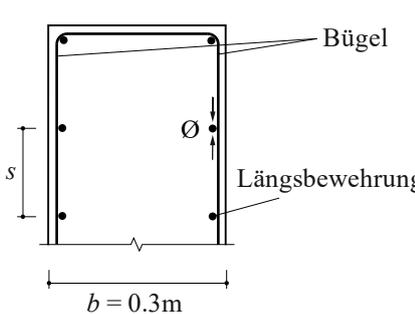
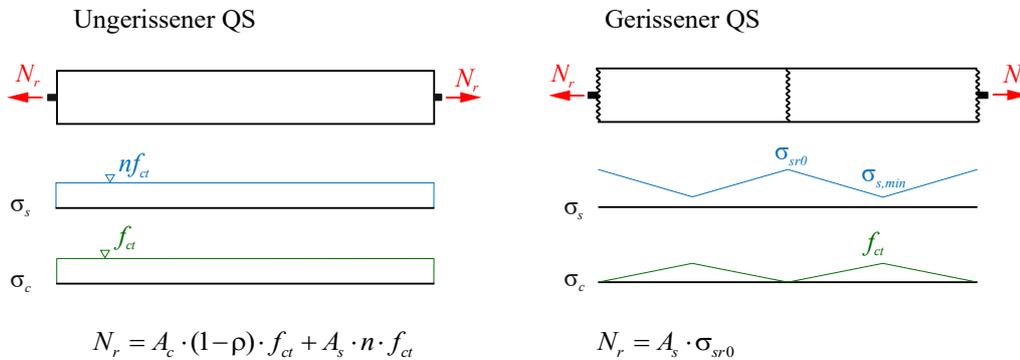


Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 1/6
Kolloquium 1	Musterlösung	an/24.09.2020, amr/19.06.2025
<p><u>Baustoffe</u></p> <p>Beton C30/37 $f_{cd} = 20 \text{ MPa}; f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$ $E_{cm} = 33.6 \text{ GPa}$</p> <p>Betonstahl B500B $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$ $E_s = 205 \text{ GPa}$</p> <p>Wertigkeit $n = \frac{E_s}{E_c} = 6.1$</p> <p>a) <u>Einwirkungen</u></p> <p>Schwindmass: $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca} = 0.23\text{‰} + 0.07\text{‰} = 0.30\text{‰}$</p> <p>- Trockenschwindmass $\epsilon_{cd} = \beta \cdot (t - t_s) \cdot \epsilon_{cd,\infty}$ $= 0.75 \cdot 0.3\text{‰} = 0.23\text{‰}$</p> <p>- Autogenes Schwindmass $\epsilon_{ca} = 0.07\text{‰}$</p> <p>Temperaturdehnung: $\epsilon_T = \alpha \cdot \Delta T = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 30^\circ\text{C} = 0.3\text{‰}$</p> <p>Totale Zwängung aus Schwinden und Temperaturdehnung: $\epsilon_{tot} = \epsilon_{cs} + \epsilon_T = 0.30\text{‰} + 0.30\text{‰} = 0.60\text{‰}$</p> <p>NB: Vereinfachend wird die gesamte Zwängung als äusserer Zwang behandelt</p> <p>b) <u>Skizze Bewehrungslayout</u></p> <p>Konstruktive Durchbildung</p> <div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="flex: 1;"> <p>Querschnitt</p>  </div> <div style="flex: 1; padding-left: 20px;"> <p>Geometrischer Bewehrungsgehalt in Längsrichtung:</p> $\rho_x = \frac{A_s}{A_c} = \frac{\frac{\varnothing^2 \cdot \pi \cdot 2}{4}}{s \cdot b}$ <p>Typische Werte:</p> <ul style="list-style-type: none"> - \varnothing: (8), 10, 12, ..., 26, 30, (34, 40) - s: (75), 100, 150, 200, 250, 300 </div> </div>		<p>SIA 262</p> <p>Tab. 8, Tab.3 3.1.2.3.3</p> <p>Tab. 9 3.2.2.4</p> <p>3.1.2.7</p> <p>$(t-t_s) = 30 \text{ a}$ $h_0 = 300 \text{ mm}$ $RH = 80 \%$</p> <p>3.2.2.5</p>

