

Stahlbeton I+II – Sessionsprüfung

(101-0126-01J)

Beispiel-Prüfung 5

Musterlösung

Name, Vorname: _____

Studierenden-Nr.: _____

Bemerkungen

1. Sofern nichts anderes angegeben ist, wird von Beton C30/37 ($D_{max} = 32$ mm, $E_c = 33.6$ GPa), Betonstahl B500B und einer Bewehrungsüberdeckung $c_{nom} = 35$ mm ausgegangen.
2. Der Abbiegeradius der Bügel und die Rippen der Bewehrungsstäbe dürfen für die Ermittlung der statisch wirksamen Höhe d vernachlässigt werden.
3. Für jede Aufgabe soll ein separater Papierbogen A3 verwendet werden. Notizen auf der Aufgabenstellung werden nicht berücksichtigt.
4. Sämtliche Unterlagen (Aufgabenstellung, Lösungsblätter) sind nach Prüfungsende mit Namen zu versehen und abzugeben.

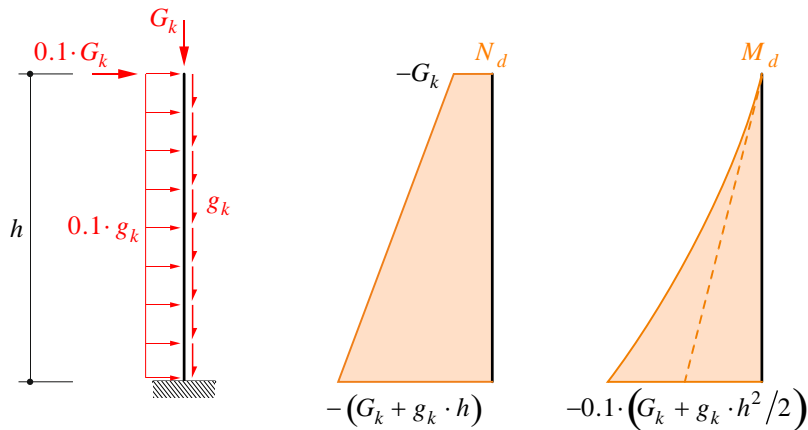
Hilftabellen

\emptyset [mm]	8	10	12	14	16	18	20	22	26	30	
A_s [mm ²]	50	79	113	154	201	254	314	380	531	707	
a_s [mm ² /m]	$s = 100$ mm	503	785	1130	1540	2010	2544	3141	3801	5309	7069
	$s = 125$ mm	402	628	904	1232	1608	2036	2513	3041	4247	5655
	$s = 150$ mm	335	523	753	1027	1340	1696	2094	2534	3539	4712
	$s = 200$ mm	251	393	565	770	1005	1272	1571	1901	2655	3534

Aufgabe 1

a) Schnittgrößen

Einwirkungen $g_k = 400 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $G_k = 7 \text{ MN}$

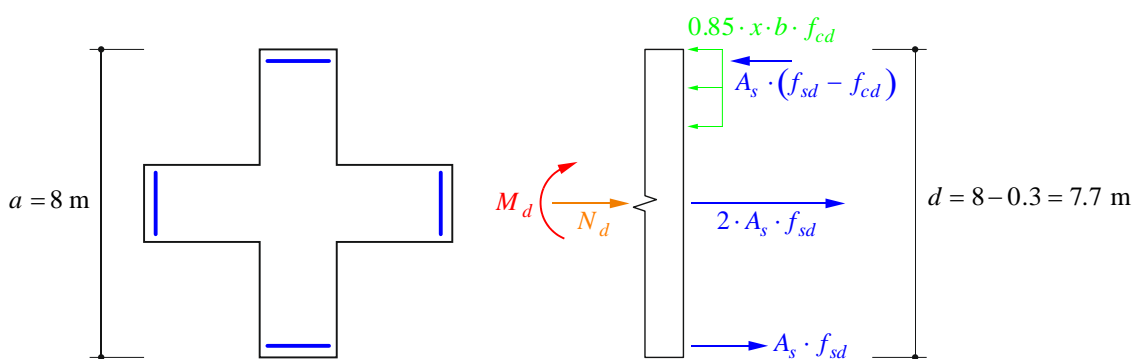


$$N_d^- = (G_k + g_k \cdot h) = (7000 + 400 \cdot 80) = 39 \text{ MN}$$

$$M_d = 0.1 \cdot \left(G_k \cdot h + \frac{g_k \cdot h^2}{2} \right) = 0.1 \cdot \left(7000 \cdot 80 + \frac{400 \cdot 80^2}{2} \right) = 184 \text{ MNm}$$

b) Biege­widerstand unter Norm­kraft

QS-Analyse unter Biegung und Norm­kraft



Kräfte-Gleichgewicht

$$\sum N = 0: \quad 3 \cdot A_s \cdot f_{sd} + N_d = A_s \cdot (f_{sd} - f_{cd}) + 0.85 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$$

