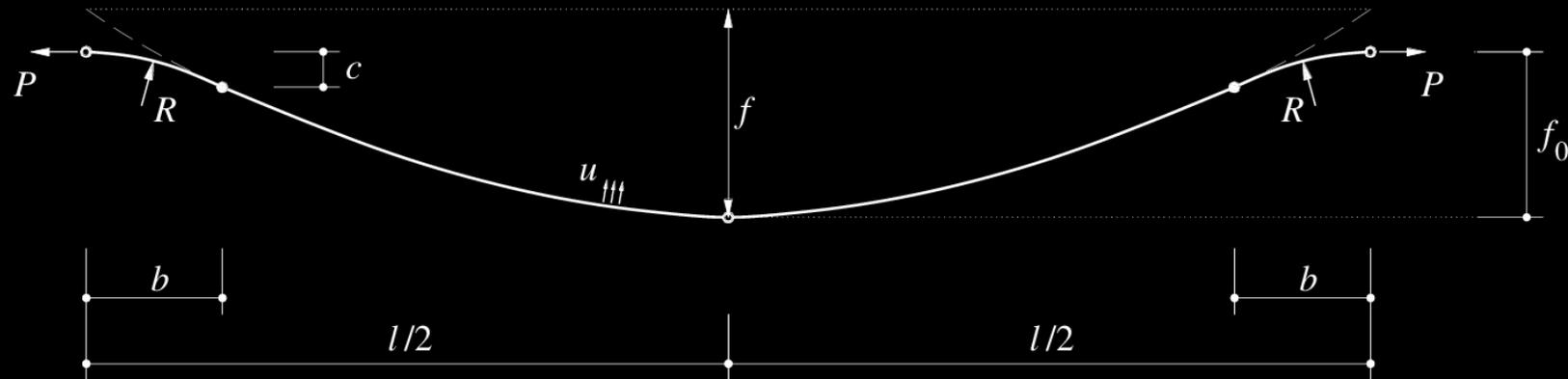
$$\frac{P}{A_c} - \frac{-P \cdot e + M_{ps} + M_q}{W_{c,sup}} = 0$$

$$\frac{M_q + M_{ps}}{W_{c,sup}} \leq -\frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_{c,sup}}$$

$$P \geq \frac{-M_q - M_{ps}}{-e + k_{inf}}$$

# Vorspannung – typische Kabelgeometrien

Innenfeld (entspricht Grundfall b):



$$b = \frac{4 \cdot R \cdot f_0}{l}$$

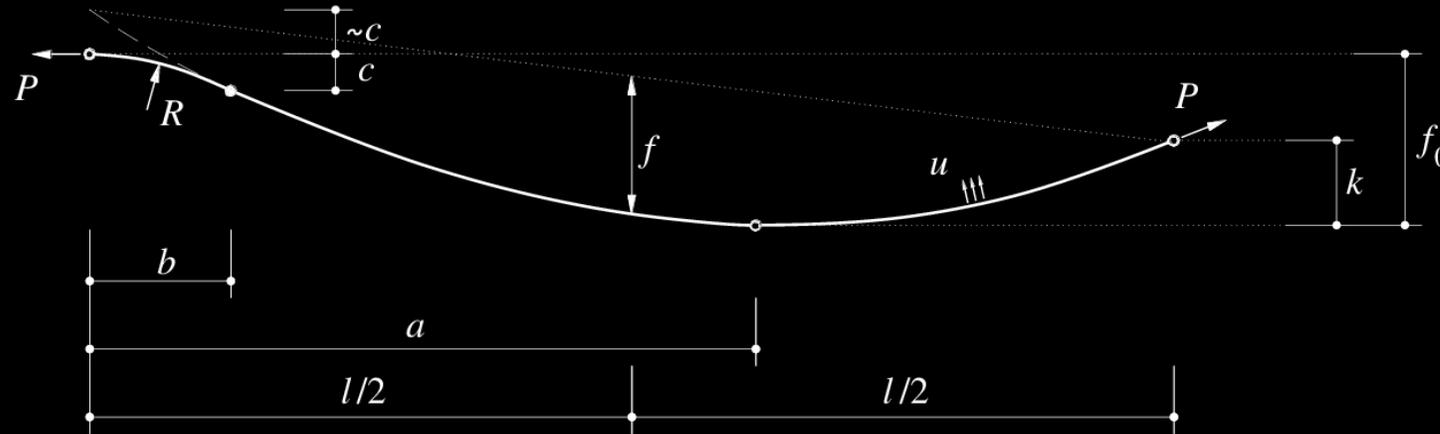
$$c = \frac{8 \cdot R \cdot f_0^2}{l^2}$$

$$u = \frac{8 \cdot P \cdot f_0}{l^2 - 8 \cdot R \cdot f_0} = \frac{8 \cdot P \cdot f}{l^2}$$

$$f = \frac{f_0 \cdot l^2}{l^2 - 8 \cdot R \cdot f_0}$$

# Vorspannung – typische Kabelgeometrien

Randfeld (entspricht Grundfall a):



$$a = \frac{f_0}{f_0 - k} \cdot \left[ l - \sqrt{\frac{k}{f_0} \cdot (l^2 + 2 \cdot R \cdot k) - 2 \cdot R \cdot k} \right]$$

$$b = \frac{2 \cdot R \cdot f_0}{a}$$

$$c = \frac{2 \cdot R \cdot f_0^2}{a^2}$$

$$u = \frac{2 \cdot P \cdot k}{(l - a)^2} = \frac{2 \cdot P \cdot f_0}{(a^2 - 2 \cdot R \cdot f_0)} = \frac{8 \cdot P \cdot f}{l^2}$$

$$f = \frac{k \cdot l^2}{4 \cdot (l - a)^2} = \frac{f_0 \cdot l^2}{4 \cdot (a^2 - 2 \cdot R \cdot f_0)}$$

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

- Es gibt grundsätzlich **zwei alternative Möglichkeiten** für die rechnerische Behandlung der Vorspannung:

## **Eigenspannungszustand**

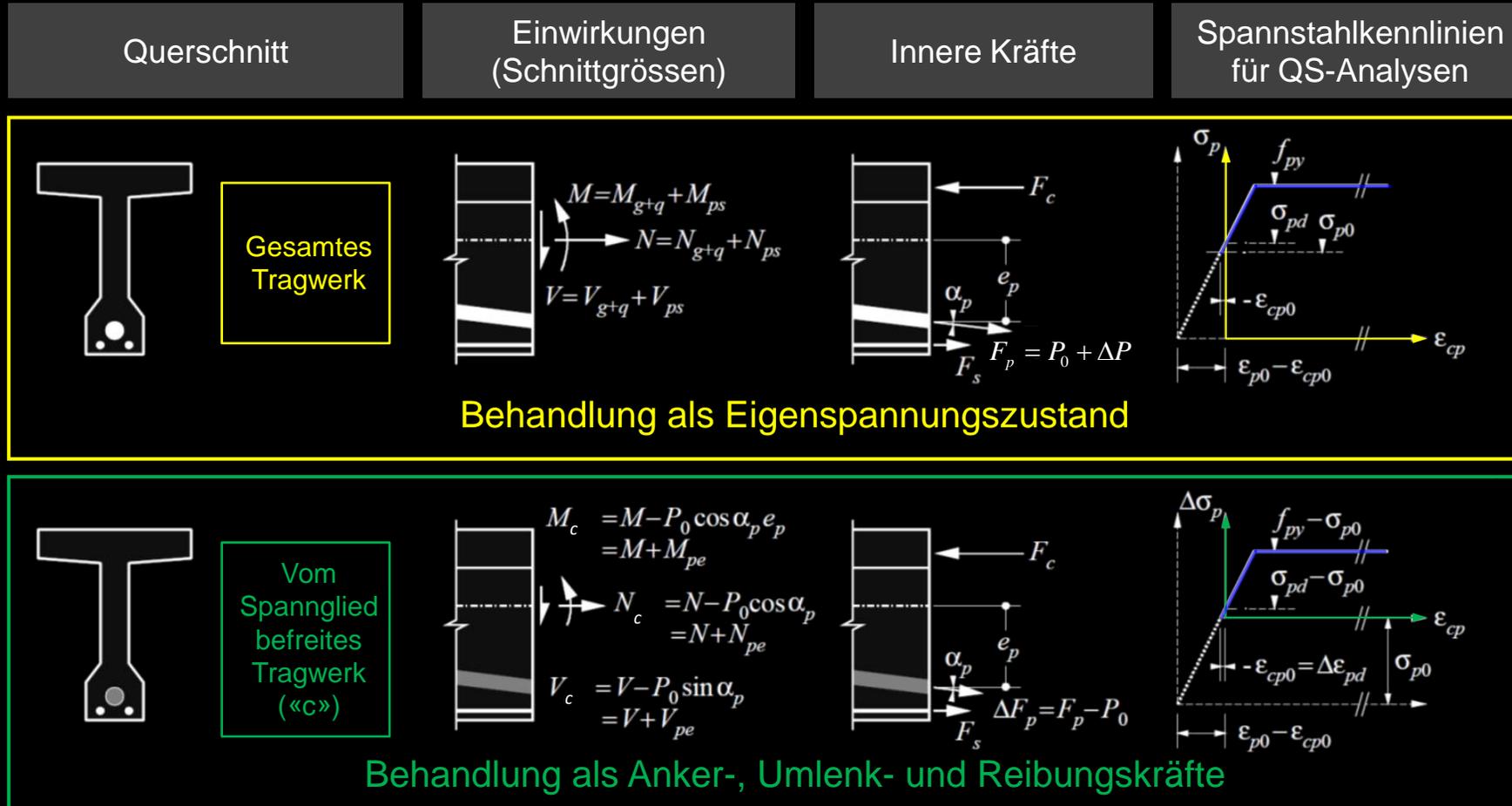
(wirkt am gesamten Tragwerk bzw. Bauteil inkl. Spannglied)

## **Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte**

(wirken auf das vom Spannglied befreite Tragwerk bzw. Bauteil)

- Beide Möglichkeiten führen (bei konsequenter Anwendung) zum identischen Resultat
- Der einzige Unterschied besteht in der Systemabgrenzung
- Je nach Fragestellung ist die eine oder andere Möglichkeit vorteilhaft in der Anwendung

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung



# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (1)

Bei der Behandlung von vorgespannten Tragwerken ist die **Systemabgrenzung** von zentraler Bedeutung. Dabei sind grundsätzlich zwei Betrachtungsweisen möglich, die zum **gleichen Resultat** führen.

Jede davon hat ihre Vor- und Nachteile, und je nach Fragestellung ist die eine oder andere Betrachtungsweise besser geeignet.

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Die Vorspannung bewirkt in den Querschnitten einen **Eigenspannungszustand**: Die Zugkraft im Spannglied ist mit den (Druck-)Kräften im Stahlbetonquerschnitt im Gleichgewicht. Der Eigenspannungszustand entspricht Dehnungen und Krümmungen → **Tragwerksverformungen**.

Bei statisch unbestimmt gelagerten Trägern sind diese Tragwerksverformungen im Allgemeinen nicht mit der Lagerung verträglich. Daher resultieren Reaktionen und Schnittgrößen. Diese werden als **Zwangsschnittgrößen**  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  bezeichnet (s: «Sekundärschnittgrößen»).

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt allein)

Die Vorspannung entspricht **Anker-, Umlenk- und Reibungskräften**, die auf das vom Spannglied befreite Tragwerk wirken. Aus dieser Belastung resultieren die sogenannten **Schnittgrößen infolge Vorspannung**  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  und (mit der Lagerung verträgliche) Tragwerksverformungen.

Die auf das gesamte Tragwerk wirkenden Zwangsschnittgrößen werden durch die Ermittlung der Schnittgrößen aus den Anker-, Umlenk- und Reibungskräften direkt erfasst und sind somit in den **Schnittgrößen infolge Vorspannung** enthalten.

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (2)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Am **Gesamtquerschnitt** wirken folgende Schnittgrößen:

$$M = M_{g,q} + M_{ps}$$

$$V = V_{g,q} + V_{ps}$$

$$N = N_{g,q} + N_{ps}$$

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt allein)

Am **vom Spannglied befreiten Querschnitt** wirken folgende Schnittgrößen:

$$M_c = M_{g,q} + M_c(P) = M_{g,q} + M_{ps} - P \cos \beta_p \cdot e$$

$$V_c = V_{g,q} + V_c(P) = V_{g,q} + V_{ps} - P \sin \beta_p$$

$$N_c = N_{g,q} + N_c(P) = N_{g,q} + N_{ps} - P \cos \beta_p$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -P \cos \beta_p \cdot e \approx -P \cdot e \\ -P \sin \beta_p \\ -P \cos \beta_p \approx -P \end{array} \right\}$$

Unterschied: Auf vom Spannglied befreites Tragwerk wirkender Teil des Eigenspannungszustands infolge Vorspannung

In den Einwirkungen sind somit nur die Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  enthalten.

Neben der Bezeichnung **Vorspannung als Eigenspannungszustand** wird diese Betrachtung daher auch **Vorspannung auf der Widerstandsseite** genannt

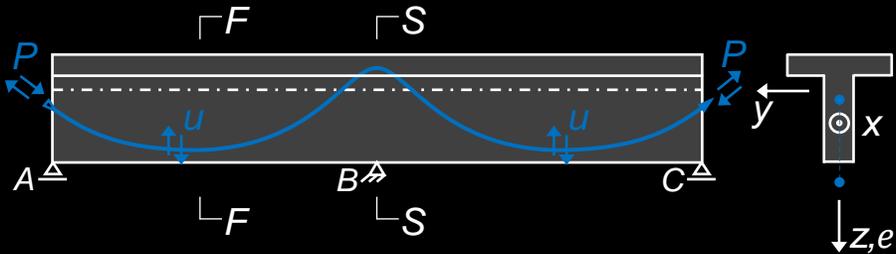
In den Einwirkungen sind somit die gesamten Schnittgrößen infolge Vorspannung  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  enthalten.

Neben der Bezeichnung **Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte** wird diese Betrachtung daher auch **Vorspannung auf der Lastseite** genannt.

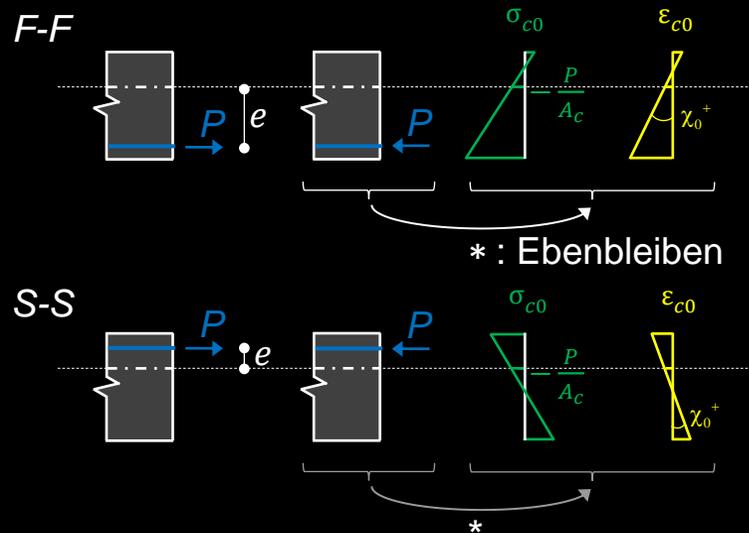
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (3)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

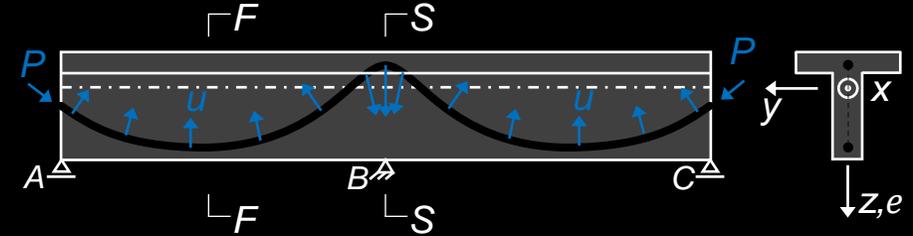


### Eigenspannungszustand in Querschnitten:

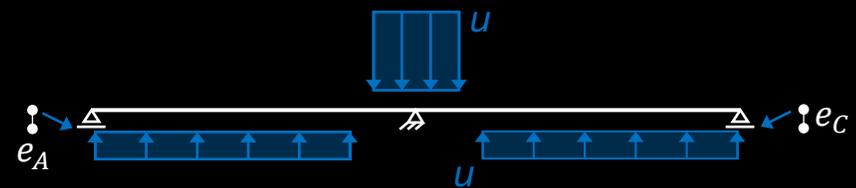


N.B.  $\sigma_{c0}(-P, -P \cdot e) \neq \text{eff. } \sigma_c$ , Anteil  $M_{ps}$  fehlt hier.

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil



### Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte:

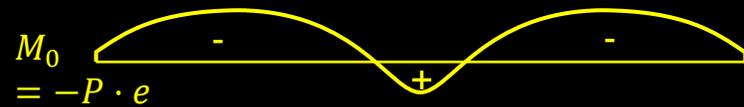


# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (4)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

Schnittgrößen infolge Eigenspannungszustand  
(auf vom Spannglied befreites Tragwerk wirkender Teil des Eigenspannungszustands):



Verformungen infolge Eigenspannungszustand:

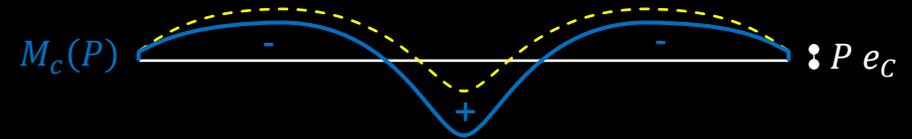
$$\chi_0 = \frac{M_0}{EI} = \frac{-P \cdot e}{EI}, \quad \varepsilon_0 = \frac{N_0}{EA} = -\frac{P}{EA}$$

Durch Integration von  $\chi_0$  und  $\varepsilon_0 \rightarrow$  Verformungen, i.A. nicht mit Lagerung verträglich!

$\rightarrow$  Zwangsschnittgrößen

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Schnittgrößen infolge Vorspannung:



Annahmen:  $P \cos \alpha \approx P$

Verkürzung unbehindert, sonst wäre  $|N_c(P)| < P$

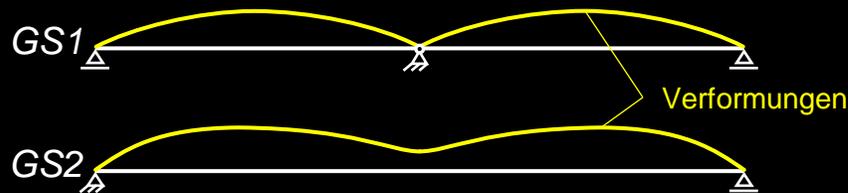
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (5)

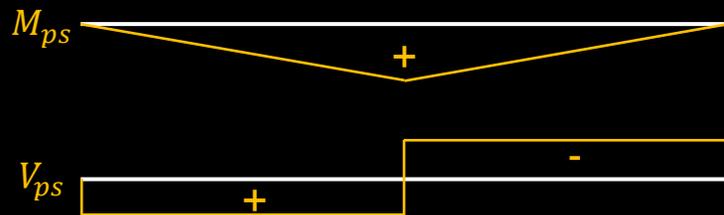
### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

Zwangsschnittgrößen («Sekundärmomente») zur Gewährleistung der Verträglichkeit:

Behandlung analog Temperaturzwang → Kraftmethode; mögliche Grundsysteme z.B.:

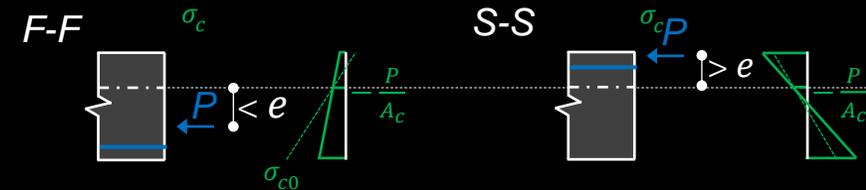


Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}$ ,  $V_{ps}$  (und  $N_{ps}$  falls Verkürzung behindert ist):



### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

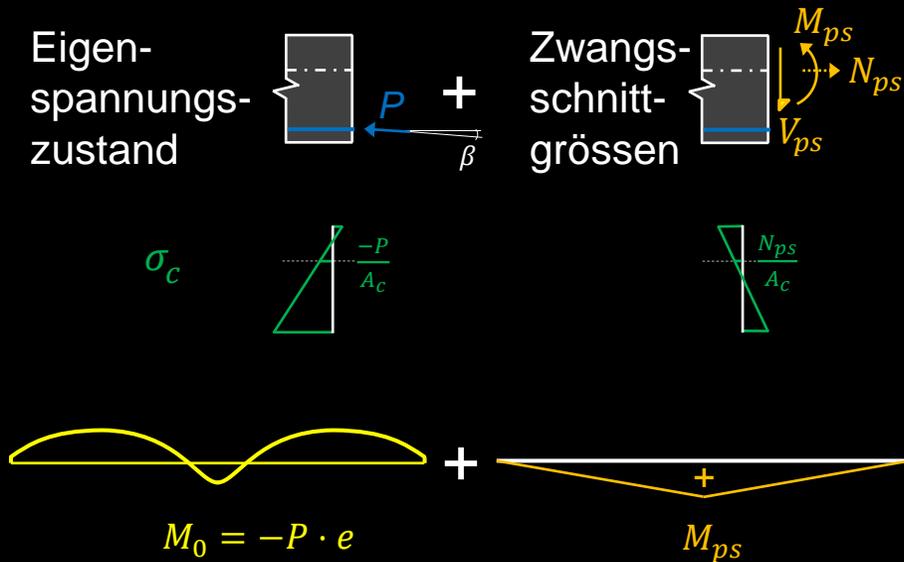
Spannungen an Querschnitten infolge  $M_c(P)$ ,  $N_c(P)$ :



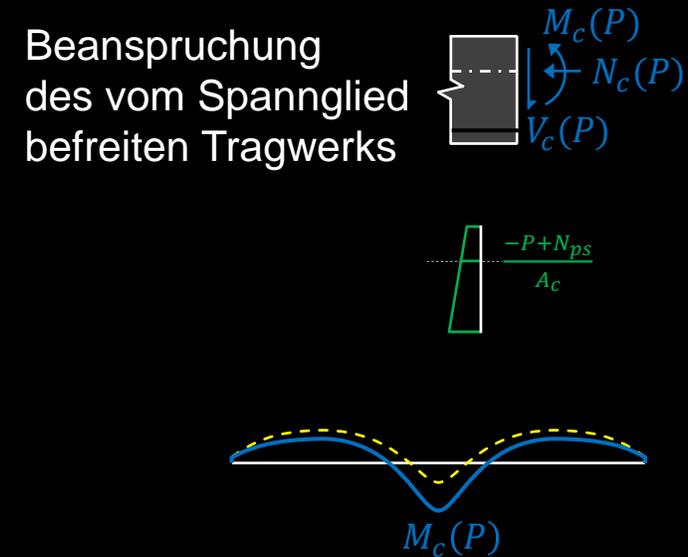
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (5)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil



### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil



$$M_c(P) = -P \cdot e + M_{ps}$$

$$V_c(P) = -P \sin \beta_p + V_{ps}$$

$$N_c(P) = -P + N_{ps}$$

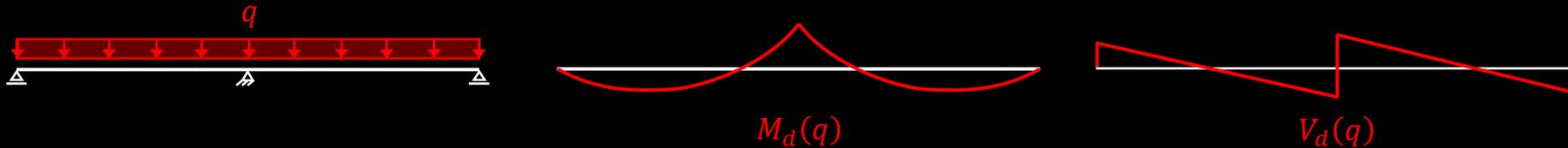
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (6)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Weitere Einwirkung, z.B. verteilte Belastung:



Biegetragsicherheit

$$\begin{array}{c}
 M_{ps} \\
 \curvearrowright \\
 M_d(q) \\
 \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \leftarrow A_p f_{pd} + A_s f_{sd} \\ \rightarrow A_p f_{pd} \\ \leftarrow A_s f_{sd} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M_d(q) + M_{ps} \\ N_d(q) + N_{ps} (=0) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 M_{ps} \\
 \curvearrowright \\
 M_d(q) \\
 \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \leftarrow A_p f_{pd} + A_s f_{sd} \\ \leftarrow P = A_p \sigma_{p0} \\ \rightarrow A_p (f_{pd} - \sigma_{p0}) \\ \leftarrow A_s f_{sd} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M_d(q) + M_{ps} - P \cdot e \\ N_d(q) + N_{ps} - P \end{array} \right\}
 \end{array}$$

- Infolge Vorspannung nur  $M_{ps}$  und  $N_{ps}$
- $N_{ps} = 0$  bei unbehinderter Verkürzung,  $N(q)$  oft 0
- einfacher Nachweis für reine Biegung!

