

# Vorspannkonzeppte

## Vorspannung – Vorspannkonzepte

Das Vorspannkonzept gliedert sich in der Tragwerksplanung praktisch auf der gleichen Stufe ein wie das Tragwerkskonzept.

Das Tragwerkskonzept umfasst:

- Tragsystem
- Hauptabmessungen und wichtigste konstruktive Details
- Baustoffe
- Bauverfahren

Das Vorspannkonzept umfasst:

- Vorspanngrad
- Vorspannlayout (Kabelprofil im Längs- und Querschnitt, Lage der Verankerungen etc.)
- Kabelgrösse
- Spannvorgang (mit Bauvorgang kompatibel)

Die Wahl der Vorspannung ist im Allgemeinen ein iterativer Prozess. Dennoch ist es wichtig, sich von Beginn weg Klarheit über die erforderlichen Platzverhältnisse für Verankerungen, Hüllrohre und Spannpressen zu verschaffen. Diese müssen der technischen Dokumentation des Spannsystems entsprechen (Zulassung). Bei der Vorbemessung können Abschätzungsformeln verwendet werden.

Das Tragwerkskonzept ist das Ergebnis des Entwurfsprozesses, der zum Ziel hat, dass *das Tragwerk bei angemessener Einpassung, Gestaltung und Zuverlässigkeit wirtschaftlich, robust und dauerhaft* ist (siehe SIA 260). Das Tragwerkskonzept spielt damit eine zentrale Rolle in der Tragwerksplanung.

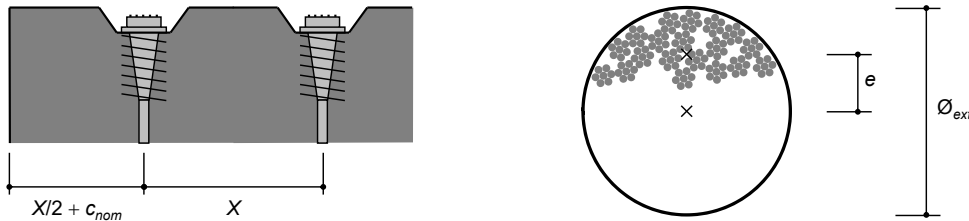
Bei Spannbetonbauten ist das Vorspannkonzept von ebenso grosser Bedeutung wie das Tragwerkskonzept (auch wenn es oft als Bestandteil dessen betrachtet wird).

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Interne Kabelvorspannung mit Verbund – Abmessungen

Die Abmessungen müssen der technischen Dokumentation des Spannsystems entsprechen (Zulassung).

Bei der Vorbemessung können folgende Abschätzungsformeln in Abhängigkeit der pro Kabel vorhandenen Spannstahlquerschnittsfläche verwendet werden:



Min. Achsabstand der Spannglieder:  $X \approx 8 \cdot \sqrt{A_p}$  (\* siehe Notizen)

Durchmesser des Hüllrohrs:  $\varnothing_{ext} \approx 2 \cdot \sqrt{A_p}$

Exzentrizität des Litzenbündels:  $e \approx 0.3 \cdot \sqrt{A_p}$  (gegenüber dem Hüllrohrmittelpunkt)

Minimaler Krümmungsradius:  $R_{min} \approx 125 \cdot \sqrt{A_p}$  (\* siehe Notizen)

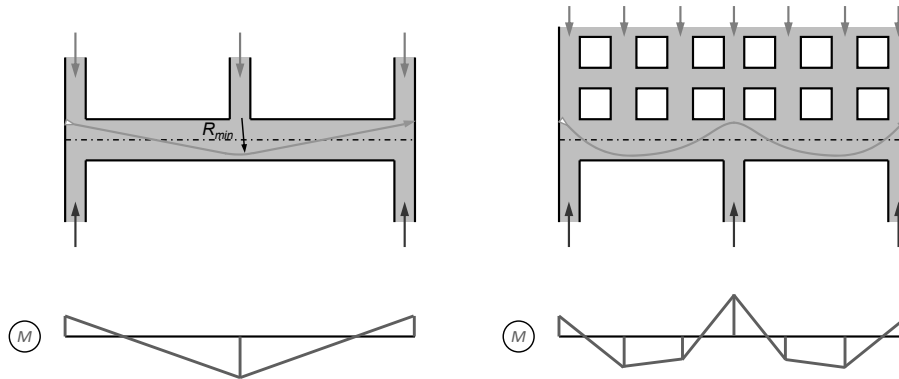
Minimale gerade Länge bei Ankern:  $l_{min} \approx 25 \cdot \sqrt{A_p}$

Die technische Zulassung eines Spannsystems enthält alle geometrischen Vorgaben, die zu beachten sind. Ausführungspläne sind mit diesen Werten zu zeichnen.

Für die Vorbemessung können die in der Folie angegebenen Näherungswerte – welche für alle Spannsysteme gut zutreffen – verwendet werden. Die mit (\*) markierten Werte sind von der Druckfestigkeit des Betons und der Festigkeit der Litzen abhängig (hier angenommen C30/37 und Y1770).

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Beispiel 1: Vorspannlayout für Abfangträger



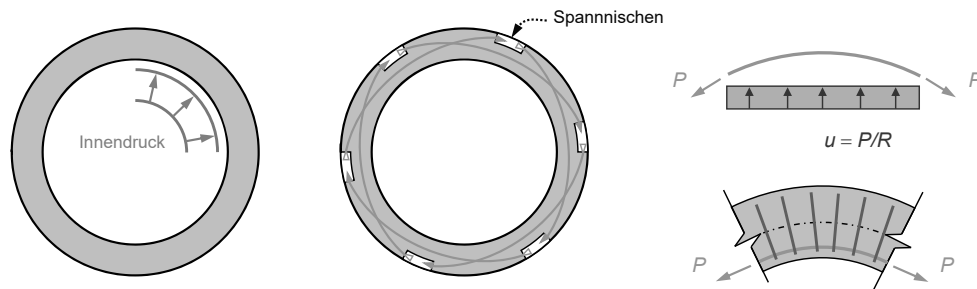
Das Kabelprofil wird etwa affin zur Momentenlinie gewählt. Die Spannkraft  $P$  wird meist etwa so festgelegt, dass der Beton unter ständigen Einwirkungen nicht dekomprimiert.

Die Vorspannung wird bei Abfangträger i.d.R. sukzessive mit dem Baufortschritt aufgebracht (Kompensation der Stützenlasten durch Umlenkkräfte).

Denkt man sich das Spannglied als Seil, kann die optimale Spanngliedgeometrie als Seilpolygon unter den Lasten, welche die Vorspannung kompensieren soll, interpretiert werden.

## Vorspannung – Vorspannkonzeppte

### Beispiel 2: Vorspannlayout für Silovorspannung



Das Ausreißen des Kabels auf der Innenseite der Krümmung muss unbedingt vermieden werden. Dazu eignen sich zum Beispiel schlaufe Bügel, welche die Umlenkkräfte zur Aussenseite hin rückverankern.

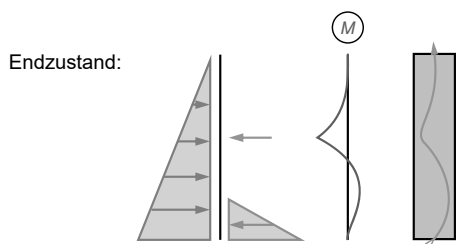
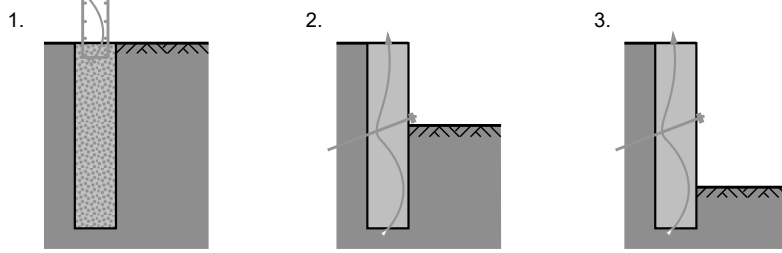
In Silos besteht die Beanspruchung, ausserhalb der Randbereiche (Randstörungen durch Boden und Deckel) primär aus Ringzugspannungen, die mit einer zentralen Vorspannung sehr einfach kompensiert werden können.

Bei Spanngliedern auf der Krümmungsinenseite ist darauf zu achten, dass sie nicht ausreißen (zwar sind die Umlenkkräfte infolge Vorspannung mit dem Innendruck resp. der Druckkraft im Beton insgesamt im Gleichgewicht, die Umlenkkraft infolge Vorspannung wirkt jedoch im Gegensatz zu den Druckkräften lokal).

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

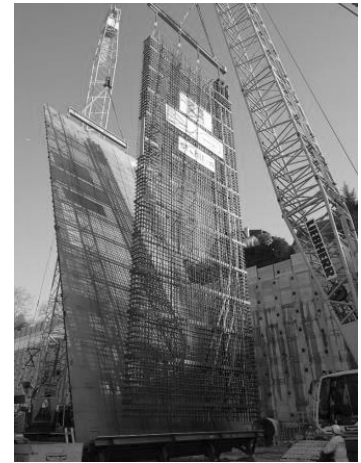
## Beispiel 3: Vorspannlayout für Schlitzwand

Bauzustände:



Das Spannkabel wird vor dem Betonieren mit dem Bewehrungskorb in den offenen Schlitz abgesenkt.  
Die Vorspannung erfolgt sukzessive mit fortschreitendem Aushub.

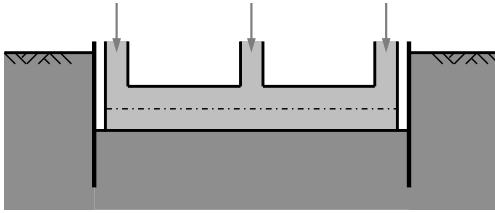
Beispiel: ETH Neubau Gloriastrasse  
(Foto © Terraqua)



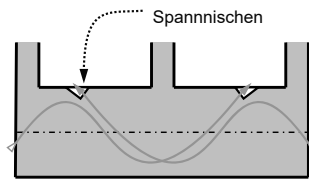
Eine Spezialanwendung der Vorspanntechnik sind vorgespannte Schlitzwände, siehe Abbildung.

# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Beispiel 4: Vorspannlayout für Bodenplatte



Die Platzverhältnisse zwischen Baugrubenverbau und Abschalung sind oft sehr knapp und reichen i.d.R. nicht aus, um die Spannpressen anzusetzen.

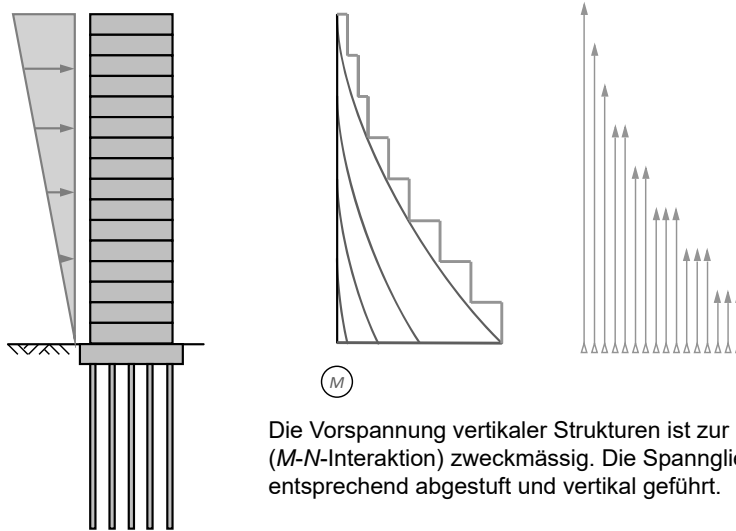


Alternativ können die Spannglieder überlappend angeordnet und von der Oberseite über Spannnischen gespannt werden. Es resultiert im Beispiel somit eine doppelte Vorspannung im Bereich unter der mittleren Stütze.

Auch Bodenplatten werden oft vorgespannt. Die Platzverhältnisse sind dabei oft massgebend für die Wahl der Spanngliedgeometrie.

## Vorspannung – Vorspannkonzeppte

### Beispiel 5: Vorspannung für Hochhauskern



In Hochhäusern und Türmen ist die Normalkraft oft zu klein, um ein Reißen der vertikalen Tragelemente («Kerne») zu verhindern. Daher werden sie oft vorgespannt.

Ein sehr hohes, vorgespanntes Bauwerk ist der CN-Tower in Toronto, mit bis zu 400 m langen Spanngliedern. Dies entspricht einem Spannweg (Verlängerung des Spannglieds beim Vorspannen) von ca.  $\Delta l = 400 \cdot 6\text{‰} = 2.4 \text{ m}$ .

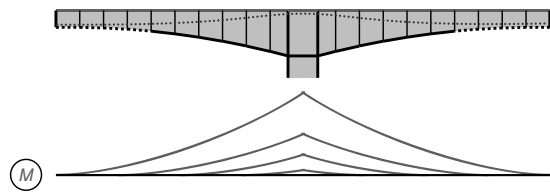
### Ergänzende Bemerkungen

- Die Spannglieder können von oben gespannt werden (Spanneinrichtungen in jeder Etappe mitführen) oder von unten, wofür ein Spannkeller erforderlich ist. Ist die Zugänglichkeit der unteren Anker (die aus statischen Überlegungen oft möglichst nahe an der Unterkante der Bodenplatte angeordnet werden sollten) nicht gewährleistet, müssen die unteren Verankerungen mit der Bodenplatte betoniert und die Kabel auf Bobinen mit dem Kern hochgeführt oder in jeder Betonieretappe gekuppelt werden.
- Als Alternative existiert seit kurzem ein Spannanker (VSL Typ AF), bei welchem nur die Anker mit dem Hüllrohr einbetoniert werden müssen. Die Litzen können am Schluss von oben, durch das Hüllrohr, in den (unzugänglichen) Ankerkörper in der Bodenplatte eingeführt werden. Der Ankerkörper wird vor der Vorspannung mit einer hochfesten Vergussmasse ausinjiziert, welche den Kraftschluss (Verankerung der Litzen im Anker) gewährleistet.



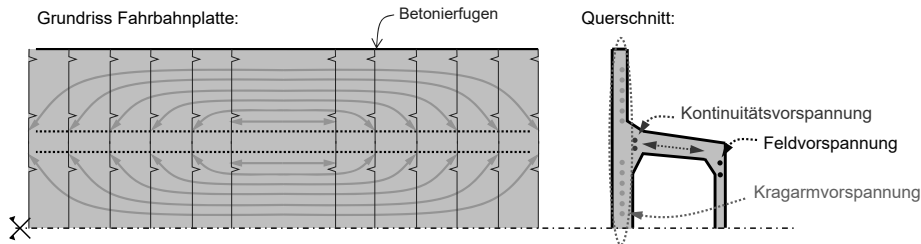
# Vorspannung – Vorspannkonzeppte

## Beispiel 6: Vorspannlayout für Freivorbaubrücke



Zusätzlich zur für die Abdeckung der negativen Momente im Bauzustand erforderlichen Kragarmvorspannung in der Fahrbahnplatte wird in der Regel eine Kontinuitätsvorspannung (\*) im Steg und oft eine Feldvorspannung (\*) in der unteren Platte vorgesehen.

(\*) nach dem Fugenschluss gespannt

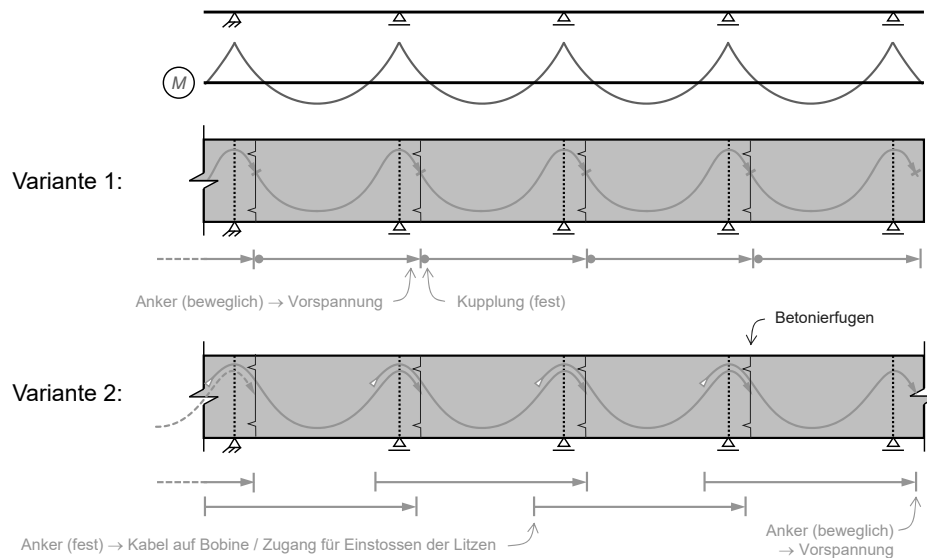


Bei Freivorbaubrücken wird der grösste Teil der Vorspannung im Bauzustand als Kragarme gespannt. Diese sogenannte Kragarmvorspannung läuft in der Fahrbahnplatte und wird in Stegnähe verankert (siehe Schubanschluss, Stahlbeton I). Zwar sind diese Kabel gerade, aufgrund des gevouteten Querschnitts verlaufen sie aber – bezogen auf die Schwerachse des Trägers – annähernd parabolisch.

Nach dem Fugenschluss werden in modernen Freivorbaubrücken sogenannte Kontinuitätskabel eingezogen, und oft auch eine Feldvorspannung (in der unteren Kastenplatte in Feldmitte). Mit dieser Lösung können Probleme mit stetig zunehmenden Langzeitverformungen, wie sie bei frühen Freivorbaubrücken auftraten (nur Kragarmvorspannung, konstruktiv in Feldmitte gelenkig), vermieden werden.

## Vorspannung – Vorspannkonzeppte

### Beispiel 7: Vorspannlayout für Durchlaufträger



14.02.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton II

11

Die Abbildung zeigt mögliche Vorspannkonzeppte für feldweise hergestellte Balkenbrücken. Der Spanngliedverlauf (inkl. Kupplungen) ist auf den Bauablauf abzustimmen.

### Ergänzende Bemerkungen

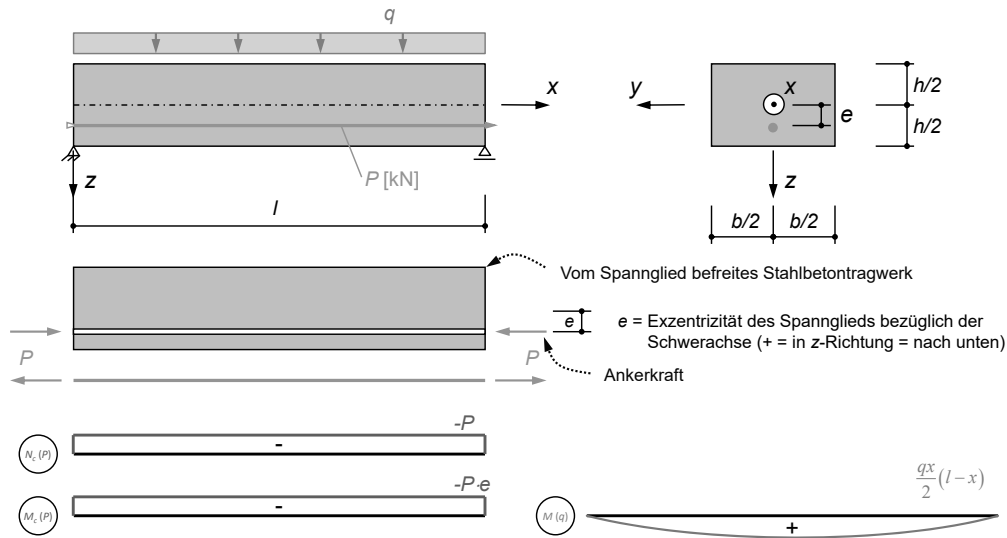
- Verankerungen in den Betonierfugen (Etappengrenzen) sind in der Regel wesentlich einfacher als Verankerungen an anderen Stellen, welche spezielle Massnahmen (Aussparungen, Lisenen) erfordern.
- Variante 1, bei der alle Kabel in der Etappenfuge = im gleichen Querschnitt gekoppelt werden, sollte jedoch bei Bahnbrücken unbedingt vermieden und bei Strassenbrücken nur in Ausnahmefällen eingesetzt werden. Bei einer solchen Lösung sind die Verankerungen im Bereich der neutralen Achse anzuordnen (was auch bei Variante 2 zu empfehlen ist), und es ist eine kräftige schlaffe Bewehrung einzulegen. Grund: Die Ermüdungsfestigkeit der Verankerungen ist kleiner als diejenige der Kabel, und im Bereich der Kupplungen kann infolge Spannungsumlagerungen nur mit einer reduzierten Spannkraft gerechnet werden, so dass in vielen Fällen trotz voller Vorspannung mit einer Dekompression zu rechnen ist (Details siehe Fachliteratur zum Thema «Koppelfugen»).

# Vorspannung Statisch bestimmte Systeme

Auf den folgenden Folien wird die Vorspannung statisch bestimmter Systeme behandelt. Der Einfluss einer statisch unbestimmten Lagerung wird später untersucht.

# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – gerade Kabelführung



Die Folie zeigt einen einfach gelagerten Balken mit einem geraden Spannglied. Dieses wird vorgespannt, indem an beiden Enden gezogen wird (Zugkraft = Vorspannkraft). Die Reaktion der Zugkraft wird als Druckkraft an den Träger abgegeben. Die auf den Beton-Träger wirkende Ankerkraft stimmt in Ort und Grösse (Betrag) mit der Vorspannkraft überein.

Betrachtet man das **gesamte Tragwerk**, inklusive Spannglied, steht die Zugkraft im Spannglied offensichtlich in jedem Querschnitt mit der Druckkraft im Beton im Gleichgewicht. Infolge Vorspannung resultieren (am statisch bestimmten System) **keine Schnittkräfte** im Gesamtsystem. Die Zugkraft im Spannglied und die exzentrische Druckkraft im Beton bilden einen **Eigenspannungszustand**.

Betrachtet man den **vom Spannglied befreiten Träger**, wirken auf diesen in jedem Querschnitt die der exzentrischen Druckkraft entsprechenden **Schnittkräfte infolge Vorspannung**

$$M_c(P) = -P \cdot e \text{ und } N_c(P) = -P.$$

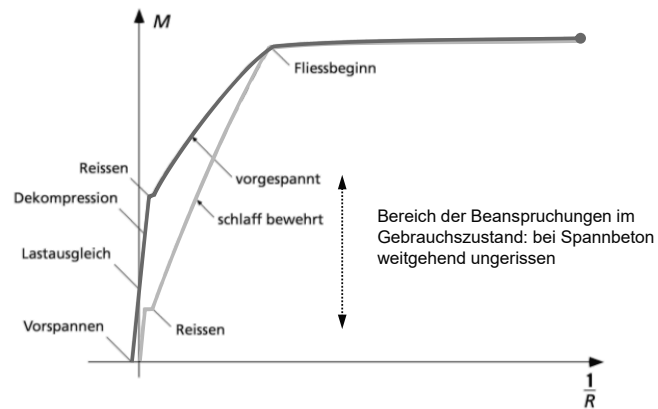
Diese beiden Möglichkeiten zur Betrachtung der Vorspannung in Stabtragwerken unterscheiden sich in der **Systemabgrenzung**, führen jedoch zum gleichen Resultat. Sie sind vor allem bei der Untersuchung statisch unbestimmter Systeme relevant und werden später näher behandelt (siehe *Rechnerische Behandlung der Vorspannung*). Bei statisch bestimmten Systemen sind die Verhältnisse dagegen einfach: die Schnittkräfte infolge Vorspannung (bei der Betrachtung des vom Spannglied befreiten Trägers) entsprechen dem auf den Betonquerschnitt wirkenden Teil des Eigenspannungszustands (bei der Betrachtung des gesamten Tragwerks).