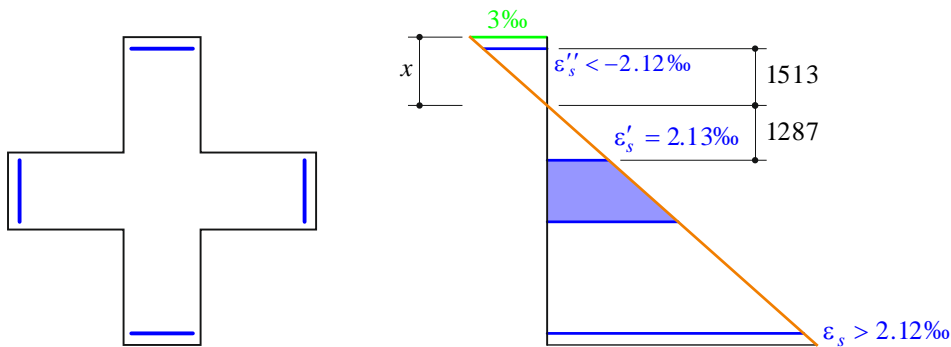
$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot A_s \cdot f_{sd} + N_d - A_s \cdot (f_{sd} - f_{cd})}{0.85 \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{3 \cdot 25452 + 39 \cdot 10^6 - 25452 \cdot (435 - 20)}{0.85 \cdot 2000 \cdot 20} = 1813 \text{ mm}$$

Momenten-Gleichgewicht

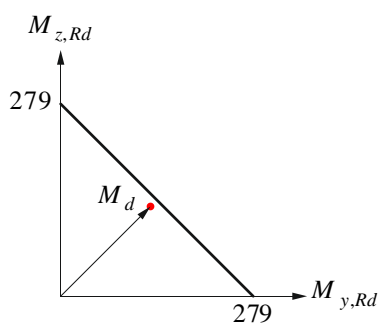
$$\begin{aligned} \sum M = 0: \quad M_{Rd} &= \left[A_s \cdot f_{sd} + A_s \cdot (f_{sd} - f_{cd}) \right] \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right) + 0.85 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{0.85 \cdot x}{2} \right) \\ &= \left[25452 \cdot 435 + 25452 \cdot (435 - 20) \right] \cdot \left(7700 - \frac{8000}{2} \right) \\ &\quad + 0.85 \cdot 1813 \cdot 2000 \cdot 20 \cdot \left(\frac{8000}{2} - \frac{0.85 \cdot 1813}{2} \right) \end{aligned}$$

$$M_{Rd} = 279 \text{ MNm}$$

Kontrolle der Dehnungen $\epsilon'_s = \frac{3\text{‰}}{x} \cdot (c - x + 0.1 \text{ m}) = \frac{3\text{‰}}{1813} \cdot (3000 - 1813 + 100) = 2.13\text{‰} > 2.12\text{‰}$



c) $M_{y,Rd} - M_{z,Rd}$ - Interaktionsdiagramm

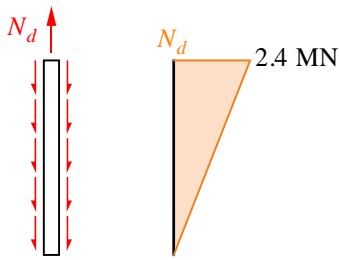


$$M_{y,Rd} = M_{z,Rd} = 279 \text{ MNm}$$

$$M_{Rd} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M_{y,Rd} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 279 = 197 \text{ MNm}$$

$$M_{Rd} > M_d = 184 \text{ MNm} \quad \underline{\text{ok}}$$

d) Normalkraftverlauf im Pfahl



$$A_{\text{Pfahl}} = \frac{0.6^2 \cdot \pi}{4} = 0.2827 \text{ m}^2$$

$$A_s = 15 \cdot 531 = 7965 \text{ mm}^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_{\text{Pfahl}}} = \frac{7965}{2.827 \cdot 10^5} = 2.82\%$$

Risslast

$$N_r = A_{\text{Pfahl}} \cdot (1 - \rho) \cdot f_{ctm} + \rho \cdot A_{\text{Pfahl}} \cdot n \cdot f_{ctm} = 2.827 \cdot 10^5 \cdot (1 - 2.82\%) \cdot 2.9 + 2.82\% \cdot 2.827 \cdot 10^5 \cdot \frac{205}{33.6} \cdot 2.9$$

$$N_r = 938 \text{ kN}$$

gerissene Länge $l_r = l \cdot \left(1 - \frac{N_r}{N_d}\right) = 12 \cdot \left(1 - \frac{938}{2400}\right) = 7.31 \text{ m}$

e) Verlängerung des Pfahls und Risse mit Zuggurtmodell

mittlere Normalkraft im gerissenen Bereich $N_{d,m} = \frac{l - l_r}{l} \cdot N_d = \frac{12'000 - 7311}{12'000} \cdot 2400 = 1669 \text{ kN}$

mittlere Stahlspannungen im gerissenen Bereich $\sigma_{srm} = \frac{N_{d,m}}{A_s} = 209.6 \text{ MPa}$

mittlere Stahldehnungen mit Berücksichtigung der Zugversteifung

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{srm}}{E_s} - \frac{\lambda \cdot f_{ctm} \cdot (1 - \rho)}{2 \cdot \rho \cdot E_s} = \frac{209.6}{205 \cdot 10^3} - \frac{1 \cdot 2.9 \cdot (1 - 2.82\%)}{2 \cdot 2.82\% \cdot 205 \cdot 10^3} = 0.78\text{‰}$$

Verlängerung des Pfahls mit Berücksichtigung der Zugversteifung

$$\Delta l = \frac{f_{ctm}}{2 \cdot E_c} \cdot (l - l_r) + \varepsilon_{sm} \cdot l_r = \frac{2.9}{2 \cdot 33.6} \cdot (12 - 7.31) + 0.78\text{‰} \cdot 7.31 = 5.9 \text{ mm}$$