→ "Vorspannung auf der Widerstandsseite"

- zusätzlich  $-P \cdot e$ ,  $-P$  wirksam
- auch bei  $N_{ps} = N(q) = 0$  Biegung mit Normalkraft
- umständlicherer Nachweis

→ "Vorspannung auf der Lastseite"

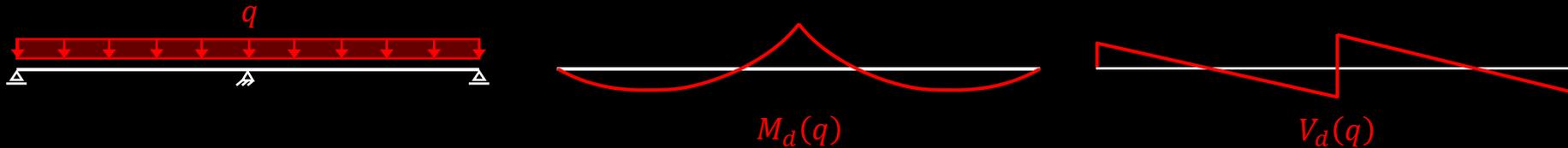
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (7)

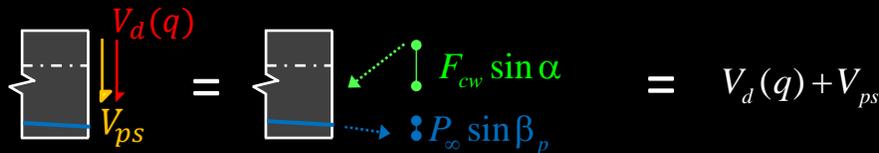
### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Weitere Einwirkung, z.B. verteilte Belastung:

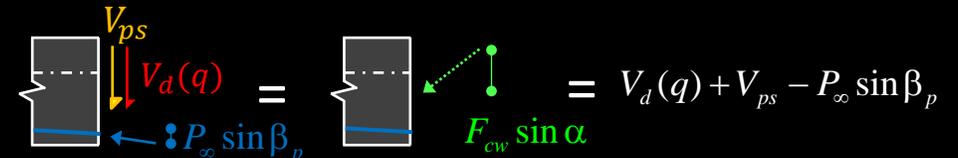


Querkrafttragsicherheit



Einwirkung:  $V_d = V_d(q) + V_{ps}$   
 Widerstand:  $V_{Rd} = V_{Rd,FW-Modell} + P_\infty \sin \beta_p$   
 $\rightarrow V_{Rd,FW-Modell} \geq V_d(q) + V_{ps} - P_\infty \sin \beta_p$

→ "Vorspannung auf der Widerstandsseite"



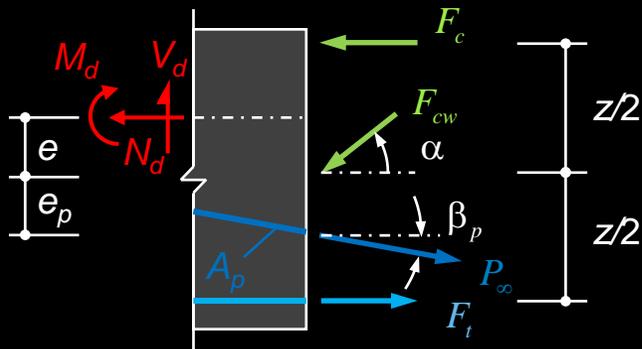
Einwirkung:  $V_d = V_d(q) + V_{ps} - P_\infty \sin \beta_p$   
 Widerstand:  $V_{Rd} = V_{Rd,FW-Modell}$   
 $\rightarrow V_{Rd,FW-Modell} \geq V_d(q) + V_{ps} - P_\infty \sin \beta_p$

→ einfacher, falls Vorspannung korrekt modelliert ist  
 (Ermittlung von  $\beta_p$  im massg. Schnitt unnötig,  
 sofern Gurtkräfte nicht untersucht werden)

→ "Vorspannung auf der Lastseite"

# Querkrafttragsicherheit

«Querschnittswiderstand» gemäss SIA 262:



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den Kräften im Druck- und Zuggurt  $F_c$  bzw.  $F_t$  wirkt die geneigte Spannkraft  $P_\infty$  (Vorspannung auf Widerstandsseite).

Die Neigung der Druckgurtkraft (siehe Stahlbeton II, Analyse benachbarter Querschnitte) wird auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt.

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um **Terme infolge Vorspannung**.

$$\Sigma F_V : F_{cw} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha}$$

$$\Sigma M_T : F_c = \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

$$\Sigma M_C : F_T = \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

Erforderlicher Widerstand der Bügel:

$$V_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha}$$

Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (8)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Diese Betrachtung eignet sich gut für folgende Fragestellungen (primär Tragsicherheit):

- *Nachweis der (Biege-)Tragsicherheit*  
Da durch die Vordehnung des Spannstahls gewährleistet ist, dass er die Fließgrenze in der Regel erreicht, kann der Biegewiderstand sehr einfach ermittelt werden.

Dabei ist es sinnvoll, in den Einwirkungen die Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$  zu berücksichtigen (mit  $P_0$  oder  $P_\infty$ ) (auch wenn dies im Sinne einer plastischen Schnittkraftumlagerung nicht zwingend ist):

$$M_{Rd} = A_p f_{pd} \left( d_p - \frac{0.85x}{2} \right) + A_s f_{sd} \left( d_s - \frac{0.85x}{2} \right)$$

$$M_{Ed} = \gamma_G \cdot M(g_k) + \gamma_Q \cdot M(q_k) + M_{ps}$$

Für innerlich hochgradig statisch unbestimmte Tragwerke (Flächentragwerke) ist diese Betrachtung ungeeignet (Ermittlung des Eigenspannungszustands nicht eindeutig)

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt allein)

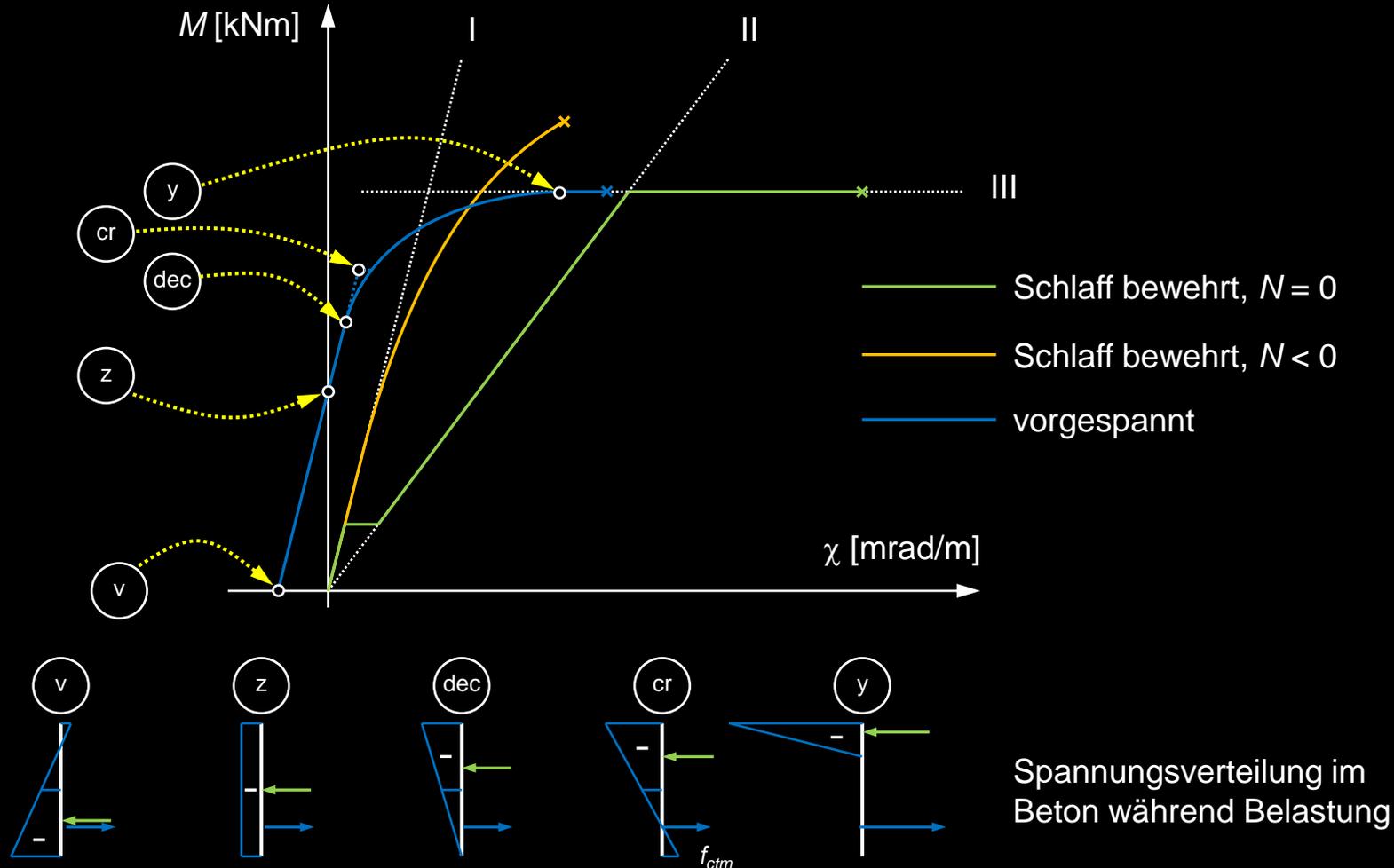
Diese Betrachtung eignet sich gut für folgende Fragestellungen (primär Gebrauchszustand):

- *Spannungsnachweise am Querschnitt*  
Es kann eine normale Spannungsberechnung (ohne Vordehnungen) am Stahlbetonquerschnitt unter den Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  geführt werden
- *Durchbiegungsberechnungen (inkl. Kriechen)*  
Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  relevant
- *Nachweis der Querkraft (Tragsicherheit)*  
Da der Spannkraftzuwachs vernachlässigt wird, beträgt der Widerstand der Vorspannung  $V_c(P_\infty)$  (= in  $V_c(P)$  aus Statikprogramm enthalten wenn Vorspannung entsprechend modelliert ist)

NB: Wird der Nachweis der Biegetragsicherheit mit den Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  geführt, darf im Biegewiderstand nur der Spannkraftzuwachs ( $f_{pd} - \sigma_p$ ) berücksichtigt werden, nicht  $f_{pd}$  (Vorspannung nicht 2x ansetzen)

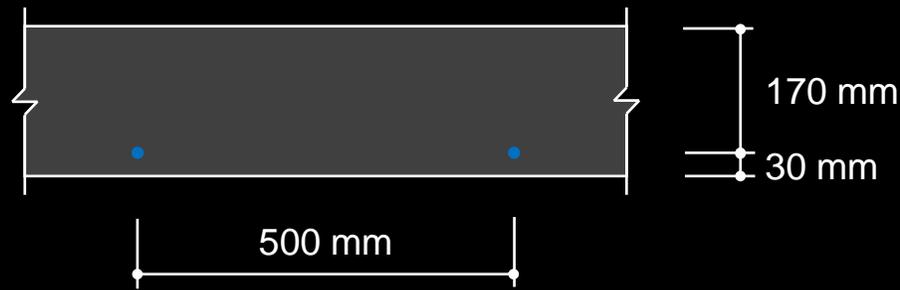
# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte



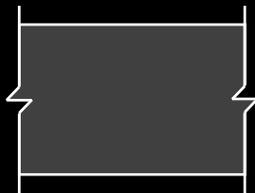
# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte



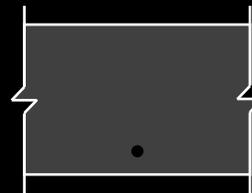
Eine 200 mm dicke Platte weist Einzellitzen  $\varnothing 15.7$  mm der Festigkeitsklasse Y1770 im Abstand von 500 mm auf, die nachträglich injiziert werden können. Die auf die Mittelebene der Platte bezogene Exzentrizität der Litzen beträgt  $e = 70$  mm. Sie werden auf  $\sigma_{p0} = 0.7f_{pk}$  vorgespannt. Beton und Spannstahl werden als linear elastisch mit  $E_c = 30$  GPa und  $E_p = 200$  GPa vorausgesetzt. Langzeitverluste werden nicht betrachtet.

Bruttoquerschnitt



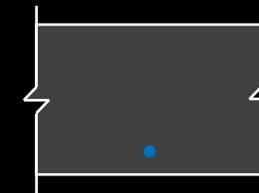
$$A_c = b \cdot h$$

Nettoquerschnitt



$$A_n = A_c - A_p$$

Ideeller Querschnitt



$$A_i = A_c + A_p \cdot (n - 1)$$

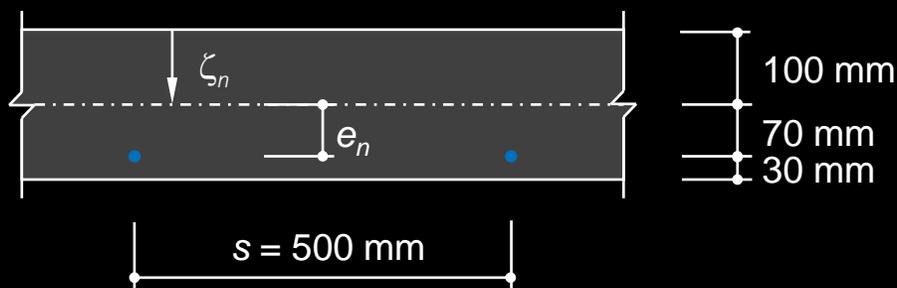
Die Vorspannkraft wirkt auf den Nettoquerschnitt. Nach dem Injizieren herrscht starrer Verbund, somit sind dann streng genommen ideale Querschnittswerte zu verwenden. In guter Näherung kann auch konsequent mit Brutto-Querschnittswerten gerechnet werden.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:



Vorspannen



$$a_n = bh - \frac{A_p}{s} = 1000 \cdot 200 - \frac{150}{0.5} = 199700 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\zeta_n = \frac{bh \cdot \frac{h}{2} - \frac{A_p}{s} \cdot d_p}{a_n} = \frac{1000 \cdot 200 \cdot 100 - \frac{150}{0.5} \cdot 170}{199700} = 99.9 \text{ mm}$$

$$e_n = d_p - \zeta_n = 170 - 99.9 = 70.1 \text{ mm}$$

$$i_n = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2} - \zeta_n\right)^2 - \frac{A_p}{s} \cdot (d_p - \zeta_n)^2 = \frac{1000 \cdot 200^3}{12} + 1000 \cdot 200 \cdot 0.1^2 - \frac{150}{0.5} \cdot 70.1^2 = 665.2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m} \quad \left(i_b = 666.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m}\right)$$

Vorspannkraft:

$$p_v = \frac{A_p}{s} \cdot 0.7 \cdot f_{pk} = 300 \cdot 0.7 \cdot 1770 = 371.7 \text{ kN/m} \quad \left(m_{p0} = -p_v \cdot e_n = -26.1 \text{ kNm/m}\right)$$

Randspannungen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c,\text{sup}}^v \\ \sigma_{c,\text{inf}}^v \end{Bmatrix} = -\frac{p_v}{a_n} + \frac{-p_v \cdot e_n}{i_n} \cdot \begin{Bmatrix} z_{n,\text{sup}} \\ z_{n,\text{inf}} \end{Bmatrix} = -\frac{371.7}{199.7} + \frac{-371.7 \cdot 70.1}{665.2 \cdot 10^3} \cdot \begin{Bmatrix} -99.9 \\ 100.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.05 \\ -5.78 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

NB: Da beim Vorspannen Last aktiviert wird, tritt dieser Zustand i.A. nur theoretisch ein (Kontrolle, ob der Querschnitt wie angenommen ungerissen ist, in Kombination mit aktivierter Last).

