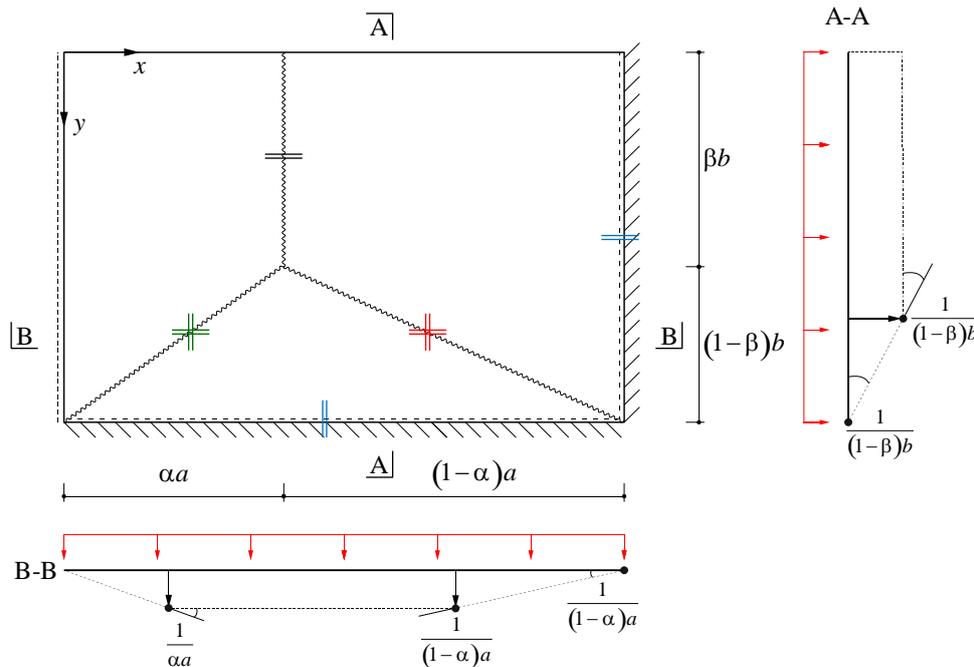


Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 1/7
Kolloquium 5	Musterlösung	an / 14.05.2021 amr / 21.06.2023 (rev.)

Aufgabe 1

a) Bruchmechanismus

Das Beispiel entspricht dem «Beispiel 1» aus der App «Flie遡gelenklinienmethode». Der Mechanismus wird durch die zwei Parameter α und β definiert, welche für einen minimalen oberen Grenzwert optimiert werden können.



$a = 15\text{m}$
 $b = 10\text{m}$

b) Oberer Grenzwert

Zunächst wird die Dissipation D berechnet. Sie wird aufgeteilt in ihre Anteile D_x (Rotation um y -Achse) und D_y (Rotation um x -Achse). Der Farbcode richtet sich nach obiger Abbildung.

$$D_x = \frac{1}{(1-\alpha)a} \cdot b \cdot m_u' + \frac{1}{(1-\alpha)a} \cdot (1-\beta) \cdot b \cdot m_u + \frac{1}{\alpha a} \cdot (1-\beta) \cdot b \cdot m_u + \left(\frac{1}{(1-\alpha)a} + \frac{1}{\alpha a} \right) \cdot \beta \cdot b \cdot m_u$$

$$= \frac{b \cdot (m_u + m_u')}{(1-\alpha)a} + \frac{b \cdot m_u}{\alpha a} = \frac{b \cdot \left(\frac{m_u}{\alpha} + m_u' \right)}{(1-\alpha)a}$$

$$D_y = \frac{1}{(1-\beta)b} \cdot a \cdot m_u' + \frac{1}{(1-\beta)b} \cdot \alpha \cdot a \cdot m_u + \frac{1}{(1-\beta)b} \cdot (1-\alpha) \cdot a \cdot m_u$$

$$= \frac{a \cdot (m_u + m_u')}{(1-\beta)b}$$

$$D = D_x + D_y = \frac{b \cdot \left(\frac{m_u}{\alpha} + m_u' \right)}{(1-\alpha)a} + \frac{a \cdot (m_u + m_u')}{(1-\beta)b}$$

Die äussere Arbeit berechnet sich für die uniforme Flächenlast über die Flächenlast multipliziert mit dem Volumen des Bruchkörpers (Prisma + Pyramide):

$$W = q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \beta b \cdot a + \frac{1}{3} \cdot (1-\beta) b \cdot a \right) = \frac{ab}{6} (\beta + 2) \cdot q$$

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 2/7
Kolloquium 5	Musterlösung	an / 14.05.2021 amr / 21.06.2023 (rev.)