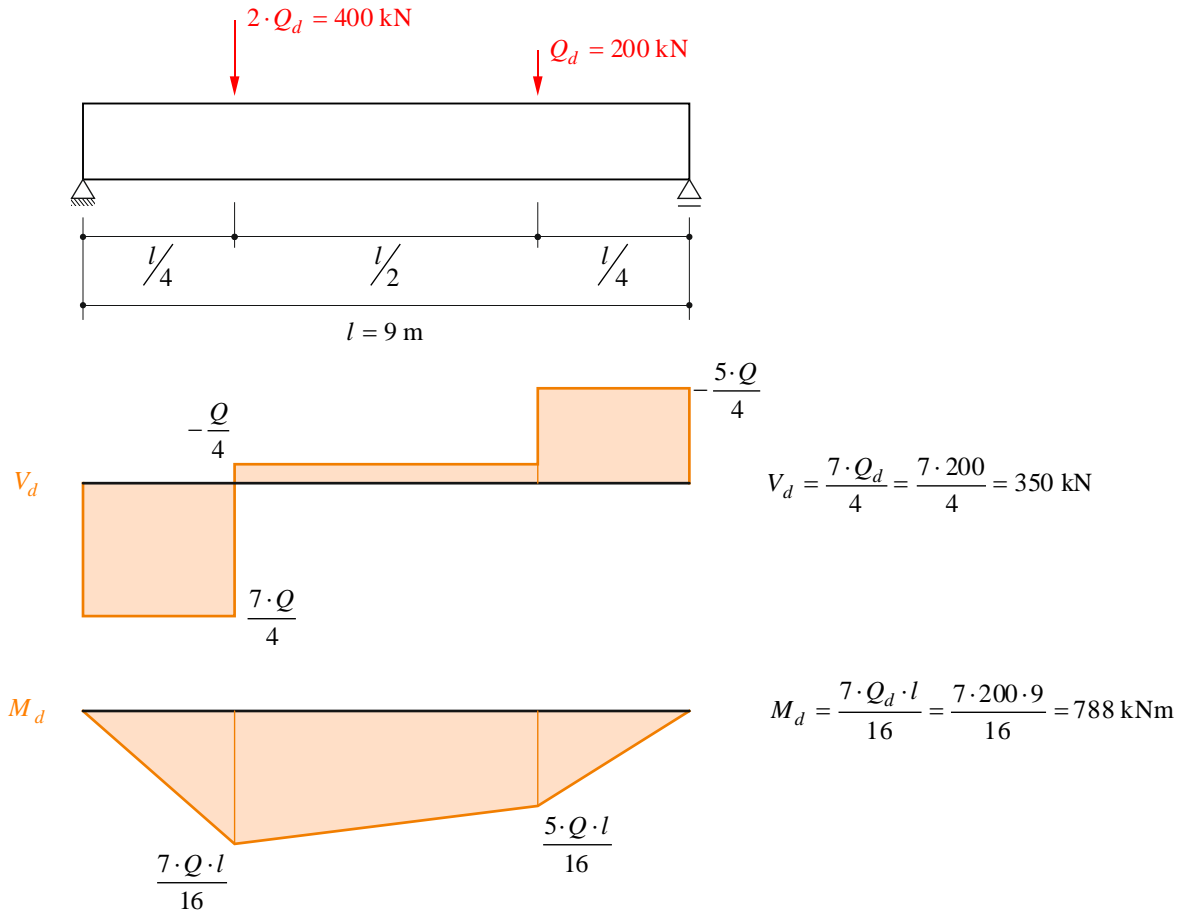
Stahlspannungen bei Rissbildung $\sigma_{sr0} = f_{ctm} \cdot \left(\frac{1}{\rho} - 1 + n\right) = 2.9 \cdot \left(\frac{1}{2.82\%} - 1 + \frac{205}{33.6}\right) = 117.8 \text{ MPa}$

maximaler Rissabstand $s_{r0} = \frac{\varnothing \cdot f_{ctm} \cdot (1 - \rho)}{2 \cdot \tau_{b0} \cdot \rho} = \frac{26 \cdot 2.9 \cdot (1 - 2.82\%)}{2 \cdot 5.8 \cdot 2.82\%} = 0.224 \text{ m}$

mittlere Rissbreite $w_{rm} = \frac{s_{r0} \cdot (2 \cdot \sigma_{srm} - \sigma_{sr0})}{2 \cdot E_s} = \frac{224 \cdot (2 \cdot 209.6 - 117.8)}{2 \cdot 205 \cdot 10^3} = 0.16 \text{ mm}$

Aufgabe 2

a) Bemessung Biegebewehrung



statische Höhe $d = h - 0.1 \text{ m} = 1.0 \text{ m}$

Bemessung Biegebewehrung $A_{s, \text{erf}} \approx \frac{M_d}{0.9 \cdot d \cdot f_{sd}} = \frac{788}{0.9 \cdot 1.0 \cdot 435} = 2057 \text{ mm}^2$

$\rightarrow 6 \text{ } \varnothing 22: A_s = 6 \cdot \frac{22^2 \cdot \pi}{4} = 2281 \text{ mm}^2$

Druckzonenhöhe $x = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{0.85 \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{2281 \cdot 435}{0.85 \cdot 300 \cdot 20} = 195 \text{ mm} \begin{cases} < 0.35 \cdot d = 350 \text{ mm} \\ < 200 \text{ mm} \end{cases}$

Biege widerstand & Nachweis der Biegetragsicherheit

$$M_{Rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{0.85 \cdot x}{2} \right) = 2281 \cdot 435 \cdot \left(1000 - \frac{0.85 \cdot 195}{2} \right) = 910 \text{ kNm} > M_d = 788 \text{ kNm}$$