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

(v) Vorspannen

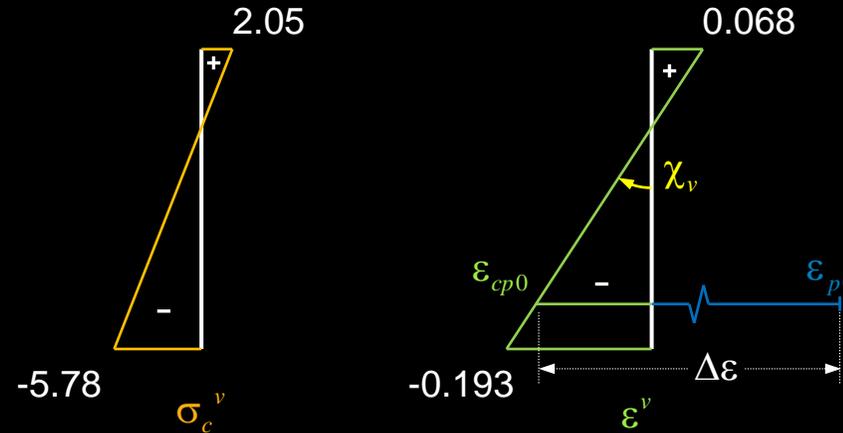
Randdehnungen:

$$\begin{cases} \varepsilon_{c,\text{sup}}^v \\ \varepsilon_{c,\text{inf}}^v \end{cases} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \begin{cases} 0.068 \\ -0.193 \end{cases} \text{‰}$$

Krümmung:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\text{inf}} - \varepsilon_{\text{sup}}}{h}$$

$$\chi_v = \frac{-0.193 - 0.068}{0.2} = -1.305 \text{ mrad/m}$$



Betonstauchung auf Höhe des Spannglieds:

$$\varepsilon_{cp0} = \varepsilon_{sup} + d_p \chi_v = 0.068 + 0.17 \cdot (-1.305) = -0.154 \text{‰}$$

Dehnung des Spannstahls nach dem Vorspannen:

$$\varepsilon_{p0} = \frac{\sigma_{p0}}{E_p} = \frac{1239}{200} = 6.195 \text{‰}$$

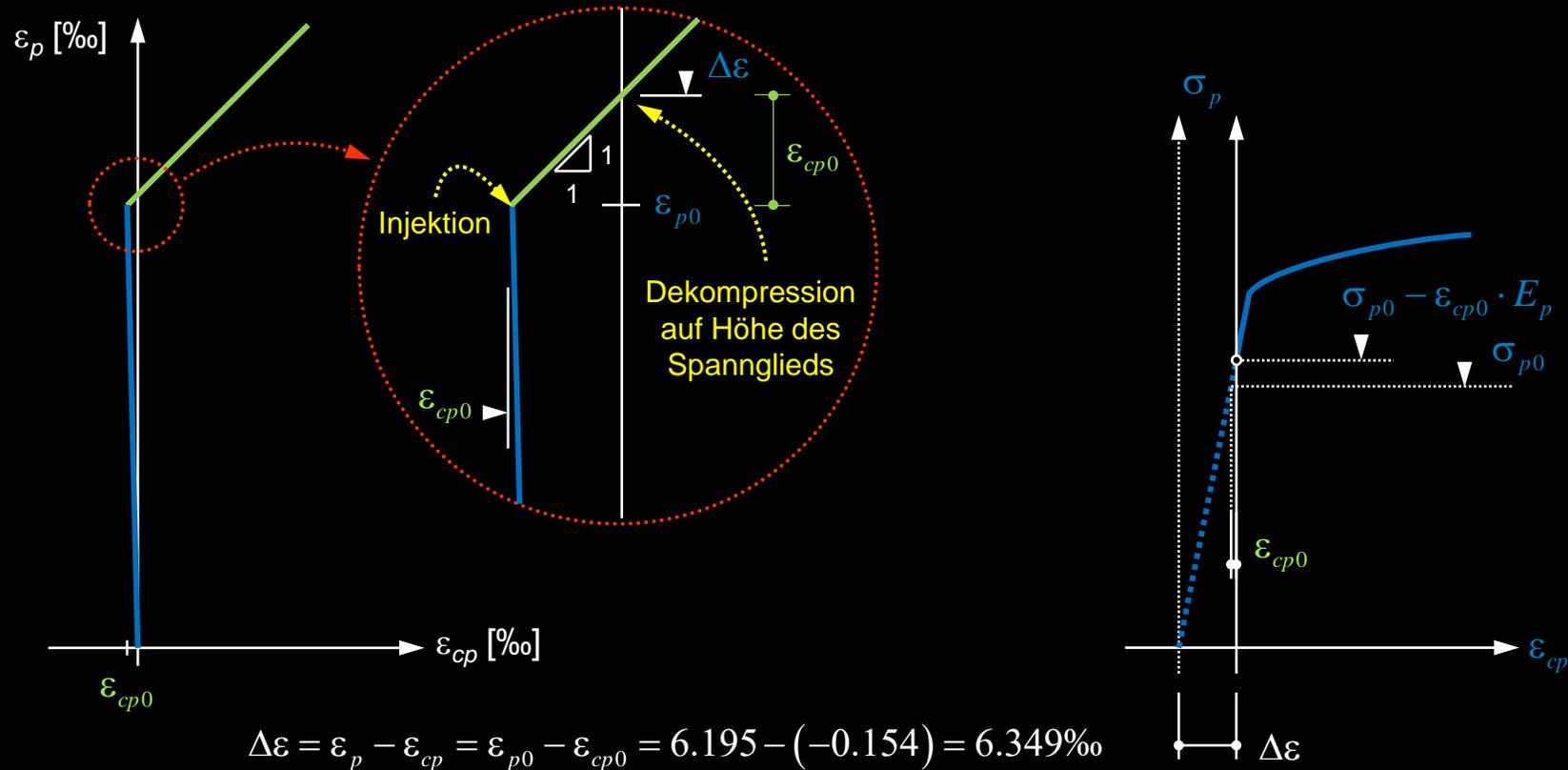
# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:



Vorspannen

Die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp}$  zwischen Beton und Spannstahl bleibt nach dem Injizieren konstant:

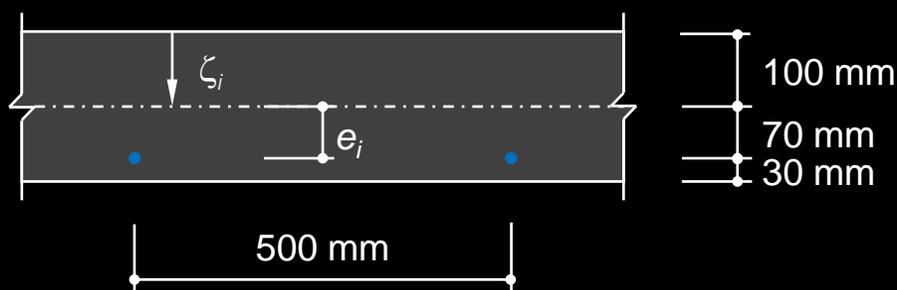


NB: Entscheidend ist die Grösse von  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp}$  zum Zeitpunkt der Injektion; oft wirkt dabei ein Teil der ständigen Einwirkungen (durch die Vorspannung aktiviert)  $\rightarrow \Delta\varepsilon$  in der Regel etwas kleiner (aber unwesentlich, da ohnehin  $|\varepsilon_{cp}| \ll \varepsilon_p$ )

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte: ungerissen elastisches Verhalten

Im ungerissenen Zustand gelten ideale Querschnittswerte



$$a_i = bh + (n-1) \frac{A_p}{s} = 1000 \cdot 200 + \left( \frac{200}{30} - 1 \right) \frac{150}{0.5} = 201700 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\zeta_i = \frac{bh \cdot \frac{h}{2} + (n-1) \frac{A_p}{s} \cdot d_p}{a_i}$$

$$= \frac{1000 \cdot 200 \cdot 100 + \left( \frac{200}{30} - 1 \right) \frac{150}{0.5} \cdot 170}{201700} = 100.6 \text{ mm}$$

$$e_i = d_p - \zeta_i = 170 - 100.6 = 69.4 \text{ mm}$$

$$i_i = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left( \frac{h}{2} - \zeta_i \right)^2 + (n-1) \frac{A_p}{s} \cdot (d_p - \zeta_i)^2 = \frac{1000 \cdot 200^3}{12} + 1000 \cdot 200 \cdot 0.6^2 + \left( \frac{200}{30} - 1 \right) \frac{150}{0.5} \cdot 69.4^2 = 674.9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m} \quad (i_b = 666.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m})$$

Die Spannungen im Beton und im Spannstahl infolge eines Moments  $m$  [kNm/m] folgen aus

$$\Delta\sigma_c = \frac{m \cdot z_i}{i_i} \quad \Delta\sigma_p = \frac{m \cdot e_i}{i_i} \cdot \frac{E_p}{E_c}$$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

$\odot$  Zentrische Vorspannung

$$\chi_v + \Delta\chi_z = 0 \rightarrow \Delta\chi_z = -\chi_v$$

$$\Delta\chi_z = \frac{m_z}{E_c i_i} = -\frac{\varepsilon_{inf}^v - \varepsilon_{sup}^v}{h}$$

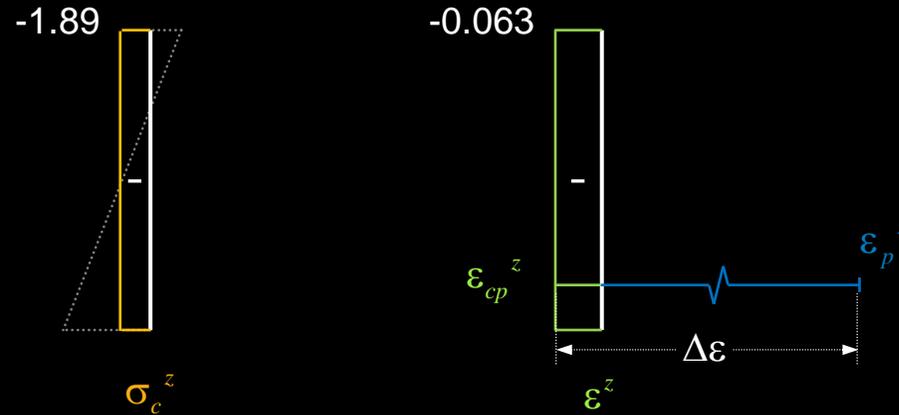
$$\rightarrow m_z = \frac{\sigma_{c,sup}^v - \sigma_{c,inf}^v}{h} \cdot i_i$$

$$= \frac{2.05 - (-5.78)}{200} \cdot 674.9 = 26.4 \text{ kNm/m}$$

$$\Delta\sigma_{c,sup}^z = \frac{m_z z_{i,sup}}{i_i} = \frac{26.4 \cdot (-100.6)}{674.9} = -3.94 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{c,inf}^z = \frac{m_z z_{i,inf}}{i_i} = \frac{26.4 \cdot 99.4}{674.9} = 3.89 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p^z = \frac{m \cdot e_i}{i_i} \cdot \frac{E_p}{E_c} = \frac{26.4 \cdot 69.4}{674.9} \cdot \frac{200}{30} = 18.10 \text{ MPa}$$



$$\rightarrow \sigma_{c,sup}^z = 2.05 - 3.94 = -1.89 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{c,inf}^z = -5.78 + 3.89 = -1.89 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_p^z = 1239 + 18.1 = 1257 \text{ MPa}$$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

dec Dekompression

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = -\sigma_{c,inf}^v$$

$$\rightarrow m_{dec} = \frac{-\sigma_{c,inf}^v}{z_{i,inf}} \cdot i_i = \frac{5.78}{99.4} \cdot 674.9 = 39.2 \text{ kNm/m}$$

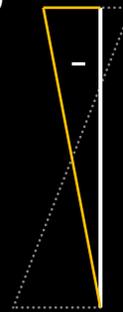
$$\Delta\sigma_{c,sup}^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot z_{i,sup}}{i_i} = \frac{39.2 \cdot (-100.6)}{674.9} = -5.84 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = \frac{39.2 \cdot 99.4}{674.9} = 5.78 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot e_i}{i_i} \cdot \frac{E_p}{E_c} = \frac{39.2 \cdot 69.4}{674.9} \cdot \frac{200}{30} = 26.8 \text{ MPa}$$

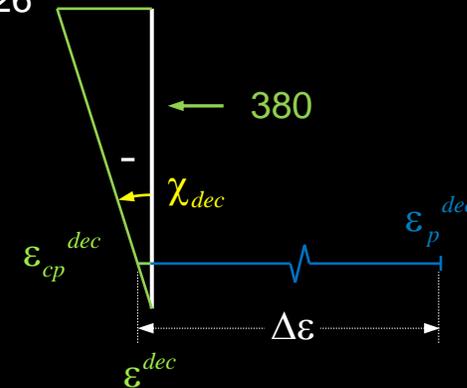
$$\chi_{dec} = \frac{\varepsilon_{c,inf} - \varepsilon_{c,sup}}{h} = \frac{0.126}{0.2} = 0.632 \text{ mrad/m}$$

-3.79



$\sigma_c^{dec}$

-0.126



$$\rightarrow \sigma_{c,sup}^{dec} = 2.05 - 5.84 = -3.79 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{c,inf}^{dec} = -5.78 + 5.78 = 0 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_p^{dec} = 1239 + 26.8 = 1266 \text{ MPa}$$

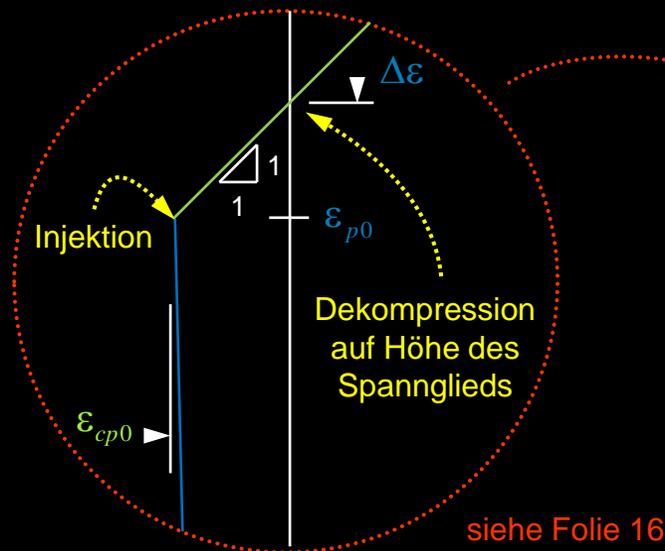
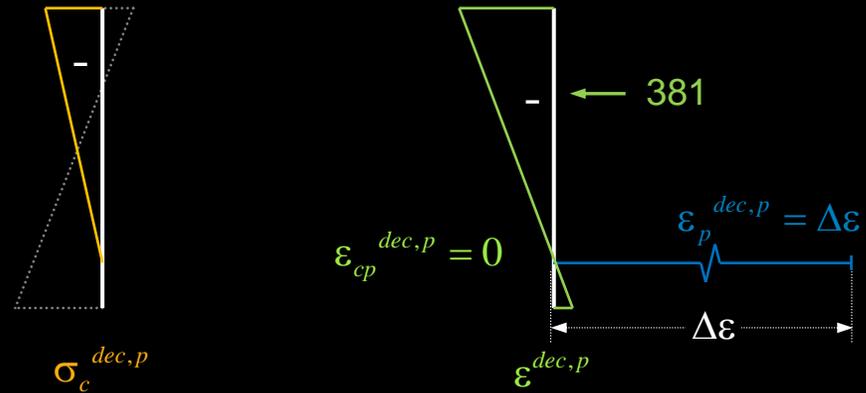
# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

dec Dekompression (Näherung)

NB. Näherung für Abschätzungen:  
 Dekompression auf Höhe des Spannglieds

- Grösse der Spannkraft bekannt ( $\Delta\varepsilon \cdot E_p$ )
- Lage der Druckresultierenden bekannt  
 (oberer Kernpunkt des QS oberh. Spannglieds)



$$\varepsilon_p^{dec,p} = \Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0} = 6.349\text{‰} \rightarrow \sigma_p^{dec,p} = \Delta\varepsilon \cdot E_p = 1270 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow m_{dec,p} = \Delta\varepsilon \cdot E_p A_p \frac{2}{3} d_p = 1.270 \cdot 300 \cdot 0.113 = 43.0 \text{ kNm/m}$$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

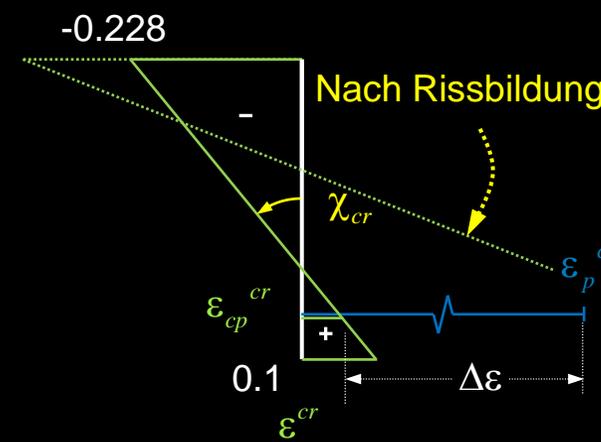
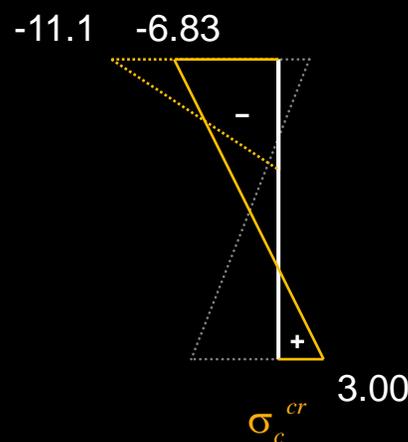
Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

$\textcircled{\text{cr}}$  Reissen

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = f_{ct} - \sigma_{c,inf}^v$$

$$\rightarrow m_{cr} = \frac{f_{ct} - \sigma_{c,inf}^v}{z_{i,inf}} \cdot i_i$$

$$= \frac{3 + 5.78}{99.4} \cdot 674.9 = 59.6 \text{ kNm/m}$$



$$\Delta\sigma_{c,sup}^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot z_{i,sup}}{i_i} = \frac{59.6 \cdot (-100.6)}{674.9} = -8.88 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{c,sup}^{cr} = 2.05 - 8.88 = -6.83 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = \frac{59.6 \cdot 99.4}{674.9} = 8.78 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{c,inf}^{cr} = -5.78 + 8.78 = 3.00 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot e_i}{i_i} \cdot \frac{E_p}{E_c} = \frac{59.6 \cdot 69.4}{674.9} \cdot \frac{200}{30} = 40.9 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_p^{cr} = 1239 + 40.9 = 1280 \text{ MPa} \quad (\rightarrow 1366 \text{ MPa})$$

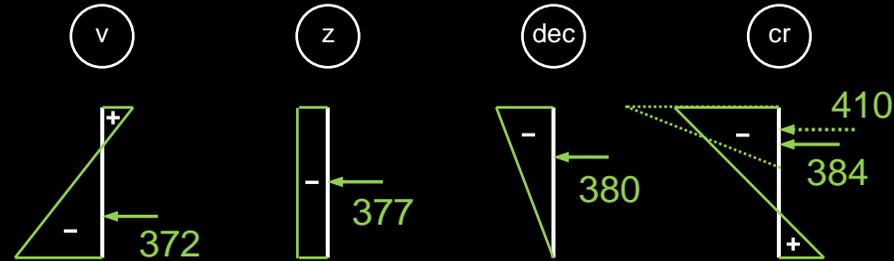
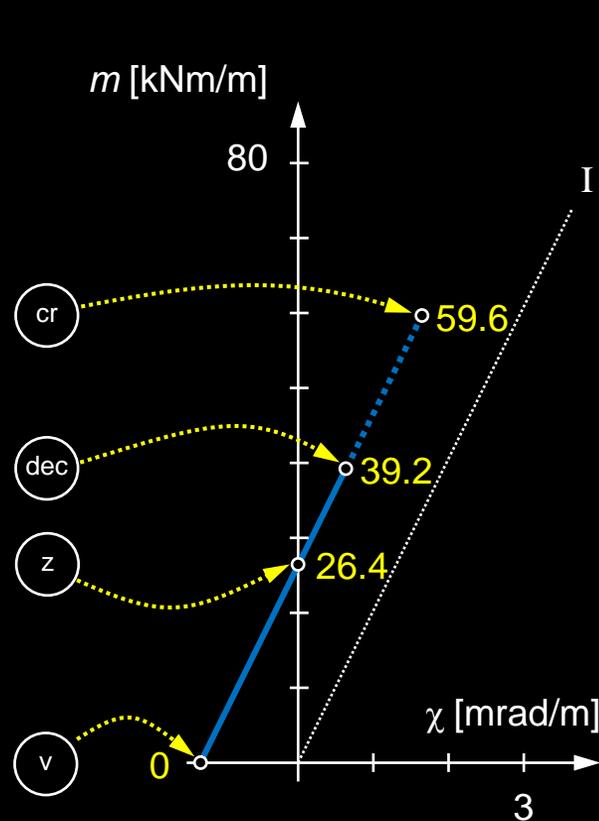
$$\chi_{cr} = \frac{\varepsilon_{c,inf} - \varepsilon_{c,sup}}{h} = \frac{0.1 + 0.228}{0.2} = 1.638 \text{ mrad/m}$$

Nach Rissbildung

# Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** ungerissen elastisches Verhalten

Zusammenfassung ungerissenes Verhalten

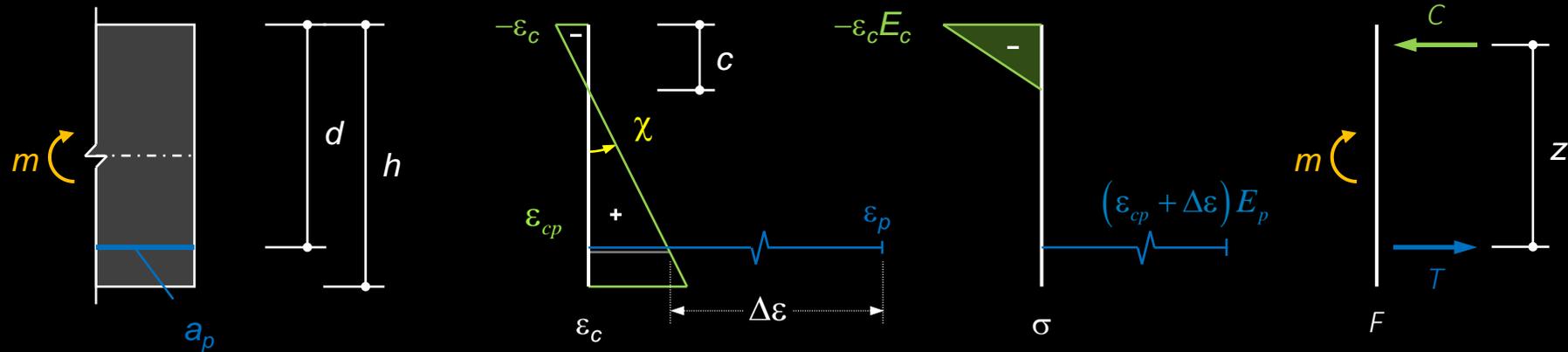


- Dehnungsebene rotiert mit zunehmendem Moment (Krümmung nimmt zu)
- Leichte Zunahme der Spannung im Spannglied wegen starrem Verbund (von  $\sigma_{p0} = 1239$  MPa auf  $\sigma_{p,cr} = 1280$  MPa, Zunahme 3.3%)
- Starke Zunahme des Hebelarms der inneren Kräfte («Druckkraft im Beton wandert nach oben»)
- Negative Krümmung bei (v): Durchbiegungen nach oben
- Lastausgleich bei (z): keine Krümmungen, keine Durchbiegungen

# Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** gerissen elastisches Verhalten

Annahme: Beton linear elastisch, Zugspannungen im Beton vernachlässigt



$$T = a_p \cdot \sigma_p = a_p \cdot \varepsilon_p \cdot E_p = a_p \cdot E_p \cdot (\varepsilon_{cp} + \Delta\varepsilon) = a_p \cdot E_p \cdot (\chi \cdot (d - c) + \Delta\varepsilon)$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot E_c \cdot \varepsilon_c \cdot c = \frac{1}{2} \cdot E_c \cdot c \cdot \chi \cdot c = \frac{c^2}{2} \cdot E_c \cdot \chi$$

$$\Sigma F_H : T = C \rightarrow \chi = \frac{a_p \cdot E_p \cdot \Delta\varepsilon}{\frac{c^2}{2} \cdot E_c - a_p \cdot E_p \cdot (d - c)}$$

Für bekanntes resp. angenommenes  $c$  kann die Krümmung  $\chi$  aus  $\Sigma F_H$  bestimmt werden, daraus resultieren die übrigen Unbekannten  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_{cp}$ ,  $T$ ,  $\sigma_p$ ,  $z = d - c/3$  und  $m$ .

# Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** gerissen elastisches Verhalten

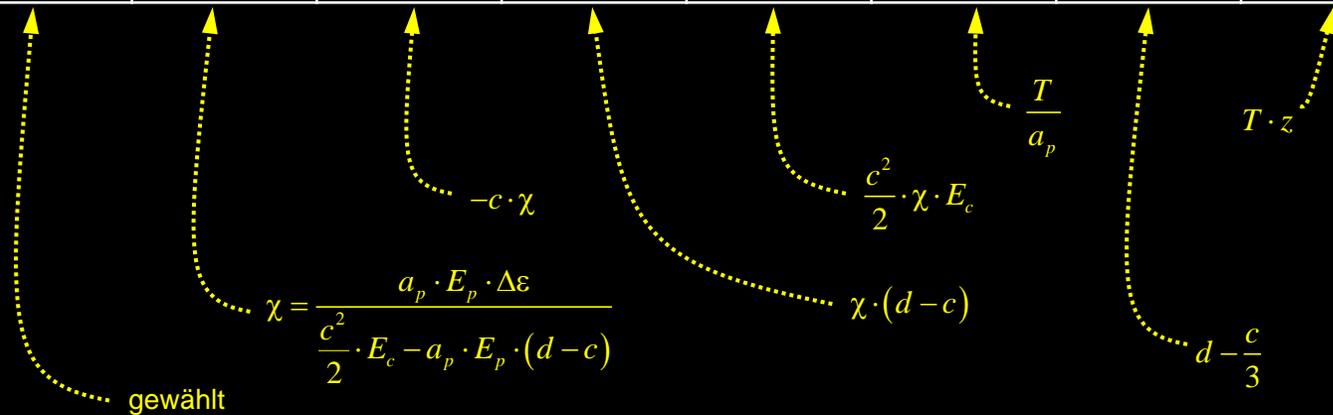
Annahme: Beton linear elastisch, Zugspannungen im Beton vernachlässigt

$c$ [mm]	$\chi$ [mrad/m]	$-\varepsilon_c$ [‰]	$\varepsilon_{cp}$ [‰]	$T$ [kN]	$\sigma_p$ [MPa]	$z$ [mm]	$m$ [kNm/m]
200	0.632	0.127	-0.019	379.8	1266	103.3	39.2
170	0.879	0.149	0	380.9	1270	113.3	43.2
...	...	...	...	...	...	...	...
60	8.037	0.482	0.884	434.0	1447	150	65.1
53.3	10.716	0.571	1.251	456.0	1520	152.2	69.4

Dekompression

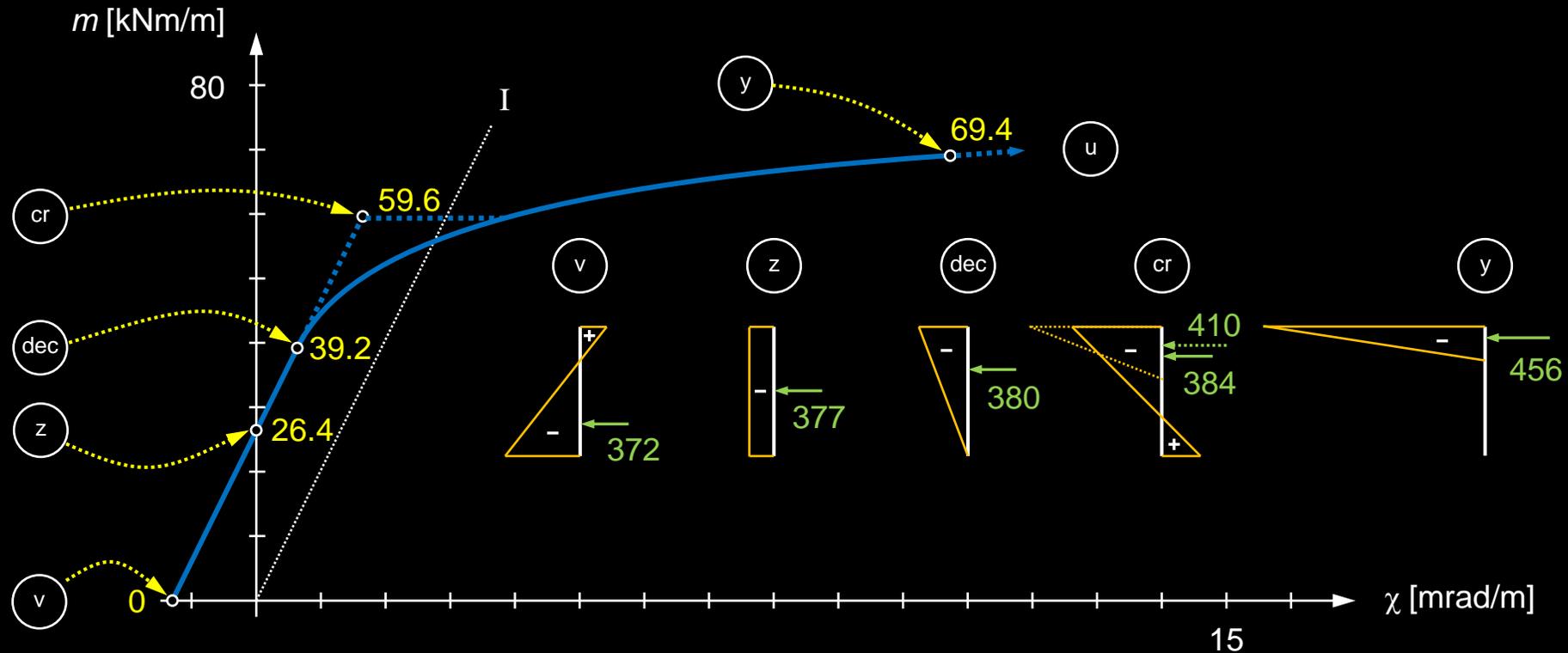
$c = d$

Fließbeginn y



# Vorspannung – Biegetragverhalten

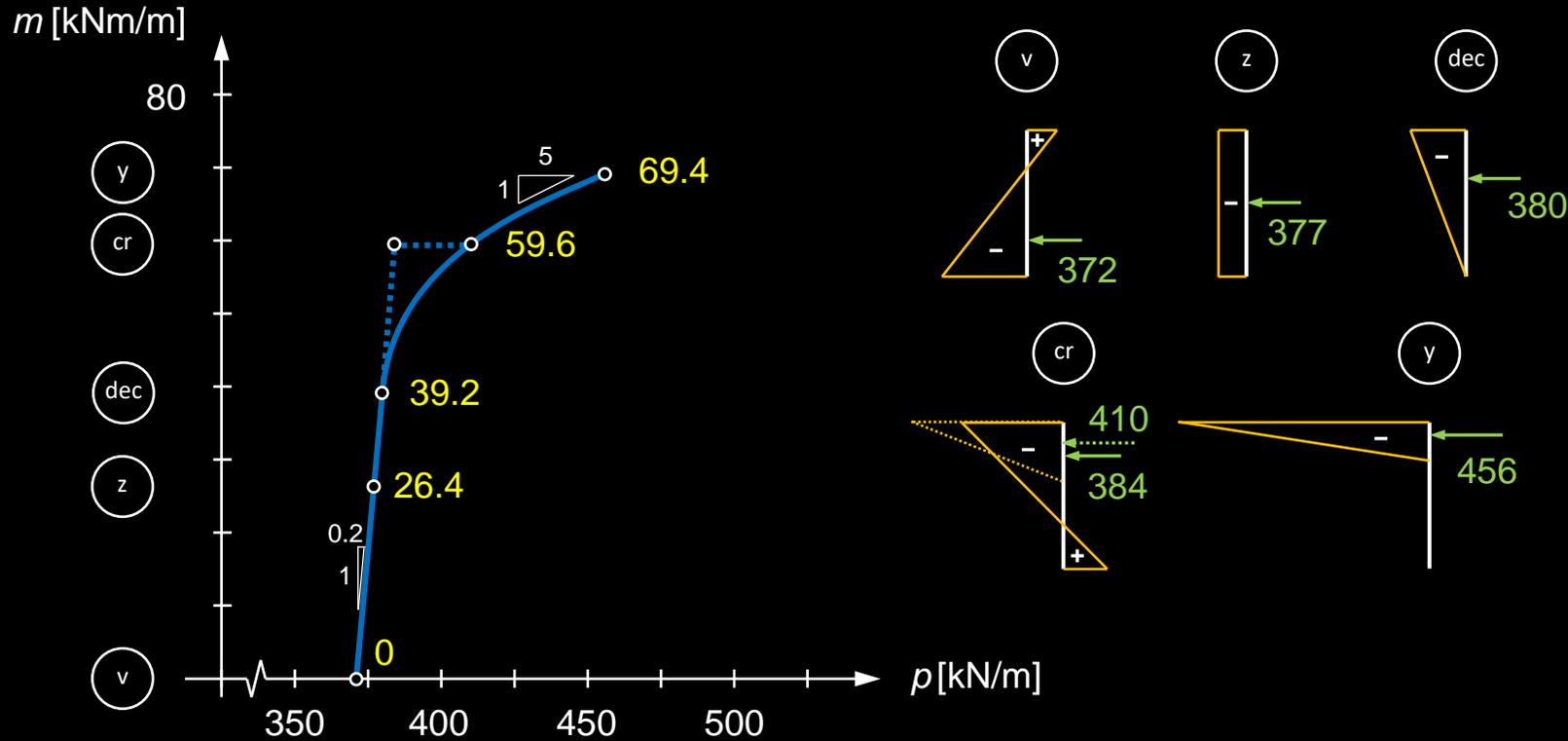
## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte: Zusammenfassung



- Nichtlineares Verhalten nach der Dekompression trotz des vorausgesetzten linearen Spannungs-Dehnungsverhaltens von Beton und Spannstahl
- Punktweise Ermittlung nach (y) bis zum Bruch mit nichtlinearem  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm von Beton und Spannstahl möglich
- Theoretische Zugversteifung zwischen (cr) und (y) von untergeordneter Bedeutung

# Vorspannung – Biegetragverhalten

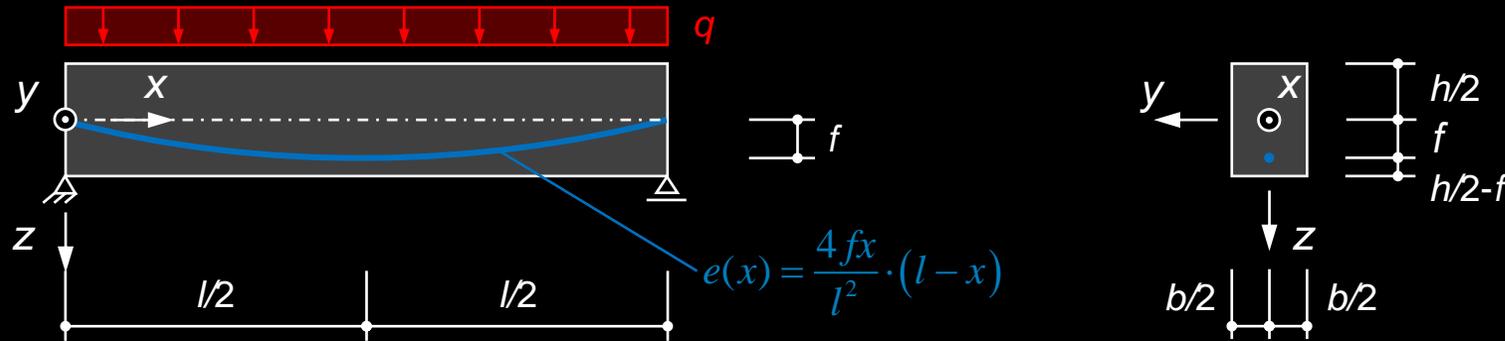
## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte: Zusammenfassung



- Linearer Verlauf der Kraft im Spannstahl mit sehr geringer Zunahme bis zur Dekompression, anschliessend nichtlinearer Verlauf mit deutlich stärkerem Spannkraftzuwachs  
(→ bei Ermüdungsbeanspruchung ist oft eine volle Vorspannung für ständige Einwirkungen + Ermüdungslasten, oder einen grossen Teil davon, sinnvoll)

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken



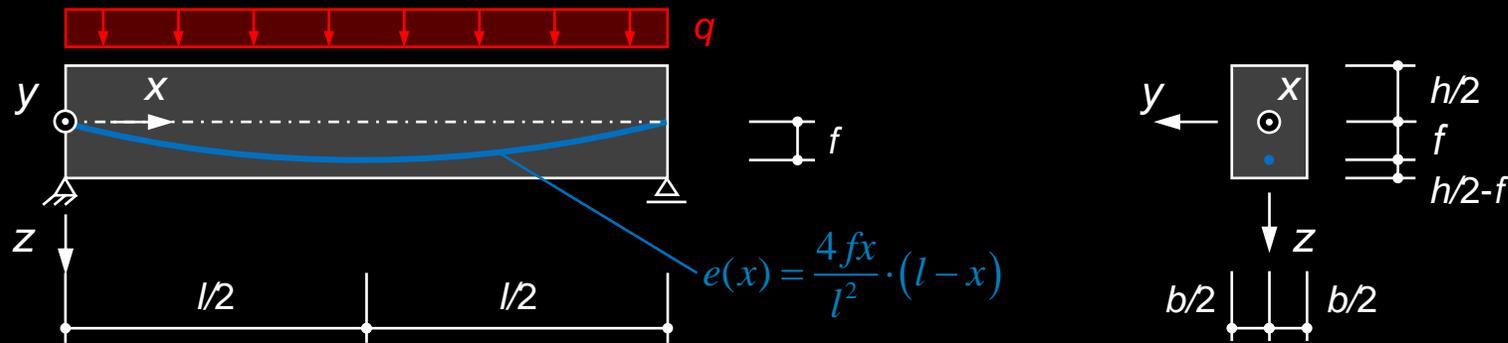
Ein einfacher Balken mit rechteckigem Querschnitt und parabolisch geführtem Spannglied wird nach dem Vorspannen einer sukzessiv steigenden Belastung  $q$  unterzogen.

Unter Vernachlässigung der schlaffen Bewehrung soll der Spannungszustand in jedem Querschnitt  $x$  ermittelt werden.

Es wird von linear elastischem Verhalten von Beton und Spannstahl ausgegangen. Zugspannungen im Beton werden vernachlässigt.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken



$$M(x) = \frac{qx}{2} \cdot (l-x)$$

Bruttoquerschnittswerte:

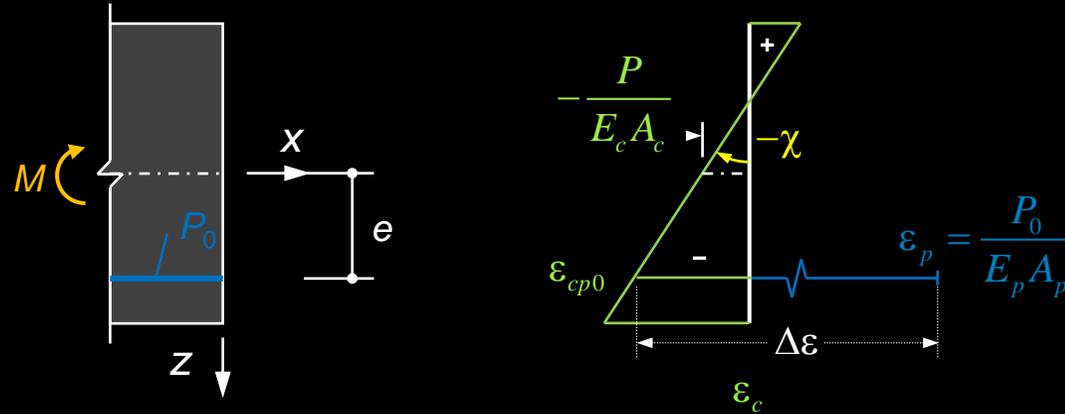
$$A_c = b \cdot h \quad I_c = \frac{bh^3}{12}$$

$$\rightarrow i_c^2 = \frac{I_c}{A_c} = \frac{h^2}{12} \quad (\text{Trägheitsradius})$$

$$\text{Betonspannungen: } \sigma_{x,c}(x, z) = -\frac{P}{A_c} + \frac{M(x) - P \cdot e(x)}{I_c} \cdot z = -\frac{P}{A_c} \cdot \left(1 + \frac{e \cdot z}{i_c^2}\right) + \frac{qx \cdot (l-x) \cdot z}{2I_c}$$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: Vorspannen auf  $P_0$  ( $M = 0$ )



$$\varepsilon_{c,\text{sup}} = -\frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 - 6 \cdot \frac{e}{h}\right) \quad \left(z = -\frac{h}{2}\right)$$

$$\varepsilon_{cp0} = -\frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 + 12 \cdot \frac{e^2}{h^2}\right) \quad (z = e)$$

$$\varepsilon_{c,\text{inf}} = -\frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 + 6 \cdot \frac{e}{h}\right) \quad \left(z = +\frac{h}{2}\right)$$

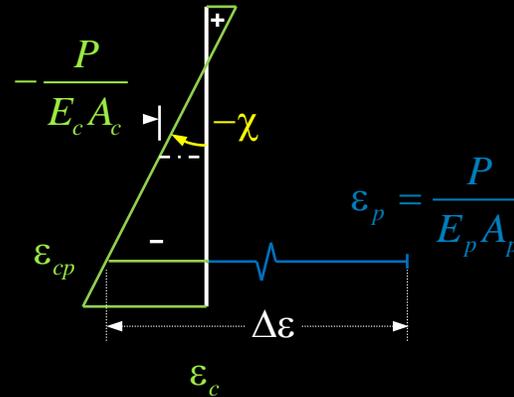
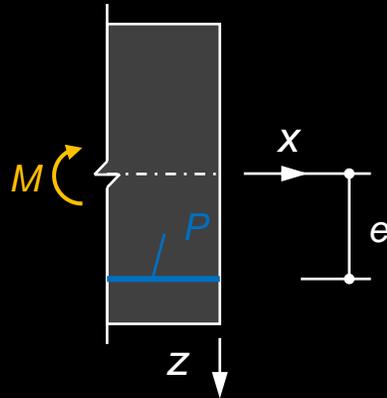
$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp} = \frac{P_0}{E_p A_p} + \frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 + 12 \frac{e^2}{h^2}\right) = \frac{P_0}{E_p A_p} + \frac{P_0}{E_p A_p} \cdot \left(1 + 12 \frac{e^2}{h^2}\right) \cdot \rho_p n_p = \frac{P_0}{E_p A_p} \cdot \left[1 + \rho_p n_p \cdot \left(1 + 12 \frac{e^2}{h^2}\right)\right]$$

$$n_p = \frac{E_p}{E_c} \quad \rho_p = \frac{A_p}{A_c}$$

Die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon(x)$  bleibt nach dem Injizieren konstant.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: komprimierter Zustand ( $M < M_{dec}$ )



$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp} \rightarrow \varepsilon_{cp} = \varepsilon_p - \Delta \varepsilon$$

$$\varepsilon_{cp} = -\frac{P}{E_c A_c} + \chi \cdot e$$

$$\rightarrow -\frac{P}{E_c A_c} + \chi \cdot e = \frac{P}{E_p A_p} - \Delta \varepsilon$$

$$\chi = \frac{M_c}{E_c I_c} = \frac{M - P \cdot e}{E_c I_c} \rightarrow -\frac{P}{E_c A_c} + \frac{M - P \cdot e}{E_c I_c} \cdot e = \frac{P}{E_p A_p} - \Delta \varepsilon$$

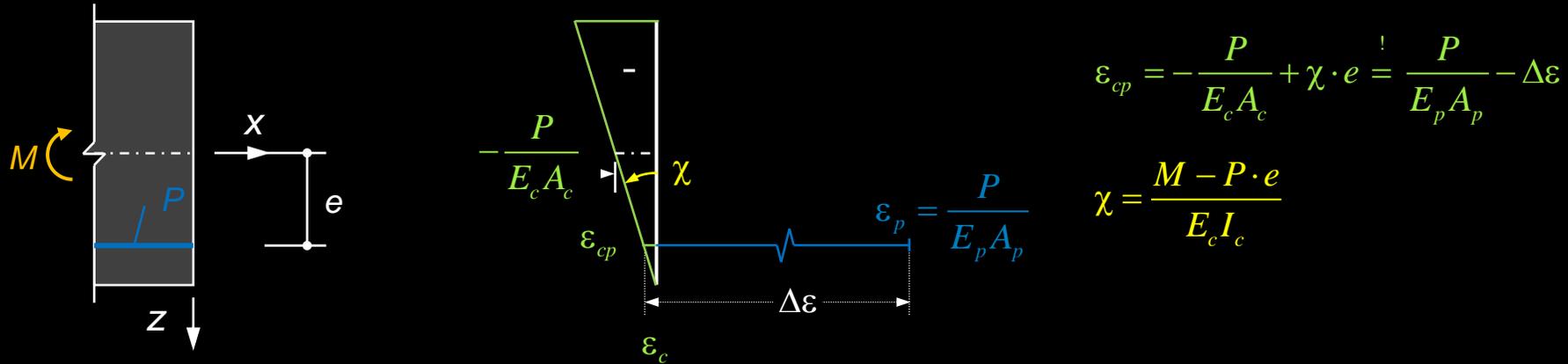
$$\rightarrow \text{(mit } \Delta \varepsilon \text{ gemäss vorherg. Folie) ... } \rightarrow P = P_0 + \frac{M}{e \cdot \left( 1 + \frac{1 + \rho_p n_p}{\rho_p n_p} \cdot \frac{h^2}{12e^2} \right)}$$