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 2/6
Kolloquium 1	Musterlösung	an/24.09.2020, amr/19.06.2025

c) Gleichgewicht am ungerissenen und gerissenen Querschnitt und Herleitung von σ_{sr0}

Bei der Rissnormalkraft N_r geht der Zuggurt vom ungerissenen in den gerissenen Zustand über. Die Rissnormalkraft kann am gerissenen und am ungerissenen System ausgedrückt werden:



Bemerke, dass der effektive Betonquerschnitt die Fläche $A_c \cdot (1-\rho)$ hat, da A_c den Beton sowie die Bewehrung enthält.

Die Stahlspannung am Riss bei Rissbildung (σ_{sr0}) kann hergeleitet werden, indem man erkennt, dass die Rissnormalkraft an beiden Systemen gleich sein muss:

$$A_c \cdot (1-\rho) \cdot f_{ct} + A_s \cdot n \cdot f_{ct} = A_s \cdot \sigma_{sr0} \rightarrow \sigma_{sr0} = f_{ct} \cdot \left(\frac{1}{\rho} - 1 + n\right)$$

d) Mindestbewehrung für erhöhte Anforderungen

Nachweiskonzept: Die Stahlspannung am Riss bei Rissbildung wird auf eine zulässige Spannung gemäss SIA 262 begrenzt. Die Zugfestigkeit des Betons wird auf Dimensionierungsniveau angesetzt: $f_{ct} = f_{ctd}$. Ein hoher Wert von f_{ctd} ist konservativ, da er zu einem höheren minimalen Bewehrungsgehalt führt, so dass mehr Bewehrung eingelegt werden muss.

$$\sigma_{sr0} \leq \sigma_{s,adm}$$

$$\rho_{x,min} = \frac{f_{ctd}}{\sigma_{s,adm} - f_{ctd} \cdot (n-1)}$$

$$f_{ctd} = k_t \cdot f_{ctk,0.95} = \frac{1}{1+0.5 \cdot t} \cdot 1.3 \cdot f_{ctm}, \quad t = \text{Bauteildicke}$$

$$= \frac{1}{1+0.5 \cdot 0.3} \cdot 1.3 \cdot 2.9 = 3.3 \text{ MPa}$$

4.4.1.4
4.4.1.3
3.1.2.2.5

Bestimmung der zulässigen Stahlspannung nach Korrigendum C1 der Norm SIA 262:

- Annahme: $\emptyset = 16 \text{ mm}$
- Erhöhte Anforderungen: Begrenzung der Rissbreiten bei Rissbildung auf $w_{nom} = 0.5 \text{ mm}$

$$\sigma_{s,adm} = \sqrt{\frac{9 \cdot E_s \cdot f_{ctm} \cdot w_{nom}}{\emptyset}} \quad (\text{Vgl. Formel aus Zuggurtmodell Seite 40 der Vorlesungsunterlagen})$$

$$\sigma_{s,adm} = \sqrt{\frac{9 \cdot 205000 \cdot 2.9 \cdot 0.5}{16}} = 408.9 \text{ MPa} \quad (\text{oder aus Grafik in Korrigendum C1 ablesen})$$

$$\rho_{x,min} = \frac{3.3}{408.9 - 3.3 \cdot (6.1-1)} = 0.84\%, \quad a_{sx,min} = \rho_{x,min} \cdot 300 \text{ mm} \cdot 1'000 \frac{\text{mm}}{\text{m}} = 2'508 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Korr. C1 zur Norm SIA 262

NB: a_{sx} ist die Bewehrungsfläche pro Laufmeter: $a_{sx} = \rho_x [-] \cdot b [\text{mm}] \cdot \bar{h} \left[\frac{\text{mm}}{\text{m}} \right]$ wobei $\bar{h} = 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ (=1).

Da die gesamte Höhe h der Leitmauer bekannt ist, kann a_{sx} auch über die gesamte Bewehrungsfläche A_{sx} bestimmt werden: $a_{sx} = \frac{A_{sx} [\text{mm}^2]}{h [\text{m}]}$.