### Ergänzende Bemerkung

- Gerade Spannglieder sind bei Herstellung im Werk (Spannbettvorspannung) üblich. Im Beispiel wird jedoch nicht im Spannbett, sondern gegen den Träger vorgespannt.

# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Biegetragverhalten



- ungerissen-elastisches Verhalten ist bei Spannbeton viel wichtiger als bei Stahlbeton
- Spannungen am ungerissenen Querschnitt sind für das Verständnis des Tragwerkszustands zentral
- Zusätzlich zum Tragsicherheitsnachweis wird deshalb stets ein Nachweis der Spannungen im Beton und im Spannstahl geführt

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – gerade Kabelführung

Spannungen am reinen Betonquerschnitt:

$$\sigma_c = \frac{N_c(P)}{A_c} + \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot z = -\frac{P}{A_c} + \frac{-P \cdot e + \frac{qx \cdot (l-x)}{2}}{I_c} \cdot z$$

mittlere Vorspannung

Damit der Querschnitt nicht dekomprimiert (keine Zugspannungen, volle Vorspannung), müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

- bei  $x = 0$  (Auflager):

$$\sigma_{c,\text{sup}} = \sigma_c \left( z = -\frac{h}{2} \right) = -\frac{P}{A_c} + \frac{-P \cdot e}{I_c} \cdot \frac{-h}{2} = -\frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_{c,\text{sup}}} \leq 0 \quad \rightarrow e \leq \frac{W_{c,\text{sup}}}{A_c} = k_{\text{inf}} \quad \text{mit } W_{c,\text{sup}} = \frac{I_c}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \text{ Widerstandsmoment}$$

- bei  $x = l/2$  (Feldmitte):

$$\sigma_{c,\text{inf}} = \sigma_c \left( z = \frac{h}{2} \right) = -\frac{P}{A_c} + \frac{-P \cdot e + \frac{ql^2}{8}}{I_c} \cdot \frac{h}{2} \leq 0 \quad \rightarrow P \left( e + \frac{W_{c,\text{inf}}}{A_c} \right) \geq \frac{ql^2}{8} \quad \rightarrow P \geq \frac{ql^2}{8 \cdot (e + k_{\text{sup}})} \quad \text{mit } W_{c,\text{sup}} = \frac{I_c}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \text{ Widerstandsmoment}$$

$$k_{\text{sup}} = \frac{W_{c,\text{inf}}}{A_c} = \frac{h}{6} \text{ obere Kernweite}$$

Geht man davon aus, dass der Querschnitt unter der kombinierten Beanspruchung durch die Vorspannung  $P$  und eine Belastung  $q$  ungerissen bleibt, können die Spannungen mit den bekannten Formeln (Annahme: Ebenbleiben des Querschnitts) für Biegung mit Normalkraft ermittelt werden.

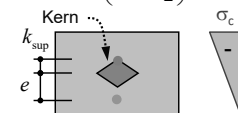
Von besonderem Interesse ist, unter welcher Belastung der Querschnitt dekomprimiert (für diese Belastung ist der Querschnitt vorgespannt). In der Praxis wählt man oft eine Belastung (zum Beispiel ständige Lasten), für welche ein Bauteil voll vorgespannt werden soll, und legt die Vorspannung (Spannkraft, Kabelgeometrie) entsprechend fest.

### Ergänzende Bemerkungen

- Ein Nachteil der geraden Spanngliedführung besteht darin, dass die Exzentrizität (Hebelarm) der Vorspannung nicht ausgenutzt werden kann, wenn eine Dekompression der Querschnitte in Auflagenähe vermieden werden soll (die Kabelachse muss innerhalb der Kernweite  $W/A$  liegen, sonst dekomprimiert der Betonquerschnitt unter exzentrischem Druck).
- Streng genommen wirkt die Vorspannung  $P$  am *Nettoquerschnitt* (Betonquerschnitt mit Hüllrohr als Aussparung), die Belastung  $q$  am *ideellen Querschnitt* (Betonquerschnitt und Spannstahl mit Wertigkeit  $E_p/E_c$ ). In der Praxis wird meist vereinfacht für alle Beanspruchungen mit dem *Bruttoquerschnitt* gerechnet; der Fehler ist – ausser bei sehr grossen Spanngliedern – vernachlässigbar.

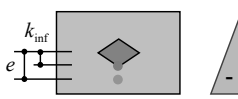
## Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

Da unter der massgebenden Beanspruchung die Spannungen am Querschnittsrand gerade = 0 sind, wirkt dabei die resultierende Druckkraft im unteren («inf») resp. oberen («sup») Kernpunkt des Querschnitts:

$$\sigma_{c,inf} = \sigma_c \left( z = +\frac{h}{2} \right) \leq 0 \rightarrow \frac{N_c(P)}{A_c} + \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot z_{max} \leq 0$$


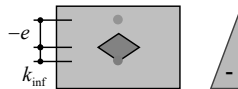
$$-\frac{P}{A_c} - \frac{P \cdot e}{W_{c,inf}} + \frac{M(q)}{W_{c,inf}} \leq 0 \quad \text{mit } W_{c,inf} = \frac{I_c}{z_{max}} = \frac{bh^2}{6}, k_{sup} = \frac{W_{c,inf}}{A_c} \quad (\text{obere Kernweite})$$

$$\rightarrow P(e + k_{sup}) \geq M(q) \quad \text{Druckkraft } -P \text{ wirkt im oberen Kernpunkt}$$

$$\sigma_{c,sup} = \sigma_c \left( z = -\frac{h}{2} \right) \leq 0 \rightarrow \frac{N_c(P)}{A_c} + \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot z_{min} = \frac{N_c(P)}{A_c} - \frac{M_c(P) + M(q)}{I_c} \cdot |z_{min}| \leq 0$$


$$-\frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_{c,sup}} - \frac{M(q)}{W_{c,sup}} \leq 0 \quad \text{mit } W_{c,sup} = \frac{I_c}{|z_{min}|} = \frac{bh^2}{6}, k_{inf} = \frac{W_{c,sup}}{A_c} \quad (\text{untere Kernweite})$$

$$\rightarrow P(-e + k_{inf}) \geq -M(q)$$



wobei wenn  $\sigma_{c,sup} = 0$  massgebend wird, im Normalfall  $e < 0$  und  $M(q) < 0$  ist und somit:

$$\rightarrow P(|e| + k_{inf}) \geq |M(q)| \quad \text{Druckkraft } -P \text{ wirkt im unteren Kernpunkt}$$

Die Resultierende der Druckkraft infolge Vorspannung (auf den vom Spannglied befreiten Träger wirkend) liegt, solange nur die Vorspannung wirkt, im Schwerpunkt des Spannglieds (Druckkraft  $P$  mit Exzentrizität  $e$ , somit  $M_c(P) = -P \cdot e$  und  $N_c(P) = -P$ ).

Wird zusätzlich eine Belastung  $q$  aufgebracht, die ein Biegemoment  $M(q)$  verursacht, verschiebt sich die Lage der Druckresultierenden, so dass die Exzentrizität der Druckkraft dem aufzunehmenden Biegemoment  $M_c(P) + M(q)$  entspricht.

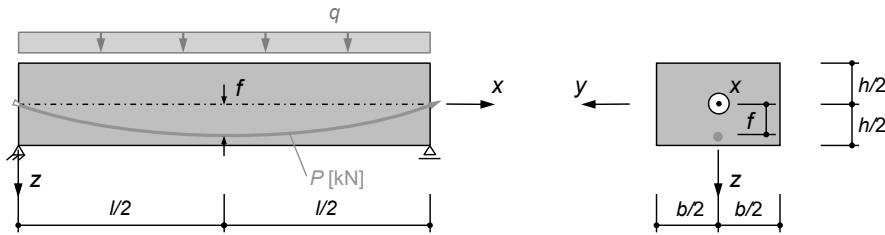
Bei der Dekompression greift die Druckkraft  $P$  gerade am Rand des Kerns des Querschnitts an. Damit kann die Grösse der erforderlichen Vorspannkraft zur Gewährleistung eines ungerissenen Querschnitts unter einer gegebenen Beanspruchung ermittelt werden.

### Ergänzende Bemerkungen

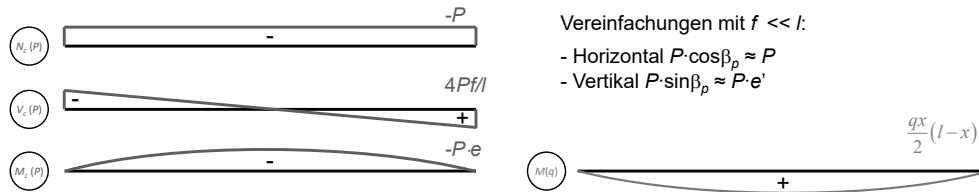
- Der Querschnitt kann am oberen oder unteren Querschnittsrand dekomprimieren. Unter maximaler Beanspruchung ist der Querschnittsrand massgebend, auf dessen Seite das Spannglied liegt; unter minimaler Beanspruchung (Extremfall: Vorspannung alleine wirksam) dagegen der dem Spannglied gegenüberliegende Querschnittsrand. Beide Fälle sind bei der Auslegung der Vorspannung zu berücksichtigen.
- Der in der Folie dargestellte Querschnitt würde unter Vorspannung alleine dekomprimieren (am dem Spannglied gegenüberliegenden Querschnittsrand), da die Spanngliedachse – und damit die Druckkraft infolge Vorspannung – ausserhalb des Kerns liegt. Da beim Vorspannen in der Regel das Eigengewicht (oder zumindest ein Teil davon) aktiviert wird, tritt dies aber in der Praxis nicht ein. Die mittlere Abbildung zeigt den Fall, bei welchem die zusätzlich zur Vorspannung wirkende Beanspruchung gerade so gross ist, um eine Dekompression am dem Spannglied gegenüberliegenden Querschnittsrand zu vermeiden.

# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – parabolische Kabelführung



$$e(x) = \frac{4fx}{l^2} \cdot (l-x) \quad e = \text{Exzentrizität des Spannglieds bezüglich der Schwerachse (+ = in z-Richtung = nach unten)}$$



Vereinfachungen mit  $f \ll l$ :

- Horizontal  $P \cdot \cos \beta_p \approx P$
- Vertikal  $P \cdot \sin \beta_p \approx P \cdot e'$

Die Folie zeigt einen einfachen Balken mit parabolischem Spannglied. Dieses wird vorgespannt, indem an beiden Enden gezogen wird (Zugkraft = Vorspannkraft). Die Reaktion dazu wird an den Träger abgegeben. Wie beim geraden Spannglied stimmt auch hier die auf den Beton-Träger wirkende Ankerkraft in Ort und Grösse (Betrag) mit der Spannkraft überein.

Durch die Krümmung des Spannglieds resultieren Umlenkkräfte, die einerseits auf das Spannglied wirken und andererseits, mit umgekehrtem Vorzeichen, auf den vom Spannglied befreiten Träger. Die Zugkraft im Spannglied steht wie beim geraden Spannglied in jedem Querschnitt mit der Druckkraft im Betonquerschnitt im Gleichgewicht (siehe \* unten); im Unterschied zum geraden Spannglied sind die Zug- und Druckkraft hier aber geneigt. Infolge Vorspannung resultieren (am statisch bestimmten System) auch bei gekrümmter Spanngliedführung **keine Schnittkräfte** im Gesamtsystem. Die Zugkraft im Spannglied und die exzentrische Druckkraft im Beton bilden auch hier einen **Eigenspannungszustand**.

Betrachtet man den **vom Spannglied befreiten Träger**, wirken auf diesen in jedem Querschnitt die der exzentrischen, geneigten Druckkraft entsprechenden **Schnittkräfte infolge Vorspannung** (mit der Spanngliedneigung  $\beta_p$ ):  $M_c(P) = -P \cdot \cos \beta_p \cdot e$ ,  $N_c(P) = -P \cdot \cos \beta_p$  und  $V_c(P) = -P \cdot \sin \beta_p$

### Ergänzende Bemerkung

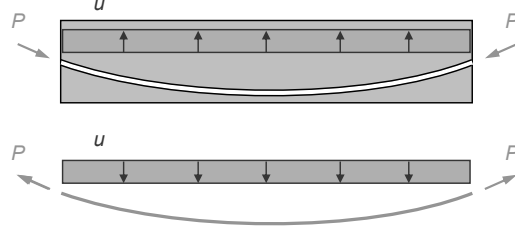
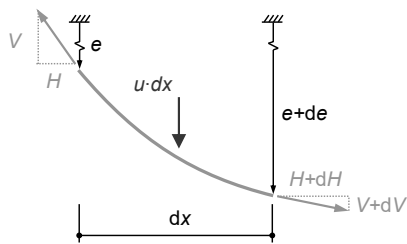
- (\*) Im Spannglied (Idealisierung: Seil,  $EI = 0$ ) wirkt in einem beliebigen Querschnitt eine Zugkraft in der Grösse der Spannkraft in Richtung des Spannglieds. Diese Zugkraft entspricht der Resultierenden aus (i) der geneigten Spannkraft am Spanngliedende und (ii) den Umlenkkräften zwischen Spanngliedende und betrachtetem Schnitt. Die Kraft im vom Spannglied befreiten Träger, im gleichen Querschnitt, entspricht der Resultierenden aus den entgegengesetzten Kräften (geneigte Ankerkraft und Umlenkkräfte) und ist damit offensichtlich im Gleichgewicht mit der Zugkraft im Spannglied.



# Vorspannung – statisch bestimmte Systeme

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt – parabolische Kabelführung

Umlenkräfte:



$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_H &= H + dH - H = 0 && \rightarrow dH = 0 \\ \Sigma F_V &= V + dV - V + u \cdot dx = 0 && \rightarrow u = -\frac{dV}{dx} \\ \Sigma M &= H \cdot de - V \cdot dx = 0 && \rightarrow V = H \cdot \frac{de}{dx} \end{aligned} \right\}$$

Gilt für parabolische Spannglieder mit  $P \approx H$

$$\rightarrow u = -H \cdot \frac{d^2e}{dx^2} \approx \frac{8Pf}{l^2} \left( \rightarrow M_c(P) \Big|_{x=l/2} = -\frac{ul^2}{8} = -Pf \right)$$

NB: Mit  $u = q$  resultiert ein vollständiger Lastausgleich, in jedem Querschnitt ergibt sich ein zentrischer Druckspannungszustand:

$$u = \frac{8Pf}{l^2} = q \rightarrow P = \frac{ul^2}{8f} \rightarrow M_c(P) = -M(q), V_c(P) = -V(q), \sigma_c = -\frac{P}{A_c}$$

Die Biegesteifigkeit des Spannglieds ist vernachlässigbar klein. Damit kann das Spannglied als Seil idealisiert werden: Es nimmt nur Zugkräfte auf, und eine Krümmung bedingt Umlenkräfte, die senkrecht zur Spanngliedachse wirken.

Die Grösse der senkrecht zur Spanngliedachse wirkenden Umlenkräfte  $u$  [kN/m] kann aus der Spannkraft  $P$  und der Krümmung  $1/R$  ermittelt werden; in den üblichen Koordinaten gilt

$$u = \frac{P}{R} = P \frac{y''(x)}{\{1 + [y'(x)]^2\}^{3/2}}$$

Da die Spannglieder für übliche Verhältnisse nur kleine Krümmungen aufweisen und ihre Achse gegenüber der Trägerachse nur wenig geneigt ist ( $\cos\beta_p \approx 1$ ,  $\sin\beta_p \approx \tan\beta_p \approx \beta_p$  [rad]), werden in der Praxis die horizontalen Komponenten der Umlenkräfte vernachlässigt und die Vertikalkomponenten mit der in der Folie angegebenen Näherung ermittelt.

### Ergänzende Bemerkung

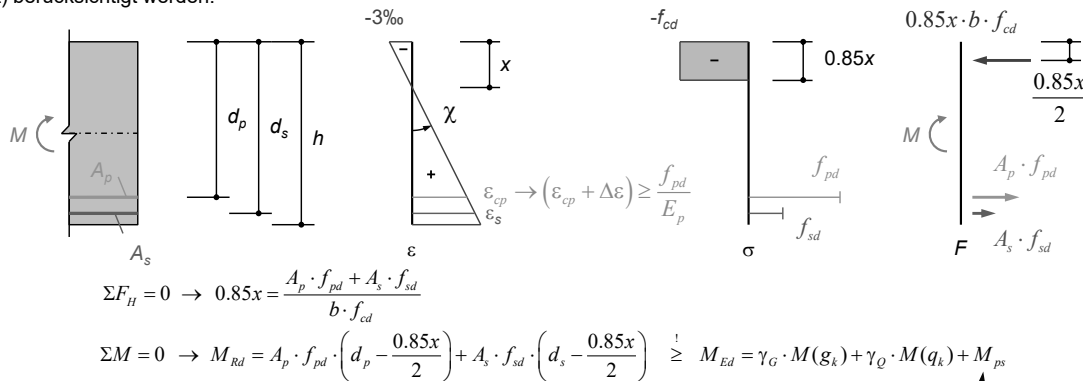
- Die Biegesteifigkeit des Spannglieds entspricht der Summe der Biegesteifigkeiten der Litzen resp. Drähte, **nicht** der Biegesteifigkeit des gesamten Spanngliedquerschnitts (da sich die Litzen resp. Drähte gegeneinander verschieben können, wirken sie als parallelgeschaltete Elemente und nicht als ein Gesamtquerschnitt). Daher ist die Biegesteifigkeit des Spannglieds auch bei sehr grossen Vorspannkabeln gegenüber der Biegesteifigkeit des vom Spannglied befreiten Trägers vernachlässigbar klein.

# Vorspannung – Tragsicherheit

## Biegetragsicherheit

Der Biegezugwiderstand kann analog wie für Stahlbetonquerschnitte ermittelt werden. Bei Vorspannung mit Verbund wird in der Regel die Spannung  $f_{pd}$  erreicht (Vordehnung Spannstahl  $\Delta\varepsilon$  berücksichtigen).

Bei Spanngliedern ohne Verbund darf ohne genauere Untersuchungen nur eine Spannung von  $\sigma_{ps}$  (nach Abzug aller Verluste vorhandene Spannkraft) berücksichtigt werden.



NB: Betrachtung des gesamten Tragwerks inkl. Spannglied, sowohl für Widerstand als auch für Einwirkungen → bei Einwirkungen nur  $M_{ps}$  ansetzen, nicht  $M_e(P)$ !

Der Biegezugwiderstand kann analog ermittelt werden wie bei schlaff bewehrten Trägern. Am einfachsten ist es, wenn das Gesamtsystem (Spannglied und vom Spannglied befreiter Träger) betrachtet wird; in diesem Fall kann die Vorspannung auf der Widerstandsseite voll aktiviert werden (da sie in den Einwirkungen nicht enthalten ist).

Der Spannstahl weist zum Zeitpunkt der Injektion gegenüber dem Beton eine um den Betrag  $\Delta\varepsilon$  grössere Dehnung auf. Die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon$  entspricht der Differenz zwischen der Vorspann-Dehnung des Spannglieds  $P_0/(E_p A_p)$  und der Dehnung des Betons auf der Höhe des Spannglieds bei der Injektion (letztere ist in der Regel eine Stauchung). Die Dehnungsdifferenz bleibt nach der Injektion – unter der Annahme eines starren Verbunds – konstant. Der Spannungszustand kann nach der Injektion daher unter der Annahme ermittelt werden, dass der Querschnitt eben bleibt. Die Dehnung des Spannstahls entspricht dabei der Dehnung in der Achse des Spannglieds gemäss angenommener Dehnungsebene zuzüglich  $\Delta\varepsilon$ .

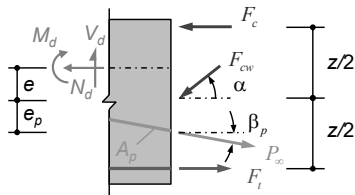
Für übliche Verhältnisse erreicht der Spannstahl (dank der Vordehnung  $\Delta\varepsilon$ ) im Bruchzustand die Fließgrenze. Damit kann der Biegezugwiderstand sehr einfach ermittelt werden:  
 $M_{Rd} = A_p \cdot f_{pd} \cdot z_p + A_s \cdot f_{sd} \cdot z_s$  (mit  $z_p = d_p - 0.425 \cdot x$  und  $z_s = d_s - 0.425 \cdot x$ ).

## Ergänzende Bemerkungen

- Die Höhe der Druckzone, und damit die Hebelarme der inneren Kräfte (Spannstahl  $z_p$ , schlaffe Bewehrung  $z_s$ ) müssen mit der gesamten Druckkraft  $A_p \cdot f_{pd} + A_s \cdot f_{sd}$  ermittelt werden. Würde man  $z_p$  mit  $A_p \cdot f_{pd}$  und  $z_s$  mit  $A_s \cdot f_{sd}$  ermitteln, würde die Höhe der Druckzone unterschätzt und damit der Hebelarm der inneren Kräfte – und damit auch der Biegezugwiderstand – überschätzt.
- Zwangsmomente  $M_{ps}$  siehe später (statisch unbestimmte Systeme)

# Querkrafttragsicherheit

«Querschnittswiderstand»  $V_{Rd}$  gemäss SIA 262:



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den Kräften im Druck- und Zuggurt  $F_c$  bzw.  $F_t$  wirkt die geneigte Spannkraft  $P_\infty$  (Vorspannung auf Widerstandsseite).

Diese leistet bei günstiger Neigung einen wesentlichen Beitrag zu  $V_{Rd}$ . Die über das geneigte Betondruckfeld abzutragende Querkraft reduziert sich näherungsweise um  $\Delta V_{Rd,p} = P_\infty \cdot \sin \beta_p$  (die Neigung der Druckgurtkraft  $F_c$  wird hier auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt; Einfluss siehe später).

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um Terme infolge Vorspannung.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_V : F_{cw} &= \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha} \\ \Sigma M_T : F_c &= \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha \\ \Sigma M_C : F_t &= \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Erf. Widerstand der Bügel:} \\ v_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha} \\ \\ \rightarrow \text{Betondruckspannungen:} \\ \sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \end{array}$$

Der Querkraftwiderstand kann mit der gleichen Modellvorstellung ermittelt werden wie für schlaff bewehrte Träger.

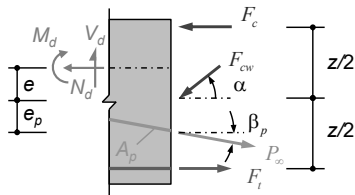
Durch die Neigung der Vorspannkraft erhöht sich der Querkraftwiderstand (resp. reduziert sich die vom Stahlbetonträger aufzunehmende Querkraft) um den Wert  $P_\infty \cdot \sin \beta_p$ . Da bei einem Querkraftversagen (Stegdruckbruch) im Bruchzustand kaum Spanngliedverlängerungen vor dem Versagen auftreten, wird dabei die Spannkraft konservativ nicht mit  $A_p \cdot f_{pd}$ , sondern nur mit ihrem Langzeitwert  $P_\infty$  im jeweiligen Querschnitt angesetzt ( $P_\infty =$  initiale Vorspannkraft  $P_0$  abzüglich Reibungs- und Langzeitverluste, siehe später).