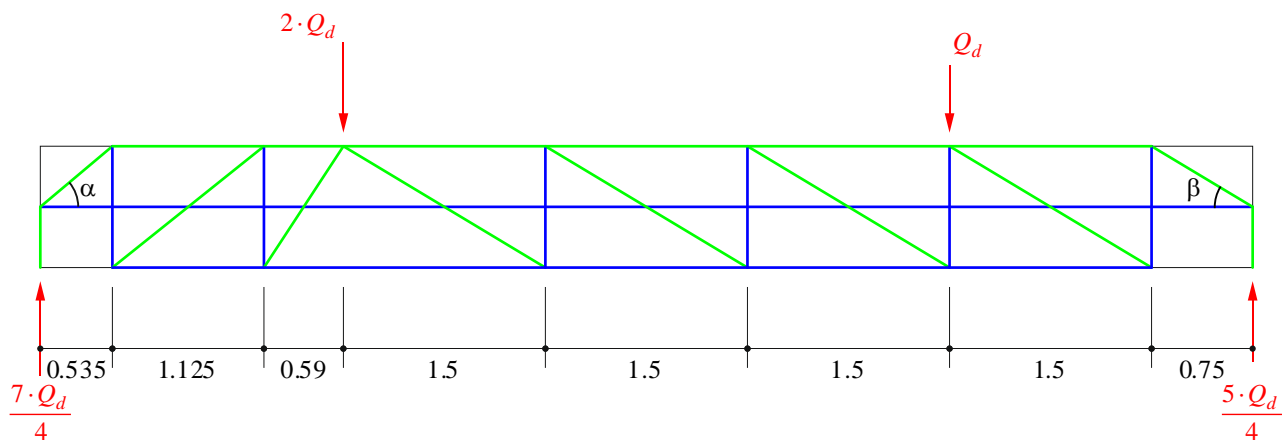
b) Fachwerkmodell und Spannungsfeld

Innerer Hebelarm $z \approx 0.9 \cdot d = 0.9 \text{ m}$

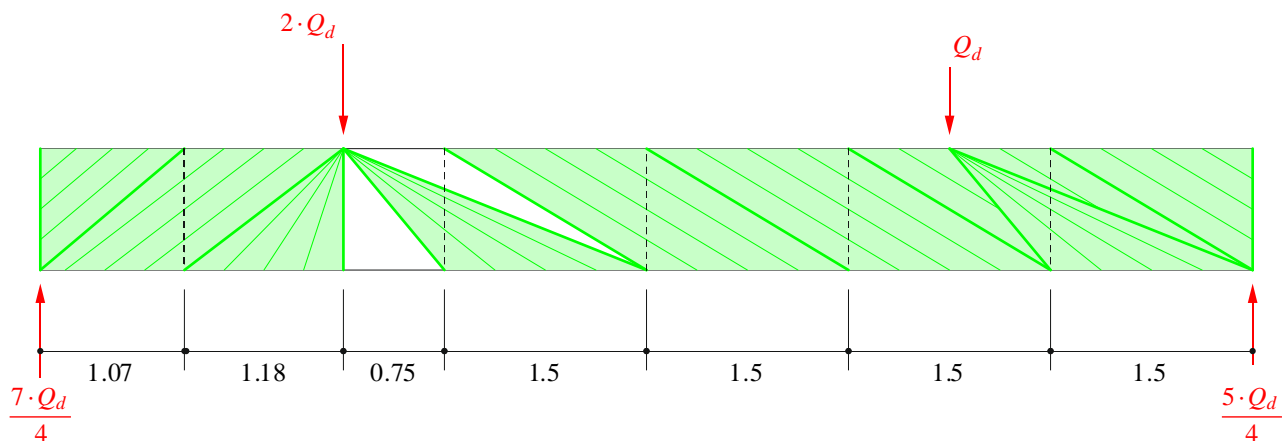
Druckfeldneigung $\alpha = \arctan\left(\frac{0.9}{1.07}\right) = 40^\circ$ $\beta = \arctan\left(\frac{0.9}{1.5}\right) = 31^\circ$

→ (Horizontalanteil in der letzten Strebe muss bei beiden Auflagern jeweils gleich sein.)

Fachwerkmodell



Spannungsfeld



c) Bemessung der Stegbewehrung

Mindestbewehrung $a_{s,\min} = \rho_{\min} \cdot b_w = 0.2\% \cdot 200 = 400 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

$$a_{sw,erf} = \frac{V_d}{z \cdot \cot(\alpha) \cdot f_{sd}} = \frac{350}{1.07 \cdot 435} = 752 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

→ Ø 10 @ 200, 2-schnittig: $a_{sw} = 2 \cdot \frac{10^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.2} = 785 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

Bügelwiderstand $V_{Rd,s} = a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \cot(\alpha) = 785 \cdot 435 \cdot 1.07 = 365 \text{ kN}$

Betondruck $V_{Rd,c} = k_c \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 0.55 \cdot 20 \cdot 200 \cdot 0.9 \cdot \sin(40^\circ) \cdot \cos(40^\circ) = 975 \text{ kN}$

$$V_{Rd} = \min \{ V_{Rd,s}; V_{Rd,c} \} = 365 \text{ kN} > V_d = 350 \text{ kN}$$

Längszugbewehrung $T_d = V_d \cdot \cot(\alpha) = 350 \cdot \cot(40^\circ) = 250 \cdot \cot(31^\circ) = 417 \text{ kN}$