Der obere Grenzwert für die Traglast q_u lässt sich nun allgemein (in Abhängigkeit der Parameter α und β) über Gleichsetzen der Dissipation und der äusseren Arbeit berechnen:

$$W = D$$

$$\rightarrow q_u = \frac{6}{a \cdot b \cdot (\beta + 2)} \cdot \left(\frac{b \cdot \left(\frac{m_u}{\alpha} + m_u' \right)}{(1 - \alpha)a} + \frac{a \cdot (m_u + m_u')}{(1 - \beta)b} \right)$$

Um den tiefsten oberen Grenzwert zu finden, werden nun die Minima von q_u bezüglich α und β gesucht:

$$\frac{\partial q_u}{\partial \alpha} = \frac{6}{ab \cdot (2 + \beta)} \cdot \left(-\frac{b \cdot m_u \cdot (1 - 2\alpha)}{a \cdot (\alpha - \alpha^2)^2} + \frac{b \cdot m_u'}{a \cdot (1 - \alpha)^2} \right) = \frac{6}{ab \cdot (2 + \beta)} \cdot \frac{b \cdot m_u \cdot (2\alpha - 1) + b \cdot m_u' \cdot \alpha^2}{a \cdot \alpha^2 (1 - \alpha)^2} = 0$$

$$\rightarrow b \cdot m_u \cdot (2\alpha - 1) + b \cdot m_u' \cdot \alpha^2 = 0$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{-2m_u + \sqrt{4m_u^2 + 4m_u m_u'}}{2m_u'} = 0.458$$

$$m_u = 50 \text{ kN}$$

$$m_u' = 20 \text{ kN}$$

Mit den Substitutionen

$$A = \frac{6}{ab} = 0.04 \frac{1}{\text{m}^2}, \quad B = \frac{b \cdot \left(\frac{m_u}{\alpha} + m_u' \right)}{(1 - \alpha)a} = 158.9 \text{ kN}, \quad C = \frac{a \cdot (m_u + m_u')}{b} = 105 \text{ kN}$$

$$a = 15 \text{ m}$$

$$b = 10 \text{ m}$$

Lässt sich schreiben:

$$q_u = \frac{A}{\beta + 2} \cdot \left(B + \frac{C}{1 - \beta} \right)$$

Durch Ableitung nach β ergibt sich:

$$\frac{\partial q_u}{\partial \beta} = -\frac{A}{(\beta + 2)^2} \cdot \left(B + \frac{C}{1 - \beta} \right) + \frac{A}{\beta + 2} \cdot \frac{C}{(1 - \beta)^2} = \dots = -\frac{AB}{(\beta + 2)^2} + \frac{AC \cdot (2\beta + 1)}{(\beta + 2)^2 \cdot (1 - \beta)^2} = 0$$

$$\rightarrow -AB \cdot (1 - \beta)^2 + AC \cdot 2\beta + AC = 0$$

$$\rightarrow \beta = \frac{-2 \cdot (B + C) + \sqrt{4 \cdot (B + C)^2 + 4 \cdot B \cdot (C - B)}}{2B} = 0.105$$

Der obere Grenzwert berechnet sich schliesslich zu

$$q_u = \frac{A}{\beta + 2} \cdot \left(B + \frac{C}{1 - \beta} \right) = 5.248 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Aufgabe 2