## Ergänzende Bemerkungen:

- Da kein Spannkraftzuwachs in Rechnung gestellt wird, kann der Hebelarm der inneren Kräfte für den Querkraftabtrag im Steg, wie in der Abbildung angegeben, mit der Lage der schlaffen Bewehrung ermittelt werden. Würde (beispielsweise bei einem Zwischenaufleger) ein Spannkraftzuwachs angesetzt, sind die Verhältnisse komplizierter, da sich in diesem Fall ein Teil des Druckfelds auf die Vorspannung abstützt und dadurch den Spannkraftzuwachs überhaupt erst ermöglicht.
- Siehe Folien 109-110 und Vorlesung Advanced Structural Concrete für weitere Erläuterungen.

# Querkrafttragsicherheit

«Querschnittswiderstand»  $V_{Rd}$  gemäss SIA 262:



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den Kräften im Druck- und Zuggurt  $F_c$  bzw.  $F_t$  wirkt die geneigte Spannkraft  $P_\infty$  (Vorspannung auf Widerstandsseite).

Diese leistet bei günstiger Neigung einen wesentlichen Beitrag zu  $V_{Rd}$ . Die über das geneigte Betondruckfeld abzutragende Querkraft reduziert sich näherungsweise um  $\Delta V_{Rd,p} = P_\infty \cdot \sin \beta_p$  (die Neigung der Druckgurtkraft  $F_c$  wird hier auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt; Einfluss siehe später).

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um Terme infolge Vorspannung.

Wenn die Summe der Durchmesser aller nebeneinander im Steg liegenden Hüllrohre  $b_w/8$  überschreitet, sind die Betonspannungen mit einer reduzierten nominellen Stegbreite zu ermitteln:

$$b_{w,nom} = b_w - k_H \cdot \sum \varnothing_H$$

$k_H = 0.5$  für injizierte Stahlhüllrohre

$k_H = 0.8$  für injizierte Kunststoffhüllrohre

$k_H = 1.2$  für nicht injizierte Hüllrohre

→ Erf. Widerstand der Bügel:

$$v_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha}$$

→ Betondruckspannungen:

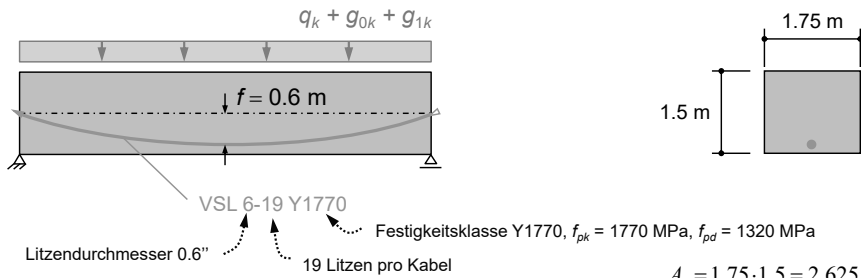
$$\sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

NB: Gleiches Resultat, wenn die Einwirkungen inkl.  $-V_c(P_\infty) = P_\infty \cdot \sin \beta_p$  ermittelt werden = Betrachtung des vom Spannlied befreiten Tragwerks, sowohl für Widerstand als auch für Einwirkungen

Bei der Kontrolle der Druckspannungen im Steg ist die ungünstige Wirkung der Hüllrohre zu berücksichtigen.

# Vorspannung – Beispiel

## Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt



Spannweite  $l = 16$  m

Belastung: - Eigenlast:  $g_{0k} = 1.5 \cdot 1.75 \cdot 25 = 65.6$  kN/m  
 - Auflast:  $g_{1k} = 28$  kN/m  
 - Nutzlast:  $q_k = 14$  kN/m

$$A_c = 1.75 \cdot 1.5 = 2.625 \text{ m}^2$$

$$I_c = \frac{1.75 \cdot 1.5^3}{12} = 0.4922 \text{ m}^4$$

Bemessungswert:  $q_d = 1.35 \cdot (65.6 + 28) + 1.5 \cdot 14 = 147.2$  kN/m

Spannstahlfläche:  $A_p = 19 \cdot 150 = 2850$  mm<sup>2</sup>

Vorspannung:  $\sigma_{p0} = 0.7 \cdot f_{pk} = 1239$  MPa,  $\sigma_{p\infty} \approx 0.85 \cdot \sigma_{p0} = 1053$  MPa,

Auf dieser und den folgenden Folien werden die Biege- und Querkrafttragsicherheit sowie die Spannungsermittlung und Durchbiegungsberechnung an einem einfachen Beispiel erläutert.

Im Beispiel wird die schlaffe Längsbewehrung der Einfachheit halber vernachlässigt. Dies ist bei der Vorbemessung – zumindest bei stark vorgespannten Trägern – oft zweckmässig. Alternativ kann eine schlaffe Mindestbewehrung (die immer erforderlich ist) gewählt und bei der Auslegung der Vorspannung berücksichtigt werden.

## Vorspannung – Beispiel

### Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Biegetragsicherheit (schlaife Bewehrung vernachlässigt):

$$M_d = \frac{q_d l^2}{8} = \frac{147.2 \cdot 16^2}{8} = 4717 \text{ kNm}$$

$$A_p \cdot f_{pd} = 2850 \cdot 1.32 = 3762 \text{ kN} \quad (f_{pd} = 1320 \text{ MPa})$$

$$c = \frac{A_p f_{pd}}{b f_{cd}} = \frac{3762}{1750 \cdot 0.02} = 108 \text{ mm} \quad (\text{C30/37: } f_{cd} = 20 \text{ MPa} = 20 \text{ N/mm}^2 = 0.02 \text{ kN/mm}^2)$$

$$M_{Rd} = A_p f_{pd} \cdot \left( d_p - \frac{c}{2} \right) = 3762 \cdot \left( 1.35 - \frac{0.108}{2} \right) = 4876 \text{ kNm} > 4717 \text{ kNm, i.O.}$$

Vorspannkraften:

- Initiale Vorspannung auf 70% von  $f_{pk}$ :  $P_0 = 2850 \cdot 0.7 \cdot 1770 = 3531 \text{ kN}$
- Vorspannkraft nach Abzug der Langzeitverluste:  $P_\infty \approx 0.85 \cdot P_0 = 0.85 \cdot 3531 = 3001 \text{ kN}$

Erläuterungen siehe Folie.

## Vorspannung – Beispiel

### Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Querkrafttragsicherheit (Näherung, bei Auflager):

$$V_d = \frac{q_d l}{2} = \frac{147.2 \cdot 16}{2} = 1178 \text{ kN}$$

$$\tan \beta_p = \frac{2f}{l/2} = \frac{1.2}{8} = 0.15 \rightarrow \beta_p = 149 \text{ mrad}$$

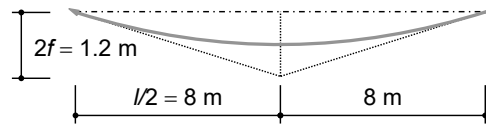
$$P_\infty \cdot \sin \beta_p = 3001 \cdot \sin(0.149) = 445 \text{ kN}$$

$$V_{dc} = V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p = 1178 - 445 = 733 \text{ kN}$$

$$a_{s,erf} = \frac{V_{dc}}{z \cdot f_{sd} \cdot \cot \alpha} = \frac{733}{1.3 \cdot 0.435} = 1296 \text{ mm}^2/\text{m}$$

z.B. Ø12@150, 2-schnittig,  $a_s = 1506 \text{ mm}^2/\text{m}$

$$\sigma_c = \frac{V_{dc}}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{733}{1.75 \cdot 1.3 \cdot 0.5 \cdot 1000} = 0.6 \text{ MPa} < 11 \text{ MPa} = k_c \cdot f_{cd}$$



Erläuterungen siehe Folie.

## Vorspannung – Beispiel

### Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Spannungen in Feldmitte ( $e = 0.6 \text{ m}$ ) zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

Wirksame Belastung: nur Eigengewicht  $g_0 = 65.6 \text{ kN/m}$ ,  $M(g_{0k}) = 2100 \text{ kNm}$

$$\begin{cases} \sigma_{c,\text{sup}} \\ \sigma_{c,\text{inf}} \end{cases} = \frac{N_c(P_0)}{A_c} + \frac{M_c(P_0) - P_0 \cdot e}{I_c} \cdot \begin{cases} z_{\text{sup}} \\ z_{\text{inf}} \end{cases} = \frac{-3.531}{2.625} + \frac{2.1 - 3.531 \cdot 0.6}{0.4922} \cdot \begin{cases} -0.75 \\ 0.75 \end{cases} = \begin{cases} -1.32 \\ -1.37 \end{cases} \text{ MPa}$$

Spannungen in Feldmitte ( $e = 0.6 \text{ m}$ ) zum Zeitpunkt  $t \rightarrow \infty$ :

Wirksame Belastung: Eigengewicht, Auf- und Nutzlast  $q'_k = 107.6 \text{ kN/m}$ ,  $M(q'_k) = 3443 \text{ kNm}$

$$\begin{cases} \sigma_{c,\text{sup}} \\ \sigma_{c,\text{inf}} \end{cases} = \frac{N_c(P_\infty)}{A_c} + \frac{M_c(P_\infty) - P_\infty \cdot e}{I_c} \cdot \begin{cases} z_{\text{sup}} \\ z_{\text{inf}} \end{cases} = \frac{-3.001}{2.625} + \frac{3.443 - 3.001 \cdot 0.6}{0.4922} \cdot \begin{cases} -0.75 \\ 0.75 \end{cases} = \begin{cases} -3.65 \\ 1.36 \end{cases} \text{ MPa}$$

Da der Querschnitt am unteren Querschnittsrand für  $t \rightarrow \infty$  dekomprimiert, müsste streng genommen ein Spannungsnachweis am gerissenen Querschnitt geführt werden. In der Praxis wird aber oft eine nominelle Zugspannung am ungerissenen Querschnitt von 1-2 MPa toleriert (siehe Vorspanngrad, zulässige Randspannungen).

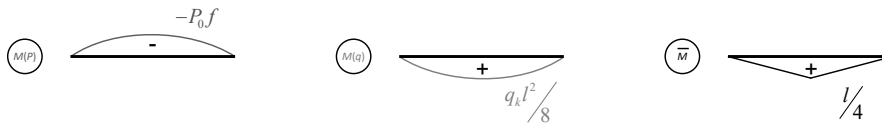
Erläuterungen siehe Folie.



## Vorspannung – Beispiel

### Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Durchbiegungen in Feldmitte zum Zeitpunkt  $t = 0$  (nach dem Absenken des Lehrgerüsts):



$$w = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{q_k l^2}{8} - P_0 f \right) \cdot \frac{l^2}{4EI} = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{65.6 \cdot 16^2}{8} - 3531 \cdot 0.6 \right) \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} = -0.03 \text{ mm}$$

Alternativ können die Umlenkkräfte aus der Vorspannung auch direkt von der Einwirkung abgezogen werden:

$$w = \frac{5 \cdot (q_k - u) \cdot l^4}{384EI} = \frac{5 \cdot \left( q_k - \frac{8P_0 f}{l^2} \right) \cdot l^4}{384EI} = \frac{5 \cdot \left( 65.6 - \frac{8 \cdot 3531 \cdot 0.6}{16^2} \right) \cdot 16^4}{384 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} = -0.03 \text{ mm}$$

Das Eigengewicht wird leicht überkompensiert. Direkt nach dem Ausschalen treten praktisch keine Verformungen auf (da die Umlenkkräfte der Vorspannung ca. 101% des Eigengewichts betragen)

Erläuterungen siehe Folie.

## Vorspannung – Beispiel

### Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt

Durchbiegungen in Feldmitte zum Zeitpunkt  $t \rightarrow \infty$ : Kriechen

$$w = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{q_k l^2}{8} - P_{\infty} f \right) \cdot \frac{l^2}{4EI} \cdot (1 + \varphi) = \frac{5}{12} \cdot \left( \frac{(65.6 + 28) \cdot 16^2}{8} - 3001 \cdot 0.6 \right) \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} \cdot 3 = 5.8 \text{ mm}$$

Durchbiegung in Feldmitte infolge der veränderlichen Belastung:

$$w = \frac{5 \cdot q_k \cdot l^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 14 \cdot 16^4}{384 \cdot 33.6 \cdot 10^3 \cdot 0.4922} = 0.7 \text{ mm}$$

Nachweise der Gebrauchstauglichkeit nach SIA 260, Tab. 3:

Funktionstüchtigkeit:  $w = 5.8 + \psi_0 \cdot 0.7 = 6.5 \text{ mm} = l/2460 \ll l/350$

Komfort:  $w = \psi_1 \cdot 0.7 \text{ mm} = l/22'900 \ll l/350$

Aussehen:  $w = 5.8 + \psi_2 \cdot 0.7 < 6.5 \text{ mm} = l/2460 \ll l/300$

NB: Vereinfachend wird hier generell von einem ungerissenen Verhalten ausgegangen, obschon der Querschnitt unter  $q'_k$  kleine Zugspannungen erfährt. Streng genommen müsste der Nachweis für «Aussehen» unter Berücksichtigung der Rissbildung erfolgen.

Die Durchbiegungen dürften noch gemäss den Lastkombinationen SIA 260, Ziff. 4.4.4.4 und den Reduktionsbeiwerten  $\psi_0$  (selten),  $\psi_1$  (häufig) und  $\psi_2$  (quasi-ständig) in Tab. 2 abgemindert werden.

Im vorliegenden Fall sind die Nachweise aber auch mit  $\psi_i = 1$  problemlos erfüllt.

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung

## Wahl des Vorspanngrads

Die Wahl des Vorspanngrads ist eine wichtige Entscheidung beim Tragwerksentwurf.

Die Normen (sowohl SIA 262 als auch EC2) geben dazu wenig bis keine Anhaltspunkte. Nachfolgend werden die wichtigsten Aspekte erläutert.

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – Betrachtung der Betonspannungen (1)

Volle Vorspannung: Von einer vollen Vorspannung für eine bestimmte Last spricht man allgemein, wenn unter dieser Last kein Querschnitt dekomprimiert, d.h. unter dieser Last im ganzen Bauteil keine Zugspannungen auftreten.

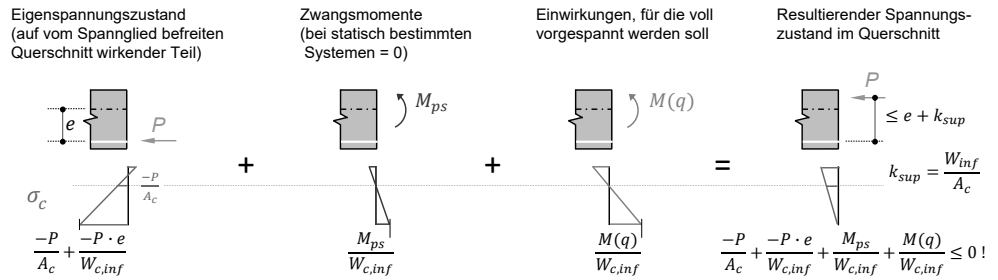
Spannkraft für eine volle Vorspannung für Last  $q$  (Annahme  $P = \text{konstant}$ ,  $N = 0$ ):

$$\sigma_{c,inf} \leq 0 \rightarrow P(e + k_{sup}) \geq M(q) + M_{ps} \rightarrow P \geq \frac{M(q) + M_{ps}}{e + k_{sup}} \quad (M(q) > 0, e > 0)$$

$$\sigma_{c,sup} \leq 0 \rightarrow P(-e + k_{inf}) \geq -(M(q) + M_{ps}) \rightarrow P \geq \frac{|M(q)| - M_{ps}}{|e| + k_{inf}} \quad (M(q) < 0, e < 0)$$

Herleitung (positive Momente, für negative Biegung analog):

NB: Bei statisch unbestimmten Systemen ist in der Regel ein iteratives Vorgehen nötig, da  $M_{ps}$  von  $P$  abhängig ist



Erläuterungen siehe Folie.

## Ergänzende Bemerkung

- Zwangsmomente  $M_{ps}$  siehe später (statisch unbestimmte Systeme)

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – Betrachtung der Betonspannungen (2)

Volle Vorspannung: Von einer vollen Vorspannung für eine bestimmte Last spricht man allgemein, wenn unter dieser Last kein Querschnitt dekomprimiert, d.h. unter dieser Last im ganzen Bauteil keine Zugspannungen auftreten.

Spannkraft für eine volle Vorspannung für Last  $q$  (Annahme  $P = \text{konstant}$ ,  $N = 0$ ):

$$\sigma_{c,\text{inf}} \leq 0 \rightarrow P(e + k_{\text{sup}}) \geq M(q) + M_{\text{ps}} \rightarrow P \geq \frac{M(q) + M_{\text{ps}}}{e + k_{\text{sup}}} \quad (M(q) > 0, e > 0)$$

$$\sigma_{c,\text{sup}} \leq 0 \rightarrow P(-e + k_{\text{inf}}) \geq -(M(q) + M_{\text{ps}}) \rightarrow P \geq \frac{|M(q)| - M_{\text{ps}}}{|e| + k_{\text{inf}}} \quad (M(q) < 0, e < 0)$$

Oft wird als «volle Vorspannung» eine volle Vorspannung für die gesamte Belastung (ständige und veränderliche Einwirkungen) bezeichnet. Eine solche Vorspannung ist meist unnötig und unwirtschaftlich. Sinnvoll ist dagegen in vielen Fällen eine volle Vorspannung für die ständigen Lasten, entsprechend einer teilweisen Vorspannung für die Gesamtbelastung.

Insbesondere bei stark vorgespannten Tragwerken (z.B. Bahnbrücken) kann der Querschnitt auch am entfernten Querschnittsrand dekomprimieren. Daher sind die Randspannungen grundsätzlich für folgende Zeitpunkte zu überprüfen:

- (1)  $t = t_0 \rightarrow P = P_0$  d.h. initiale Spannkraft mit  $q_{\text{min}}$  = beim Vorspannen wirksame Last  
(2)  $t = t_\infty \rightarrow P = P_\infty$  (minimale Spannkraft) mit  $q_{\text{max}}$  = Last für die vorgespannt wird  
(Unterschied  $P_0 \leftrightarrow P_\infty$  siehe Langzeitverluste)

Bei der Überprüfung der Randspannungen werden, wie in der Folie angegeben, zwei Fälle untersucht:

- Im Fall (1) treten die betragsmässig kleinsten Druckspannungen (evtl. Dekompression) am entfernten (= dem Spannglied gegenüberliegenden) Querschnittsrand auf, die grössten Druckspannungen wirken am Querschnittsrand auf der Seite des Spannglieds, wobei eine grössere Vorspannkraft jeweils ungünstig wirkt. Daher erfolgt die Kontrolle mit  $P_0$ .
- Im Fall (2) ist es gerade umgekehrt (betragsmässig kleinste Druckspannungen = mögliche Dekompression am Querschnittsrand auf der Seite des Spannglieds, maximale Druckspannungen am entfernten Querschnittsrand, grössere Vorspannkraft günstig). Daher erfolgt die Kontrolle mit  $P_\infty$ .

### Ergänzende Bemerkung

- Zwangsmomente  $M_{\text{ps}}$  siehe später (statisch unbestimmte Systeme)

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – Betrachtung der Betonspannungen (3)

- Teilweise Vorspannung: Von einer teilweisen Vorspannung für eine bestimmte Last spricht man allgemein, wenn für diese Last keine volle Vorspannung vorliegt.  
Oft wird als «teilweise Vorspannung» eine teilweise Vorspannung für die gesamte Belastung (ständige und veränderliche Einwirkungen) bezeichnet.  
Mit dem Konzept der teilweisen Vorspannung können die Anforderungen an Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit unter Ausnutzung der schlaffen Bewehrung optimal erfüllt werden.
- Zul. Randspannungen: Anstelle der Forderung, dass keine Dekompression auftreten darf, werden bei einer vollen Vorspannung oft gewisse Zugspannungen am Querschnittsrand (in der Grössenordnung von  $f_{ct}$ ) toleriert.  
Solche (unter der Annahme eines ungerissenen Querschnitts ermittelte) «zulässige Randspannungen» haben im Falle einer Rissbildung unter den gegebenen Einwirkungen oder auch bei bestehenden Rissen aus Bauzuständen keine mechanische Bedeutung. Implizit wird damit aber eine Begrenzung der Rissbreiten unter der entsprechenden Last gewährleistet.
- Mittlere Vorspannung: Ein Richtwert für den Grad der Vorspannung ist die mittlere («zentrische») Vorspannung  $-P/A_c$  (Druckspannung in Schwerachse). Typische Werte:  
0.8 – 2.0 MPa bei Hochbaudecken  
2.5 – 5.0 MPa bei Strassenbrücken  
4.0 – 7.0 MPa bei Bahnbrücken

NB: Ältere Bauwerke sind oft deutlich höher vorgespannt.

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – Vorspanngrad

## Wahl des Vorspanngrads – «Load Balancing» und «Formtreue Vorspannung»

Anstelle der Betrachtung von Betonspannungen am Querschnittsrand kann der Vorspanngrad auch aufgrund der von den Umlenkkräften kompensierten Belastung oder der Verformungen festgelegt werden.

**Load Balancing:** Die Idee des «Load Balancing» (Lastausgleich) besteht darin, die Umlenkkräfte so festzulegen, dass sie einen bestimmten Teil der Belastung kompensieren ( $u = q$ ). Falls die Ankerkräfte im Schwerpunkt des Querschnitts angreifen, resultiert unter der Belastung  $q = u$  in jedem Querschnitt ein zentrischer Druckspannungszustand.

Eine volle Vorspannung resultiert für eine bestimmte Einwirkung, wenn etwa 80% dieser Einwirkung durch die Umlenkkräfte kompensiert werden ( $u \approx 0.8 \cdot q$ ).

Oft ist ein Lastausgleich für 80...100% der ständigen Lasten sinnvoll, so dass praktisch keine (Langzeit-) Durchbiegungen auftreten.

Ein Lastausgleich für die gesamte Belastung (ständige und veränderliche Einwirkungen) erfordert noch höhere Vorspannkkräfte als eine volle Vorspannung (zentrischer Druck anstatt Dekompression) und ist i.d.R. nicht sinnvoll.

**Formtreue Vorspannung:** Die Idee der formtreuen Vorspannung besteht darin, die Vorspannung so festzulegen, dass unter einer bestimmten Last, in Kombination mit der Vorspannung, keine Durchbiegungen (an einer bestimmten Stelle) auftreten.

Dieses Vorgehen kann als Verallgemeinerung der Idee des Load Balancing aufgefasst werden: Die Umlenkkräfte müssen die Last nicht in jedem Punkt kompensieren, das «Load Balancing» wird stattdessen anhand der Durchbiegung (= Integral von  $(q - u)$ ) definiert resp. kontrolliert.

Eine formtreue Vorspannung macht insbesondere bei schlanken, verformungsempfindlichen Tragwerken Sinn. Dies insbesondere, weil damit auch die Kriechverformungen besser kontrolliert werden können (theoretisch treten bei einer formtreuen Vorspannung – in einem System mit gleichen Kriecheigenschaften – auch keine Kriechverformungen auf).

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Spannkraftverluste

In den vorangehenden Folien wurde von einer konstanten Kraft  $P$  im Spannglied ausgegangen. Dies trifft jedoch nur näherungsweise zu.