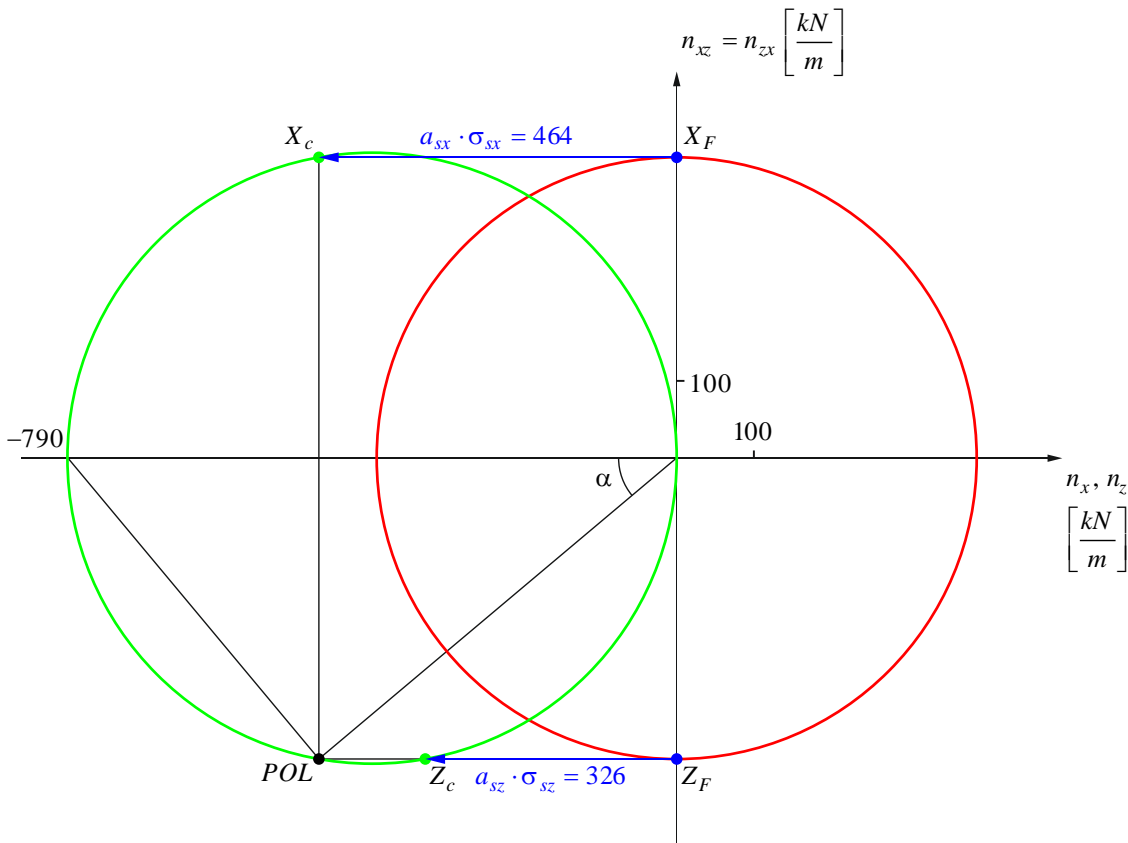
$$a_{sl,erf} = \frac{T_d}{z \cdot f_{sd}} = \frac{417}{0.9 \cdot 435} = 1065 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\rightarrow \text{Ø 12 @ 200, 2-schnittig: } a_{sl} = 2 \cdot \frac{12^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.2} = 1131 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$T_{Rd} = a_{sl} \cdot f_{sd} \cdot z = 1131 \cdot 435 \cdot 0.9 = 443 \text{ kN} > 417 \text{ kN}$$

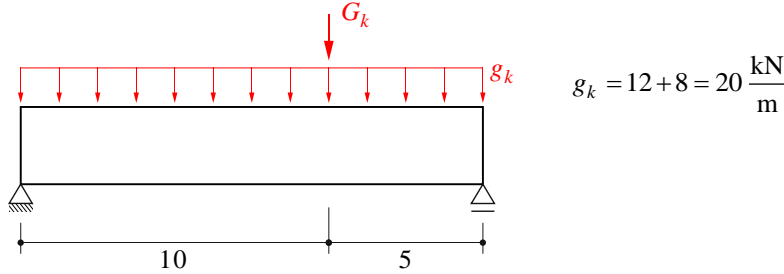
d) Spannungszustand im Mohr'schen Kreis

$$n_x = n_z = 0 \quad n_{xz} = n_{zx} = \frac{V_d}{z} = 389 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

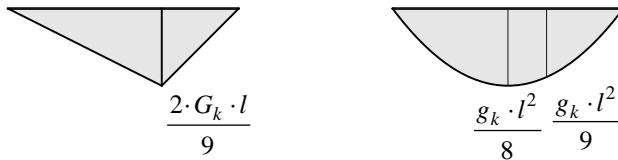


Aufgabe 3

a) Spannliedgeometrie

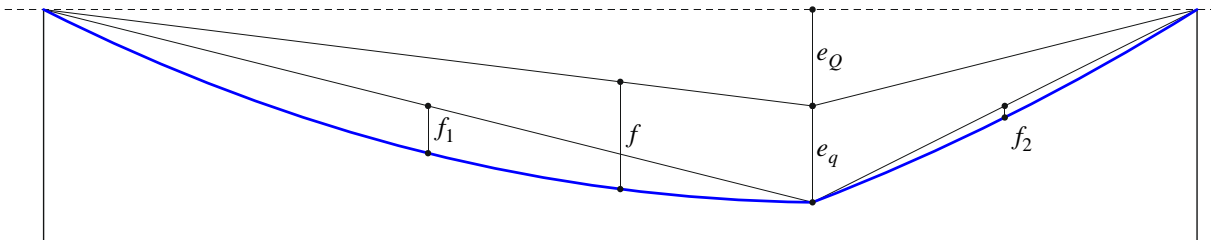
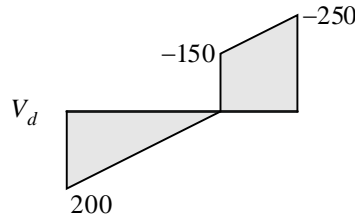