Baustoffe

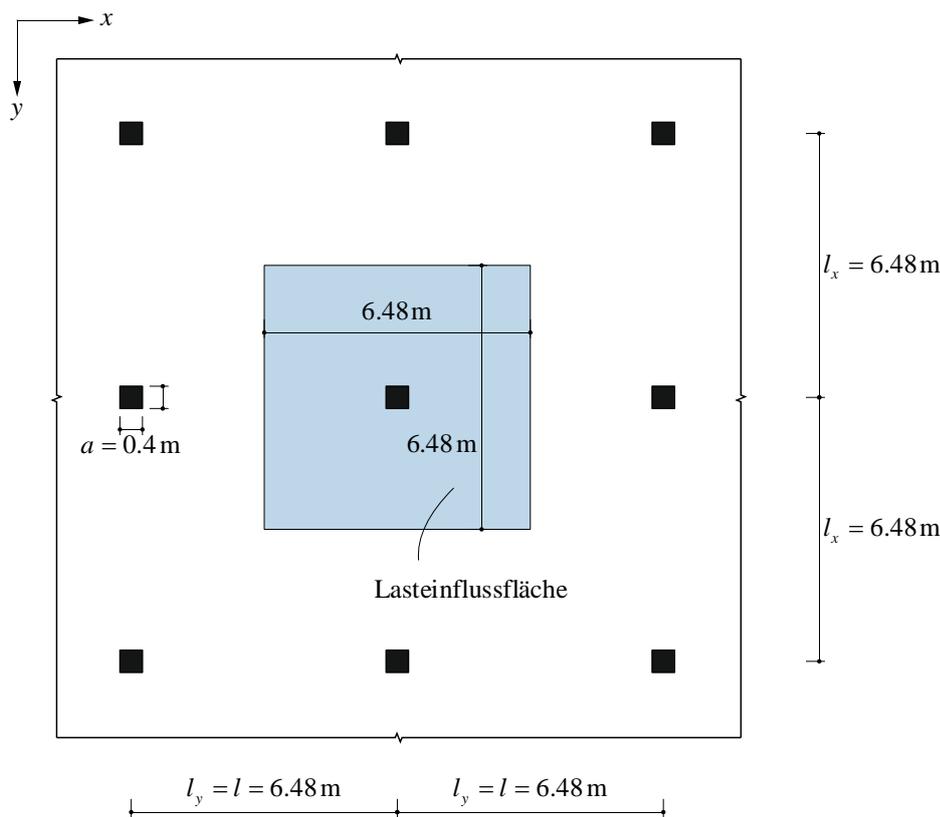
Beton C30/37 $f_{cd} = 20\text{MPa}$; $\tau_{cd} = 1.1\text{MPa}$; $f_{bd} = 2.7\text{MPa}$
 $D_{max} = 32\text{mm}$; $c_{nom} = 20\text{mm}$

Tab. 8/19

Betonstahl B500B $f_{sd} = 435\text{MPa}$

Tab. 9

Geometrie und Bewehrung



Plattenstärke: $h = 32\text{cm}$
 Bewehrung Stützenstreifen: 4. Lage: x-Richtung: $\text{Ø}22 @ 167\text{mm} \rightarrow a_{s,x} = 2281\text{mm}^2/\text{m}$
 $d_x = h - c_{nom} - \frac{\text{Ø}}{2} = 289\text{mm}$
 3. Lage: y-Richtung: $\text{Ø}22 @ 167\text{mm} \rightarrow a_{s,y} = 2281\text{mm}^2/\text{m}$
 $d_y = h - c_{nom} - \frac{\text{Ø}}{2} = 267\text{mm}$

Einwirkungen

Ständige Lasten: $g_{k0} = h \cdot \gamma_c = 8\text{kN/m}^2$
 $g_{k1} = 3\text{kN/m}^2$
 Nutzlasten: $q_k = 10\text{kN/m}^2$
 Dimensionierungslast: $q_d = \gamma_G \cdot (g_{k0} + g_{k1}) + \gamma_Q \cdot q_k = 29.9\text{kN/m}^2$
 Stützenlast: $V_{d,st} = l^2 \cdot q_d = 1256\text{kN}$

SIA 261,
 Tab. 28
 $\gamma_c = 25\text{kN/m}^3$

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 4/7
Kolloquium 5	Musterlösung	an / 14.05.2021 amr/ 21.06.2023 (rev.)

Biegewiderstand

Massgebend ist die y-Richtung (kleinerer Widerstand)

$$a_s f_{sd} = 992 \text{ kN/m}$$

$$c = 0.85 \cdot x = \frac{a_s f_{sd}}{f_{cd}} = 49.5 \text{ mm}$$

$$m_{Rd,y} = a_s f_{sd} \cdot \left(d_y - \frac{c}{2} \right) = 240 \text{ kNm/m}$$

$$m_{Rd,x} = a_s f_{sd} \cdot \left(d_x - \frac{c}{2} \right) = 262 \text{ kNm/m}$$