Die beim Vorspannen am aktiven Ende aufgebrauchte Kraft wird durch *Spannkraftverluste* reduziert, wobei folgende Effekte zu beachten sind:

- *Reibungsverluste*  
Reduktion der Kraft im Spannglied durch Reibungskräfte zwischen Spannglied und Hüllrohr beim Aufbringen der Vorspannung
- *Langzeitverluste*  
Reduktion der Kraft im Spannglied durch die zeitabhängige Verkürzung des Betons infolge Schwinden und Kriechen sowie durch den Spannungsabfall im Spannstahl infolge Relaxation

NB: Wird nur ein Kabel gespannt, wird die elastische Verkürzung des Betons beim Aufbringen der Vorspannung durch einen entsprechend grösseren Spannweg kompensiert.

Werden im gleichen Bauteil resp. Querschnitt mehrere Spannglieder nacheinander gespannt, so resultieren in den zuerst gespannten Kabeln zusätzliche Verluste infolge der elastischen Verkürzung des Betons beim Spannen der nachfolgenden Kabel. Diese Verluste können bei Bedarf durch eine geeignete Wahl des Spannvorgangs (Spannstufen) reduziert werden.

Die Spannkraftverluste werden benötigt für (i) Spannungsberechnungen, (ii) die Ermittlung des Querkraftwiderstands (Anteil der geneigten Vorspannkraft) und (iii) die Ermittlung des Spannwegs (Spanngliedverlängerung resp. Auszugsweg des Spannglieds am aktiven Ende beim Vorspannen).

Bei Spannungsberechnungen sind die Reibungs- und Langzeitverluste zu berücksichtigen. Wie auf den vorhergehenden Folien erläutert, kann dabei die maximale oder minimale Vorspannkraft massgebend werden; entsprechend sind die Langzeitverluste zu berücksichtigen (Nachweise für  $t = \infty$ ) oder nicht (Nachweise für  $t = 0$ ). Die Reibungsverluste sind dagegen sowohl für  $t = 0$  als auch für  $t = \infty$  wirksam.

Neben den Spannungsnachweisen werden die Reibungsverluste insbesondere auch für die Berechnung des Spannwegs benötigt. Die Spanngliedverlängerung ist ein wichtiger Kontrollwert und wird beim Vorspannen im Spannprotokoll, zusammen mit der jeweiligen Spannkraft, festgehalten.

## Ergänzende Bemerkung

Bei Abweichungen vom rechnerischen Spannweg sind die Ursachen vor der Injektion des Hüllrohrs zu klären; mögliche Gründe sind:

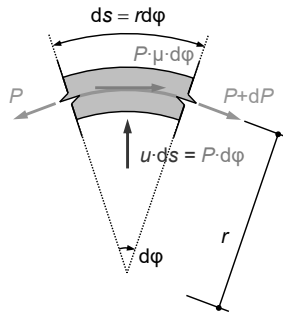
- Spannweg etwas kleiner als Sollwert: Höhere Reibung (unplanmässige Umlenkungen) oder Fehler in Berechnung des Spannwegs (räumliche Umlenkung nicht berücksichtigt)
- Spannweg wesentlich kleiner als Sollwert: Undichtes Hüllrohr, durch das Beton resp. Zementleim eingedrungen ist («Pfropfen»), wodurch die Verschiebung der Litzen behindert oder gar verhindert wird. Vorsicht, Unfallgefahr bei plötzlichem Versagen der ungewollten «Verankerung» im Hüllrohr!
- Spannweg grösser als Sollwert: Kleinere Reibung (sehr gerade verlegte Kabel, evtl. Korrosionsschutzemulsion auf Litzen)



# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Reibungsverluste

Bei Kabelumlenkungen entsteht zwischen dem Hüllrohr und dem Spannkabel infolge des Anpressdruckes eine Reibungskraft. Sie hat zur Folge, dass die Spannkraft entlang des Spannglieds ausgehend vom Maximalwert bei der spannbaren Verankerung kontinuierlich abnimmt.



$$\Sigma F_V = P \cdot d\varphi - u \cdot ds = 0 \quad \rightarrow \quad u \cdot ds = P \cdot d\varphi$$

$$\Sigma F_H = dP + P \cdot \mu \cdot d\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\mu \cdot d\varphi$$

$$\text{Randbedingung } P(\varphi = 0) = P_{\max} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{P}{P_{\max}}\right) = -\mu \cdot \varphi$$

$$\Rightarrow P(x) = P_{\max} \cdot e^{-\mu \cdot \varphi_x} \approx P_{\max} \cdot (1 - \mu \cdot \varphi_x)$$

Dabei bezeichnet  $\varphi_x$  das Integral der planmässigen Umlenkungen des Spannglieds vom aktiven Ende bis zur Stelle  $x$ .

Erläuterungen siehe Folie.

## Ergänzende Bemerkung

- Bei räumlicher Spanngliedführung sind die Reibungsverluste unter Berücksichtigung der gesamten Umlenkung (räumlich) zu ermitteln. Wird dies unterlassen, resultieren unter Umständen deutlich zu hohe Sollwerte der Spanngliedverlängerung.

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Reibungsverluste

Bei Kabelumlenkungen entsteht zwischen dem Hüllrohr und dem Spannkabel infolge des Anpressdruckes eine Reibungskraft. Sie hat zur Folge, dass die Spannkraft entlang des Spannglieds ausgehend vom Maximalwert bei der spannbaren Verankerung kontinuierlich abnimmt.



Zusätzlich zu den planmässigen Umlenkungen entstehen ungewollte Umlenkungen  $\Delta\varphi$  [mrad/m] des Hüllrohrs infolge Girlandenwirkung zwischen den Kabelhaltern.

$$P(x) = P_{\max} \cdot e^{-\mu(\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)} \approx P_{\max} \cdot [1 - \mu \cdot (\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)]$$

Die Werte  $\mu$  und  $\Delta\varphi$  sind vom gewählten Spannsystem abhängig und können der technischen Dokumentation entnommen werden. Typische Werte sind:

$\mu = 0.2$	$\Delta\varphi = 5 \text{ mrad/m}$	für Stahlhüllrohre
$\mu = 0.14$	$\Delta\varphi = 7 \text{ mrad/m}$	für Kunststoffhüllrohre

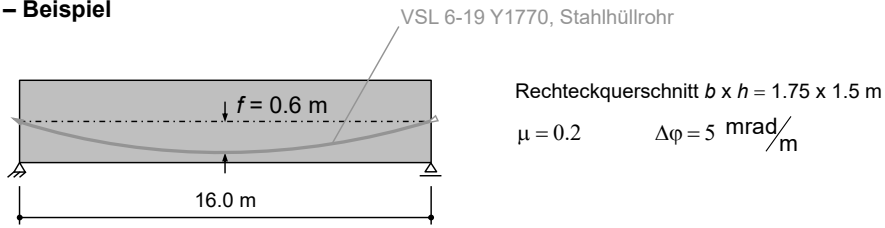
Die Werte von  $\mu$  und  $\Delta\varphi$  können der Dokumentation (Zulassung) des verwendeten Spannsystems entnommen werden.

## Ergänzende Bemerkung

- In einigen (älteren) Dokumentationen sind statt  $\mu$  und  $\Delta\varphi$  die Werte  $\mu$  und  $\mu \cdot \Delta\varphi$  angegeben (Achtung Verwechslungsgefahr).
- Die Werte  $\mu$  und  $\Delta\varphi$  haben vor allem bei langen Spanngliedern einen relativ grossen Einfluss auf den Spannweg (Verlängerung des Spannglieds beim Vorspannen). Werden die Litzen zur Gewährleistung der Dauerhaftigkeit (resp. Einhaltung der maximal zulässigen Fristen bis zu ihrem Einbau) mit einer Emulsion behandelt, kann der Spannweg deutlich grösser sein als der mit den Werten gemäss Dokumentation errechnete Sollwert.

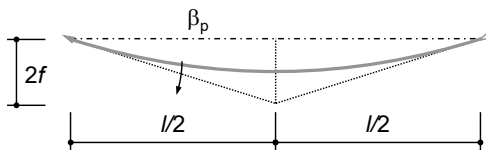
# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Reibungsverluste – Beispiel



Das Spannglied wird einseitig auf  $\sigma_{p,\max} = 0.75 \cdot f_{pk} = 0.75 \cdot 1770 = 1327 \text{ MPa}$  gespannt.

Die Spannkraft am aktiven Ende beträgt  $P_{\max} = A_p \cdot \sigma_{p,\max} = 2850 \cdot 1.327 = 3783 \text{ kN}$



$$\tan \beta_p = \frac{2f}{l/2} = \frac{1.2}{8} = 0.15 \rightarrow \beta_p = 149 \text{ mrad}$$

$x$ [m]	$\varphi_x$ [mrad]	$\mu \cdot (\varphi_x + \Delta\varphi \cdot x)$ [mrad]	$P$ [kN]
0	0	0	3783
8	149	37.8	3643
16	298	75.6	3508

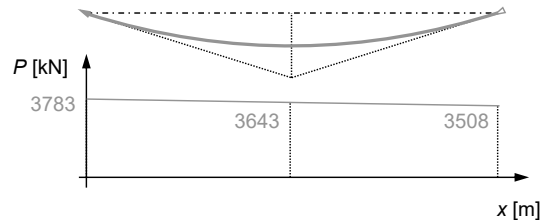
Auf dieser und den folgenden Folien wird die Ermittlung der Reibungsverluste an einem einfachen Beispiel erläutert.

## Vorspannung – Spannkraftverluste

### Reibungsverluste – Beispiel

Verlängerung des Spannglieds:

x [m]	P [kN]	$\Delta l$ [m]	$\varepsilon_m = \frac{P}{A_p E_p}$ [‰]	$\Delta l_p = \varepsilon_m \cdot \Delta l$ [mm]
0	3783			
8	3643	8	6.68	53.4
16	3508	8	6.43	51.5



$$\rightarrow \Sigma \Delta l_p = 53.4 + 51.5 = 104.9 \text{ mm}$$

Die Relativverschiebung zwischen Spannglied und Beton (wird beim Vorspannen in der Regel gemessen, meist als Verschiebung der Litzen gegenüber der Ankerbüchse) enthält zusätzlich die elastische Betonstauchung:

$$\varepsilon_{cm} = -\frac{P}{EA} = \frac{-3643 \cdot 10^3}{30 \cdot 1750 \cdot 1500} = -0.046 \text{ ‰}$$

$$\rightarrow \text{Spannweg: } l_p = \Sigma \Delta l_p + \Delta l_c = 104.9 + 0.7 = 105.6 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \Delta l_c = 0.7 \text{ mm}$$

Beim Vorspannen verlängert sich das Spannglied, da es sich infolge der Zugkraft dehnt. Beim Aufbringen der Spannkraft am aktiven Ende stellt sich zwischen Spannglied und Hüllrohr ein Schlupf (Relativverschiebung zwischen Spannstaht und Hüllrohr) ein.

Der Bereich, über welchen das Spannglied sich gegenüber dem Hüllrohr in Richtung des Spannankers verschiebt, entspricht der Länge, über welche das Spannglied eine Zugkraft erfährt, und die Spanngliedverlängerung entspricht dem Integral der Spannglieddehnungen über diese Länge. Steigert man die Spannkraft ausgehend von  $P = 0$ , erfährt das Spannglied wegen der Reibungsverluste zunächst nicht über die ganze Länge eine Zugkraft; vielmehr wächst der Bereich, in welchem das Spannglied eine Zugkraft erfährt und sich als Folge der damit einhergehenden Dehnungen gegenüber dem Hüllrohr in Richtung des Spannankers verschiebt, sukzessive an, bis das ganze Spannglied aktiviert ist. Bei weiterer Steigerung der Vorspannkraft nimmt die Zugkraft im Spannglied, und damit die Relativverschiebungen, über seine ganze Länge zu. Die Spanngliedverlängerung entspricht ab diesem Zeitpunkt dem Integral der Spannglieddehnungen über seine ganze Länge (resp. zwischen dem aktiven Anker und der nächsten festen Verankerung resp. Kupplung mit Abstützstelle). Dieser Zustand ist für die Ermittlung des Spannwegs massgebend.

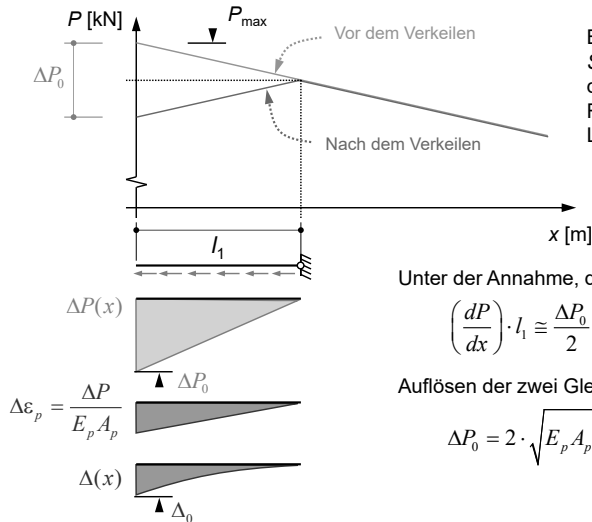
### Ergänzende Bemerkung

- Ausser bei sehr starker Vorspannung resp. langen Spanngliedern kann die Betonstauchung in der Praxis vernachlässigt werden.

# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Verankerungsschlupf

Beim Ablassen des Öldrucks in der Spannpresse verkeilen sich die Litzen. Dabei ergibt sich ein Verankerungsschlupf (Klemmeneinzug) von etwa  $\Delta_0 = 6 \text{ mm}$  (siehe technische Dokumentation).



Beim Verkeilen findet im Endbereich des Spannkabels eine *Schlupfumkehr* statt (Kabel bewegt sich zurück ins Hüllrohr, bis am Ende der Klemmeneinzug  $\Delta_0$  kompensiert ist). Dadurch wechseln die Relativverschiebungen und die Reibungskräfte auf einer bestimmten Länge  $l_1$  das Vorzeichen.

Unter der Annahme, dass  $P(x)$  ungefähr linear verläuft, gilt:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) \cdot l_1 \cong \frac{\Delta P_0}{2} \quad \Delta_0 = \int_{l_1} (\varepsilon_v(x) - \varepsilon_n(x)) \cdot dx \cong l_1 \cdot \frac{\Delta P_0}{E_p A_p} \cdot \frac{1}{2}$$

Auflösen der zwei Gleichungen nach  $l_1$  und  $\Delta P$ :

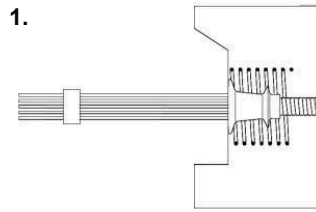
$$\Delta P_0 = 2 \cdot \sqrt{E_p A_p \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \Delta_0} \quad l_1 = \sqrt{\frac{E_p A_p \cdot \Delta_0}{\frac{dP}{dx}}}$$

Bei den meisten Vorspannsystemen erfolgt die Verankerung der Litzen im Ankerkopf heute über keilförmige Klemmen. Die Spannpressen ziehen beim Vorspannen an den Litzen (die am rückwärtigen Ende der Presse in der sogenannten Zugsbüchse verankert sind) und geben die Reaktion an die Ankerbüchse ab, welche vorgängig – mit den Klemmen – über die Litzen geschoben wurde. Beim Ablassen der Pressenkraft verankern sich die Litzen über die Klemmen in der Ankerbüchse, wobei ein Schlupf (Klemmeneinzug) von ca. 6 mm resultiert.

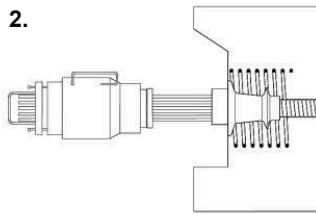
Der Klemmeneinzug bewirkt eine Relativverschiebung zwischen Spannglied und Hüllrohr, wobei sich, im Gegensatz zum Spannvorgang, die Litzen vom Spannanker weg bewegen. Es erfolgt also eine Schlupfumkehr, womit auch die Reibungskräfte das Vorzeichen wechseln. Die Länge, über welche die Schlupfumkehr erfolgt, resultiert aus der Bedingung, dass die durch die Schlupfumkehr verursachte Längenänderung (Verkürzung) des Spannglieds dem Klemmeneinzug entsprechen muss. Unter der Annahme eines linearen Spannkraftverlaufs (was meist nur eine Vereinfachung ist, da das Spannglied im Bereich des Ankers gerade ist, kurz danach aber meist bereits Krümmungen aufweist) kann die Länge des von der Schlupfumkehr betroffenen Bereichs ermittelt werden, siehe Folie. Daraus folgt der Abfall der Spannkraft infolge des Klemmeneinzugs.

# Vorspannung – Spannkraftverluste

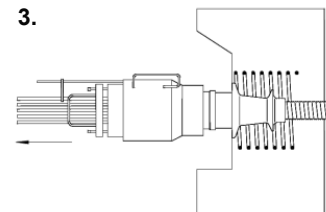
## Verankerungsschlupf – Spannvorgang



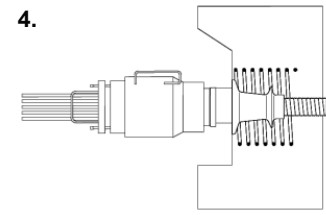
Setzen der Ankerbüchse und der Klemmen



Ansetzen der Spannpresse



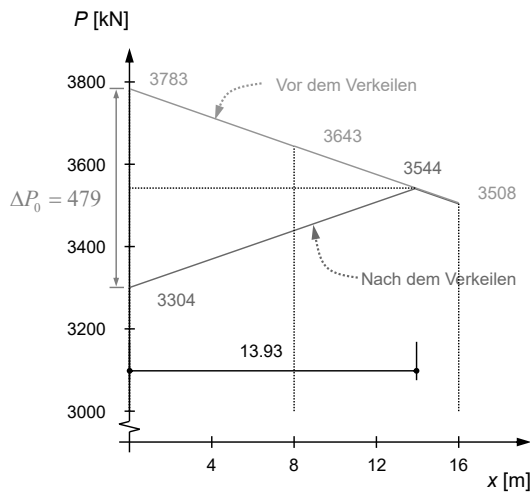
Spannen



Verkeilen

## Vorspannung – Spannkraftverluste

### Verankerungsschlupf – Beispiel



$$l_1 = \sqrt{\frac{195000 \cdot 2850 \cdot 6}{3783 - 3508}} = 13.93 \text{ m}$$

$$\Delta P_0 = 2 \cdot l_1 \cdot \frac{dP}{dx} = 2 \cdot \frac{3783 - 3508}{16} \cdot 13.93 = 478.8 \text{ kN}$$

$$3508 + \frac{3783 - 3508}{16} \cdot (16 - 13.93) = 3544 \text{ kN}$$

Die maximale Vorspannkraft nach dem Verkeilen entspricht einer Spannung im Spannstahl von

$$\frac{3544}{2.85} = 1244 \text{ MPa} \hat{=} 0.7 f_{pk}$$

was gem. SIA 262, 4.1.5.2 gerade noch zulässig ist.

Der Abfall der Spannkraft infolge Klemmeneinzug wird meist dadurch kompensiert, dass eine höhere Spannkraft aufgebracht wird (sogenanntes Überspannen, im Beispiel  $0.75 \cdot f_{pk}$ ), so dass nach dem Ablassen die nach Norm maximal zulässige Spannung eingehalten wird (nach SIA 262  $0.7 \cdot f_{pk}$ , im Beispiel gerade ok).

### Ergänzende Bemerkung

- Bei kurzen Spanngliedern geht durch den Klemmeneinzug – trotz Überspannen – ein grosser Teil der Spannkraft verloren. In solchen Fällen sind andere Systeme einzusetzen, beispielsweise Spannstangen (bei denen die Verankerung praktisch schlupffrei erfolgt).
- Alternativ kann ein Überspannstuhl eingesetzt werden, der beim Vorspannen am Ankerkopf (in dem die Litzen bereits verkeilt sind) und die Kraft an die Ankerplatte abgibt, so dass Ankerbüchse mit Futterplatten oder einen Gewinding satt verankert werden kann. Diese Lösung ist jedoch aufwändig und sollte vermieden werden.

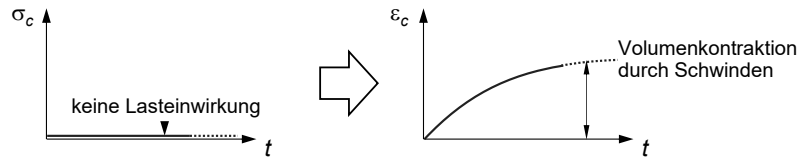
# Zeitabhängiges Verhalten von Beton

**Langzeitverhalten** (siehe auch Stahlbeton I)

## Schwinden des Betons

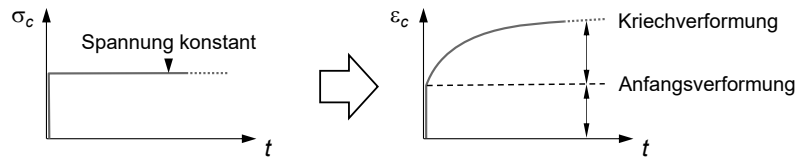
*Volumenkontraktion ohne Lasteinwirkung*

(Darstellung für freie = unbehinderte Verformungen  
→ keine Zwängungen)



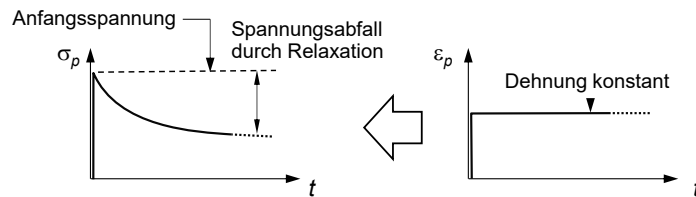
## Kriechen des Betons

*Zunahme der Verformungen unter konstanter Spannung*



## Relaxation des Spannstahls

*Abfall der Spannungen unter konstanter Dehnung*



Wiederholung aus Stahlbeton I:

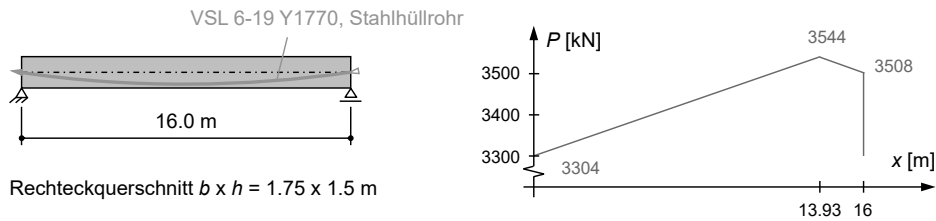
Beton ist viskos und zeigt somit ein zeitabhängiges Verhalten. Dieses wird primär durch die Eigenschaften der Zementmatrix beeinflusst. Man unterscheidet üblicherweise zwischen Schwinden (Volumenkontraktion des Betons ohne Lasteinwirkung), Kriechen (Zunahme der Verformungen unter konstanter Spannung) und Relaxation (Abnahme der Spannungen bei konstanter Dehnung).

Schwinden, Kriechen und Relaxation haben im Grunde genommen die gleiche Ursache und treten in der Regel gleichzeitig auf. Einfachheit halber werden die drei Phänomene üblicherweise aber getrennt betrachtet, wobei empirische, an Versuchsdaten kalibrierte Modelle zur Anwendung gelangen.