Kabelführung affin zum Momentenverlauf → Superposition von:



max. Spannliedexzentrizität bei $x = \frac{2 \cdot l}{3}$,

da dort Querkraftnullpunkt



$$P \cdot e_Q = \frac{2 \cdot G_k \cdot l}{9} \quad \rightarrow \quad e_Q = \frac{2 \cdot G_k \cdot l}{9 \cdot P} \qquad P \cdot e_q = \frac{g_k \cdot l^2}{9} \quad \rightarrow \quad e_q = \frac{g_k \cdot l^2}{9 \cdot P}$$

$$e_{\max} = e_Q + e_q = \frac{2 \cdot G_k \cdot l + g_k \cdot l^2}{9 \cdot P} \quad \rightarrow \quad P_{\infty, \text{erf}} = \frac{2 \cdot G_k \cdot l + g_k \cdot l^2}{9 \cdot e_{\max}} = \frac{2 \cdot 150 \cdot 15 + 20 \cdot 15^2}{9 \cdot 0.503} = 1988 \text{ kN}$$

$$e_Q = \frac{2 \cdot 150 \cdot 15}{9 \cdot 1988} = 251.5 \text{ mm} \qquad f = \frac{g_k \cdot l^2}{8 \cdot P_{\infty}} = \frac{20 \cdot 15^2}{8 \cdot 1988} = 283 \text{ mm} \qquad P_0 = \frac{P_{\infty}}{0.85} = \frac{1988}{0.85} = 2339 \text{ kN}$$

$$e_q = \frac{20 \cdot 15^2}{9 \cdot 1988} = 251.5 \text{ mm} \qquad \left(f_1 = f \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 126 \text{ mm}; \quad f_2 = f \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 31 \text{ mm} \right)$$

b) Dekomprimierung des Trägers

Lastausgleich für ständige Lasten! $\rightarrow M(g_k, G_k) - P_\infty \cdot e = 0$, über ganze Trägerlänge

Spannungsanalyse $\sigma_c = -\frac{P_\infty}{A_c} + \frac{M_q}{I_c} \cdot \frac{h}{2} < 0$

$$\rightarrow M_q \leq \frac{P_\infty \cdot 2 \cdot I_c}{A_c \cdot h} = \frac{1988 \cdot 2 \cdot 5.76 \cdot 10^{10}}{480 \cdot 10^3 \cdot 1200} = 397.6 \text{ kNm}$$

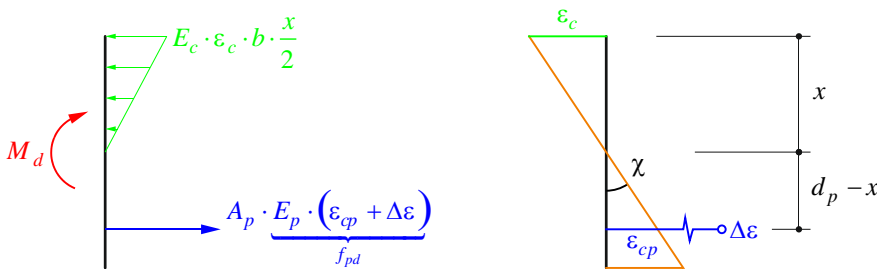
Momentenverlauf für Nutzlast q_k

$$M_q = \frac{q \cdot x \cdot (l-x)}{2} \rightarrow x_{dec} = \frac{1 - \sqrt{l^2 - 8 \cdot \frac{M_q}{q}}}{2} = \frac{1 - \sqrt{15^2 - 8 \cdot \frac{397.6}{20}}}{2} = 3.4 \text{ m}$$

dekomprimiert für: $x_{dec} = 3.4 \text{ m} < x < l - x_{dec} = 11.6 \text{ m}$

c) Spannungs- und Dehnungszustand gerade beim Fließen der Bewehrung

QS-Analyse im gerissen elastischen Zustand (II)



Kinematische Relationen (Vorspannkabel erreicht gerade Fließspannung)

$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \Delta\epsilon = \frac{f_{pd}}{E_p} = \frac{1390}{195'000} = 7.13\text{‰} \quad \epsilon_{cp} = (d_p - x) \cdot \chi \rightarrow \chi = (d_p - x)^{-1} \cdot \left(\frac{f_{pd}}{E_p} - \Delta\epsilon \right)$$

$$\epsilon_c = x \cdot \chi$$

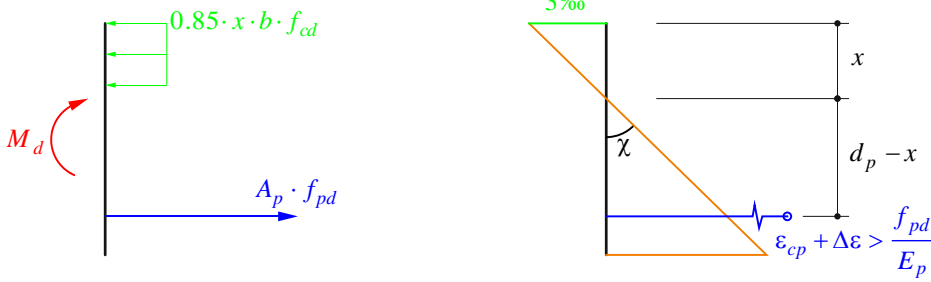
Kräfte-Gleichgewicht $\sum N = 0: A_p \cdot f_{pd} = E_c \cdot b \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (d_p - x)^{-1} \cdot \left(\frac{f_{pd}}{E_p} - \Delta\epsilon \right)$