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 3/6
Kolloquium 1	Musterlösung	an/24.09.2020, amr/19.06.2025

In diesem Fall: $a_{sx} = \frac{A_{sx} [\text{mm}^2]}{1.8 [\text{m}]}$

→ Wahl: Ø16 @ 150 mm, zweischnittig

Bewehrungsfläche pro Laufmeter:

aus Bewehrungstabelle ablesen: $a_{sx} = 2 \cdot 1'340 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = 2'680 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

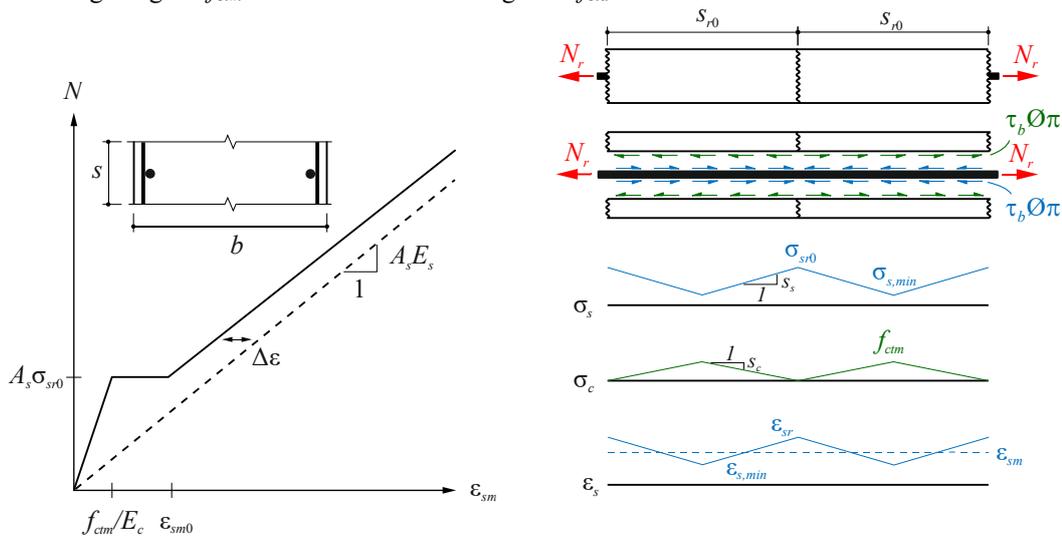
oder berechnen: $a_{sx} = \frac{\varnothing^2 \cdot \pi \cdot 2}{4 \cdot s} = 2 \cdot \frac{\varnothing^2 \cdot \pi}{4 \cdot s} = 2 \cdot \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 150} \cdot 1'000 = 2'681 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

Geometrischer Bewehrungsgehalt: $\rho_x = \frac{a_{sx}}{b \cdot h} = 0.89\%$

e) Aufzeichnen eines Risselementes, Herleitung Normalkraft-Dehnungs-Diagramm

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf einen sich wiederholenden Abschnitt aus der betrachteten Leitmauer mit Abmessungen $A_c = s \cdot b$ und $n_s = 2$ Bewehrungsstäben. Es wird vom maximalen Rissabstand ausgegangen ($\lambda=1$):

NB: Da es sich ab jetzt um eine möglichst realistische Darstellung des Verhaltens und nicht mehr um eine Bemessung auf Dimensionierungsniveau handelt, rechnen wir fortan mit dem Mittelwert der Zugfestigkeit f_{ctm} anstelle vom Bemessungswert f_{ctd} .