Durchstanzwiderstand ohne Durchstanzbewehrung nach SIA 262, NS2

$$V_{Rd,c} = k_r \cdot \tau_{cd} \cdot d_v \cdot u$$

Beiwert Schubfestigkeit wirks.Stat.Höhe Umfang

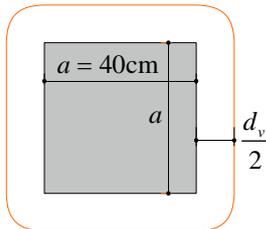
SIA 262

(57)

$$d_v : \text{Wirksame statische Höhe: } d_v = \frac{d_x + d_y}{2} = 278 \text{ mm}$$

4.3.6.2.1

u : Umfang des Nachweisschnitts:



$$u_0 = 4 \cdot a + d_v \cdot \pi = 2473 \text{ mm}$$

$$u = k_e \cdot u_0 = 0.9 \cdot u_0 = 2226 \text{ mm}$$

4.3.6.2.3

4.3.6.2.5

τ_{cd} : Schubfestigkeit: $\tau_{cd} = 1.1 \text{ MPa}$

$$k_r : \text{Beiwert: } k_r = \frac{1}{0.45 + 0.18 \cdot \psi \cdot d \cdot k_g}$$

(58)

$$k_g : \text{Beiwert } k_g = \frac{48}{16 + D_{max}} = 1$$

(37)

$$d = d_v = 278 \text{ mm}$$

$$\psi : \text{Plattenrotation: } \psi = 1.5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{sd}}{E_s} \cdot \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd,y}} \right)^{3/2}$$

(59)

$$r_s : \text{Abstand zwischen Stützenachse und Momentennullpunkt: } r_{sx} = r_{sy} = r_s = 0.22 \cdot l = 1.43 \text{ m}$$

4.3.6.4.4

y-Richtung massgebend: grössere Krümmung führt zu kritischem Schubriss

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 5/7
Kolloquium 5	Musterlösung	an / 14.05.2021 amr / 21.06.2023 (rev.)

$$m_{sd} : \text{Mittleres Moment im Stützstreifen: } m_{sd} = V_d \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{|e_{u,i}|}{2b_s} \right) \quad (61)$$

$$b_s : \text{Repräsentative Breite des Stützstreifens: } b_s = 1.5 \cdot \sqrt{r_{sx} \cdot r_{sy}} = 2.14 \text{ m} < l_{min} = 6.48 \text{ m} \quad (60)$$

$e_{u,i}$: Komponente der Exzentrizität e_u in Richtung der betrachteten Bewehrung.

$$e_u : \text{Rückrechnen aus } k_e = 0.9 = \frac{1}{1 + \frac{e_u}{b}} \quad (56)$$

b : Durchmesser der in einen flächengleichen Kreis umbewandelten Fläche des

$$\text{Nachweisschnitts: } b = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A_{NWS}} \quad 4.3.6.2.4$$

$$A_{NWS} : \text{Fläche des Nachweisschnitts: } A_{NWS} = a^2 + 4 \cdot \frac{d_v}{2} \cdot a + d_v^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 443'099 \text{ mm}^2$$

$$b = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A_{NWS}} = 751 \text{ mm}$$

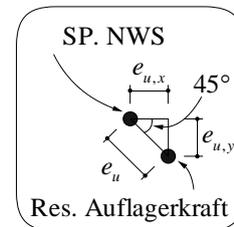
$$e_u = b \cdot \left(\frac{1}{k_e} - 1 \right) = 83.5 \text{ mm}$$

$e_{u,i}$: Komponente von e_u in Richtung der betrachteten Bewehrung

$$e_{u,x} = 59 \text{ mm}$$

$$e_{u,y} = 59 \text{ mm}$$

Annahme:



$$V_d : \text{Stützenkraft abzüglich Last auf Nachweisfläche: } V_d = V_{d,st} - q_d \cdot A_{NWS} = 1243 \text{ kN} \quad 4.3.6.2.6$$

$$m_{sd} = V_d \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{|e_{u,i}|}{2b_s} \right) = 173 \text{ kNm/m}$$

$$\psi = 1.5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{sd}}{E_s} \cdot \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd,y}} \right)^{3/2} = 0.010$$

$$k_r = \frac{1}{0.45 + 0.18 \cdot \psi \cdot d \cdot k_g} = 1.05$$

$$V_{Rd} = k_r \cdot \tau_{cd} \cdot d_v \cdot u = 715 \text{ kN} < V_d \rightarrow \text{Durchstanzbewehrung erforderlich!}$$