Betondruckzonenhöhe $\rightarrow x = 565 \text{ mm}$

Momenten-Gleichgewicht $\sum M = 0: M_y = A_p \cdot f_{pd} \cdot \left(d_p - \frac{x}{3} \right) = 1800 \cdot 1390 \cdot \left(1103 - \frac{565}{3} \right) = 2289 \text{ kNm}$

Krümmung des QS $\chi = (1103 - 565)^{-1} \cdot (7.13\text{‰} - 6.5\text{‰}) = 1.17 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$

d) Biegewiderstand



Betondruckzonenhöhe
$$x = \frac{A_p \cdot f_{pd}}{0.85 \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{1800 \cdot 1390}{0.85 \cdot 400 \cdot 20} = 368 \text{ mm} < 0.35 \cdot d = 386 \text{ mm}$$

Biege

$$M_{Rd} = A_p \cdot f_{pd} \cdot \left(d_p - \frac{0.85 \cdot x}{2} \right) = 1800 \cdot 1390 \cdot \left(1103 - \frac{0.85 \cdot 368}{2} \right) = 2368 \text{ kNm}$$

Dehnung des QS auf Höhe des Spannkabels
$$\epsilon_{cp} = \frac{3‰}{x} \cdot (d_p - x) = \frac{3}{368} \cdot (1103 - 368) = 5.99‰$$

Dehnung des Vorspannkabels
$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \Delta\epsilon = 5.99 + 6.5 = 12.49‰$$

Krümmung bei Erreichen des Biege

$$\chi = \frac{3‰}{x} = \frac{3}{368} = 8.15 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

e) Momenten-Krümmungs-Diagramm

ungerissene Biegesteifigkeit

$$EI_c = 33.6 \cdot 0.0576 = 1935 \text{ MNm}^2$$

Krümmung gerade nach Vorspannen

$$\chi_0 = \frac{M(g_k, G_k)}{EI_c} = \frac{1988 \cdot 0.503}{1935} = 0.52 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

Moment bei zentrischem Spannungszustand

$$M_z = P_\infty \cdot e_{\text{max}} = 1000 \text{ kNm}$$

Dekompressionsmoment

$$M_{\text{dec}} = M_z + M_q = 1398 \text{ kNm}$$

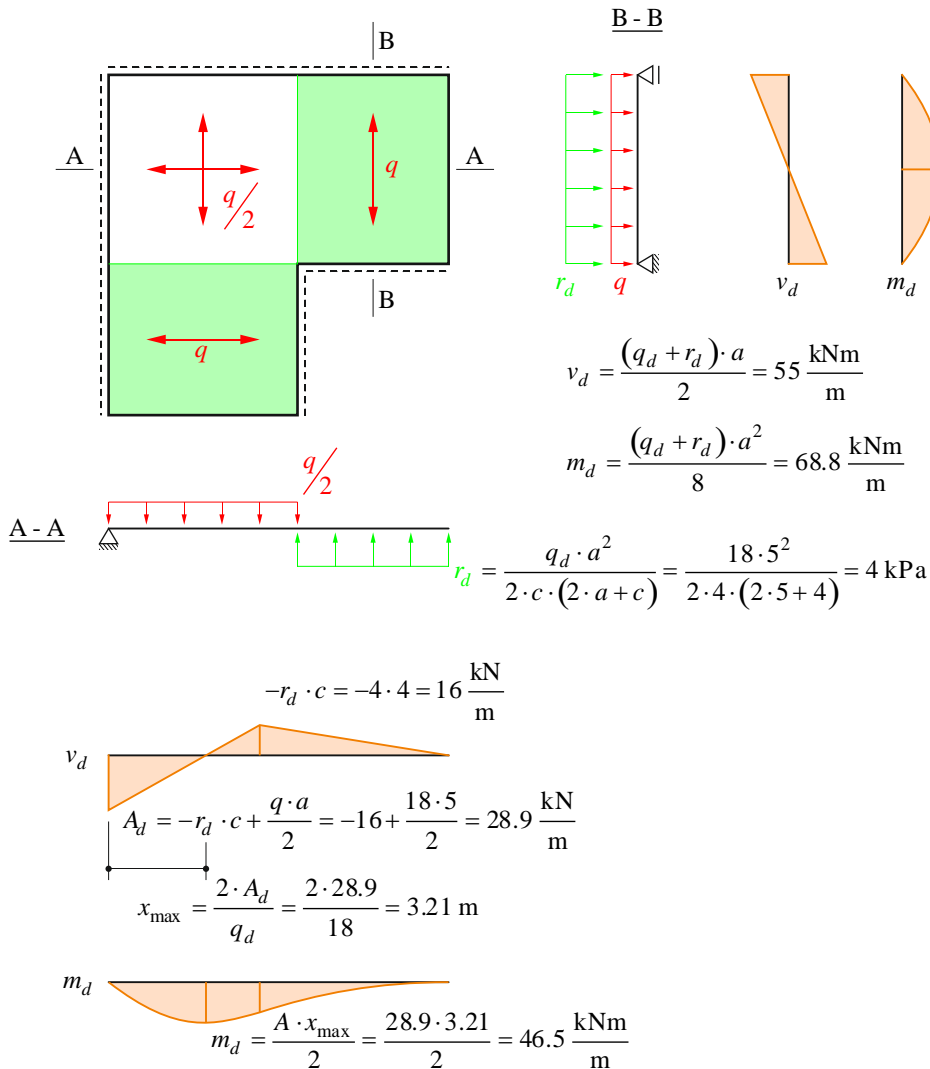
Krümmung bei Dekompression

$$\chi_{\text{dec}} = \frac{M_{\text{dec}}}{EI_c} - \chi_0 = \frac{1398}{1935} - 0.52 = 0.202 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$