Geometrische Parameter:

$A_c = s \cdot b = 150 \cdot 300 = 45'000 \text{ mm}^2$

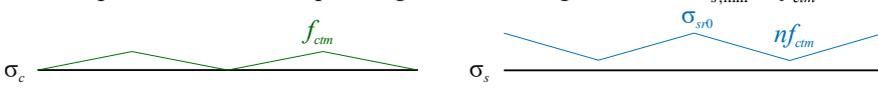
$A_s = n_s \cdot \frac{\varnothing^2 \cdot \pi}{4} = 402 \text{ mm}^2$

$\rho = \frac{A_s}{A_c} = 0.89\%$

Parameter Zuggurtmodell:

$\tau_{b0} = 2 \cdot f_{ctm} = 5.8 \text{ MPa}$

$\sigma_{sr0} = f_{ctm} \cdot \left(\frac{1}{\rho} - 1 + n \right) = 339.3 \text{ MPa}$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 4/6	
Kolloquium 1	Musterlösung	an/24.09.2020, amr/19.06.2025	
<p>Gesucht:</p> <ul style="list-style-type: none"> - s_{r0} Maximaler Rissabstand - $\sigma_{s,min}, \varepsilon_{s,min}$ Spannung und Dehnung der Bewehrung in der Mitte des Risselements - ε_{sm0} Mittlere Stahldehnung bei abgeschlossenem Rissbild - $\Delta\varepsilon$ Dehnungsdifferenz zum nackten Stahl: Zugversteifung <p>Die nachfolgenden Betrachtungen sollen als Ergänzung zur Herleitung des Zuggurtmodells in der Vorlesung verstanden werden. Die Herangehensweise unterscheidet sich von der Betrachtung der differenziellen Elemente in der Vorlesung, führt aber zu identischen Resultaten.</p> <p>NB: Für die Berechnung der Verbundkraft zwischen Beton und Bewehrung wird angenommen, dass die Bewehrung nicht ins Fließen kommt (andernfalls muss τ_{b1} auf der Länge der fließenden Bewehrung angesetzt werden).</p> <p>Verbundkraft im Risselement: $\tau_{b0} \cdot \pi \cdot \varnothing \cdot n_s = 583.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$</p> <p>Steigung der Spannung im Stahl: $s_s = \frac{\tau_{b0} \cdot \pi \cdot \varnothing \cdot n_s}{n_s \cdot \frac{\pi \cdot \varnothing^2}{4}} = \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing} = 1.45 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$</p> <p>Steigung der Spannung im Beton: $s_c = \frac{\tau_{b0} \cdot \pi \cdot \varnothing \cdot n_s}{A_c \cdot (1-\rho)} = \frac{4\tau_{b0}\rho}{\varnothing(1-\rho)} = 0.013 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$</p> <p>Gleichung für maximalen Rissabstand: $s_c \cdot \frac{s_{r0}}{2} = f_{ctm}$</p> <p>Maximaler Rissabstand: $s_{r0} = 2 \cdot \frac{f_{ctm}}{s_c} = 443.6 \text{ mm}$</p> <p>Minimale Spannung im Stahl: $\sigma_{s,min} = \sigma_{sr0} - s_s \cdot \frac{s_{r0}}{2} = 17.7 \text{ MPa}$</p> <p>NB: Die obige Betrachtung mit der Verbundkraft ist für die Bestimmung der minimalen Stahlspannung nicht notwendig. Unter der Bedingung, dass die Rissbildung noch nicht abgeschlossen ist ($\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$) führen Kräftegleichgewicht zwischen Riss und Mitte des Risselements sowie die Überlegung $\sigma_{s,min} = f_{ctm} \cdot n$ zum selben Resultat:</p> <p>→ Kräfte – GGW: $A_c \cdot (1-\rho) \cdot f_{ctm} + \sigma_{s,min} \cdot A_s = \sigma_{sr0} \cdot A_s \rightarrow \sigma_{s,min} = 17.7 \text{ MPa}$</p> <p>→ Multiplikation der Betonspannung mit der Wertigkeit → $\sigma_{s,min} = f_{ctm} \cdot n = 17.7 \text{ MPa}$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  </div> <p>Stahldehnung am Riss (nackter Stahl): $\varepsilon_{sr0} = \frac{\sigma_{sr0}}{E_s} = 1.66 \text{ ‰}$</p> <p>Stahldehnung in der Mitte des Risselements: $\varepsilon_{s,min} = \frac{\sigma_{s,min}}{E_s} = 0.09 \text{ ‰}$</p> <p>Mittlere Stahldehnung: $\varepsilon_{sm0} = \frac{\varepsilon_{sr0} + \varepsilon_{s,min}}{2} = 0.87 \text{ ‰}$</p> <p>Dehnungsdifferenz gegenüber nacktem Stahl: $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{sr0} - \varepsilon_{sm0} = 0.79 \text{ ‰}$</p> <p>Mittlere Betondehnung: $\varepsilon_{cm} = \frac{f_{ctm}}{2 \cdot E_c} = 0.04 \text{ ‰}$</p> <p>Rissöffnung: $w_r = s_{r0} \cdot (\varepsilon_{sm0} - \varepsilon_{cm}) = 0.37 \text{ mm}$</p> <p>Die Rissöffnung ist somit kleiner als die geforderte maximale Rissöffnung von 0.5 mm. Kontrolle der Bedingung aus dem Korrigendum, Tab. 17, dass das Rissbild nicht abgeschlossen ist: $\varepsilon_{tot,zw} = 0.6 \text{ ‰} \leq \varepsilon_{sm0} = 0.87 \text{ ‰}$. Das Rissbild ist somit noch nicht abgeschlossen und die Bedingung erfüllt!</p>			<p>Vergleiche mit Steigungen auf S.35 der VL!</p>