Initiale Vorspannkraft

Zuwachs der Kraft im Spannglied infolge Krümmung aus  $M$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: Dekompression ( $M = M_{dec}$ )



$$\epsilon_{cp} = -\frac{P}{E_c A_c} + \chi \cdot e = \frac{P}{E_p A_p} - \Delta\epsilon$$

$$\chi = \frac{M - P \cdot e}{E_c I_c}$$

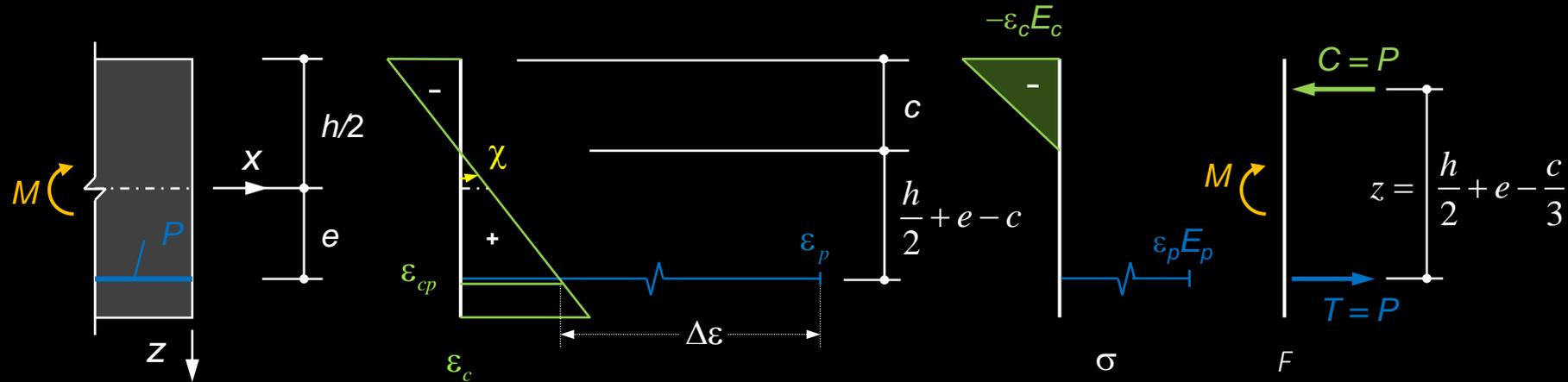
$$\sigma_{c,x} \left( x, z = \frac{h}{2} \right) = -\frac{P}{A_c} \cdot \left( 1 + \frac{6e}{h} \right) + \frac{M_{dec} \cdot h}{2I_c} = -\frac{P}{A_c} \cdot \left( 1 + \frac{6e}{h} \right) + M_{dec} \cdot \frac{6}{h \cdot A_c} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow M_{dec} = P \cdot \left( e + \frac{h}{6} \right)$$

und mit  $P = P_0 + \frac{M}{e \cdot \left( 1 + \frac{1 + \rho_p n_p}{\rho_p n_p} \cdot \frac{h^2}{12e^2} \right)}$  folgt  $M_{dec} = \dots = P_0 \cdot \left( e + \frac{h}{6} \right) \cdot \frac{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 + 12e^2)}{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 - 2eh)}$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: dekomprimierter Zustand ( $M \geq M_{dec}$ )



$$T = A_p E_p \cdot \varepsilon_p = A_p E_p \cdot (\varepsilon_{cp} + \Delta\varepsilon) = A_p E_p \cdot \chi \cdot \left( \frac{h}{2} + e - c \right) + P_0 \cdot \left( 1 + \rho_p n_p \cdot \left( 1 + 12 \cdot \frac{e^2}{h^2} \right) \right)$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot E_c \cdot \varepsilon_c = \frac{bc^2}{2} \cdot E_c \cdot \chi$$

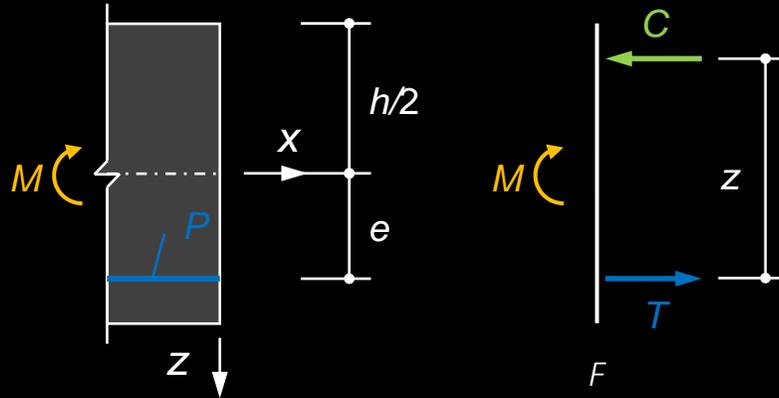
**NB: Unterschied zu schlaff bewehrten Trägern: Wegen  $\Delta\varepsilon \neq 0$  kann  $\chi$  nach Gleichsetzen  $C = T$  nicht eliminiert werden  $\rightarrow c$  ist nicht konstant,  $M-\chi$  somit trotz linear elastischem Materialverhalten nichtlinear**

$$\Sigma F_H : C = T \rightarrow \chi = \frac{P_0 \cdot \left( 1 + \rho_p n_p \cdot \left( 1 + 12 \frac{e^2}{h^2} \right) \right)}{\frac{bc^2}{2} \cdot E_c - A_p E_p \cdot \left( \frac{h}{2} + e - c \right)}$$

$$M = P \cdot \left( \frac{h}{2} + e - \frac{c}{3} \right)$$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: dekomprimierter Zustand ( $M \geq M_{\text{dec}}$ )



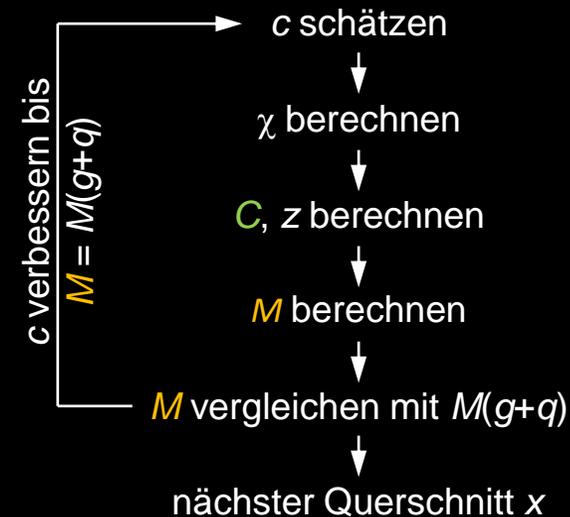
$$\Sigma F_H : C = T \rightarrow \chi = \frac{P_0 \cdot \left( 1 + \rho_p n_p \cdot \left( 1 + 12 \frac{e^2}{h^2} \right) \right)}{\frac{bc^2}{2} \cdot E_c - A_p E_p \cdot \left( \frac{h}{2} + e - c \right)}$$

Für einen gegebenen Querschnitt  $x$  mit gegebenen Lasten  $g + q$  kann die Gleichung für  $\chi$  durch Annahme von  $c$  und sukzessiver Verbesserung iterativ gelöst werden.

$$C = \frac{b}{2} \cdot c \cdot E_c \cdot \varepsilon_c = \frac{bc^2}{2} \cdot E_c \cdot \chi$$

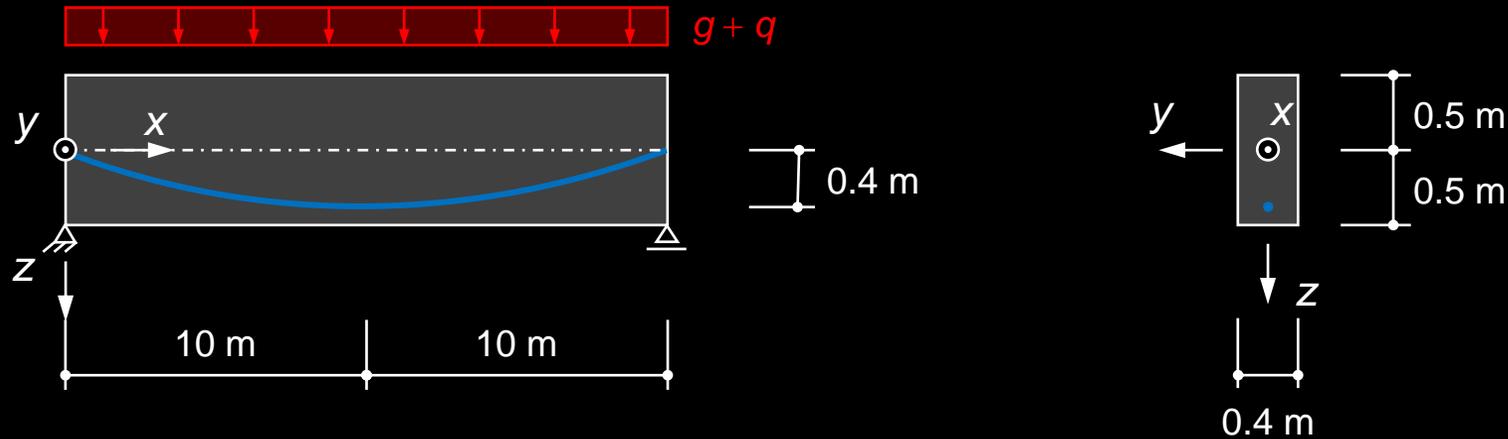
$$z = \frac{h}{2} + e - \frac{c}{3}$$

$$M = C \cdot z$$



# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel



- Eigenlast  $g_{0k} = 10$  kN/m, Nutzlast  $q = 6$  kN/m
- Parabolisch geführtes Spannglied 6-7 mit 7 Litzen  $\text{Ø}0.6''$  Y1770 ( $A_p = 1050$  mm<sup>2</sup>,  $E_s = 195$  GPa)
- Pfeilhöhe  $f = 0.4$  m
- Quasi-konstante initiale Vorspannkraft  $P_0 = 0.6 \cdot A_p \cdot f_{pk} = 1115$  kN (Verluste vernachlässigt)
- Beton C40/50,  $f_{ck} = 40$  MPa,  $f_{cd} = 24$  MPa,  $f_{cm} = 48$  MPa,  $E_{cm} = 36.6$  GPa,  $A_c = 0.4$  m<sup>2</sup>

$$n_p = \frac{E_p}{E_c} = \frac{195}{36.6} = 5.33 \quad \rho_p = \frac{A_p}{A_c} = \frac{1050}{4000} = 0.26 \%$$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Tabellenrechnung für  $g + q = 16 \text{ kN/m}$ :

$x$ [m]	$M$ [kNm]	$e_p$ [mm]	$M_{dec}$ [kNm]	$c$ [mm]	$\chi$ [mrad/m]	$P$ [kN]	$e_c$ [mm]	$\varphi$ [mrad]	$w$ [mm]
0	0	0	186	1000	0	1115	0	-2.18	0
2	288	144	349	1000	0.104	1122	-113	-2.08	4.3
4	512	256	480	917	0.185	1137	-194	-1.79	8.2
6	672	336	576	764	0.271	1156	-245	-1.33	11.3
8	768	384	636	686	0.340	1172	-271	-0.71	13.4
10	800	400	656	663	0.366	1178	-279	0	14.1

$$M_{dec} = \frac{P_0 \cdot \left( e_p + \frac{h}{6} \right) \cdot \left( h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 + 12e_p^2) \right)}{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 - 2e_p h)}$$

$$c = \begin{cases} h & M \leq M_{dec} \\ \text{iterieren} & M > M_{dec} \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{M - P \cdot e_p}{E_c I_c} & M \leq M_{dec} \\ \text{iterieren} & M > M_{dec} \end{cases}$$

$$\frac{M - P \cdot e_p}{P}$$

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Tabellenrechnung für  $g + q = 16 \text{ kN/m}$ :

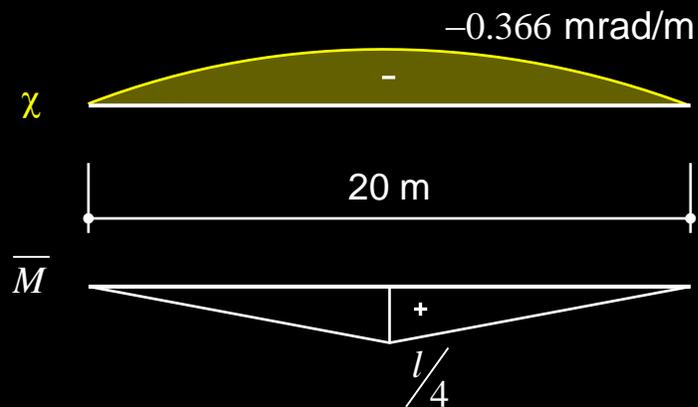
$x$ [m]	$M$ [kNm]	$e_p$ [mm]	$M_{\text{dec}}$ [kNm]	$c$ [mm]	$\chi$ [mrad/m]	$P$ [kN]	$e_c$ [mm]	$\varphi$ [mrad]	$w$ [mm]
0	0	0	186	1000	0	1115	0	-2.18	0
2	288	144	349	1000	0.104	1122	-113	-2.08	4.3
4	512	256	480	917	0.185	1137	-194	-1.79	8.2
6	672	336	576	764	0.271	1156	-245	-1.33	11.3
8	768	384	636	686	0.340	1172	-271	-0.71	13.4
10	800	400	656	663	0.366	1178	-279	0	14.1

- Die Verdrehungen  $\varphi$  und Durchbiegungen  $w$  können aus Integration der Krümmungen unter Verwendung geeigneter Randbedingungen ermittelt werden.
- Für  $x > 10 \text{ m}$  folgen die Werte aus Symmetrie (Werte entsprechen denjenigen bei  $l-x$ ).

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Vorspannen:



$$\chi_m = -\frac{P_0 \cdot f}{E_c I_c} = \frac{-1.115 \cdot 0.4}{36.6 \cdot \frac{0.4 \cdot 1^3}{12}} = -0.366 \text{ mrad/m}$$

$$w_m = \int \bar{M} \cdot \chi \, dx = -\frac{5}{12} \cdot \frac{20}{4} \cdot 0.366 \cdot 20 = -15.2 \text{ mm}$$

Dekompression in Feldmitte: 
$$M_{dec} = P_0 \cdot \left( e + \frac{h}{6} \right) \cdot \frac{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 + 12e^2)}{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 - 2eh)} = 1115 \cdot \left( 0.4 + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1^2 + 0.0026 \cdot 5.33 \cdot (1^2 + 12 \cdot 0.4^2)}{1^2 + 0.0026 \cdot 5.33 \cdot (1^2 - 2 \cdot 0.4 \cdot 1)} = 655.8 \text{ kNm}$$

$$\frac{(g + q_{dec}) \cdot l^2}{8} = M_{dec} \rightarrow q_{dec} = \frac{8 \cdot 655.8}{20^2} - 10 = 3.1 \text{ kN/m}$$

$$P_m = P_0 + \frac{M}{e \cdot \left( 1 + \frac{1 + \rho_p n_p}{\rho_p n_p} \cdot \frac{h^2}{12e^2} \right)} = 1115 + \frac{655.8}{0.4 \cdot \left( 1 + \frac{1 + 0.0026 \cdot 5.33}{0.0026 \cdot 5.33} \cdot \frac{1^2}{12 \cdot 0.4^2} \right)} = 1157 \text{ kN}$$

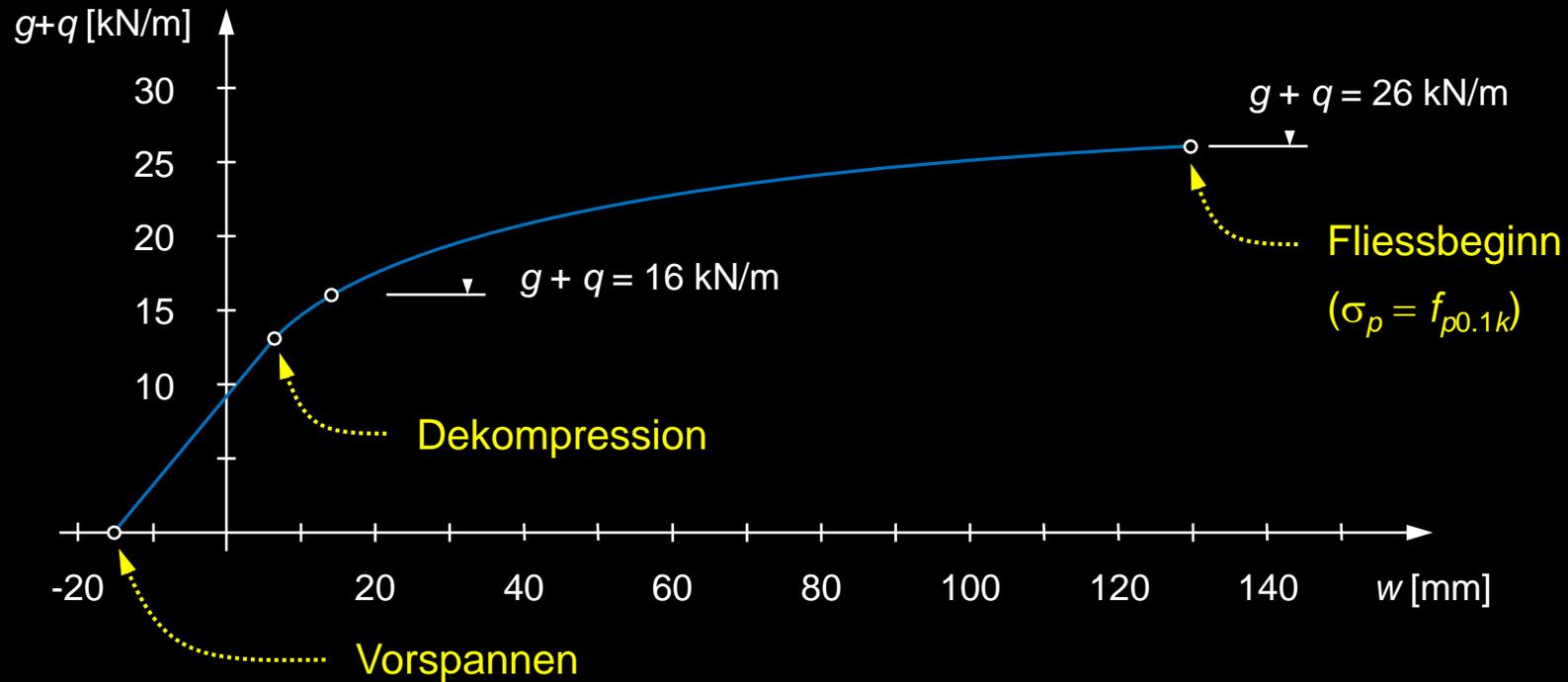
$$\chi_m = \frac{M_{dec} - P_m \cdot e}{E_c I_c} = \frac{0.6558 - 1.157 \cdot 0.4}{36.6 \cdot \frac{0.4 \cdot 1^3}{12}} = 0.158 \text{ mrad/m}$$

$$w_m = \int \bar{M} \cdot \chi \, dx = \frac{5}{12} \cdot \frac{20}{4} \cdot 0.158 \cdot 20 = 6.6 \text{ mm}$$

N.B. Veränderung von  $P$  zwischen 1115 kN (Auflager) und 1157 kN (Feldmitte) bei der Ermittlung von  $w_m$  vernachlässigt.