# Vorspannung – Spannkraftverluste

## Langzeitverluste – Beispiel



Mittlere Vorspannkraft zu Beginn der Langzeiteinflüsse:

$$P_i = \frac{13.93 \cdot \frac{3544 + 3304}{2} + 2.07 \cdot \frac{3544 + 3508}{2}}{16} = 3437 \text{ kN} \quad \triangleq \quad \sigma_{pi} = \frac{3437}{2.85} = 1206 \text{ MPa} = 0.68 f_{pk}$$

- Relaxation (SIA 262, 3.3.2.7):  $\Delta\sigma_{pr} = 2.2\% \cdot \sigma_{pi} = 0.022 \cdot 1206 = 26.5 \text{ MPa}$

SIA 262 Fig. 8 (Verlust nach 1000 h)  $\rightarrow$  SIA 262 3.3.2.7.1 (Abschätzung des Endwertes)

$$\Delta\sigma_{pr\infty} = 3 \cdot \Delta\sigma_{pr} = 3 \cdot 26.5 = 79.6 \text{ MPa} \quad (\text{entsprechend einer fiktiven Dehnung } \varepsilon_{pr\infty} = \frac{79.6}{195 \cdot 10^3} = 0.4\text{‰} = 400 \cdot 10^{-6})$$

Durch die Verkürzung des Betons infolge Schwinden und Kriechen wird die Spannkraft reduziert, da das Spannglied die Längenänderungen des Betonträgers mitmacht (bei Vorspannung mit Verbund in jedem Querschnitt, bei Vorspannung ohne Verbund im Integral über die Länge zwischen den Verankerungen). Zusätzlich bewirkt die Relaxation des Spannstahls einen Spannkraftverlust.

Da die Grösse der Kriech- und Schwindverformungen ohnehin nicht genau bestimmt werden kann (unterliegen selbst bei Standardbeton grossen Streuungen), können auch die Langzeitverluste nicht exakt ermittelt werden. Entsprechend erfolgen die Berechnungen näherungsweise, unter Verwendung von Mittelwerten der Spannkraft etc.

Das Vorgehen wird direkt am Beispiel, welches auf den vorhergehenden Folien verwendet wurde, erläutert.

### Ergänzende Bemerkung

- Der in den Normen meist angegebene Wert der Relaxation nach 1000 h kann nicht direkt verwendet werden. Vielmehr ist, wie in der Folie gezeigt, eine Vergrösserung um einen Faktor von ca. 3 erforderlich, um die Langzeitverluste zu erfassen.

## Vorspannung – Spannkraftverluste

### Langzeitverluste – Beispiel

- Schwinden (SIA 262, 3.1.2.7):

Bezogene Bauteildicke	$h_0 = \frac{2A_c}{U} = \frac{2 \cdot 1750 \cdot 1500}{2 \cdot (1750 + 1500)} = 808 \text{ mm}$	
Beiwert	$\varepsilon_{cd,\infty} = 0.32 \text{ ‰}$	$f_{ck} = 30 \text{ MPa}, RH = 75\%$
Trockenschwindmass	$\varepsilon_{cd} = \beta(t - t_s) \cdot \varepsilon_{cd,\infty} = 0.7 \cdot 0.32 \text{ ‰} = 0.22 \text{ ‰}$	SIA 262, 3.1.2.7.7 – 3.1.2.7.8
Autogenes Schwindmass	$\varepsilon_{ca} = 0.07 \text{ ‰}$	SIA 262, Fig. 4
Totales Schwindmass	$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 0.22 + 0.07 = 0.29 \text{ ‰} = 290 \cdot 10^{-6}$	SIA 262, 3.1.2.7.6

- Kriechen (SIA 262, 3.1.2.6):

$$\varphi_{RH} = 1.5 \quad \beta(t_0) = 0.5 \quad \beta(t - t_0) = 1.0 \quad \beta_{fc} = 2.7 \quad \text{SIA 262 Fig. 2 + Tab. 4}$$

$$\varphi = \varphi_{RH} \cdot \beta_{fc} \cdot \beta(t_0) \cdot \beta(t - t_0) = 1.5 \cdot 2.7 \cdot 0.5 \cdot 1.0 = 2.03 \quad \text{SIA 262, 3.1.2.6.2}$$

$$\varepsilon_{cc} = \varphi \cdot \varepsilon_{c,el} = \varphi \cdot \frac{P_t}{E_c A_c} = 2.03 \cdot \frac{3437}{33.6 \cdot 1500 \cdot 1750} = 0.079 \text{ ‰} = 79 \cdot 10^{-6} \quad \text{SIA 262, 3.1.2.6.1}$$

14.02.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton II

43

Erläuterungen siehe Folie.

### Ergänzende Bemerkung

- Im Beispiel sind die Verluste infolge Kriechen sehr klein, da der Träger nur schwach vorgespannt ist; die zentrische Vorspannung bei  $t = 0$  beträgt lediglich rund  $3.437 \text{ MN} / (1.75 \cdot 1.5 \text{ m}^2) = 1.3 \text{ MPa}$ . Für übliche Vorspanngrade resultieren aus Kriechen Verluste in der gleichen Grössenordnung wie aus dem Schwinden (je ca.  $200 \dots 300 \cdot 10^{-6}$ ).

## Vorspannung – Spannkraftverluste

### Langzeitverluste – Beispiel

- Totaler Spannkraftverlust infolge Langzeiteffekte:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{p\infty} &= \Delta\sigma_{p\infty} + (\varepsilon_{cs} + \varepsilon_{cc}) \cdot E_p = 79.6 + (0.29 + 0.08) \cdot 195 = 151.8 \text{ MPa resp.} \\ &= (\varepsilon_{p\infty} + \varepsilon_{cs} + \varepsilon_{cc}) \cdot E_p = (400 + 290 + 79) \cdot 10^{-6} \cdot 195 \cdot 10^3 = 151.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Relaxation      Schwinden      Kriechen

- Verbleibende Spannung im Spannstahl nach Abzug der Langzeiteffekte:

$$\sigma_{p\infty} = \sigma_{pi} - \Delta\sigma_{p\infty} = 1206 - 151.8 = 1054.2 \text{ MPa} \triangleq 0.87 \cdot \sigma_{pi}$$

Für Abschätzungen darf mit 15% Spannkraftverlusten gerechnet werden.

NB: Die Verluste werden etwas überschätzt, da die Kriechverkürzungen mit der initialen Vorspannkraft ermittelt werden. Tatsächlich nimmt die Spannkraft durch Schwinden, Kriechen und Relaxation ab, so dass etwas kleinere Kriechverformungen resultieren. Der Einfluss ist aber in der Regel vernachlässigbar.

Für «genauere» Abschätzungen kann die Berechnung iteriert werden (Ermittlung der Verluste mit dem Mittelwert der Spannungen über die Zeit aus der ersten Näherung; dies hat insbesondere bei den Relaxationsverlusten einen Einfluss):

$$\sigma_{pm} \approx \frac{\sigma_{pi} + \sigma_{p\infty}}{2}$$

Wie auf der vorhergehenden Seite erwähnt, sind die Kriechverluste in diesem Beispiel sehr klein (da die Vorspannung gering ist).

Für übliche Verhältnisse resultieren Verluste in der Größenordnung von  $750 \dots 1000 \cdot 10^{-6}$ , die sich aus Schwinden (Dehnung  $250 \dots 300 \cdot 10^{-6}$ ), Kriechen (Dehnung  $200 \dots 300 \cdot 10^{-6}$ ) und Relaxation (fiktive Dehnung  $300 \dots 400 \cdot 10^{-6}$ ) zusammensetzen. Dies entspricht Spannkraftverlusten von insgesamt ca.  $195 \cdot (0.75 \dots 1.0) = 150 \dots 200 \text{ MPa}$ .

Für übliche initiale Spannungen von  $1'200 \dots 1'300 \text{ MPa}$  resultieren damit Langzeitverluste von  $11 \dots 17\%$ . Bei der Vorbemessung kann daher von Spannkraftverlusten von insgesamt ca.  $15\%$  ausgegangen werden.

# Vorspannung

## Statisch unbestimmte Systeme

Bisher wurden statisch bestimmte Systeme untersucht, in denen infolge Vorspannung keine Schnittkräfte am Gesamtsystem resultieren: Die Zugkraft in der Vorspannung und die Druckkraft im Beton stehen in jedem Querschnitt im Gleichgewicht und bilden einen Eigenspannungszustand.

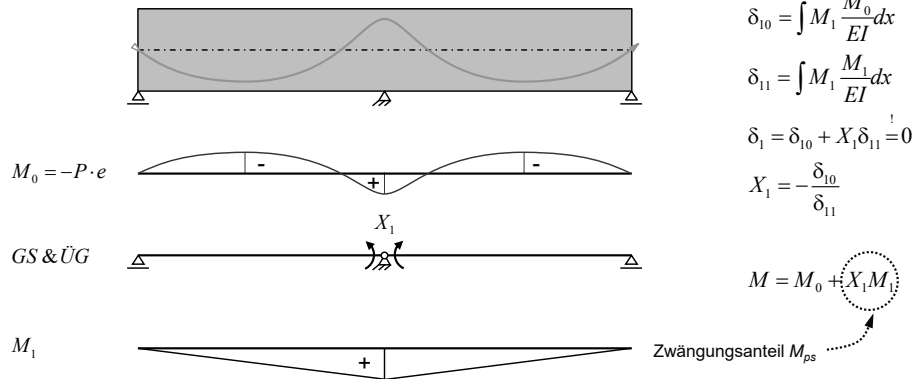
Bei statisch unbestimmten Systemen resultieren dagegen Schnittkräfte am Gesamtsystem (sogenannte Zwangsschnittgrößen). Die Ursache dieser Zwangsschnittgrößen und ihre Ermittlung werden auf den folgenden Folien erläutert.

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Einführung

Die Vorspannung erzeugt im Tragwerk einen Eigenspannungszustand, der – ähnlich wie bei Temperatureinwirkungen – Tragwerksverformungen zur Folge hat.

Bei statisch unbestimmt gelagerten Trägern sind diese Tragwerksverformungen im Allgemeinen nicht mit der Lagerung verträglich. Daher resultieren Reaktionen und Schnittgrößen. Diese werden als Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  bezeichnet (s: «Sekundärschnittgrößen»).



Der Eigenspannungszustand infolge Vorspannung verursacht Verformungen des Spannglieds (Dehnung) und des vom Spannglied befreiten Trägers (Stauchung und Krümmung). Die Verformungen des Trägers sind mit der Lagerung bei statisch unbestimmten Systemen in der Regel nicht verträglich. Im auf der Folie dargestellten, statisch bestimmten Grundsystem (mit einem Gelenk beim Zwischenauflager) würden sich die beiden einfeldrigen Träger verformen (bei der dargestellten Kabelführung, d.h. Spannglied mehrheitlich unterhalb der Schwerachse = negative Krümmung: Durchbiegung nach oben), und beim Zwischenauflager würde eine Relativverdrehung der Trägerenden resultieren. Da dies im statisch unbestimmten System nicht möglich ist, resultiert ein positives Zwangsmoment, dessen Grösse aus der Bedingung folgt, dass beim Zwischenauflager kein Knick auftreten darf. Die Lösung mit der Kraftmethode ist in der Folie dargestellt.

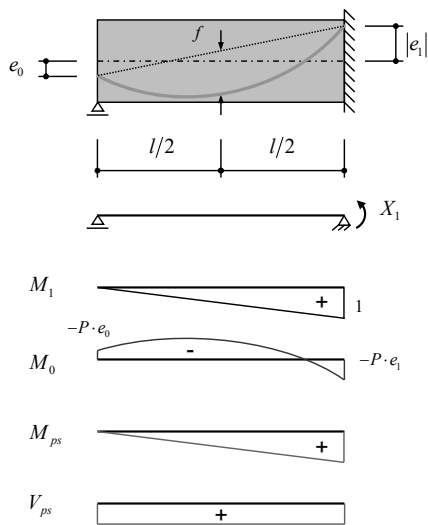
Die Zwangsbeanspruchungen wirken am Gesamtsystem und sind zusammen mit der äusseren Beanspruchung (Eigenlast, Nutzlasten, ...) als Einwirkungen zu berücksichtigen.

## Ergänzende Bemerkungen

- Die Zwangsschnittgrößen bilden einen Eigenspannungszustand. Die Biegemomente verlaufen linear, die Normal- und Querkräfte sind zwischen den Lagern konstant.
- Bei – wie üblich – in Längsrichtung verschieblicher Lagerung resultieren keine Zwangsnormalkräfte. Bei festen Lagern würden aber grosse Zwangsnormalkräfte entstehen.
- Für das intuitive Verständnis ist ein anderes Grundsystem hilfreich: Entfernt man das mittlere Auflager, würden sich die beiden Trägerhälften (bei der dargestellten Kabelgeometrie) nach oben durchbiegen. Um die Verträglichkeit zu gewährleisten, müssen sie nach unten gezogen werden, was ein positives Zwangsmoment ergibt.

## Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: a) einseitig eingespannter Träger



$$\text{Total deflection} = \text{deflection due to } P \text{ (parabola)} + \text{deflection due to } e_0 \text{ (linear)} + \text{deflection due to } e_1 \text{ (linear)}$$

Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{f}{3} + \frac{e_0}{6} + \frac{e_1}{3} \right) \quad \delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

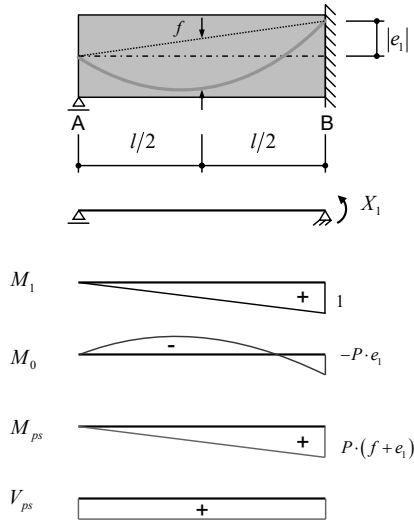
$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = P \cdot \left( f + \frac{e_0}{2} + e_1 \right)$$

Auf dieser und den folgenden Folien werden die Zwangsmomente und Zwangsquerkräfte für typische Fälle (ein- resp. beidseitig eingespannter Träger mit parabolischer resp. linearer Kabelführung und Exzentrizitäten an den Enden) analytisch ermittelt.

Diese Grundfälle sind für die Vorbemessung vorgespannter Träger (Festlegung des Vorspannkonzpts) sehr nützlich. Sie können insbesondere für die Betrachtung von Rand- und Innenfeldern eines Durchlaufträgers verwendet werden (siehe Beispiel).

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: a) einseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Der Spannungszustand im vom Spannglied befreiten Träger ist (bei gleichem  $f$ ) unabhängig von der Exzentrizität  $e_1$ . Im hier dargestellten Spezialfall  $e_0 = 0$  resultiert beispielsweise stets  $-P \cdot e_1 + X_1 = P \cdot f$  (folgt auch direkt aus der Betrachtung mit Anker- und Umlenkkraften).

Dennoch soll die Exzentrizität über den Auflagern möglichst ausgenutzt werden, womit einerseits ein grösseres  $f$  resultiert und andererseits der Tragwiderstand erhöht wird.

$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{3EI} \cdot (f + e_1) \quad \delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

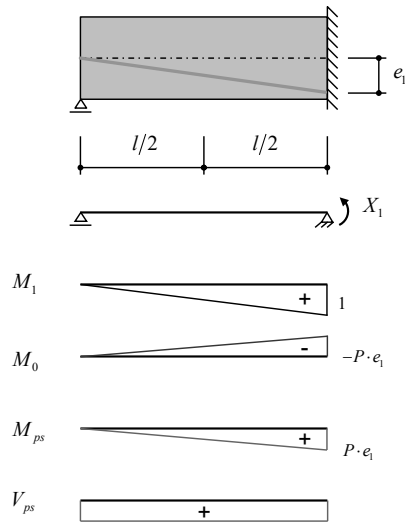
$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = P \cdot (f + e_1)$$

$$\rightarrow M_c(P)|_B = M_0 + M_{ps}|_B = -P \cdot e_1 + P \cdot (f + e_1) = P \cdot f$$

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: a) einseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Im Spezialfall  $e_0 = f = 0$  sind die Zwangsschnittgrößen entgegengesetzt gleich gross wie die Schnittgrößen  $-P \cdot e$ . Aus der Vorspannung resultiert somit unabhängig von  $e_1$  ein zentraler Druckspannungszustand im vom Spannlied befreiten Träger.

$$\delta_{10} = -\frac{Pe_1 l}{3EI} \quad \delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = P \cdot e_1$$

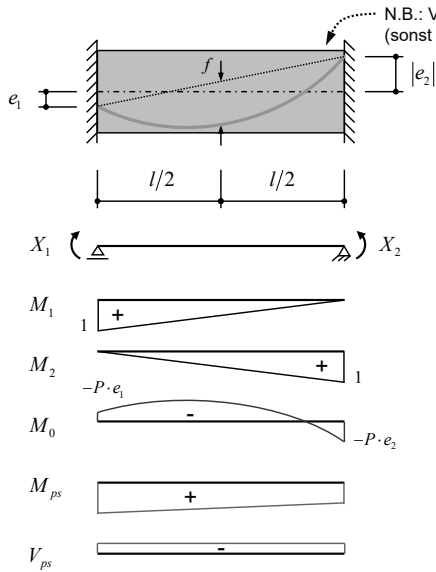
$$\rightarrow M_c(P) = M_0 + M_{ps} = -P \cdot e + M_{ps} = 0$$

Erläuterungen siehe Folie.

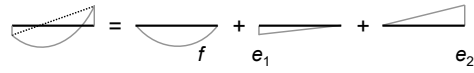


# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Grundfälle: b) beidseitig eingespannter Träger



N.B.: Verkürzung des Trägers unbehindert  
(sonst würden Zwangsnormalkräfte entstehen)



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{f}{3} + \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{6} \right) \quad \delta_{20} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{f}{3} + \frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{3} \right)$$

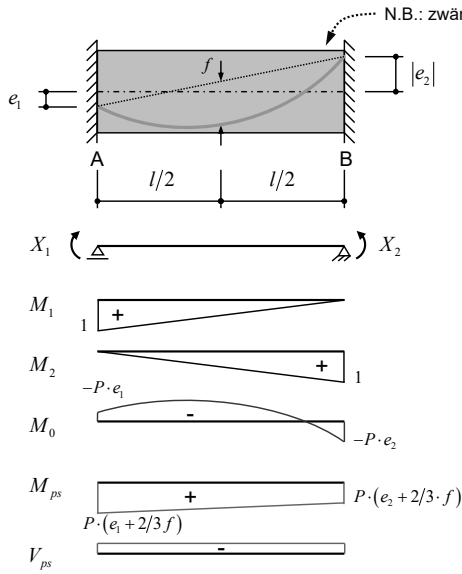
$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EI}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} e_1 + \frac{2f}{3} \\ e_2 + \frac{2f}{3} \end{Bmatrix}$$

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Grundfälle: b) beidseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Der Spannungszustand im vom Spannglied befreiten Träger ist (bei gleichem  $f$ ) unabhängig von den Exzentrizitäten  $e_1$  und  $e_2$ . Es resultiert stets  $-P \cdot e_1 + X_1 = -P \cdot e_2 + X_2 = 2 \cdot P \cdot f / 3$ . (folgt auch direkt aus der Betrachtung mit Anker- und Umlenkkräften).

Dennoch soll die Exzentrizität über den Auflagern möglichst ausgenützt werden, womit einerseits ein grösseres  $f$  resultiert und andererseits der Tragwiderstand erhöht wird.

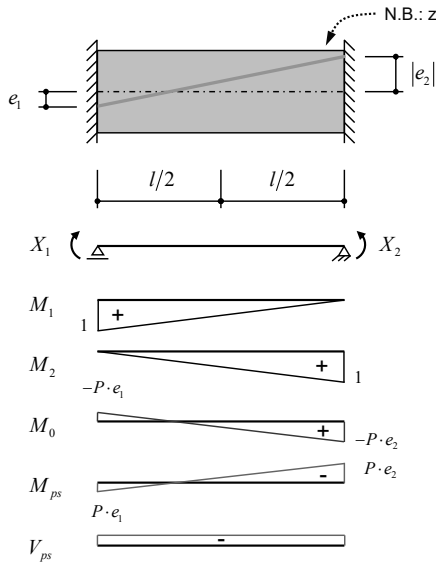
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} e_1 + \frac{2f}{3} \\ e_2 + \frac{2f}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow M_c(P)|_{A,B} = M_0 + M_{ps}|_{A,B} = \frac{2}{3} P \cdot f$$

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Grundfälle: b) beidseitig eingespannter Träger



Annahmen:  $P = \text{const.}$ ,  $EI = \text{const.}$

Im Spezialfall  $f = 0$  sind die Zwangsschnittgrößen entgegengesetzt gleich gross wie die Schnittgrößen  $-P \cdot e$ . Aus der Vorspannung resultiert somit unabhängig von  $e_1$  und  $e_2$  ein zentrischer Druckspannungszustand im vom Spannlied befreiten Träger.

$$\delta_{10} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{6} \right) \quad \delta_{20} = -\frac{Pl}{EI} \cdot \left( \frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{3} \right)$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EI}$$

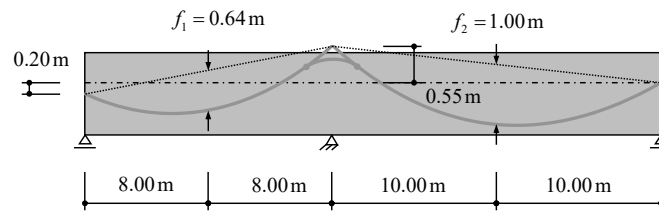
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow M_c(P) = M_0 + M_{ps} = -P \cdot e + M_{ps} = 0$$

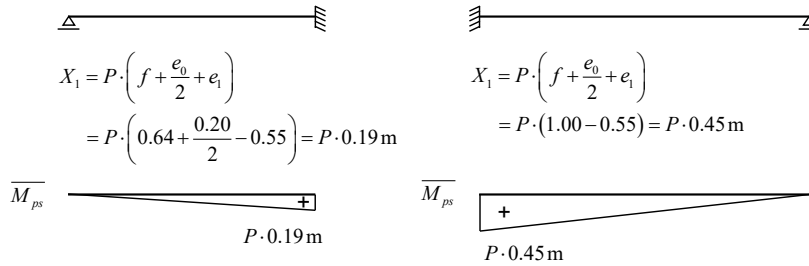
Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Beispiel: Zweifeldträger mit unterschiedlichen Spannweiten



## Lösung durch Kombination der Grundfälle und Momentenausgleich



Im Beispiel werden die Grundfälle auf einen Zweifeldträger angewendet.

Die Zwangsmomente werden für den einseitig eingespannten Träger ermittelt. Diese Zwangsmomente sind die Festeinspannmomente und können nach dem Drehwinkelverfahren (resp. Methode Cross) ausgeglichen werden, siehe nächste Folie).

# Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

## Beispiel: Zweifeldträger mit unterschiedlichen Spannweiten

Momentenausgleich:



Stabsteifigkeiten:  $s_{21} = \frac{3EI}{16\text{ m}}$

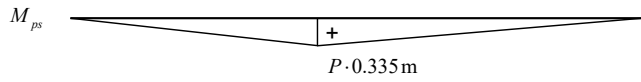
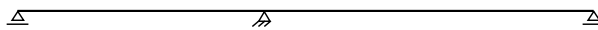
$s_{23} = \frac{3EI}{20\text{ m}}$

Verteilzahlen:  $\kappa_{21} = \frac{s_{21}}{s_{21} + s_{23}} = 0.555$

$\kappa_{23} = \frac{s_{23}}{s_{21} + s_{23}} = 0.444$

Momente:  $M_{21} = 0.19 + 0.555 \cdot (0.45 - 0.19)$   
 $= P \cdot 0.335\text{ m}$

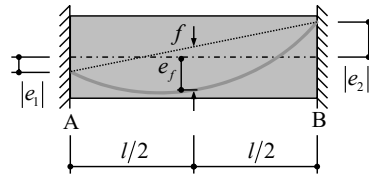
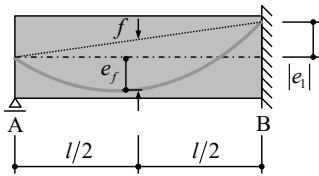
$M_{23} = 0.45 - 0.444 \cdot (0.45 - 0.19)$   
 $= P \cdot 0.335\text{ m}$



Erläuterungen siehe Folie.

## Vorspannung – statisch unbestimmte Systeme

Grundfälle: Spannkraft für volle Vorspannung ( $M_{ps}$  für Grundfälle bekannt)



Zwischenaufleger:  $P(-e_{1,2} + k_{inf}) \geq -(M(q) + M_{ps})$  (siehe Vorspanngrad)

$$M_{ps} = P \cdot (f + e_1) \quad \rightarrow P \geq \frac{|M(q)|}{f + k_{inf}}$$

$$M_{ps} = P \cdot \left( \frac{2f}{3} + e_{1,2} \right) \quad \rightarrow P \geq \frac{|M(q)|}{\frac{2f}{3} + k_{inf}}$$

Feldmitte:  $P(e_f + k_{sup}) \geq M(q) + M_{ps}$  (siehe Vorspanngrad)

$$M_{ps} = P \cdot \left( \frac{f + e_1}{2} \right) \quad \rightarrow P \geq \frac{M(q)}{\frac{f}{2} + k_{sup}}$$

$$M_{ps} = P \cdot \left( \frac{2f}{3} + \frac{e_1 + e_2}{2} \right) \quad \rightarrow P \geq \frac{M(q)}{\frac{f}{3} + k_{sup}}$$

$$\left( \text{mit } e_f = f + \frac{e_1}{2} \right)$$

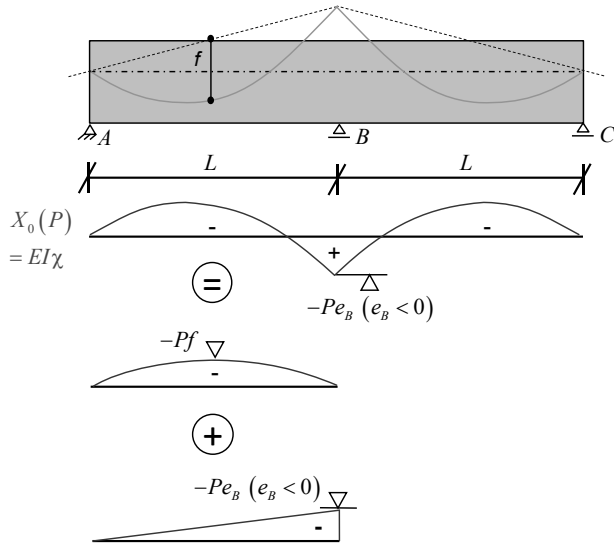
$$\left( \text{mit } e_f = f + \frac{e_1 + e_2}{2} \right)$$

Die Grundfälle sind zur Bestimmung der Vorspannkraft, die für eine volle Vorspannung für eine bestimmte Belastung erforderlich ist (siehe Vorspanngrad), sehr nützlich. Dies insbesondere aus dem Grund, dass die Grösse der Zwangsmomente für die Grundfälle bekannt ist.

Die in der Folie angegebenen Formeln können grundsätzlich für die Vorbemessung verwendet werden; zu beachten ist, dass die Zwangsmomente angrenzender Felder (unterschiedliche Spannweiten von Innenfeldern, Übergang Innenfeld - Randfeld) in der Regel nicht gleich gross sind und streng genommen ein Ausgleich durchzuführen ist (bei Vorbemessung oft vernachlässigbar).

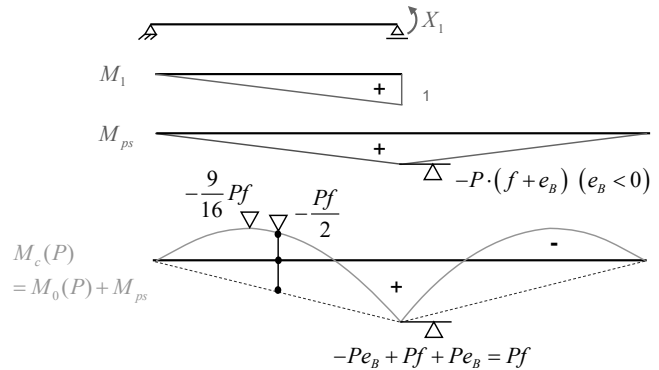
# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

Grundfall (a)  $e_A = e_C = 0$



$$\delta_{10} = \frac{L}{EI} \left( -\frac{Pf}{3} - \frac{Pe_B}{3} \right), \delta_{11} = \frac{L}{3EI}$$

$$\rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = Pf + Pe_B \quad (e_B < 0)$$



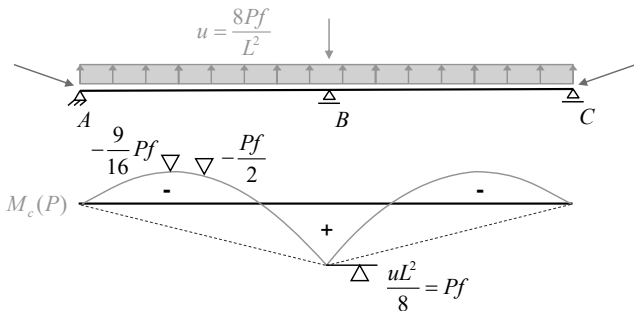
Die Kraftmethode mit den überzähligen Grössen  $M_0$  und  $M_1$  liefert das selbe Resultat wie die Betrachtung der Anker- und Umlenkräfte infolge Vorspannung (auf der folgenden Folie dargestellt), welche das bekannte Ergebnis (Moment über Zwischenaufleger  $u L^2 / 8 = P f$ ) liefert.

Die resultierenden Schnittkräfte am vom Spannglied befreiten System (insbesondere das Biegemoment in B) sind unabhängig von  $e_B$ . Diese Aussage ist insofern zu relativieren, als die Stichhöhe  $f$  von  $e_B$  abhängt. Deshalb, und weil der Biege­widerstand über der Stütze von  $e_B$  abhängt, sollte die Exzentrizität  $e_B$  möglichst gross gewählt werden (Kabel möglichst hoch führen, unter Einhaltung der Anforderungen an die konstruktive Durchbildung).

Der Vorteil besteht aber darin dass  $M_{ps}$  und damit  $M_c(P)$  bekannt sind, so dass die Vorspannkraft für eine volle Vorspannung sehr einfach bestimmt werden kann, siehe nächste Folie.

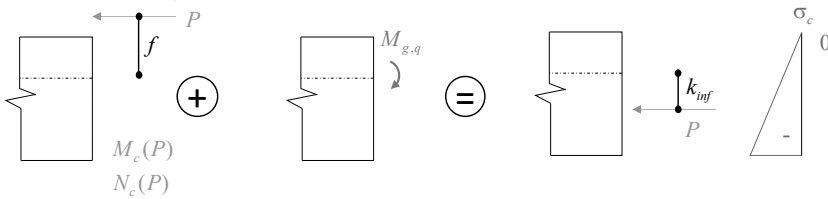
# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

Anker- und Umlenkräfte (direktere Betrachtung)



Unabhängig von  $e_B$  resultiert  $M_c(B) = Pf$ .  
 $e_B$  ist trotzdem möglichst gross zu wählen  
 ( $M_{Rd}$ ,  $f$  grösser)

Volle Vorspannung in B:



$$|M_{g,q}| \leq P(f + k_{inf})$$

$$P \geq \frac{|M_{g,q}|}{f + k_{inf}}$$

Will man über dem Auflager B eine volle Vorspannung für  $g$  resp.  $q$  erreichen, so ist die Vorspannkraft  $P$ , welche (unter Berücksichtigung der Zwangsmomente!) im Abstand  $f$  von der Schwerachse wirkt, so zu wählen, dass die resultierende Druckkraft nach Superposition mit den Biegemomenten infolge  $g$  resp.  $q$  im Kern des Querschnittes angreift, womit der Querschnitt nicht dekomprimiert. Die dafür minimal erforderliche Vorspannkraft beträgt:

$$P \geq \frac{|M_{g,q}|}{f + k_{inf}}$$

Das Moment infolge  $g$  resp.  $q$  ist dann mit  $M(g,q) = P \cdot (f + k_{inf})$  gerade so gross, dass es die Resultierende der Spannkraft  $P$  um  $f + k_{inf}$  nach unten, also in den unteren Kernpunkt, verschiebt.

Für die volle Vorspannung in Feldmitte ergibt sich analog:

$$P \geq \frac{M_{g,q}}{\frac{f}{2} + k_{sup}}$$

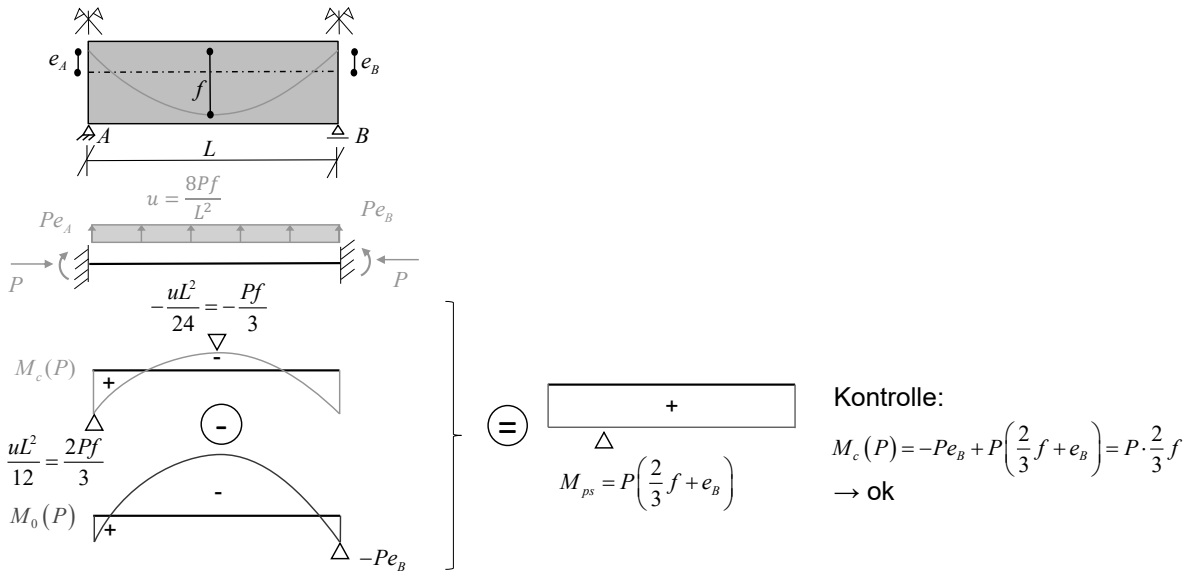
sowie an Stelle des maximalen Moments  $M_{max}$ :

$$P \geq \frac{M_{g,q}}{\frac{9}{16}f + k_{sup}}$$



## Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

Grundfall (b)  $e_A = e_B$



14.02.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton II

58

Mit den gleichen Überlegungen resp. dem gleichen Vorgehen wie für Grundfall (a) kann auch für den Grundfall (b) gezeigt werden, dass die resultierenden Schnittkräfte am vom Spannglied befreiten System (insbesondere das Biegemoment in A und B) unabhängig von  $e_A$  und  $e_B$  sind. Die Betrachtung von Anker- und Umlenkkraft liefert hier das Moment  $uL^2/12 = 2Pf/3$  über den Auflagern und  $uL^2/24 = -Pf/3$  im Feld.

Die in diesem Grundfall für eine volle Vorspannung erforderliche Vorspannkraft beträgt über den Auflagern:

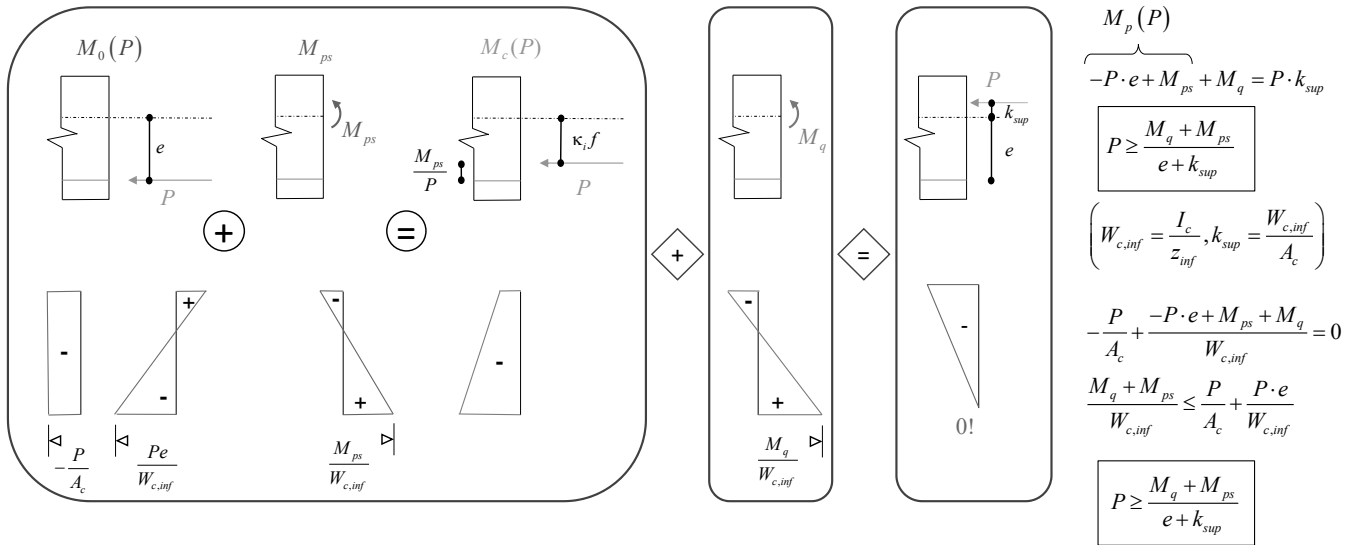
$$P \geq \frac{|M_{g,q}|}{\frac{2f}{3} + k_{inf}}$$

und in Feldmitte:

$$P \geq \frac{M_{g,q}}{\frac{f}{3} + k_{sup}}$$

# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

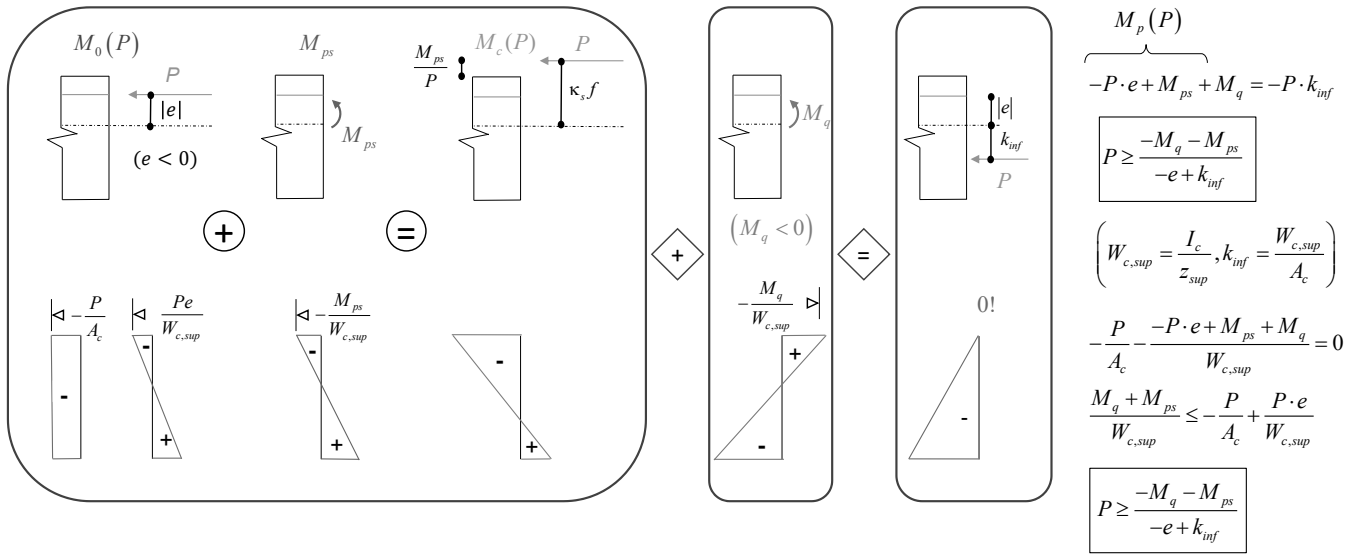
Allgemeiner Fall – positive Biegung ( $M_q > 0, e > 0$ )



Im allgemeinen Fall sind die Sekundärmomente nicht a priori bekannt (sondern hängen von der Grösse der Spannkraft ab, die zu bestimmen ist), so dass in der Regel ein iteratives Vorgehen notwendig ist.

# Statisch unbestimmte Systeme – Spannkraft für volle Vorspannung

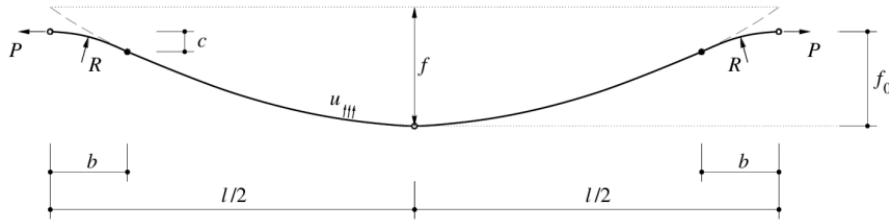
Allgemeiner Fall – negative Biegung ( $M_q < 0, e < 0$ )



Im allgemeinen Fall sind die Sekundärmomente nicht a priori bekannt (sondern hängen von der Grösse der Spannkraft ab, die zu bestimmen ist), so dass in der Regel ein iteratives Vorgehen notwendig ist.

## Vorspannung – typische Kabelgeometrien

Innenfeld (entspricht Grundfall b):



$$b = \frac{4 \cdot R \cdot f_0}{l}$$

$$c = \frac{8 \cdot R \cdot f_0^2}{l^2}$$

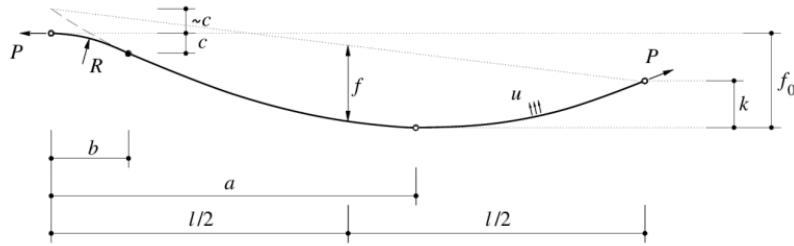
$$u = \frac{8 \cdot P \cdot f_0}{l^2 - 8 \cdot R \cdot f_0} = \frac{8 \cdot P \cdot f}{l^2}$$

$$f = \frac{f_0 \cdot l^2}{l^2 - 8 \cdot R \cdot f_0}$$

Die Folie zeigt eine typische Spanngliedgeometrie für ein Innenfeld eines Durchlaufträgers, mit den Formeln für die wichtigsten geometrischen Grössen. Dies als Hilfe bei der Festlegung der Kabelgeometrie.

## Vorspannung – typische Kabelgeometrien

Randfeld (entspricht Grundfall a):



$$a = \frac{f_0}{f_0 - k} \left[ l - \sqrt{\frac{k}{f_0} \cdot (l^2 + 2 \cdot R \cdot k) - 2 \cdot R \cdot k} \right]$$

$$b = \frac{2 \cdot R \cdot f_0}{a}$$

$$c = \frac{2 \cdot R \cdot f_0^2}{a^2}$$

$$u = \frac{2 \cdot P \cdot k}{(l - a)^2} = \frac{2 \cdot P \cdot f_0}{(a^2 - 2 \cdot R \cdot f_0)} = \frac{8 \cdot P \cdot f}{l^2}$$

$$f = \frac{k \cdot l^2}{4 \cdot (l - a)^2} = \frac{f_0 \cdot l^2}{4 \cdot (a^2 - 2 \cdot R \cdot f_0)}$$

Die Folie zeigt eine typische Spanngliedgeometrie für ein Randfeld eines Durchlaufträgers, mit den Formeln für die wichtigsten geometrischen Größen. Dies als Hilfe bei der Festlegung der Kabelgeometrie.

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

Nachfolgend werden die bereits bei der Behandlung der statisch bestimmten Systemen erwähnten Möglichkeiten zur Betrachtung der Vorspannung in Stabtragwerken näher untersucht.

## *Ergänzende Bemerkung*

- Es handelt sich bei den beiden Betrachtungsweisen um alternative Methoden, die sich in der Systemabgrenzung unterscheiden.
- In der Anfangszeit der Vorspannung wurden die Zwangsschnittgrössen teilweise als unerwünscht betrachtet und als «Parasitärmomente» bezeichnet. Effektiv ist es aber so, dass die Zwangsschnittkräfte in vielen Fällen einen günstigen Einfluss auf das Tragverhalten haben.

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

- Es gibt grundsätzlich zwei alternative Möglichkeiten für die rechnerische Behandlung der Vorspannung:

## **Eigenspannungszustand**

(wirkt am gesamten Tragwerk bzw. Bauteil inkl. Spannglied)

## **Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte**

(wirken auf das vom Spannglied befreite Tragwerk bzw. Bauteil)

- Beide Möglichkeiten führen (bei konsequenter Anwendung) zum identischen Resultat
- Der einzige Unterschied besteht in der Systemabgrenzung
- Je nach Fragestellung ist die eine oder andere Möglichkeit vorteilhaft in der Anwendung

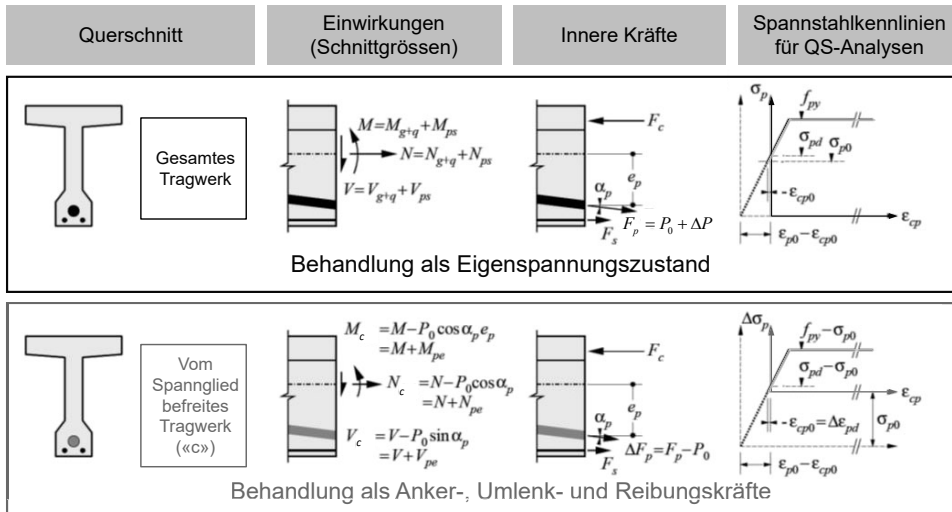
Die Vorspannung kann bei Stabtragwerken grundsätzlich auf zwei Arten berücksichtigt werden. Diese unterscheiden sich in der Systemabgrenzung.