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 5/6
Kolloquium 1	Musterlösung	an/24.09.2020, amr/19.06.2025

f) Zuggurt-App

Eingabe des gerechneten Querschnitts mit $N_r = 137$ kN. Es ergeben sich kleine Differenzen, da $N_{r,theoretisch} = 136.4$ kN.

$\lambda = 0.5$

- σ_{sr0} : Die Stahlspannung am Riss, σ_{sr0} ist ausschliesslich vom Gleichgewicht abhängig und ändert sich somit bei einer Änderung des Rissabstands nicht.
- $\Delta\epsilon$: Da der Beton über den kürzeren Rissabstand weniger Spannung zwischen den Rissen aufnehmen kann, wird ein grösserer Anteil der Gesamtlast vom Stahl getragen. Die mittlere Stahldehnung steigt, womit $\Delta\epsilon$ und somit der Effekt der Zugversteifung kleiner wird.
- w_r : Da doppelt so viele Risse entstehen wie im Fall $\lambda = 1$, sinkt die Rissbreite der individuellen Risse. Sie halbiert sich jedoch nicht, da die totale Dehnungsdifferenz ($\epsilon_{sm0} - \epsilon_{cm}$) grösser ist als bei $\lambda = 1$.

$\rho = 2.0\%$

Die Rissnormalkraft ändert sich nur geringfügig aufgrund des minimalen Einflusses der Bewehrung im ungerissenen Regime (136.4 kN bei $\rho = 0.89\%$, 143.8 kN bei $\rho = 2.000\%$ in der App).

- σ_{sr0} : Bei annähernd identischer Rissnormalkraft ändert sich die Stahlspannung am Riss bei Rissbildung annähernd linear mit dem Bewehrungsgehalt.
- $\Delta\epsilon$: Der Effekt der Zugversteifung wird abgeschwächt, da sich der Rissabstand verkleinert und weniger Kraft vom Beton im Verhältnis zur Bewehrung aufgenommen werden kann.
- w_r : Mehr Bewehrung führt zu kleineren Rissabständen und kleineren mittleren Stahldehnungen bei gleichbleibenden mittleren Betondehnungen, womit die Rissbreite stark abnimmt!