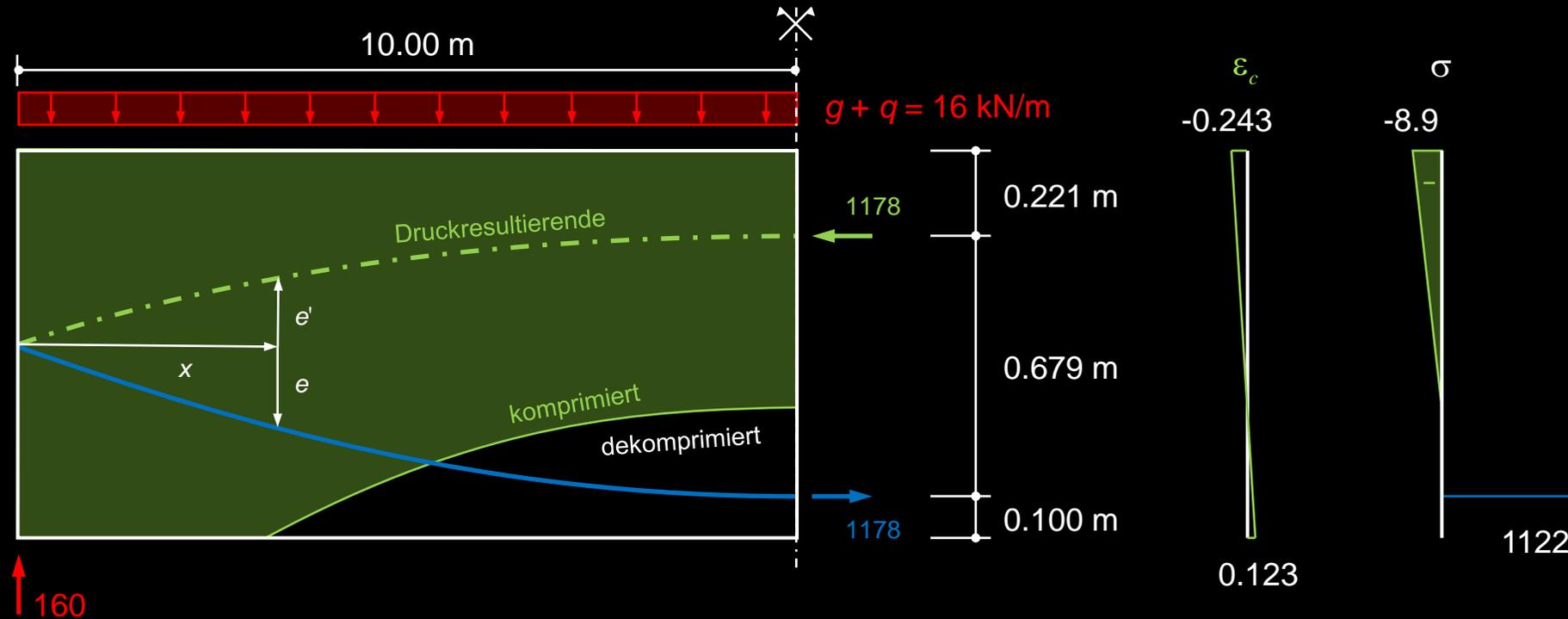
# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel



# Vorspannung – Biegetragverhalten

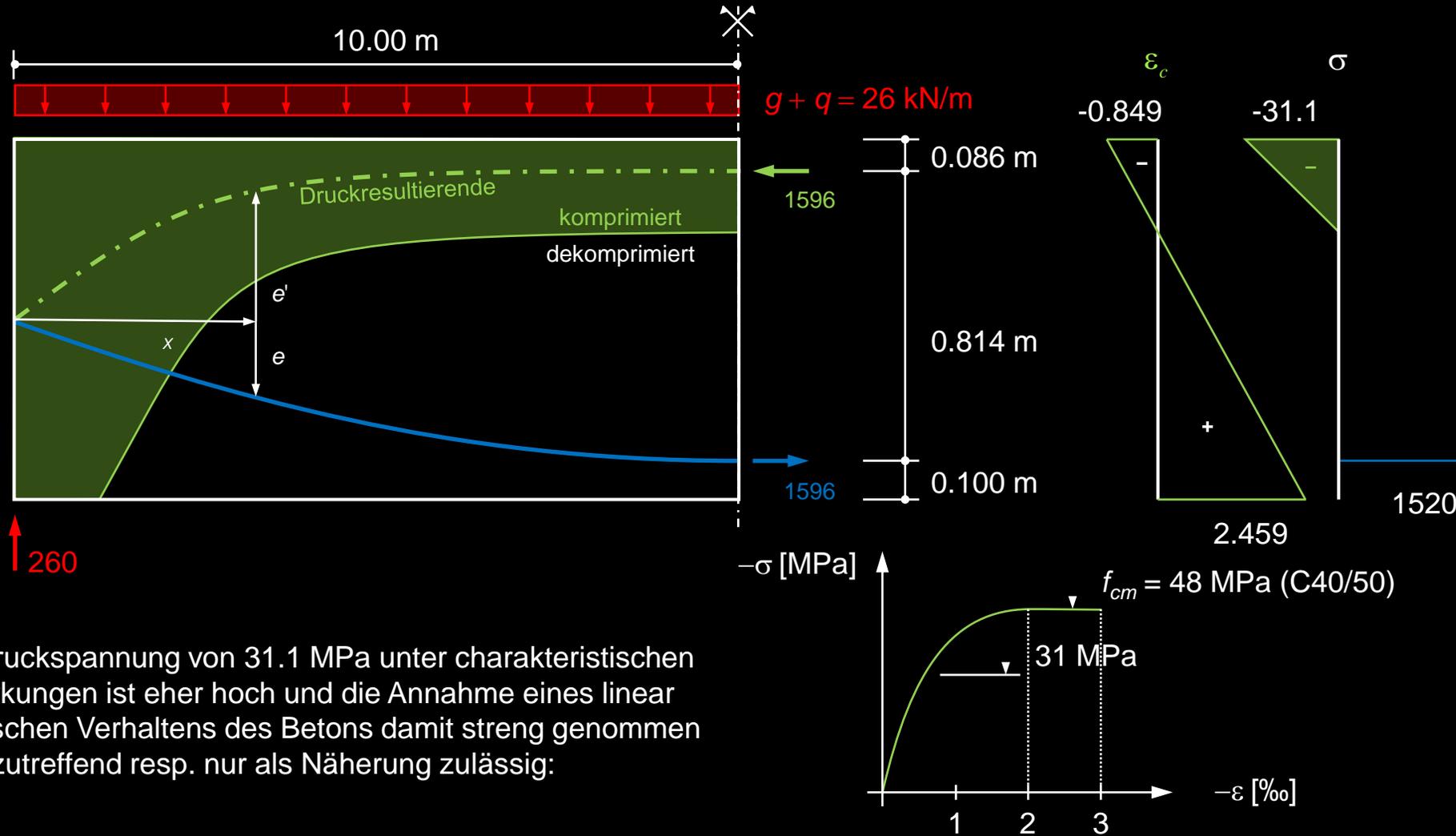
## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel



N.B.: Darstellung 5x überhöht

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

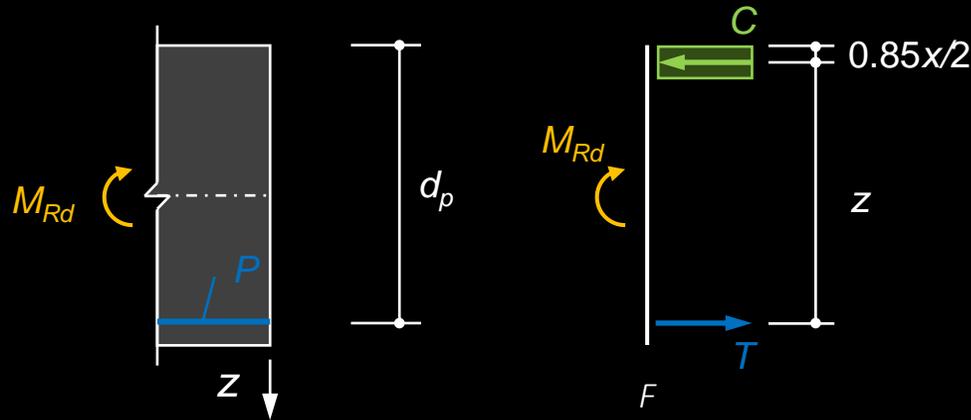


N.B.: Die Druckspannung von 31.1 MPa unter charakteristischen Einwirkungen ist eher hoch und die Annahme eines linear elastischen Verhaltens des Betons damit streng genommen nicht zutreffend resp. nur als Näherung zulässig:

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

### Biegegewiderstand



$$0.85x = \frac{A_p \cdot f_{pd}}{b \cdot f_{cd}} = \frac{1050 \cdot 1320}{400 \cdot 24} = 144.4 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} = A_p \cdot f_{pd} \cdot \left( d_p - \frac{0.85 \cdot x}{2} \right) = 1050 \cdot 1320 \cdot \left( 0.9 - \frac{0.1444}{2} \right) = 1147 \text{ kNm}$$

$$M_d = \frac{(\gamma_G \cdot g + \gamma_Q \cdot q) \cdot l^2}{8} = M_{Rd} \rightarrow q_{adm} = \left( \frac{8 \cdot M_{Rd}}{l^2} - \gamma_G \cdot g \right) \cdot \frac{1}{\gamma_Q} = \left( \frac{8 \cdot 1147}{20^2} - 1.35 \cdot 10 \right) \cdot \frac{1}{1.5} = 6.3 \text{ kN/m}$$

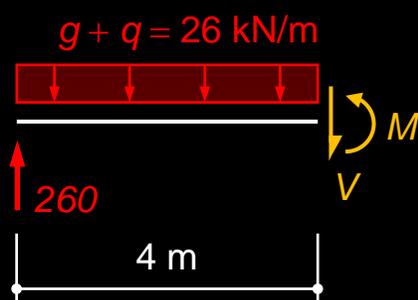
$$\left( (\gamma_G \cdot g + \gamma_Q \cdot q)_u = \frac{8 \cdot M_{Rd}}{l^2} = 22.9 \text{ kN/m} \right)$$

NB: Biegegewiderstand wurde auf Folien 102/104 überschätzt (Druckspannungen  $> f_{cd}$ , daher kleinere Druckzonenhöhe = grösserer Hebelarm der inneren Kräfte)

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Querkraftwiderstand (stellvertretend am Schnitt bei  $x = 4$  m)



$$M = 260 \cdot 4 - \frac{26 \cdot 4^2}{2} = 832 \text{ kNm}$$

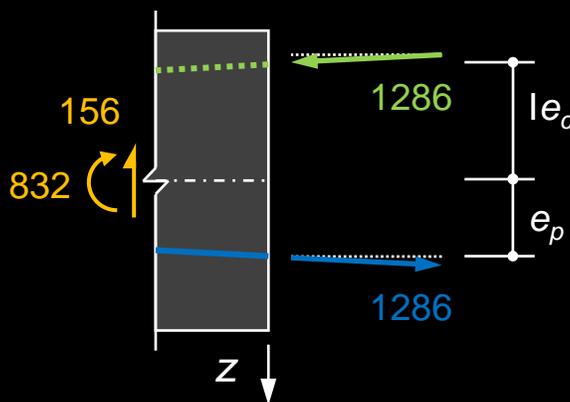
$$V = 260 - 26 \cdot 4 = 156 \text{ kN}$$

$$\frac{de_p}{dx} = \frac{4f}{l^2} \cdot (l - 2x) = \frac{4 \cdot 400}{20000^2} \cdot (20000 - 8000) = 48 \text{ mrad}$$

$$\frac{de_c}{dx} = \dots = 20.3 \text{ mrad}$$

Aus Vergleich benachbarter Querschnitte der Tabellenrechnung für 26 kN/m

$$V_c = V_d - P \cdot \left( \frac{de_p}{dx} + \frac{de_c}{dx} \right) = 156 - 61.7 - 26.1 = 68.2 \text{ kN}$$



$$M = P \cdot (e_p + e_c)$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$= \frac{dP}{dx} \cdot (e_p + e_c) + P \cdot \left( \frac{de_p}{dx} + \frac{de_c}{dx} \right)$$

Anteil Schubfeld  
zwischen  
Gurtkräften

Anteil der  
geneigten  
Gurtkräfte

$$P \cdot \frac{de_p}{dx} = 1286 \cdot 0.048 = 61.7 \text{ kN}$$

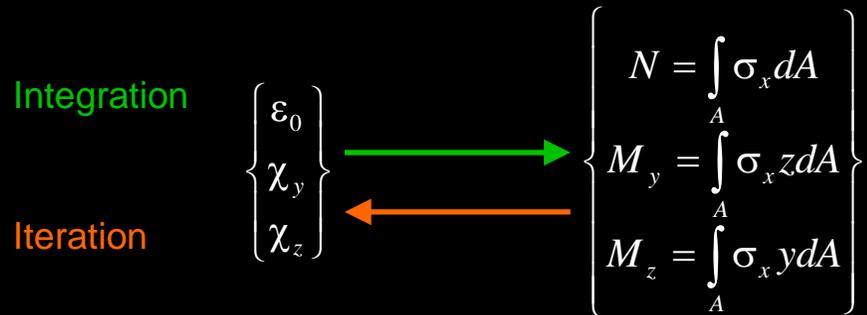
$$P \cdot \frac{de_c}{dx} = 1286 \cdot 0.0203 = 26.1 \text{ kN}$$

Ein wesentlicher Teil der Querkraft wird durch die geneigten Zug- resp. Druckgurtkräfte abgetragen!

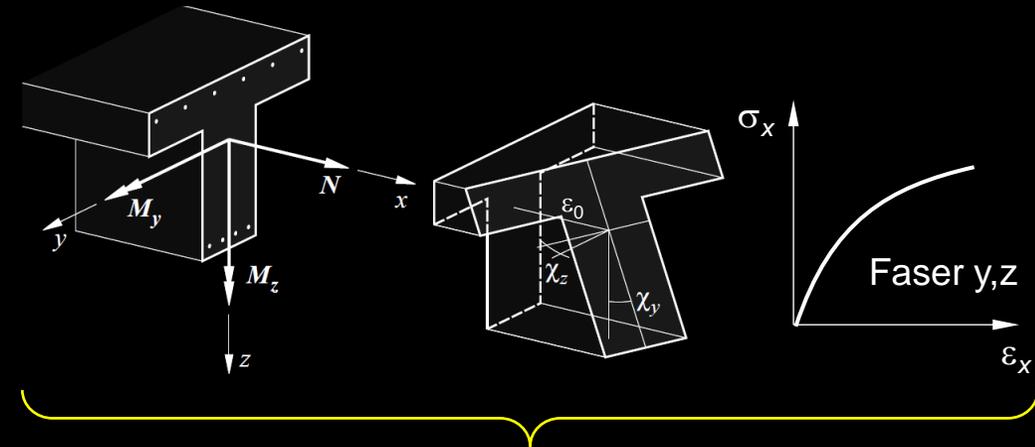
# Allgemeine Querschnitte und Beanspruchungen (SB I)

## Allgemeines

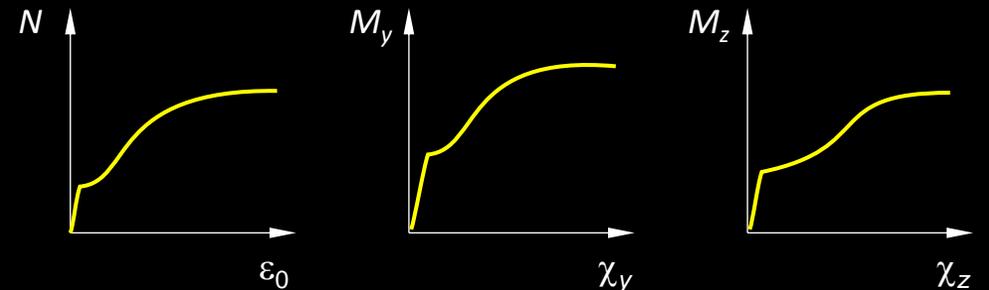
- Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ermöglicht die Ermittlung des Tragverhaltens von Stäben bei gegebenem Baustoffverhalten (Spannungs-Dehnungsdiagramme)
- Schnittgrößen ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) folgen aus den Verformungsgrößen ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) einfach durch Integration, umgekehrt ist im Allgemeinen eine Iteration erforderlich:



- Statische Berechnung: ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) meist auf Hauptachsen Beton-QS bezogen, bei Berücksichtigung ideeller Querschnittswerte beachten!



Ermittlung des Tragverhaltens für beliebige Querschnittsgeometrie / Baustoffe möglich:



Normalkraft-Verlängerung

Momenten-Krümmung y

Momenten-Krümmung z

NB: Allgemein ist  $\chi_y(N, M_z) \neq 0$ ,  $\chi_z(N, M_y) \neq 0$  und  $\varepsilon_0(M_y, M_z) \neq 0$  (auch für symmetrische QS)

# Allgemeine Querschnitte und Beanspruchungen

## Vorgespannte Querschnitte

- Behandlung analog, Vordehnung des Spannstahls berücksichtigen

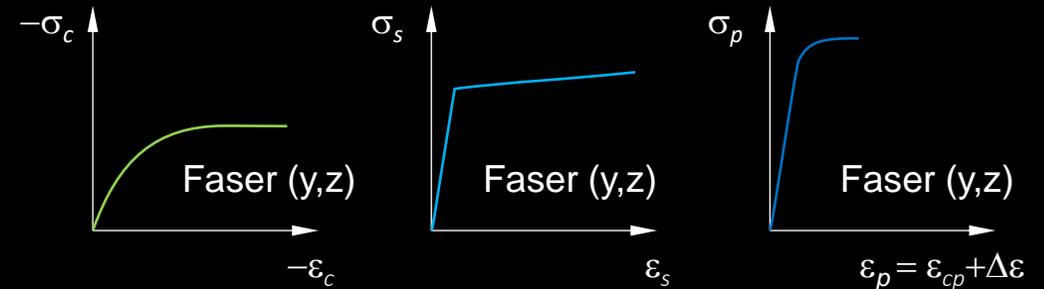
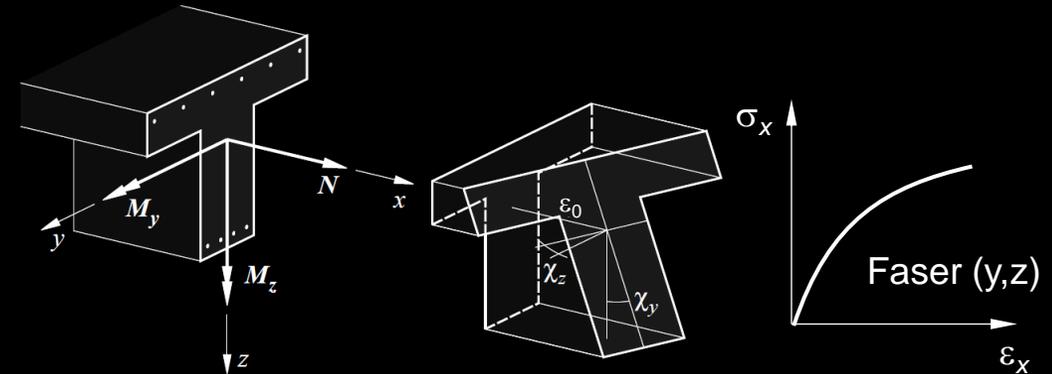
$$\varepsilon_x(y, z) = \varepsilon_0 + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y$$

$$\varepsilon_c(y, z) = \varepsilon_x(y, z)$$

$$\varepsilon_s(y, z) = \varepsilon_x(y, z)$$

$$\varepsilon_p(y, z) = \varepsilon_x(y, z) + \Delta\varepsilon$$

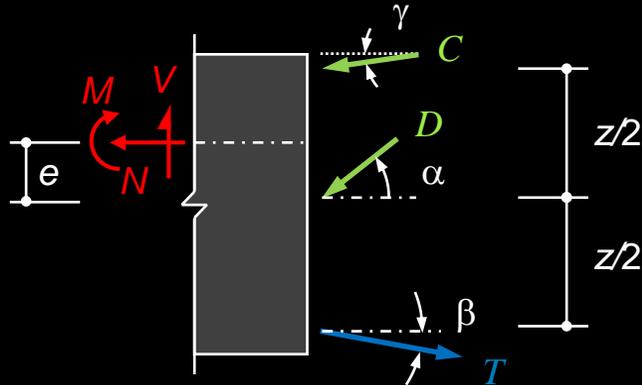
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Integration}} \\ \xleftarrow{\text{Iteration}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right\}$$



Vordehnung des Spannstahls ...

# Vorspannung – Querkraft

## Allgemeines Lösungsverfahren (dual section analysis)



Annahme: geneigtes Druckfeld zwischen den resultierenden Druck- und Zugkräften  $T$  und  $C$

$$\Sigma F_H : N = T \cdot \cos \beta - D \cdot \cos \alpha - C \cdot \cos \gamma$$

$$\Sigma F_V : V = T \cdot \sin \beta + D \cdot \sin \alpha + C \cdot \sin \gamma$$

$$\rightarrow N + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha = T \cdot \cos \beta - C \cdot \cos \gamma$$

$$\Sigma M : M = (T \cdot \cos \beta + C \cdot \cos \gamma) \cdot \frac{z}{2} + N \cdot e$$

Bei gegebenen Schnittgrößen ( $M, V, N$ ) und Querschnitseigenschaften (Geometrie, Bewehrung, Vordehnungen,  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme) erfordert die Bestimmung der übrigen Größen ( $T, \beta, C, \gamma, z, e$ ) bei angenommenem  $\alpha$  ein iteratives Vorgehen. Aus einer Querschnittsanalyse für das Moment  $M + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha \cdot e$  (auf Schwerachse bezogen) und die Normalkraft  $N + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha$  mit zunächst geschätzten Werten  $e$  sowie  $T \cdot \sin \beta + C \cdot \sin \gamma$  folgen die Verformungsgrößen  $\varepsilon_0$  und  $\chi_y$  und damit die Kräfte  $C \cdot \cos \gamma, T \cdot \cos \beta$  sowie die geometrischen Größen  $e, z$ .

Aus der Betrachtung benachbarter Querschnitte resultieren ferner die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$ , womit die Analyse mit verbesserten Werten  $e$  sowie  $T \cdot \sin \beta + C \cdot \sin \gamma$  wiederholt werden kann, bis die angestrebte Genauigkeit erreicht ist.

Erforderlicher Widerstand der Bügel:

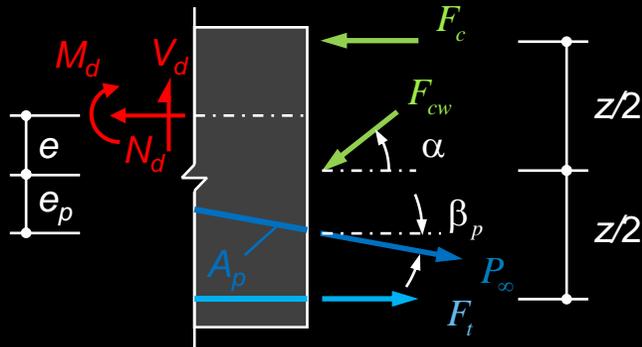
$$V_{Rd,s,erf} = \frac{V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma}{z \cdot \cot \alpha}$$

Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

# Vorspannung – Querkraft

Vereinfachungen gemäss SIA 262 (siehe Tragsicherheit, Folie 19-20) :



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den parallelen Druck- und Zugkräften  $F_c$  bzw.  $F_t$  wird eine geneigte Spannkraft  $P_\infty$  betrachtet. Die Druckkraft wird auf der sicheren Seite liegend als horizontal wirkend angenommen.

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um **Terme infolge Vorspannung**.

$$\Sigma F_V : F_{cw} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha}$$

$$\Sigma M_T : F_c = \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

$$\Sigma M_C : F_t = \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

→ Erf. Widerstand der Bügel:

$$V_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha}$$

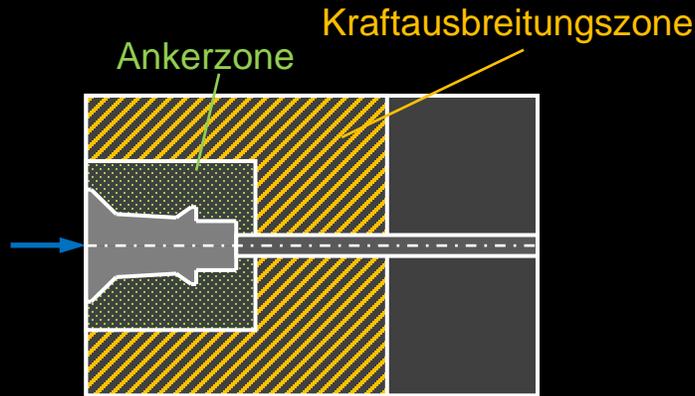
→ Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$b_{w,nom} = b_w - k_H \cdot \sum \varnothing_H$$

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Unterscheidung Ankerzone – Kraftausbreitzungszone



Verankerungsbereiche von Spanngliedern werden in **Ankerzonen** und **Kraftausbreitzungszonen** unterteilt.