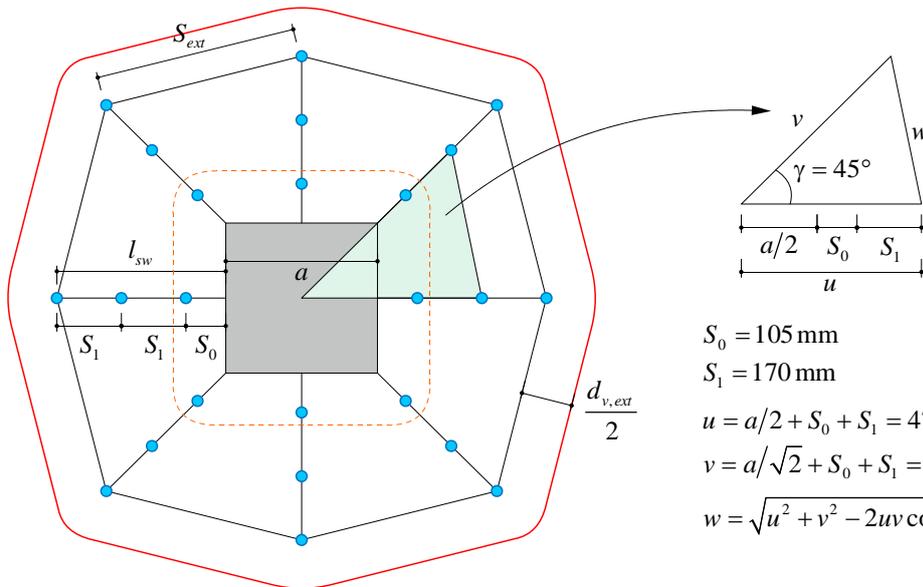
NB: Durch die Abhängigkeit des Widerstands von der Einwirkung (über die Plattenrotation ψ) kann die effektive Traglast durch Iteration gefunden werden (Iteration bis $V_d = V_{Rd}$). Darauf wird hier verzichtet.

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 6/7
Kolloquium 5	Musterlösung	an / 14.05.2021 amr / 21.06.2023 (rev.)

Durchbildung der Durchstanzbewehrung

Wahl Durchstanzbewehrung:

- 8 Dübelleisten à 3 Reihen. 0°/45°/90°
- Abstand der Dübel in radiale Richtung: 105mm/170mm/170mm



$$\begin{aligned}
 S_0 &= 105 \text{ mm} \\
 S_1 &= 170 \text{ mm} \\
 u &= a/2 + S_0 + S_1 = 475 \text{ mm} \\
 v &= a/\sqrt{2} + S_0 + S_1 = 558 \text{ mm} \\
 w &= \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \gamma} = 403 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Cosinussatz

Kontrolle konstruktive Details:

- Mind. 2 Reihen → gewählt 3 Reihen 5.5.3.8
- $S_1 \leq 0.75d_v$ → gewählt $S_1 = 170 \text{ mm} \hat{=} 0.61d_v$ Tab. 20
- $0.35d_v \leq S_0 \leq S_1$ → gewählt $S_0 = 105 \text{ mm} \hat{=} 0.38d_v$ 5.5.3.8
- Tang. Abstand 2. Reihe $\leq 1.5d_v$ → $w = 403 \text{ mm} \hat{=} 1.45d_v$ 5.5.3.9
- $\varnothing_{sw} \leq 20 \text{ mm}$ → gewählt $\varnothing 18$ 5.5.3.12
- $l_{sw} = S_0 + S_1 + S_1 = 445 \text{ mm}$
- $r_{0^\circ} = \frac{a}{2} + l_{sw} = 645 \text{ mm}$
- $r_{45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} + l_{sw} = 728 \text{ mm}$
- $d_{v,ext} = d_v - c_{nom} = 258 \text{ mm}$ Fig. 25
- $S_{ext} \leq 2 \cdot 1.5d_{v,ext}$ → $S_{ext} = \sqrt{r_{0^\circ}^2 + r_{45^\circ}^2 - 2 \cdot r_{0^\circ} \cdot r_{45^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 531 \text{ mm} \hat{=} 2.06d_{v,ext}$ Fig. 25
- $u_{0,ext} = 8 \cdot S_{ext} + \pi \cdot d_{v,ext} = 5083 \text{ mm}$
- $u_{ext} = k_e \cdot u_{0,ext} = 4574 \text{ mm}$ 4.3.6.5.9