Nomenklatur

Parameter	Einheit	Beschreibung
-----------	---------	--------------

Geometrische Parameter

\emptyset	mm	Durchmesser des Bewehrungsstabs
-------------	----	---------------------------------

s	mm	Teilung der Bewehrungsstäbe
-----	----	-----------------------------

A_c	mm ²	Brutto-Betonquerschnitt: $A_c = b \cdot h$
-------	-----------------	--

A_s	mm ²	Gesamtfläche der betrachteten Bewehrung: $A_s = \frac{\emptyset^2 \cdot \pi}{4} \cdot n_s$
-------	-----------------	--

ρ_x	%	Bewehrungsgehalt in Längsrichtung: $\rho_x = \frac{A_s}{A_c}$
----------	---	---

a_s	mm ² /m	Bewehrungsfläche pro Laufmeter in betrachteter Richtung: $a_s = \frac{A_s}{h}$
-------	--------------------	--

Materialparameter

f_c	MPa	Betondruckfestigkeit (Ohne Spezifizierung des Niveaus)
-------	-----	--

f_{cd}	MPa	Bemessungswert der Betondruckfestigkeit
----------	-----	---

f_{ct}	MPa	Betonzugfestigkeit (Ohne Spezifizierung des Niveaus)
----------	-----	--

f_{ctd}	MPa	Bemessungswert der Betonzugfestigkeit
-----------	-----	---------------------------------------

f_{ctm}	MPa	Mittelwert der Betonzugfestigkeit
-----------	-----	-----------------------------------

E_{cm}	GPa	Mittlerer E-Modul des Betons
----------	-----	------------------------------

f_{sd}	MPa	Bemessungswert der Stahlzugfestigkeit
----------	-----	---------------------------------------

E_s	GPa	E-Modul des Stahls
-------	-----	--------------------

n	-	Wertigkeit: E_s / E_{cm}
-----	---	----------------------------

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 6/6
Kolloquium 1	Musterlösung	an/24.09.2020, amr/19.06.2025

Nomenklatur

Parameter Einheit Beschreibung

Zuggurtmodell

σ_{sr}	MPa	Stahlspannung am Riss (Abhängig von der tatsächlichen Normalkraft)
σ_{sr0}	MPa	Stahlspannung am Riss bei Rissbildung (Abhängig nur von der Geometrie und den Materialeigenschaften)
$\sigma_{s,min}^{(1)}$	MPa	Stahlspannung in der Mitte des Risselements ($n f_{ctm}$ während Rissbildung und $\lambda = 1$)
N_r	kN	Rissnormalkraft: $A_s \cdot \sigma_{sr0}$
ϵ_{sm}	-	Mittlere Stahldehnung
$\epsilon_{sm0}^{(1)}$	-	Mittlere Stahldehnung bei abgeschlossenem Rissbild
ϵ_{cm}	-	Mittlere Betondehnung
ϵ_{sr}	-	Stahldehnung am Riss
$\Delta \epsilon$	-	Dehnungsunterschied zwischen nacktem Stahl und Stahl im Verbund
s_{r0}	mm	Maximaler Rissabstand ($\lambda = 1$)
s_r	mm	Rissabstand in Abhängigkeit von λ : $s_r = \lambda \cdot s_{r0}$
w_r	mm	Rissbreite
τ_{b0}	MPa	Verbundspannung im elastischen Regime
τ_{b1}	MPa	Verbundspannung im plastischen Regime
$s_s^{(1)}$	MPa/mm	$d\sigma_s/dx$: Steigung der Stahlspannung im Risselement
$s_c^{(1)}$	MPa/mm	$d\sigma_c/dx$: Steigung der Betonspannung im Risselement
SIA 262		
ϵ_{cs}	-	Schwindmass
ϵ_{cd}	-	Trockenschwindmass
ϵ_{ca}	-	Autogenes Schwindmass
$\sigma_{s,adm}$	MPa	Zulässige Stahlspannung für Gebrauchstauglichkeitsnachweis von Zuggliedern
w_{nom}	mm	Zulässige nominelle Rissöffnung für Gebrauchstauglichkeitsnachweis
ρ_{min}	-	Aus SIA-Nachweis resultierender minimaler Längsbewehrungsgehalt
k_t	-	Geometrieabhängiger Reduktionsfaktor für die Zugfestigkeit des Betons
$f_{ctk,0.95}$	MPa	95%-Fraktile der Beton-Zugfestigkeit: $1.3 f_{ctm}$

⁽¹⁾ Keine allgemein gültige Zuggurtmodell-Nomenklatur, nur im Rahmen dieser Übung gültig