Die konstruktive Durchbildung der **Ankerzonen** ist Teil des Spannsystems und in der Verantwortung der Vorspannfirma (Spiralbewehrung). Sie ist für übliche Abstände und Spannglieder in der technischen Dokumentation (Zulassung) standardisiert und darf nur in Ausnahmefällen und in Absprache mit der Vorspannfirma modifiziert werden.

**Kraftausbreitzungszonen** sind für die Einleitung der Spannkraft in das Tragwerk zu bemessen und gehören in den Verantwortungsbereich des Projektverfassers. An ihre Ausbildung stellt jedes Projekt andere Anforderungen, weshalb keine standardisierte Lösungen angegeben werden können.

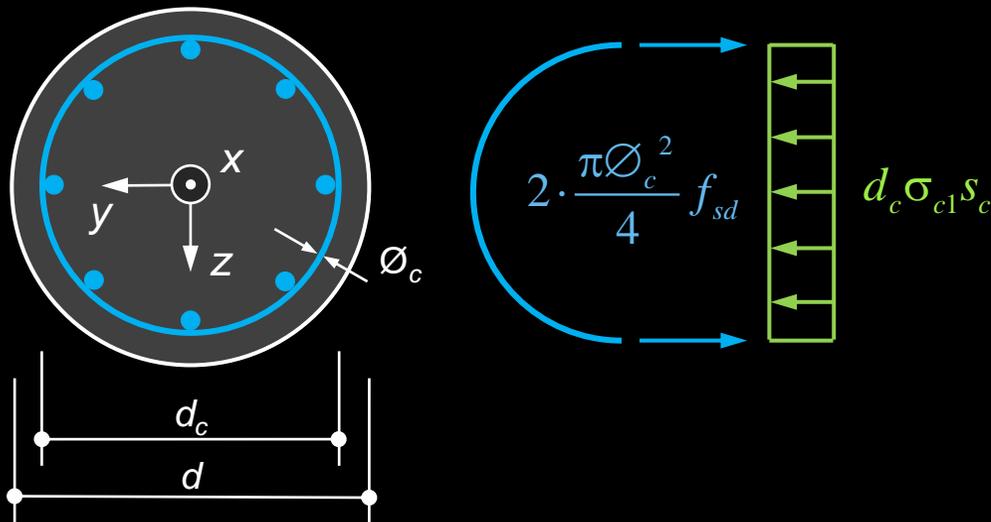
Einer konsistenten Abgrenzung zwischen Ankerzone und Kraftausbreitzungszone und entsprechenden Absprachen zwischen Vorspannfirma und Projektverfasser ist spezielle Beachtung zu schenken.

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Ankerzone

Zur Ankerzone gehören der Ankerkopf, die Ankerplatte sowie der Bereich direkt hinter der Ankerplatte. Im Ankerkopf werden die Vorspanndrähte oder -litzen verkeilt. Die Ankerplatte verteilt die Kräfte aus dem Ankerkopf gleichmässig auf den dahinterliegenden Beton, wozu eine ausreichende Plattenstärke erforderlich ist (einige cm!).

Im Beton hinter der Ankerplatte entstehen Druckspannungen, die i.d.R. über der einachsigen Betondruckfestigkeit liegen (bei Verankerungen in C30/37 beispielsweise ca. 40 MPa). Durch die auf Zug aktivierte Spiralbewehrung ergibt sich im Beton ein günstiger dreiachsiger Druckspannungszustand, wodurch die Festigkeit erhöht werden kann (siehe Stahlbeton I, Umschnürung).



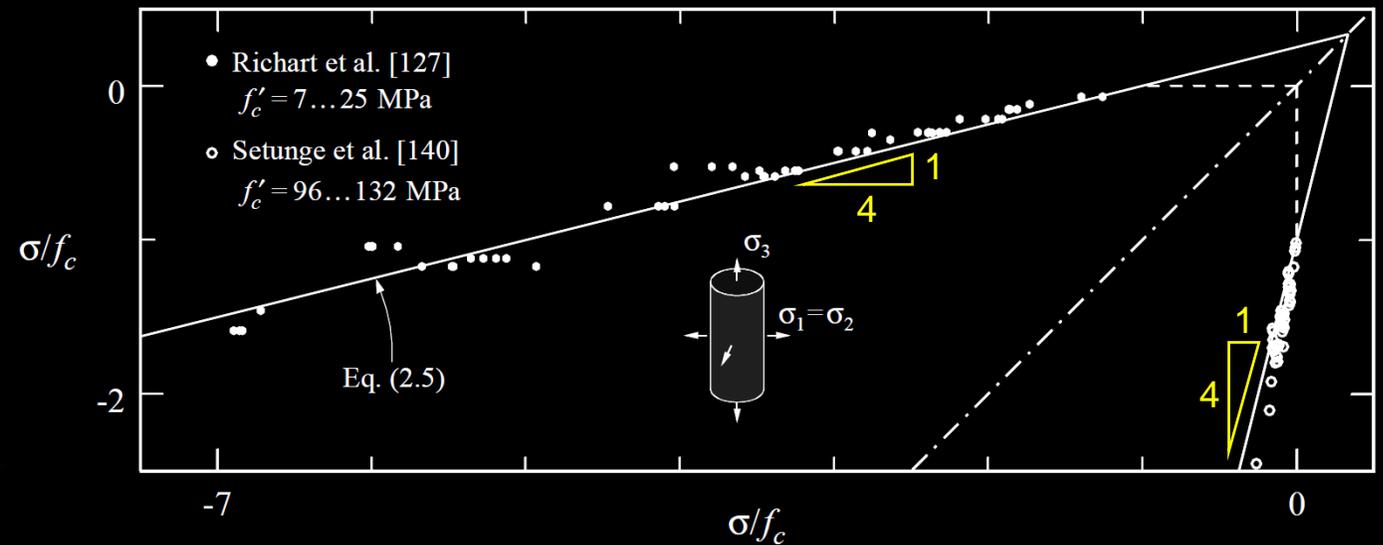
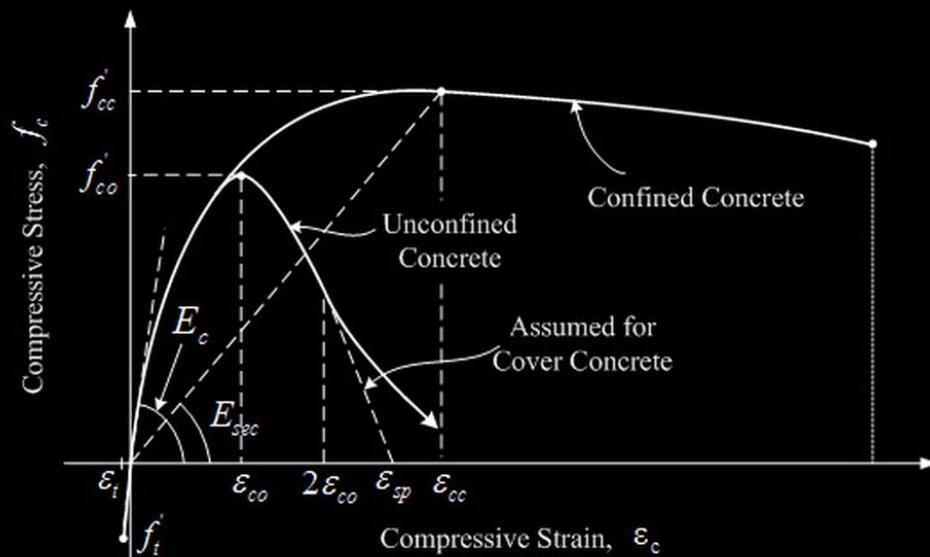
$$\sigma_{cy} = \sigma_{cz} = \sigma_{c1} = -\frac{\pi \varnothing_c^2 f_{sd}}{2 d_c s_c}$$

$$f_{cd3} = f_{cd} + 4 \cdot \sigma_{c1} = f_{cd} + \frac{2 \pi \varnothing_c^2 f_{sd}}{d_c s_c}$$



# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

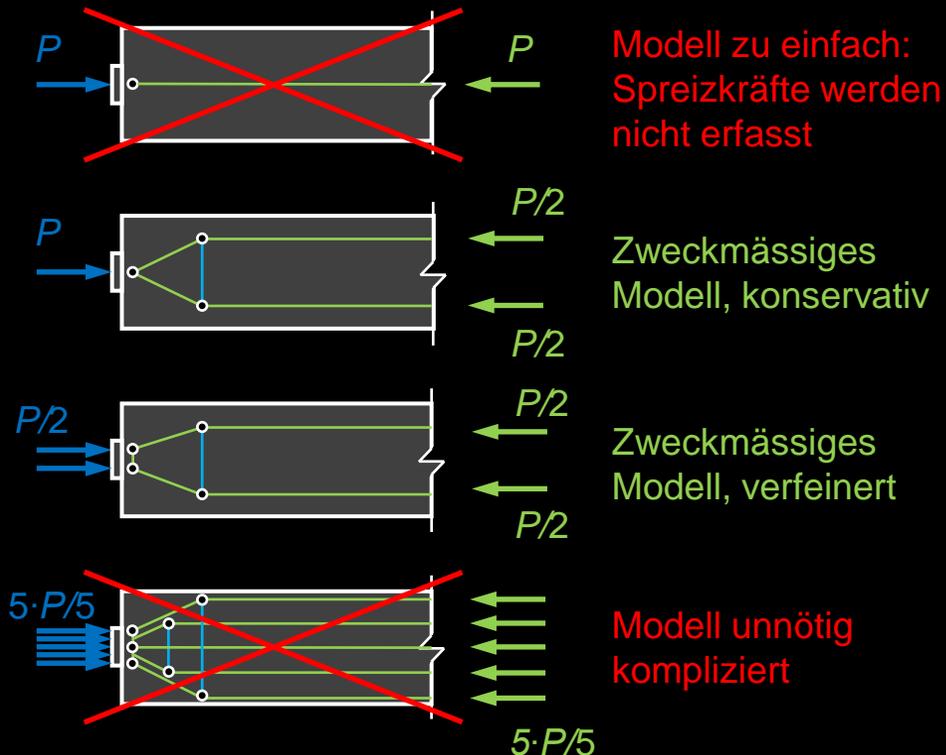
- Druckfestigkeit wird durch dreiachsige Beanspruchung stark erhöht
  - Näherungsweise gilt  $f_{c3} \cong f_c - 4\sigma_{c1}$  (mit  $\sigma_{c3} \leq \sigma_{c1} = \sigma_{c2}$ )
  - Querbewehrung wirkt wie Querdruck (wirksamer als Längsbewehrung !)
- (Vorzeichen hier: Druckfestigkeit positiv, Druckspannung negativ)



# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Kraftausbreitungszone: Spreizkraftbewehrung

- Die konzentrierte Ankerkraft muss auf einer gewissen Länge über den ganzen Querschnitt ausgebreitet werden.
- Die Länge ist in Übereinstimmung mit dem Prinzip von St. Venant näherungsweise gleich gross wie die Tiefe resp. die Höhe des Bauteils.

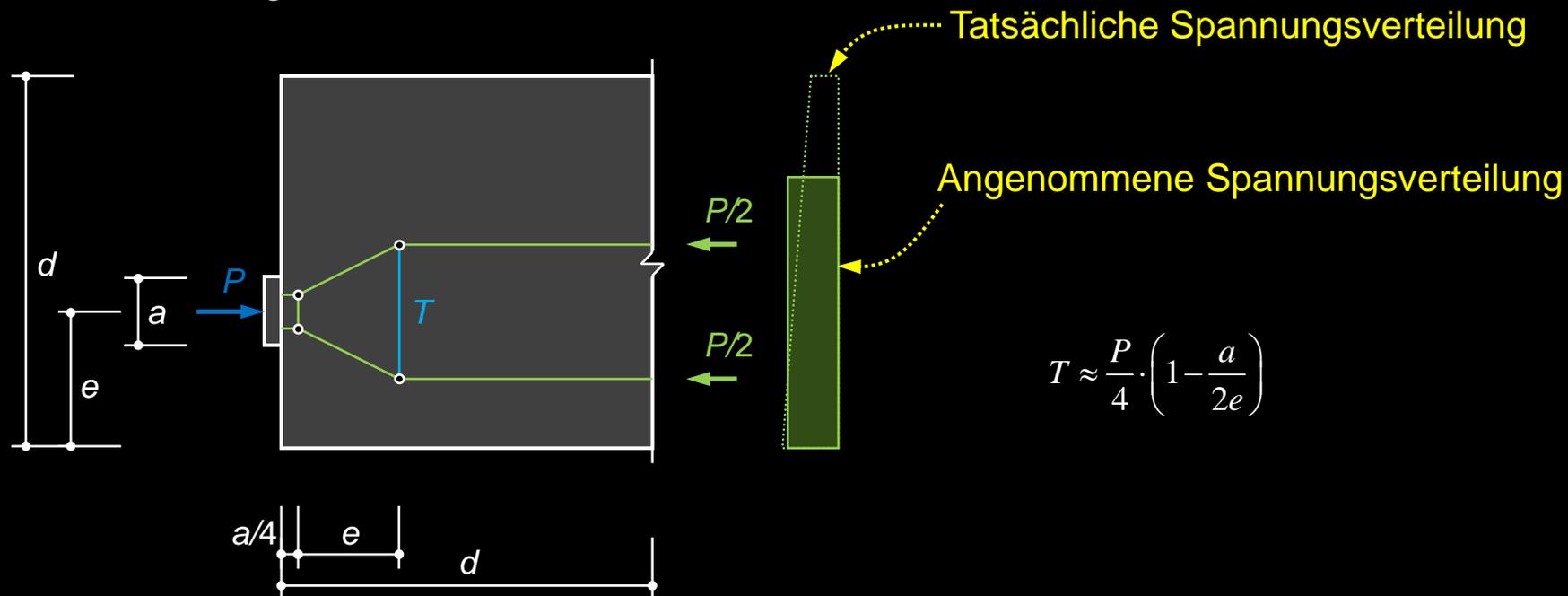


- Die Ausbreitung der Kraft bringt – ähnlich wie beim Anschluss des Steges an die Platte bei Plattenbalken – Zugkräfte senkrecht zur Spanngliedachse mit sich.
- Fachwerkmodelle eignen sich gut für die näherungsweise Ermittlung des Kraftflusses in den Verankerungsbereichen.
- Das Fachwerkmodell soll stets so einfach wie möglich gewählt werden und dennoch die wichtigsten Kräfte erfassen.
- Die Neigung der Druckstreben, resp. die Grösse der Querszugkräfte, wird i.A. anhand von Erfahrungswerten (kalibriert an Vergleichsrechnungen für elastisches Verhalten) gewählt.

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Kraftausbreitzungszone: Spreizkraftbewehrung

- Üblicherweise wird die Ankerkraft durch zwei statisch äquivalente Einzelkräfte ersetzt. Wenn die Ankerplatte im Vergleich zur Abmessung des Bauteils klein ist, genügt eine statisch äquivalente Einzelkraft.
- Am gegenüberliegenden Ende der Kraftausbreitzungszone sollen die (Bernoulli-)Spannungen mit mindestens zwei statisch äquivalenten Kräften ersetzt werden.
- Der Winkel zwischen der Betondruckdiagonalen und der Achse des Spannglieds variiert je nach Abmessung der Ankerplatte. Er ist i.d.R. nicht grösser als  $\tan\alpha = 0.5$ .



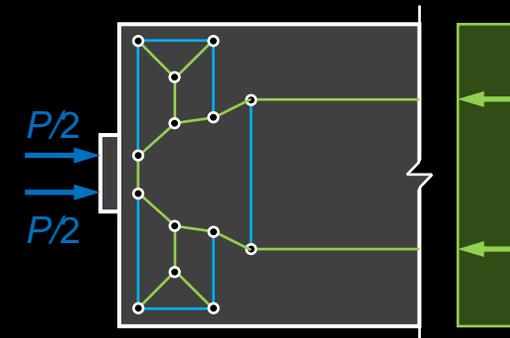
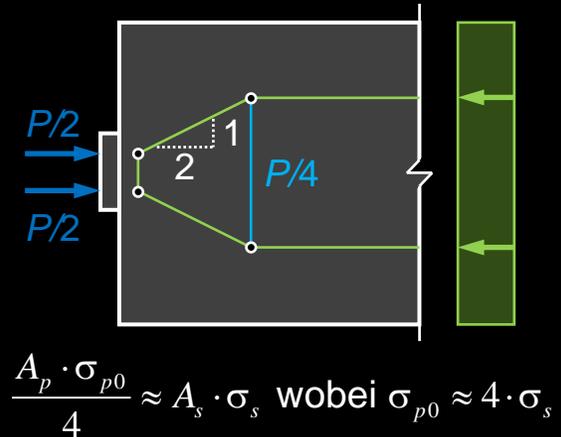
# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Kraftausbreitungszone: Spreizkraftbewehrung

Um die Rissbreiten im Gebrauchszustand zu begrenzen, wird empfohlen, die Spannungen in der Spreizkraftbewehrung auf etwa 250 MPa zu beschränken. Oft resultiert damit eine Querschnittsfläche der Spreizkraftbewehrung in der gleichen Größenordnung wie die Querschnittsfläche des verankerten Spannglieds.

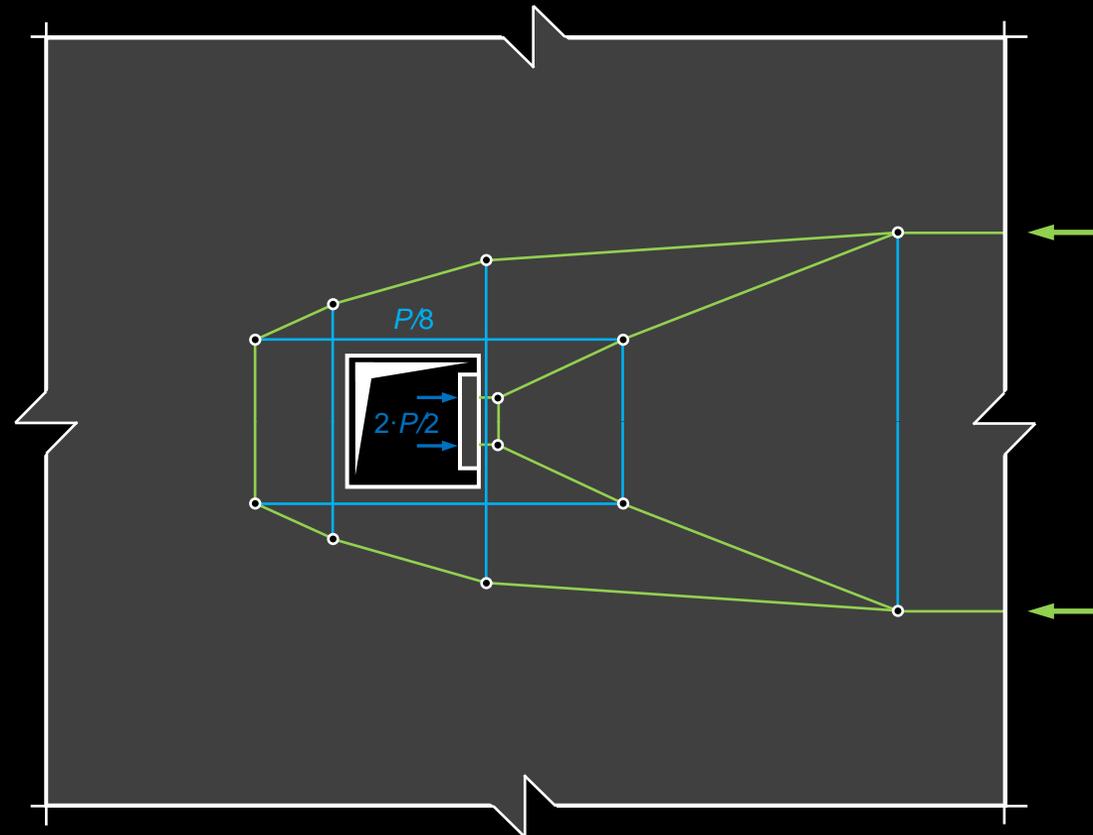
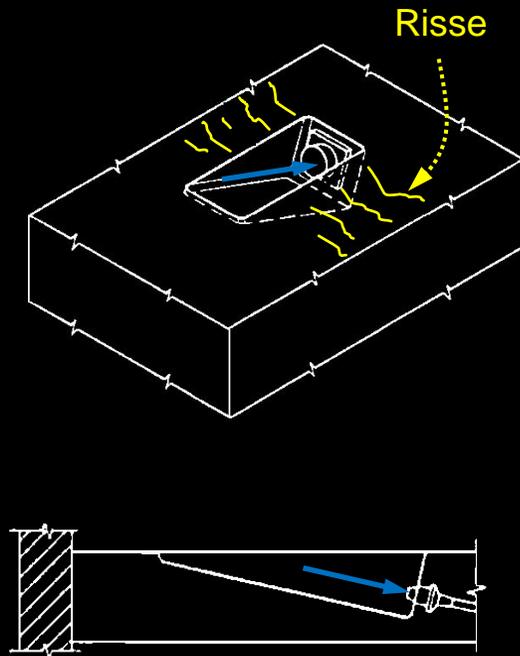
Der räumlichen Kraftausbreitung ist spezielle Beachtung zu schenken (räumliche Fachwerkmodelle!)

Neben den primären Spreizkräften (für Gleichgewicht erforderlich) entstehen in «toten Ecken» des Betons senkrecht zu den Drucktrajektorien verträglichkeitsbedingte Zugspannungen. Um ein lokales Abplatzen des Betons zu verhindern, sind solche Bereiche ausreichend zu bewehren. I.d.R. genügt eine auf 2% der Vorspannkraft bemessene Bewehrung (konstruktiv, Fachwerkmodell nur zur Illustration dargestellt).



# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Abspannstellen – Spannischen

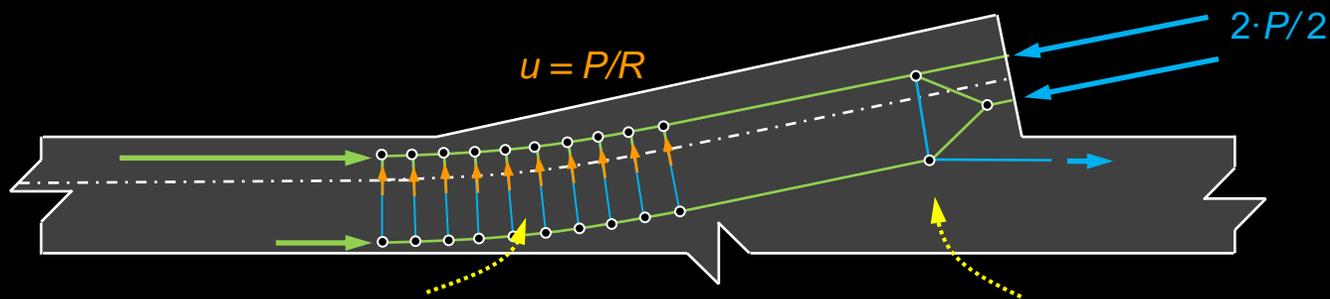


# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Lisenen (anchorage blisters)

Die Bemessung der Bewehrung und die konstruktive Durchbildung (Platzprobleme Bewehrung) ist bei Lisenen nicht trivial. Grundsätzlich ist die Lisenen ein gekrümmtes, vorgespanntes Element, in welchem die «Druckbanane» mit der Spannkraft in jedem Querschnitt im Gleichgewicht steht. Da sich die Druckkraft im Beton ausbreitet, entstehen jedoch Quersugkräfte, die mit einer Bewehrung abgedeckt werden müssen.

Die Betrachtung mit einem Fachwerkmodell zeigt, dass eine Spreizbewehrung erforderlich ist, und dass ein Teil der Umlenkkräfte (zugbeanspruchter Teil der Streben, in Zeichnung unten) zurückgebunden werden muss. In der Praxis empfiehlt es sich, die gesamten Umlenkkräfte  $u = P/R$  mit einer Querbewehrung abzudecken.



Umlenkkräfte zurückbinden

[nach: VSL, Detailing for Posttensioning]

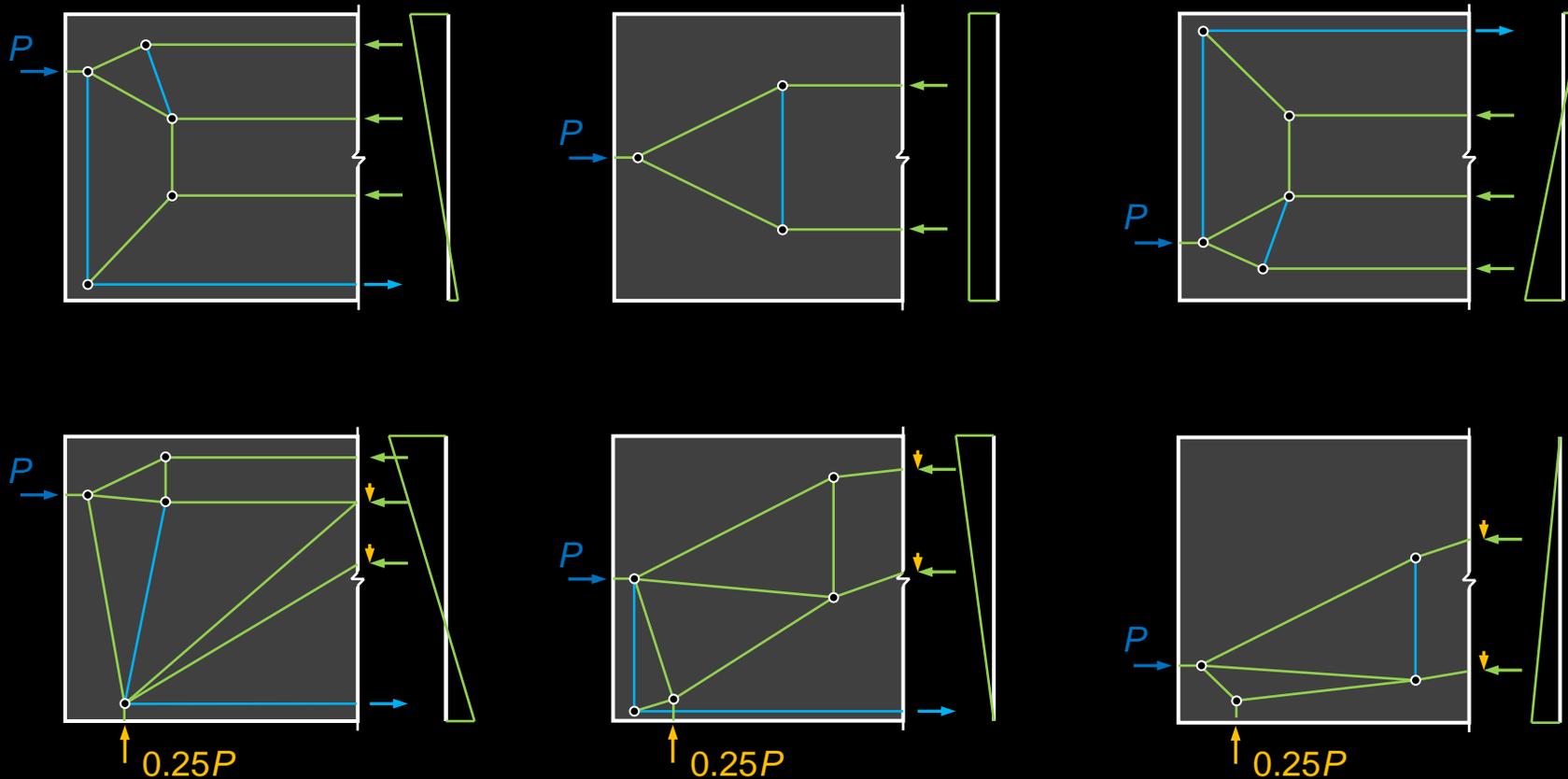
Spreizbewehrung über ganze Breite resp. Dicke einlegen



# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Kraftausbreitzungszone: Spreizkraftbewehrung

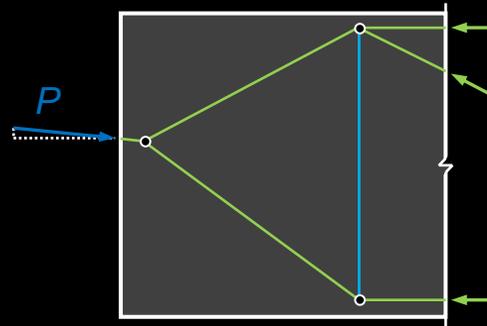
Lagerkräfte haben einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Spreizkräfte.



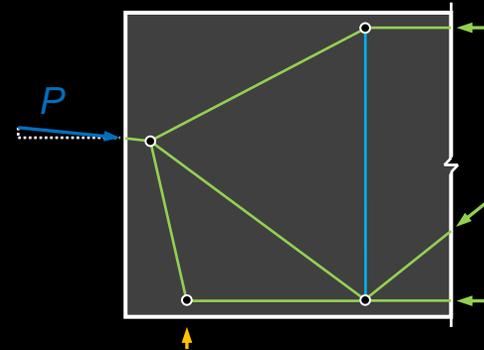
# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Fachwerkmodelle von Trägerstegen

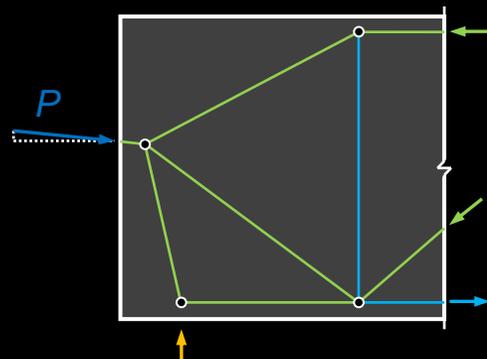
Typische Fachwerkmodelle abhängig von der Belastung



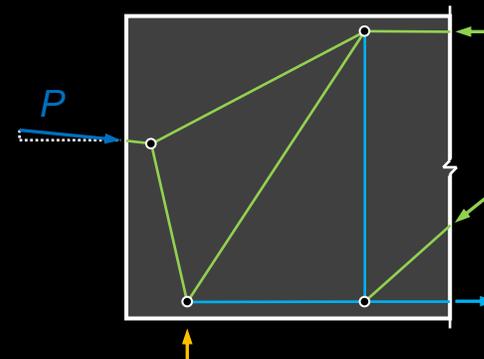
a) Nur Vorspannung



b) Vorspannung +  $0.25P$



c) Vorspannung +  $0.46P$



d) Vorspannung +  $0.66P$

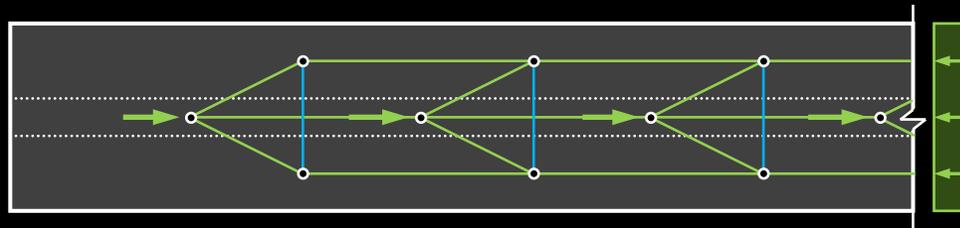
[nach: VSL, Detailing for Posttensioning]

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

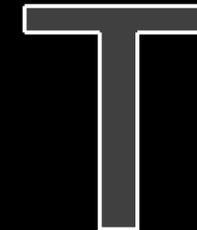
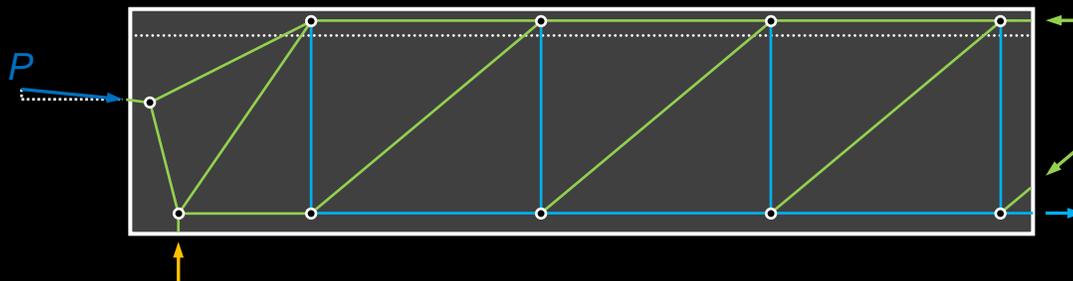
## Fachwerkmodelle von Trägerstegen

Bei profilierten Trägern muss die Vorspannkraft in den Flansch ausgebreitet werden

Draufsicht Flansch:



Ansicht Steg:



# Vorspannung ohne Verbund

## Unterschied Vorspannung ohne Verbund – Vorspannung mit Verbund

Eine Vorspannung ohne Verbund (inkl. Spezialfall externe Vorspannung) kann grundsätzlich analog behandelt werden wie eine Vorspannung mit Verbund.

Ein wesentlicher Unterschied liegt jedoch darin, dass bei einer Vorspannung ohne Verbund die Dehnungen des Spannstahls  $\varepsilon_p$  nicht mit den Dehnungen des Betons  $\varepsilon_{cp}$  im gleichen Querschnitt verknüpft sind, sondern **von der Geometrie und dem Verformungszustand des gesamten Systems** abhängen.

Vernachlässigt man die Reibungskräfte, ergibt sich der Spannkraftzuwachs eines Spanngliedes mit der ursprünglichen Länge  $l_0$  aus der Verlängerung  $\Delta l_0$  des Spanngliedes zwischen den Verankerungen:

*Vorspannung mit Verbund:*

$\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} + (\varepsilon_{cp} - \varepsilon_{cp0})$  mit  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0}$   
(in jedem Querschnitt  $\Delta\varepsilon$  bei Injektion «eingefroren»)

*Vorspannung ohne Verbund:*

$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta l_0 / l_0$   
(über ganze Spanngliedlänge identisch)

Grundsätzlich kann die Spanngliedverlängerung aus der Integration der zwischen den Verankerungen auftretenden Dehnungen des Betons im Schwerpunkt des Spanngliedes ermittelt werden. Dies ist aufwändig (iterativ), da die Betondehnungen vom zunächst unbekanntem Spannkraftzuwachs abhängen.

Alternativ kann man von einem nominellen Bruchzustand ausgehen, der durch das Erreichen einer maximalen Durchbiegung definiert wird (SIA 262:  $w_R = L / 40$ ). Die Spanngliedverlängerung kann dann aus geometrischen Überlegungen relativ einfach bestimmt werden.

Für eine dreieckförmige Spanngliedführung resultiert beispielsweise  
( $e_m$  = Exzentrizität des Spannglieds in Feldmitte)

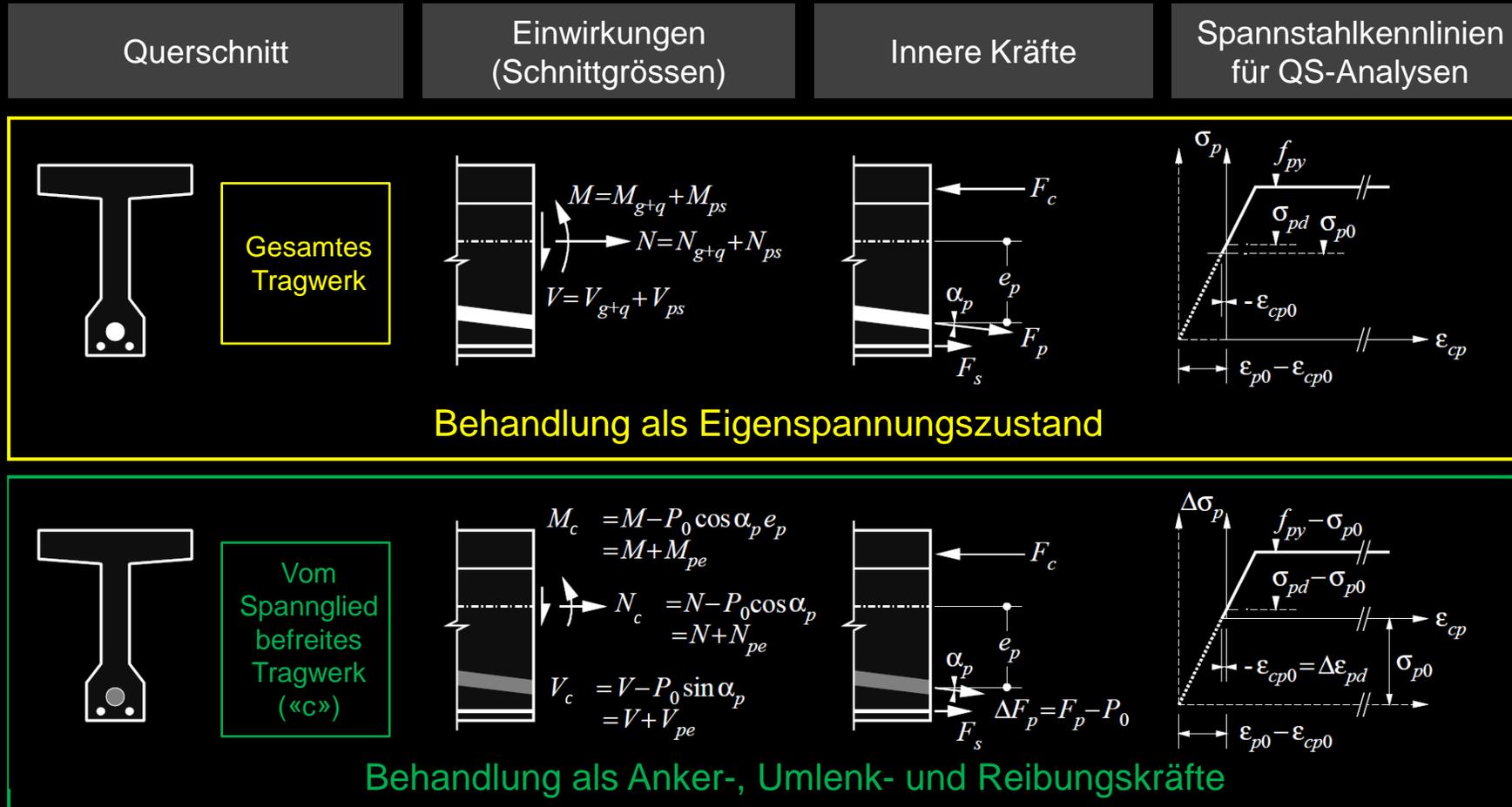
$$\frac{\Delta l_0}{l_0} \approx 4 \frac{e_m w_R}{l_0^2}$$

# Vorspannung – Zusammenfassung

1. Die vorliegende Vorlesung beschränkt sich auf interne Kabelvorspannung mit Verbund unter Verwendung von Litzenspanngliedern. Für Draht- und Stabspannglieder sowie im Spannbett hergestellte Bauteile können die Überlegungen ohne weiteres übertragen werden. Für interne Vorspannung ohne Verbund sowie für extern vorgespannte Bauteile sind Verformungsbetrachtungen am Gesamtsystem erforderlich, wenn eine Spannkraft  $> P_{\infty}$  in Rechnung gestellt werden soll.
2. Ausser den einschlägigen Normen (SIA 262 und SIA 262/1) sind die Angaben in der «Technischen Dokumentation» des jeweiligen Spannsystems zu beachten.
3. Beim Vorspannen werden durch das Spannen von Spannstahl kontrolliert Kräfte auf ein Tragwerk oder Bauteil aufgebracht.
4. Zwischen dem Spannstahl und dem vom Spannstahl befreiten Tragwerk bzw. Bauteil wirken Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte.
5. Das Vorspannen erzeugt im Tragwerk einen Eigenspannungszustand und verursacht Tragwerksverformungen.
6. Bei statisch unbestimmten Systemen entstehen im Allgemeinen Zwangsschnittgrössen aus behinderter Verformung.
7. Die Vorspannung kann rechnerisch als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte (die auf das vom Spannglied befreite Tragwerk wirken), oder aber als Eigenspannungszustand (der am Gesamtsystem inkl. Spannglied wirkt) behandelt werden.

# Vorspannung – Zusammenfassung

8. Die Behandlung als Eigenspannungszustand (der am Gesamtsystem inkl. Spannglied wirkt) oder als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte (die auf das vom Spannglied befreite Tragwerk wirken) führt zum gleichen Resultat. Je nach Fragestellung ist die eine oder andere Vorgehensweise besser geeignet.



# Vorspannung – Zusammenfassung

9. Bei Spanngliedern mit Verbund bleibt die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp}$  nach dem Vorspannen und Injizieren konstant.
10. Infolge der Reibung im Hüllrohr ändert sich die Spannkraft entlang des Spannglieds. Bei der Berechnung des Spannkraftverlaufs sowie des Spannwegs ist zusätzlich der Verankerungsschlupf zu berücksichtigen.
11. Kriechen und Schwinden des Betons sowie Relaxation des Spannstahls führen zu zeitabhängigen Spannkraftverlusten. Näherungsweise können diese zu 15% der initialen Vorspannung angenommen werden.
12. Mit dem Vorspannkonzent werden die Kabelgrösse, das Kabelprofil und der Spannvorgang festgelegt. Dazu sind gute Kenntnisse der Komponenten des gewählten Spannsystems erforderlich.
13. Aufgrund der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte kann das Tragverhalten beliebiger Querschnitte unter Biegung und Normalkraft analog wie für Stahlbeton diskutiert werden, wobei die Vordehnungen  $\Delta\varepsilon$  des Spannstahls zu berücksichtigen sind. Die Ermittlung der zu einem Satz von Schnittgrössen gehörigen Verformungsgrössen erfordert im Allgemeinen ein iteratives Vorgehen.
14. Durch Betrachtung benachbarter Querschnitte lässt sich über das Längsgleichgewicht auf den Schubspannungsverlauf über den Trägerquerschnitt resp. die Neigung der infolge von Biegung und Normalkraft resultierenden Druckkraft schliessen.

# Vorspannung – Zusammenfassung

15. Bei vorgespannten Trägern wird oft ein wesentlicher Anteil der Querkraft über die zur Stabachse geneigten resultierenden Druck- und Zugkräfte aus Biegung und Normalkraft abgetragen. In der Regel wird bei der Bemessung die günstige Wirkung der geneigten resultierenden Druckkraft vernachlässigt.
16. Bei der konstruktiven Durchbildung ist die Aufteilung der Verantwortlichkeiten zwischen Systemlieferant (Ankerzone) und Projektverfasser (Kraftausbreitzzone) zu beachten. Für die Bemessung der Spreizkraftbewehrung eignen sich Fachwerkmodelle, wobei die Spannungen in der Spreizkraftbewehrung unter Gebrauchslasten auf etwa 250 MPa beschränkt werden sollten.
17. Der Projektverfasser definiert den Spannvorgang (Reihenfolge der Vorspannung, Spannstufen etc.) und ermittelt vorgängig den erwarteten Spannweg. Bei unzulässig grossen Abweichungen vom erwarteten Spannweg ist der Projektverfasser zu informieren, und das Hüllrohr darf erst nach Klärung der Ursachen injiziert werden.
18. Eine qualitativ einwandfreie Injektion der Spannglieder ist für die Gewährleistung der Dauerhaftigkeit absolut zentral. Der Injektionsvorgang ist ebenso sorgfältig zu planen und durchzuführen wie der Spannvorgang.
19. Im Normalfall werden Stahlhüllrohre eingesetzt (Kategorie a). Bei erhöhten Anforderungen an die Dauerhaftigkeit und bei Ermüdungsbeanspruchung sind Kunststoffhüllrohre vorzusehen (Kategorie b). Bei höchsten Anforderungen an die Dauerhaftigkeit oder bei Kriechstromgefährdung sind die Kabel elektrisch zu isolieren (Kategorie c).