Betrachtet man das gesamte Tragwerk, inklusive Spannglied, bewirkt die Vorspannung einen Eigenspannungszustand in jedem Querschnitt. Die diesem Eigenspannungszustand entsprechenden Verformungen sind bei statisch unbestimmten Systemen nicht mit der Lagerung verträglich, weshalb Zwangsbeanspruchungen infolge der Vorspannung resultieren, welche zusammen mit der äusseren Beanspruchung (Eigenlast, Nutzlasten, ...) als Einwirkungen zu berücksichtigen sind. Der Querschnittswiderstand entspricht bei dieser Betrachtung dem Widerstand des gesamten Querschnitts inklusive Vorspannung, weshalb man von «Vorspannung auf der Widerstandsseite» spricht.

Alternativ kann man das vom Spannglied befreite Tragwerk betrachten, auf welches infolge der Vorspannung Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte wirken. Daher spricht man bei dieser Betrachtung von «Vorspannung auf der Lastseite». Die Beanspruchung der vom Spannglied befreiten Querschnitte entspricht dabei der Summe der Beanspruchungen aus dem Eigenspannungszustand (präziser ausgedrückt: dem auf den vom Spannglied befreiten Querschnitt wirkenden Teil des Eigenspannungszustands) gemäss der Betrachtung «Vorspannung auf der Widerstandsseite» und den Zwangsbeanspruchungen infolge der Vorspannung gemäss jener Betrachtung.

Auf den folgenden Seiten werden die beiden Betrachtungsweisen einander gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass – wie nicht anders zu erwarten – die beiden Herangehensweisen letztlich zum gleichen Resultat führen. Je nach Fragestellung ist jedoch die eine oder andere davon besser geeignet.

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung



Erläuterungen siehe Folie.



# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (1)

Bei der Behandlung von vorgespannten Tragwerken ist die Systemabgrenzung von zentraler Bedeutung. Dabei sind grundsätzlich zwei Betrachtungsweisen möglich, die zum gleichen Resultat führen.

Jede davon hat ihre Vor- und Nachteile, und je nach Fragestellung ist die eine oder andere Betrachtungsweise besser geeignet.

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil (Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Die Vorspannung bewirkt in den Querschnitten einen Eigenspannungszustand: Die Zugkraft im Spannglied ist mit den (Druck-)Kräften im Stahlbetonquerschnitt im Gleichgewicht. Der Eigenspannungszustand entspricht Dehnungen und Krümmungen → Tragwerksverformungen.

Bei statisch unbestimmt gelagerten Trägern sind diese Tragwerksverformungen im Allgemeinen nicht mit der Lagerung verträglich. Daher resultieren Reaktionen und Schnittgrößen. Diese werden als Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  bezeichnet (s: «Sekundärschnittgrößen»).

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil (Stahlbetonquerschnitt allein)

Die Vorspannung entspricht Anker-, Umlenk- und Reibungskräften, die auf das vom Spannglied befreite Tragwerk wirken. Aus dieser Belastung resultieren die sogenannten Schnittgrößen infolge Vorspannung  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  und (mit der Lagerung verträgliche) Tragwerksverformungen.

Die auf das gesamte Tragwerk wirkenden Zwangsschnittgrößen werden durch die Ermittlung der Schnittgrößen aus den Anker-, Umlenk- und Reibungskräften direkt erfasst und sind somit in den Schnittgrößen infolge Vorspannung enthalten.

Erläuterungen siehe Folie.

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (2)

**Gesamtes Tragwerk / Bauteil**  
(Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Am Gesamtquerschnitt wirken folgende Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} M &= M_{g,q} + M_{ps} \\ V &= V_{g,q} + V_{ps} \\ N &= N_{g,q} + N_{ps} \end{aligned}$$

**Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil**  
(Stahlbetonquerschnitt allein)

Am vom Spannglied befreiten Querschnitt wirken folgende Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} M_c &= M_{g,q} + M_c(P) &= M_{g,q} + M_{ps} - P \cos \beta_p \cdot e \\ V_c &= V_{g,q} + V_c(P) &= V_{g,q} + V_{ps} - P \sin \beta_p \\ N_c &= N_{g,q} + N_c(P) &= N_{g,q} + N_{ps} - P \cos \beta_p \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -P \cos \beta_p \cdot e \approx -P \cdot e \\ -P \sin \beta_p \\ -P \cos \beta_p \approx -P \end{array} \right\}$$

Unterschied: Auf vom Spannglied befreites Tragwerk wirkender Teil des Eigenspannungszustands infolge Vorspannung

In den Einwirkungen sind somit nur die Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  enthalten.

Neben der Bezeichnung Vorspannung als Eigenspannungszustand wird diese Betrachtung daher auch Vorspannung auf der Widerstandsseite genannt

In den Einwirkungen sind somit die gesamten Schnittgrößen infolge Vorspannung  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  enthalten.

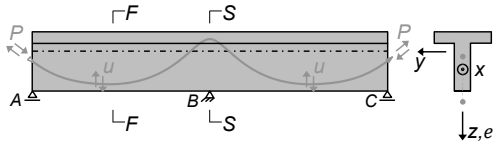
Neben der Bezeichnung Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte wird diese Betrachtung daher auch Vorspannung auf der Lastseite genannt.

Erläuterungen siehe Folie.

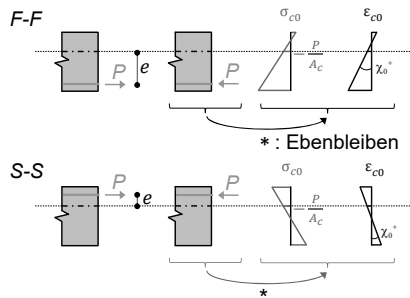
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (3)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

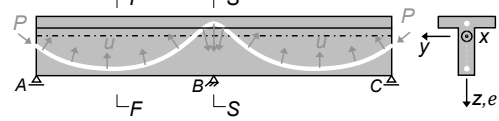


Eigenspannungszustand in Querschnitten:

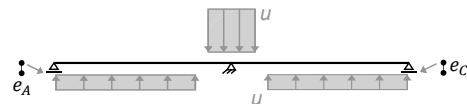


N.B.  $\sigma_{c0}(-P, -P \cdot e) \neq \text{eff. } \sigma_c$ , Anteil  $M_{ps}$  fehlt hier.

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil



Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte:



Auf dieser und den folgenden Folien werden die beiden Betrachtungsweisen am Beispiel eines symmetrischen Zweifeldträgers mit parabolischer Spanngliedführung illustriert und miteinander verglichen.

### Ergänzende Bemerkungen

- Im Beispiel ist vorausgesetzt, dass sich der Träger in Längsrichtung unbehindert verkürzen kann. Könnte er dies nicht, würden Zwangsnormalkräfte resultieren (Zugbeanspruchung). Dies ist bei vorgespannten Decken oft der Fall (siehe Advanced Structural Concrete), ebenso bei integralen Brücken (Brücken ohne Fahrbahnübergänge und Lager).
- Während Zwangsmomente infolge Vorspannung analog wie andere Zwangsmomente zumindest bei duktilen Tragwerken ( $x/d < 0.35$ ) umgelagert werden können, sind allfällige Zwangsnormalkräfte beim Nachweis der Tragsicherheit zu berücksichtigen (für übliche Verhältnisse sind die mit einem Biegeversagen einhergehenden Verlängerungen des Trägers – da sie nur lokal in einem plastischen Gelenk stattfinden – nicht ausreichend, um die Zwangsnormalkräfte signifikant abzubauen).

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (4)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

Schnittgrößen infolge Eigenspannungszustand  
(auf vom Spannglied befreites Tragwerk wirkender Teil des Eigenspannungszustands):

$$M_0 = -P \cdot e$$

$$N_0 = -P$$

Verformungen infolge Eigenspannungszustand:

$$\chi_0 = \frac{M_0}{EI} = \frac{-P \cdot e}{EI}, \quad \varepsilon_0 = \frac{N_0}{EA} = -\frac{P}{EA}$$

Durch Integration von  $\chi_0$  und  $\varepsilon_0 \rightarrow$  Verformungen, i.A. nicht mit Lagerung verträglich!

$\rightarrow$  Zwangsschnittgrößen

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Schnittgrößen infolge Vorspannung:

$$M_c(P)$$

$$V_c(P)$$

$$N_c(P) = -P$$

Annahmen:  $P \cos \alpha \approx P$

Verkürzung unbehindert, sonst wäre  $|N_c(P)| < P$

Erläuterungen siehe Folie.

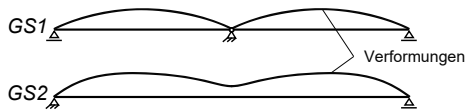
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (5)

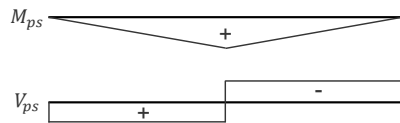
### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

Zwangsschnittgrößen («Sekundärmomente») zur Gewährleistung der Verträglichkeit:

Behandlung analog Temperaturzwang → Kraftmethode; mögliche Grundsysteme z.B.:



Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}$ ,  $V_{ps}$  (und  $N_{ps}$  falls Verkürzung behindert ist):

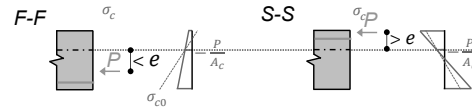


14.02.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton II

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Spannungen an Querschnitten infolge  $M_c(P)$ ,  $N_c(P)$ :



Erläuterungen siehe Folie.

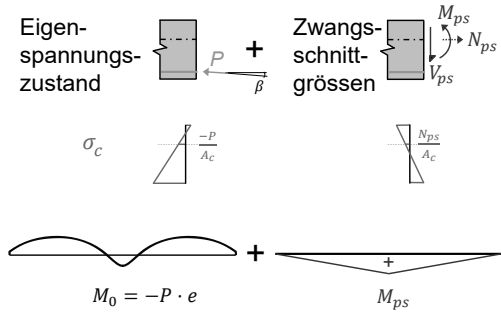
### Ergänzende Bemerkung

- Zwangsmomente sind stets zusammen mit den zugehörigen Zwangsquerkräften einzuführen.

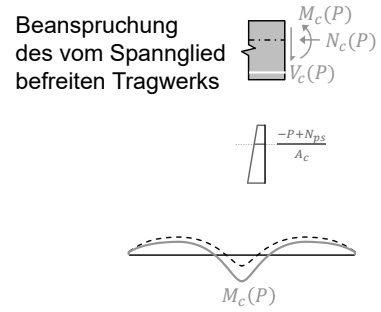
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (5)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil



### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil



$$M_c(P) = -P \cdot e + M_{ps}$$

$$V_c(P) = -P \sin \beta_p + V_{ps}$$

$$N_c(P) = -P + N_{ps}$$

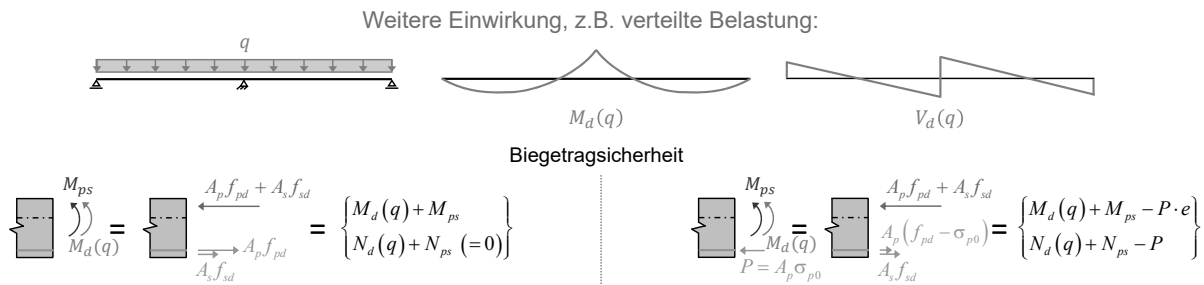
Erläuterungen siehe Folie.

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (6)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil



- Infolge Vorspannung nur  $M_{ps}$  und  $N_{ps}$
- $N_{ps} = 0$  bei unbehinderter Verkürzung,  $N(q)$  oft 0
- einfacher Nachweis für reine Biegung!
- "Vorspannung auf der Widerstandsseite"

- zusätzlich  $-P \cdot e$ ,  $-P$  wirksam
- auch bei  $N_{ps} = N(q) = 0$  Biegung mit Normalkraft
- umständlicherer Nachweis
- "Vorspannung auf der Lastseite"

Die Folie illustriert den Nachweis der Biegetragsicherheit für die beiden Betrachtungsweisen.

Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Widerstandsseite ist ein einfacher Nachweis möglich (unter der in der Regel erfüllten Annahme, dass das Biegeversagen durch Betonbruch während des Fließens der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung eintritt).

Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Lastseite ist ein Nachweis für Biegung mit Normalkraft erforderlich, und in der Vorspannung darf maximal der Spannkraftzuwachs berücksichtigt werden.

### Ergänzende Bemerkung

- Zwangsmomente (und zugehörige Zwangsquerkräfte) können beim Nachweis der Biegetragsicherheit grundsätzlich umgelagert, d.h. mit einem beliebigen – für das gesamte Tragwerk aber gleichen – Faktor multipliziert werden. In der Regel werden sie mit dem Faktor 1.0 berücksichtigt, da dies zu vernünftigen Verteilungen der Biege widerstände und einem befriedigenden Verhalten im Gebrauchszustand führt.

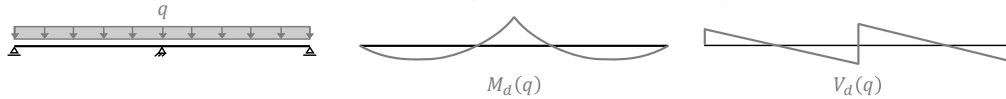
# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (7)

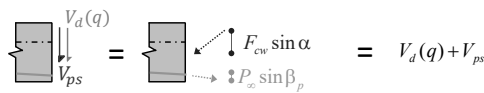
### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Weitere Einwirkung, z.B. verteilte Belastung:

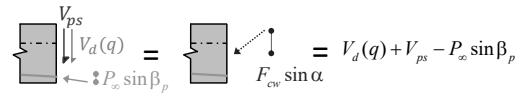


Querkrafttragsicherheit



Einwirkung:  $V_d = V_d(q) + V_{ps}$   
 Widerstand:  $V_{Rd} = V_{Rd,FW-Modell} + P_{\infty} \sin \beta_p$   
 $\rightarrow V_{Rd,FW-Modell} \geq V_d(q) + V_{ps} - P_{\infty} \sin \beta_p$

→ "Vorspannung auf der Widerstandsseite"



Einwirkung:  $V_d = V_d(q) + V_{ps} - P_{\infty} \sin \beta_p$   
 Widerstand:  $V_{Rd} = V_{Rd,FW-Modell}$   
 $\rightarrow V_{Rd,FW-Modell} \geq V_d(q) + V_{ps} - P_{\infty} \sin \beta_p$

→ einfacher, falls Vorspannung korrekt modelliert ist  
 (Ermittlung von  $\beta_p$  im massg. Schnitt unnötig,  
 sofern Gurtkräfte nicht untersucht werden)

→ "Vorspannung auf der Lastseite"

Die Folie illustriert den Nachweis der Querkrafttragsicherheit für die beiden Betrachtungsweisen.

Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Widerstandsseite darf die günstige Wirkung der geneigten Vorspannkraft (Vertikalkomponente) berücksichtigt werden, wozu die Neigung des Spannglieds im massgebenden Schnitt ermittelt werden muss.

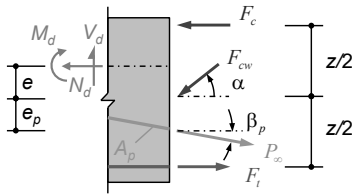
Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Lastseite ist die günstige Wirkung der geneigten Vorspannkraft bereits in der Beanspruchung berücksichtigt.

In beiden Fällen darf die günstige Wirkung der geneigten Vorspannkraft maximal mit dem Langzeitwert der Spannkraft (nach Abzug von Reibungs- und Langzeitverlusten) angesetzt werden.



## Querkrafttragsicherheit

«Querschnittswiderstand» gemäss SIA 262:



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den Kräften im Druck- und Zuggurt  $F_c$  bzw.  $F_t$  wirkt die geneigte Spannkraft  $P_\infty$  (Vorspannung auf Widerstandsseite).

Die Neigung der Druckgurkraft (siehe Stahlbeton II, Analyse benachbarter Querschnitte) wird auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt.

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um Terme infolge Vorspannung.

$$\Sigma F_V: F_{cw} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha}$$

$$\Sigma M_T: F_c = \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

$$\Sigma M_C: F_t = \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

Erforderlicher Widerstand der Bügel:

$$V_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha}$$

Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Nachweis der Querkrafttragsicherheit nach SIA 262.

# Rechnerische Behandlung der Vorspannung

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (8)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Diese Betrachtung eignet sich gut für folgende Fragestellungen (primär Tragsicherheit):

- **Nachweis der (Biege-)Tragsicherheit**  
Da durch die Vordehnung des Spannstahls gewährleistet ist, dass er die Fließgrenze in der Regel erreicht, kann der Biegewiderstand sehr einfach ermittelt werden.

Dabei ist es sinnvoll, in den Einwirkungen die Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$  zu berücksichtigen (mit  $P_0$  oder  $P_\infty$ ) (auch wenn dies im Sinne einer plastischen Schnittkraftumlagerung nicht zwingend ist):

$$M_{Rd} = A_p f_{pd} \left( d_p - \frac{0.85x}{2} \right) + A_s f_{sd} \left( d_s - \frac{0.85x}{2} \right)$$

$$M_{Ed} = \gamma_G \cdot M(g_k) + \gamma_Q \cdot M(q_k) + M_{ps}$$

Für innerlich hochgradig statisch unbestimmte Tragwerke (Flächentragwerke) ist diese Betrachtung ungeeignet (Ermittlung des Eigenspannungszustands nicht eindeutig)

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt allein)

Diese Betrachtung eignet sich gut für folgende Fragestellungen (primär Gebrauchszustand):

- **Spannungsnachweise am Querschnitt**  
Es kann eine normale Spannungsberechnung (ohne Vordehnungen) am Stahlbetonquerschnitt unter den Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  geführt werden
- **Durchbiegungsberechnungen (inkl. Kriechen)**  
Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  relevant
- **Nachweis der Querkraft (Tragsicherheit)**  
Da der Spannkraftzuwachs vernachlässigt wird, beträgt der Widerstand der Vorspannung  $V_c(P_\infty)$  (= in  $V_c(P)$  aus Statikprogramm enthalten wenn Vorspannung entsprechend modelliert ist)

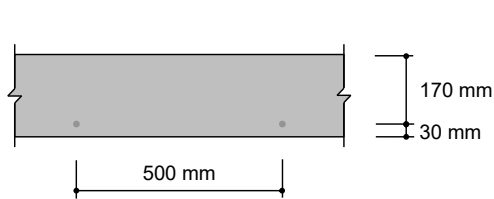
NB: Wird der Nachweis der Biegetragsicherheit mit den Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  geführt, darf im Biegewiderstand nur der Spannkraftzuwachs ( $f_{pd} - \sigma_p$ ) berücksichtigt werden, nicht  $f_{pd}$  (Vorspannung nicht 2x ansetzen)

Zusammenfassender Vergleich der beiden Betrachtungsweisen.



# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte



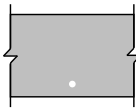
Eine 200 mm dicke Platte weist Einzeltitzen  $\varnothing 15.7$  mm der Festigkeitsklasse Y1770 im Abstand von 500 mm auf, die nachträglich injiziert werden können. Die auf die Mittelebene der Platte bezogenen Exzentrizität der Litzen beträgt  $e = 70$  mm. Sie werden auf  $\sigma_{p0} = 0.7f_{pk}$  vorgespannt. Beton und Spannstahl werden als linear elastisch mit  $E_c = 30$  GPa und  $E_p = 200$  GPa vorausgesetzt. Langzeitverluste werden nicht betrachtet.

Bruttoquerschnitt



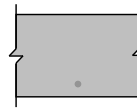
$$A_c = b \cdot h$$

Nettoquerschnitt



$$A_n = A_c - A_p$$

Ideeller Querschnitt



$$A_i = A_c + A_p \cdot (n-1)$$

Die Vorspannkraft wirkt auf den Nettoquerschnitt. Nach dem Injizieren herrscht starrer Verbund, somit sind dann streng genommen ideale Querschnittswerte zu verwenden. In guter Näherung kann auch konsequent mit Brutto-Querschnittswerten gerechnet werden.

Auf dieser und den folgenden Folien wird das Biegetragverhalten an einem einfachen Beispiel illustriert. Vereinfachend wird dabei die schlaffe Bewehrung vernachlässigt.

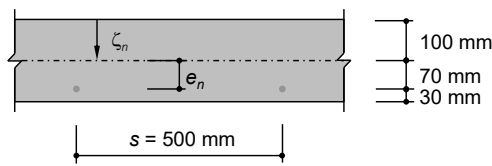
### Ergänzende Bemerkung

- Im Beispiel wird der Nettoquerschnitt vereinfachend als  $A_c - A_p$  angenommen. Effektiv wäre nicht die Spannstahlfläche  $A_p$ , sondern der Hüllrohrquerschnitt als Aussparung zu berücksichtigen, der Nettoquerschnitt also etwas kleiner. Da der Unterschied zwischen Brutto- und Nettoquerschnitt ohnehin gering ist, ist dies vernachlässigbar.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

(v) Vorspannen



$$a_n = bh - \frac{A_p}{s} = 1000 \cdot 200 - \frac{150}{0.5} = 199700 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\zeta_n = \frac{bh \cdot \frac{h}{2} - \frac{A_p}{s} \cdot d_p}{a_n} = \frac{1000 \cdot 200 \cdot 100 - \frac{150}{0.5} \cdot 170}{199700} = 99.9 \text{ mm}$$

$$e_n = d_p - \zeta_n = 170 - 99.9 = 70.1 \text{ mm}$$

$$i_n = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2} - \zeta_n\right)^2 - \frac{A_p}{s} \cdot (d_p - \zeta_n)^2 = \frac{1000 \cdot 200^3}{12} + 1000 \cdot 200 \cdot 0.1^2 - \frac{150}{0.5} \cdot 70.1^2 = 665.2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m} \quad \left(i_b = 666.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m}\right)$$

Vorspannkraft:

$$p_v = \frac{A_p}{s} \cdot 0.7 \cdot f_{pk} = 300 \cdot 0.7 \cdot 1770 = 371.7 \text{ kN/m} \quad \left(m_{p0} = -p_v \cdot e_n = -26.1 \text{ kNm/m}\right)$$

Randspannungen:

$$\begin{cases} \sigma_{c,\text{sup}}^v \\ \sigma_{c,\text{inf}}^v \end{cases} = -\frac{p_v}{a_n} + \frac{-p_v \cdot e_n}{i_n} \cdot \begin{cases} z_{n,\text{sup}} \\ z_{n,\text{inf}} \end{cases} = -\frac{371.7}{199.7} + \frac{-371.7 \cdot 70.1}{665.2 \cdot 10^3} \cdot \begin{cases} -99.9 \\ 100.1 \end{cases} = \begin{cases} 2.05 \\ -5.78 \end{cases} \text{ MPa}$$

NB: Da beim Vorspannen Last aktiviert wird, tritt dieser Zustand i.A. nur theoretisch ein (Kontrolle, ob der Querschnitt wie angenommen ungerissen ist, in Kombination mit aktivierter Last).