Aufgabe 4

a) Streifenmethode



Mindestbewehrung

$$a_{s,\min} = \frac{f_{cd}}{f_{sd}} \cdot b \cdot d \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h^2 \cdot 1.3 \cdot f_{ctm}}{3 \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right) = \frac{20}{435} \cdot 1000 \cdot 215 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{260^2 \cdot 1.3 \cdot 2.9}{3 \cdot 215^2 \cdot 20}} \right) = 465 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$d = h - c_{nom} - \emptyset = 260 - 35 - 10 = 215 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \emptyset 10 @ 150: \quad a_{s,\min} = \frac{10^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} = 524 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$m_{Rd,\min} = a_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{a_s \cdot f_{sd}}{2 \cdot b \cdot f_{cd}} \right) = 524 \cdot 435 \cdot \left(215 - \frac{524 \cdot 435}{2 \cdot 1000 \cdot 20} \right) = 47.7 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

BiegetragsicherheitA-A

$$m_d = 46.5 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \leq m_{Rd} = 47.7 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

B-B

Bemessung Biegebewehrung $a_{s,erf} \approx \frac{m_d}{0.9 \cdot d \cdot f_{sd}} = \frac{68.8}{0.9 \cdot 215 \cdot 435} = 817 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

$$\rightarrow \emptyset 10 @ 300 + \emptyset 14 @ 300: \quad a_s = \frac{(10^2 + 14^2) \cdot \pi}{4 \cdot 0.3} = 775 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Betondruckzonenhöhe $x = \frac{a_s \cdot f_{sd}}{0.85 \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{775 \cdot 435}{0.85 \cdot 1000 \cdot 20} = 19.3 \text{ mm} < 0.35 \cdot d = 70 \text{ mm}$

Biegewiderstand & Nachweis

$$m_{Rd} = a_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{0.85 \cdot x}{2} \right) = 775 \cdot 435 \cdot \left(215 - \frac{0.85 \cdot 19.3}{2} \right) = 69.6 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} > m_d = 68.8 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Querkrafttragsicherheit

massgebende Querkraft $v_d = v_0 = \sqrt{55^2 + 16^2} = 57.3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Hauptquerkraftrichtung $\varphi = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{16}{55}\right) = 16.2^\circ$

Querkraftwiderstand & Nachweis

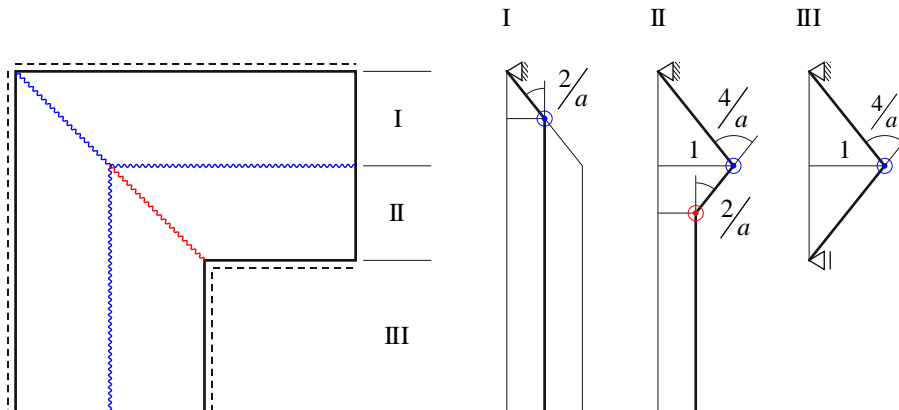
$$k_g = \frac{48}{16 + D_{\max}} = 1.0$$

$$\varepsilon_v = 1.5 \cdot \frac{f_{sd}}{E_s} \cdot \frac{1}{\sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi)} = 1.5 \cdot \frac{435}{205} \cdot \frac{1}{\sin^4(16.2^\circ) + \cos^4(16.2^\circ)} = 3.71\%$$

$$k_d = \frac{1}{1 + \varepsilon_v \cdot d \cdot k_g} = \frac{1}{1 + 3.71\% \cdot 215 \cdot 1.0} = 0.56$$

$$v_{Rd} = k_d \cdot d \cdot \tau_{cd} = 0.56 \cdot 215 \cdot 1.1 = 132 \frac{\text{kN}}{\text{m}} > v_d = 57.3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

b) Fliessgelenklinienmethode



Biegesteifigkeit $m_u = 67 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$

Arbeit der äusseren Kräfte $W = q \cdot \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot c)$

Dissipationsarbeit $D = m_u \cdot \left[\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{4}{a} + \frac{2}{a} \right) \cdot \frac{a}{2} + \frac{4}{a} \cdot c \right] \cdot 2 = \frac{8 \cdot m_u \cdot (a+c)}{a}$

Traglast $W = D \rightarrow q_u = \frac{16 \cdot m_u \cdot (a+c)}{a^2 \cdot (a+2 \cdot c)} = \frac{16 \cdot 67 \cdot (5+4)}{5^2 \cdot (5+2 \cdot 4)} = 29.7 \text{ kPa} < 30 \text{ kPa}$