Stahlbeton II	Frühjahrssemester	Seite 7/7
Kolloquium 5	Musterlösung	an / 14.05.2021 amr / 21.06.2023 (rev.)
<p><u>Durchstanzwiderstand mit Durchstanzbewehrung nach SIA 262</u></p> <p>Widerstand der Durchstanzbewehrung:</p> $V_{Rd,s} = \underbrace{\sum A_{sw}}_{\text{QS-Fläche der aktivierten Bew.}} \cdot k_e \cdot \sigma_{sd} \cdot \sin \beta$ <p style="text-align: center;"><small>0.9 Bemessungswert Stahlsp. Neigung d. Bew. (=1)</small></p> <p>$\sum A_{sw}$: Berücksichtigte Bewehrungsfläche: Durchstanzbewehrung in einem Abstand zwischen $0.35d_v$ und d_v von der gestützten Fläche.</p> <p>Erste Reihe: $S_0 = 105 \text{ mm} \hat{=} 0.38d_v \rightarrow$ berücksichtigt</p> <p>Zweite Reihe: $S_0 + S_1 = 275 \text{ mm} \hat{=} 0.99d_v \rightarrow$ berücksichtigt</p> $\sum A_{sw} = 2 \cdot 8 \cdot \frac{\varnothing_{sw}^2 \cdot \pi}{4} = 4072 \text{ mm}^2$ <p>σ_{sd}: Bemessungsspannung hängt von der Plattenrotation ab: massgebend ist die kleinste Rotation $\rightarrow x$-Richtung</p> $\sigma_{sd} = \frac{E_s \cdot \psi}{6} \cdot \left(1 + \frac{f_{bd}}{f_{sd}} \cdot \frac{d}{\varnothing_{sw}} \right) \leq f_{sd}$ $\psi_{d,x} = 1.5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{sd}}{E_s} \cdot \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd,x}} \right)^{3/2} = 0.0088$ $\sigma_{sd} = \frac{E_s \cdot \psi}{6} \cdot \left(1 + \frac{f_{bd}}{f_{sd}} \cdot \frac{d_x}{\varnothing_{sw}} \right) = 329 \text{ MPa} \leq f_{sd}$ $V_{Rd,s} = \sum A_{sw} \cdot k_e \cdot \sigma_{sd} \cdot \sin \beta = 1206 \text{ kN} > \max \left\{ V_d - V_{Rd,c}, \frac{V_d}{2} \right\} = 622 \text{ kN} \rightarrow \text{i.O.}$ <p>V_d und $V_{Rd,s}$ (V_d) nahe bei einander \rightarrow Verzicht auf Iteration</p> <p>Nachweis der ersten Betondruckdiagonalen:</p> $V_{Rd,c} = 2 \cdot k_r \cdot \tau_{cd} \cdot d_v \cdot u \leq 3.5 \cdot \tau_{cd} \cdot d_v \cdot u$ $k_r = k_{r,y} \text{ (Siehe S. 4, kleinster Wert für } k_r \text{ ist massgebend): } k_r = \frac{1}{0.45 + 0.18 \cdot \psi_y \cdot d \cdot k_g} = 1.05$ <p>$u = 2226 \text{ mm}$ (Siehe S. 4)</p> $V_{Rd,c} = 2 \cdot k_r \cdot \tau_{cd} \cdot d_v \cdot u = 1432 \text{ kN} \leq 3.5 \cdot \tau_{cd} \cdot d_v \cdot u = 2382 \text{ kN}$ $V_{Rd,c} = 1432 \text{ kN} \geq V_d = 1243 \text{ kN} \rightarrow \text{i.O.}$ <p>Nachweis ausserhalb der verstärkten Zone</p> $V_{Rd,c} = k_r \cdot \tau_{cd} \cdot d_{v,ext} \cdot u_{ext} = 1363 \text{ kN} > V_d = 1243 \text{ kN} \rightarrow \text{i.O.}$ <p>NB: Für die Berechnung von V_d dürfte in diesem Nachweis gemäss Ziffer 4.3.6.2.6 die Belastung innerhalb von u_{ext} (nicht nur von u, siehe S. 5) abgezogen werden. Diese Optimierung ist hier allerdings nicht nötig, der Nachweis ist erfüllt.</p>		

4.3.6.5.4

 $m_{sd} = 173 \text{ kN}$
 $m_{Rd,x} = 262 \text{ kN}$

(65), (66)

(69)

 $\psi_y = 0.010$