Erläuterungen siehe Folie.

### Ergänzende Bemerkungen

- Bis zum Injizieren wirkt der Nettoquerschnitt.
- Die Unterschiede in den Querschnittswerten zwischen Brutto- und Nettoquerschnitt sind vernachlässigbar; in der Praxis kann mit dem Bruttoquerschnitt gerechnet werden.
- Bei der Vorspannung wird meist mindestens ein Teil des Eigengewichts aktiviert, da der Träger durch die Vorspannung aus der Schalung abhebt. Daher ist der Zustand «v» (Vorspannung allein) – mit Ausnahme der Bereiche nahe der Trägerenden, wo aus Eigengewicht keine signifikante Biegemomente resultieren – primär von theoretischem Interesse.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** (v) Vorspannen

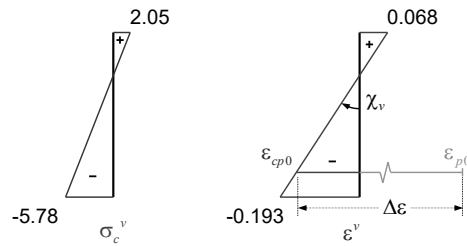
Randdehnungen:

$$\begin{cases} \varepsilon_{c,\text{sup}}^v \\ \varepsilon_{c,\text{inf}}^v \end{cases} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \begin{cases} 0.068 \\ -0.193 \end{cases} \text{‰}$$

Krümmung:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{\text{inf}} - \varepsilon_{\text{sup}}}{h}$$

$$\chi_v = \frac{-0.193 - 0.068}{0.2} = -1.305 \text{ mrad/m}$$



Betonstauchung auf Höhe des Spannglieds:

$$\varepsilon_{cp0} = \varepsilon_{\text{sup}} + d_p \chi_v = 0.068 + 0.17 \cdot (-1.305) = -0.154 \text{‰}$$

Dehnung des Spannstahls nach dem Vorspannen:

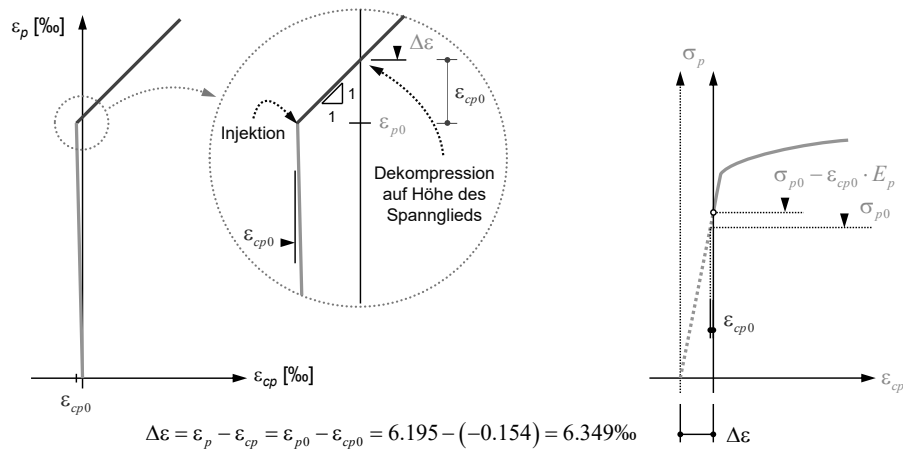
$$\varepsilon_{p0} = \frac{\sigma_{p0}}{E_p} = \frac{1239}{200} = 6.195 \text{‰}$$

Unter der Vorspannung allein würde der Querschnitt am oberen Rand dekomprimieren, resp. bei einer nicht ausreichenden Zugfestigkeit reißen. Dieser Zustand tritt jedoch nur theoretisch ein (siehe Bemerkungen auf vorhergehenden Folien).

## Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** (v) Vorspannen

Die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp}$  zwischen Beton und Spannstahl bleibt nach dem Injizieren konstant:



NB: Entscheidend ist die Grösse von  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp}$  zum Zeitpunkt der Injektion; oft wirkt dabei ein Teil der ständigen Einwirkungen (durch die Vorspannung aktiviert)  $\rightarrow \Delta\varepsilon$  in der Regel etwas kleiner (aber unwesentlich, da ohnehin  $|\varepsilon_{cp}| \ll \varepsilon_p$ )

Nach dem Vorspannen weist der Spannstahl eine Dehnung  $\varepsilon_p = \varepsilon_{p0}$  auf, der Beton auf Höhe des Spannstahls eine Dehnung  $\varepsilon_{cp} = \varepsilon_{cp0}$  (Stauchung, d.h.  $\varepsilon_{cp0}$  negativ). Die Dehnungsdifferenz zwischen Spannstahl und Beton auf Höhe des Spannstahls  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0}$  wird durch die Injektion «eingefroren» und bleibt ab diesem Zeitpunkt konstant.

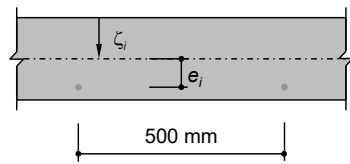
### Ergänzende Bemerkung

- Streng genommen müsste der Wert von  $\varepsilon_{cp0}$  unter Berücksichtigung des Moments, das zum Zeitpunkt der Injektion infolge der Aktivierung des Eigengewichts (resp. eines Teils davon) durch die Vorspannung wirkt, ermittelt werden. Da dieses Moment nur näherungsweise ermittelt werden kann (ausser das Lehrgerüst würde, was selten vorkommt, vor der Injektion abgesenkt), wird dies meist vernachlässigt. Da  $\varepsilon_{cp0}$  im Vergleich mit  $\varepsilon_{p0}$  ohnehin klein ist, ist dies unproblematisch.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** ungerissen elastisches Verhalten

Im ungerissenen Zustand gelten ideale Querschnittswerte



$$a_i = bh + (n-1) \frac{A_p}{s} = 1000 \cdot 200 + \left( \frac{200}{30} - 1 \right) \frac{150}{0.5} = 201700 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\zeta_i = \frac{bh \cdot \frac{h}{2} + (n-1) \frac{A_p}{s} \cdot d_p}{a_i}$$

$$= \frac{1000 \cdot 200 \cdot 100 + \left( \frac{200}{30} - 1 \right) \frac{150}{0.5} \cdot 170}{201700} = 100.6 \text{ mm}$$

$$e_i = d_p - \zeta_i = 170 - 100.6 = 69.4 \text{ mm}$$

$$i_i = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left( \frac{h}{2} - \zeta_i \right)^2 + (n-1) \frac{A_p}{s} \cdot (d_p - \zeta_i)^2 = \frac{1000 \cdot 200^3}{12} + 1000 \cdot 200 \cdot 0.6^2 + \left( \frac{200}{30} - 1 \right) \frac{150}{0.5} \cdot 69.4^2 = 674.9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m} \quad (i_b = 666.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4/\text{m})$$

Die Spannungen im Beton und im Spannstahl infolge eines Moments  $m$  [kNm/m] folgen aus

$$\Delta\sigma_c = \frac{m \cdot z_i}{i_i}$$

$$\Delta\sigma_p = \frac{m \cdot e_i}{i_i} \cdot \frac{E_p}{E_c}$$

Erläuterungen siehe Folie.

### Ergänzende Bemerkungen

- Nach dem Injizieren wirkt der ideale Querschnitt.
- Die Unterschiede in den Querschnittswerten zwischen Bruttoquerschnitt und ideellem Querschnitt sind vernachlässigbar; in der Praxis kann mit dem Bruttoquerschnitt gerechnet werden.



## Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

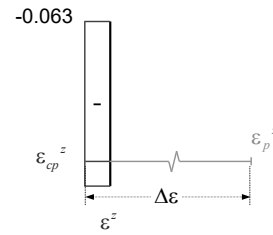
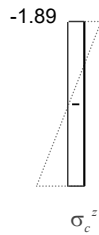
⊙ Zentrische Vorspannung

$$\begin{aligned}\chi_v + \Delta\chi_z &= 0 \rightarrow \Delta\chi_z = -\chi_v \\ \Delta\chi_z &= \frac{m_z}{E_c i_i} = -\frac{\varepsilon_{inf}^v - \varepsilon_{sup}^v}{h} \\ \rightarrow m_z &= \frac{\sigma_{c,sup}^v - \sigma_{c,inf}^v}{h} \cdot i_i \\ &= \frac{2.05 - (-5.78)}{200} \cdot 674.9 = 26.4 \text{ kNm/m}\end{aligned}$$

$$\Delta\sigma_{c,sup}^z = \frac{m_z z_{i,sup}}{i_i} = \frac{26.4 \cdot (-100.6)}{674.9} = -3.94 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{c,inf}^z = \frac{m_z z_{i,inf}}{i_i} = \frac{26.4 \cdot 99.4}{674.9} = 3.89 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p^z = \frac{m \cdot e_i}{i_i} \cdot \frac{E_p}{E_c} = \frac{26.4 \cdot 69.4}{674.9} \cdot \frac{200}{30} = 18.10 \text{ MPa}$$



$$\rightarrow \sigma_{c,sup}^z = 2.05 - 3.94 = -1.89 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{c,inf}^z = -5.78 + 3.89 = -1.89 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_p^z = 12.39 + 18.1 = 1257 \text{ MPa}$$

Unter einem Moment (zusätzlich zur Vorspannung) der Grösse  $m_z$  ist der Querschnitt zentrisch vorgespannt, d.h. es treten keine Krümmungen auf. Das Moment  $m_z$  muss also gerade so gross sein, dass es am ideellen Querschnitt eine gleich grosse Krümmung (aber in entgegengesetzter Richtung) verursacht wie das Vorspannmoment am Nettoquerschnitt.

### Ergänzende Bemerkung

- Näherungsweise, d.h. unter Vernachlässigung des Unterschieds zwischen Nettoquerschnitt und ideellem Querschnitt sowie des Spannkraftzuwachses gilt  $m_z = m_{p0}$  (Moment infolge Vorspannung, siehe Folie 78:  $m_{p0} = 26.1 \text{ kNm/m}$ ).

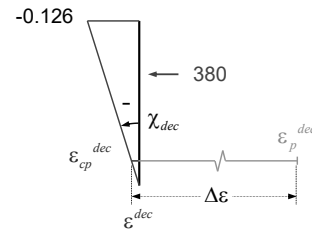
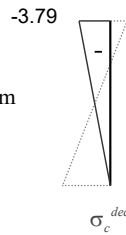
## Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

(dec) Dekompression

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = -\sigma_{c,inf}^v$$

$$\rightarrow m_{dec} = \frac{-\sigma_{c,inf}^v}{z_{i,inf}} \cdot i_i = \frac{5.78}{99.4} \cdot 674.9 = 39.2 \text{ kNm/m}$$



$$\Delta\sigma_{c,sup}^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot z_{i,sup}}{i_i} = \frac{39.2 \cdot (-100.6)}{674.9} = -5.84 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{c,sup}^{dec} = 2.05 - 5.84 = -3.79 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = \frac{39.2 \cdot 99.4}{674.9} = 5.78 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{c,inf}^{dec} = -5.78 + 5.78 = 0 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p^{dec} = \frac{m_{dec} \cdot e_i}{i_i} \cdot \frac{E_p}{E_c} = \frac{39.2 \cdot 69.4}{674.9} \cdot \frac{200}{30} = 26.8 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_p^{dec} = 1239 + 26.8 = 1266 \text{ MPa}$$

$$\chi_{dec} = \frac{\epsilon_{c,inf} - \epsilon_{c,sup}}{h} = \frac{0.126}{0.2} = 0.632 \text{ mrad/m}$$

Unter dem Moment (zusätzlich zur Vorspannung) der Grösse  $m_{dec}$  dekomprimiert der Querschnitt am unteren Querschnittsrand, d.h. die Spannungen sind an diesem Rand gerade 0.

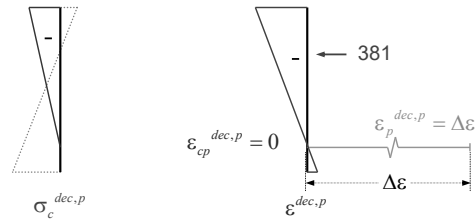
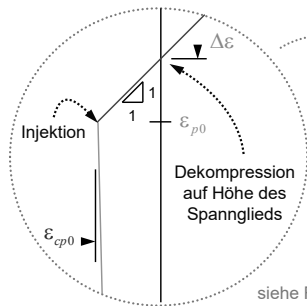
# Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

dec Dekompression (Näherung)

NB. Näherung für Abschätzungen:  
Dekompression auf Höhe des Spannglieds

- Grösse der Spannkraft bekannt ( $\Delta\varepsilon \cdot E_p$ )
- Lage der Druckresultierenden bekannt (oberer Kernpunkt des QS oberh. Spannglied)



$$\varepsilon_p^{dec,p} = \Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0} = 6.349\text{‰} \rightarrow \sigma_p^{dec,p} = \Delta\varepsilon \cdot E_p = 1270 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow m_{dec,p} = \Delta\varepsilon \cdot E_p \cdot A_p \cdot \frac{2}{3} d_p = 1.270 \cdot 300 \cdot 0.113 = 43.0 \text{ kNm/m}$$

Näherungsweise kann das Dekompressionsmoment ermittelt werden, indem die Dekompression nicht am Querschnittsrand, sondern auf der Höhe des Spannglieds betrachtet wird. In diesem Fall ist die Vorspannkraft bekannt: Die Dehnung nach dem Injizieren muss gerade  $-\varepsilon_{cp0}$  betragen, damit auf der Höhe des Spannglieds  $\varepsilon_{cp} = 0$  ist. Somit beträgt die Dehnung des Spannglieds bei Dekompression auf seiner Höhe  $\varepsilon_p = \Delta\varepsilon$ , woraus direkt die Spannkraft ermittelt werden kann.

Bei bekannter Spannkraft ist die Druckkraft im Beton bekannt, und deren Lage folgt aus der dreiecksförmigen Spannungsverteilung. Damit kann das zugehörige Biegemoment ermittelt werden.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

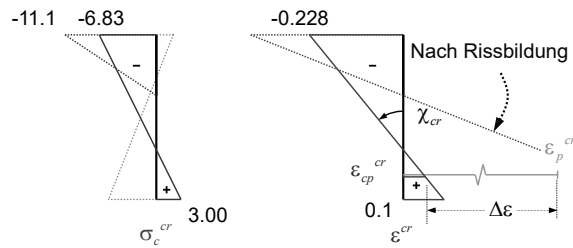
Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:

⊙ Reissen

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = f_{ct} - \sigma_{c,inf}^v$$

$$\rightarrow m_{cr} = \frac{f_{ct} - \sigma_{c,inf}^v}{z_{i,inf}} \cdot i_i$$

$$= \frac{3 - 5.78}{99.4} \cdot 674.9 = 59.6 \text{ kNm/m}$$



$$\Delta\sigma_{c,sup}^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot z_{i,sup}}{i_i} = \frac{59.6 \cdot (-100.6)}{674.9} = -8.88 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{c,sup}^{cr} = 2.05 - 8.88 = -6.83 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{c,inf}^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot z_{i,inf}}{i_i} = \frac{59.6 \cdot 99.4}{674.9} = 8.78 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{c,inf}^{cr} = -5.78 + 8.78 = 3.00 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p^{cr} = \frac{m_{cr} \cdot e_i \cdot E_p}{i_i \cdot E_c} = \frac{59.6 \cdot 69.4}{674.9} \cdot \frac{200}{30} = 40.9 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_p^{cr} = 1239 + 40.9 = 1280 \text{ MPa} \quad (\rightarrow 1366 \text{ MPa})$$

$$\chi_{cr} = \frac{\varepsilon_{c,inf} - \varepsilon_{c,sup}}{h} = \frac{0.1 + 0.228}{0.2} = 1.638 \text{ mrad/m}$$

Nach Rissbildung

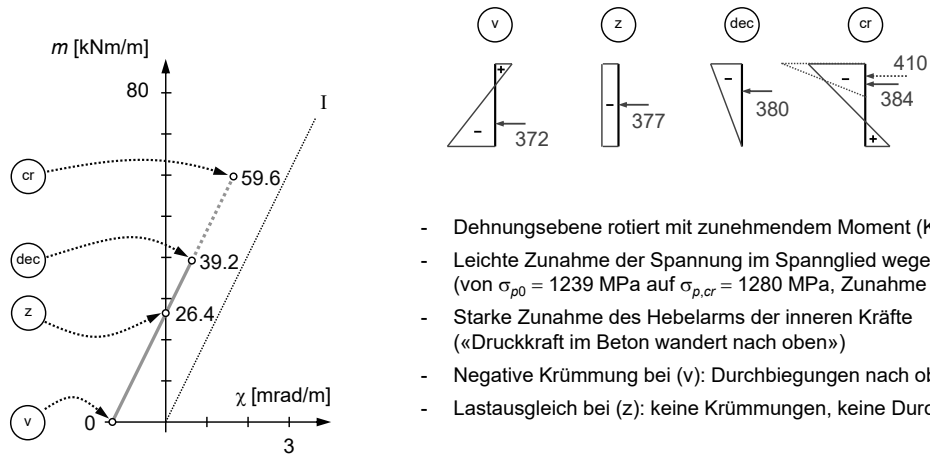
Die Berechnungen gelten für den Zustand unmittelbar vor der Rissbildung.

Die Folie zeigt auch die Spannungen und Dehnungen (wie die Spannkraft für gerissen elastisches Verhalten) unmittelbar nach der Rissbildung. Man erkennt, dass bei der Rissbildung die Krümmungen, und damit auch die Spannungen in der Vorspannung, schlagartig zunehmen.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** ungerissen elastisches Verhalten

Zusammenfassung ungerissenes Verhalten



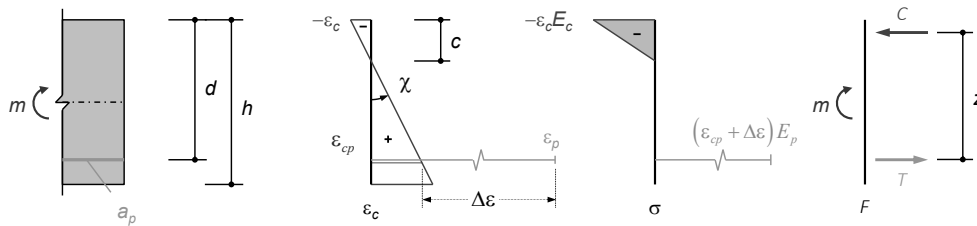
- Dehnungsebene rotiert mit zunehmendem Moment (Krümmung nimmt zu)
- Leichte Zunahme der Spannung im Spannglied wegen starrem Verbund (von  $\sigma_{p0} = 1239$  MPa auf  $\sigma_{p,cr} = 1280$  MPa, Zunahme 3.3%)
- Starke Zunahme des Hebelarms der inneren Kräfte («Druckkraft im Beton wandert nach oben»)
- Negative Krümmung bei (v): Durchbiegungen nach oben
- Lastausgleich bei (z): keine Krümmungen, keine Durchbiegungen

Erläuterungen siehe Folie.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** gerissen elastisches Verhalten

Annahme: Beton linear elastisch, Zugspannungen im Beton vernachlässigt



$$T = a_p \cdot \sigma_p = a_p \cdot \epsilon_p \cdot E_p = a_p \cdot E_p \cdot (\epsilon_{cp} + \Delta\epsilon) = a_p \cdot E_p \cdot (\chi \cdot (d - c) + \Delta\epsilon)$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot E_c \cdot \epsilon_c \cdot c = \frac{1}{2} \cdot E_c \cdot c \cdot \chi \cdot c = \frac{c^2}{2} \cdot E_c \cdot \chi$$

$$\Sigma F_H : T = C \rightarrow \chi = \frac{a_p \cdot E_p \cdot \Delta\epsilon}{\frac{c^2}{2} \cdot E_c - a_p \cdot E_p \cdot (d - c)}$$

Für bekanntes resp. angenommenes  $c$  kann die Krümmung  $\chi$  aus  $\Sigma F_H$  bestimmt werden, daraus resultieren die übrigen Unbekannten  $\epsilon_c$ ,  $\epsilon_{cp}$ ,  $T$ ,  $\sigma_p$ ,  $z = d - c/3$  und  $m$ .

Ähnlich wie bei Biegung mit Normalkraft (Stahlbeton I) ist die Druckzonenhöhe nicht wie für reine Biegung konstant. Die Ermittlung der Krümmung für eine gegebene Beanspruchung erfordert daher ein iteratives Vorgehen.

Das Momenten-Krümmungs-Verhalten kann aber (wie bei Biegung mit Normalkraft) analysiert resp. punktweise ermittelt werden, indem die Höhe der Druckzone variiert wird und die jeweils resultierenden Werte für  $m$  und  $\chi$  aufgetragen werden.

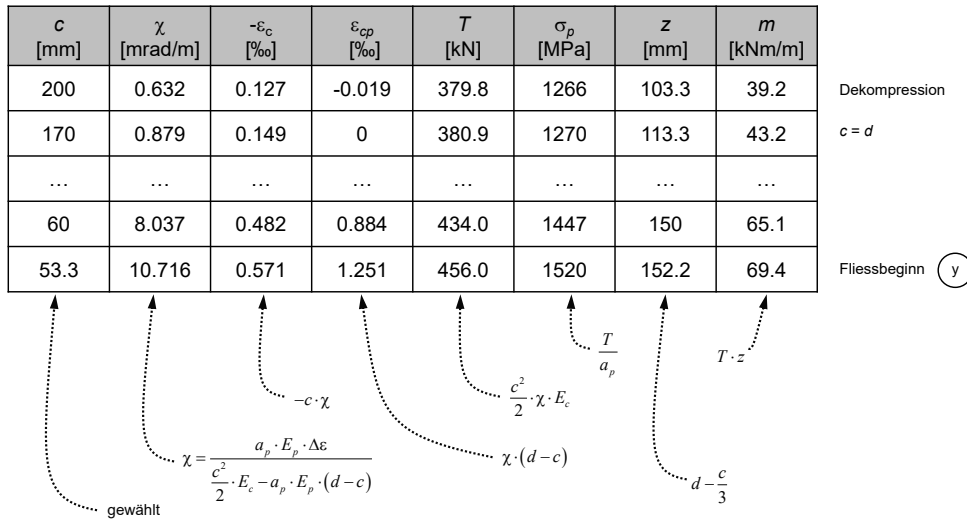
### Ergänzende Bemerkung

- Aus dem horizontalen Kräftegleichgewichts am Querschnitt kann – anstatt der Krümmung  $\chi$  – direkt der Ausdruck für die Betondruckzonenhöhe  $c$  hergeleitet werden. Da dieser wiederum ins Momentengleichgewicht eingesetzt wird, ergibt sich daraus eine direkte Beziehung zwischen der Krümmung  $\chi$  und dem Moment im Zustand II (gerissen). Die daraus folgenden Terme sind jedoch ungemein komplizierter und für eine Handrechnung daher weniger zweckmässig.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte:** gerissen elastisches Verhalten

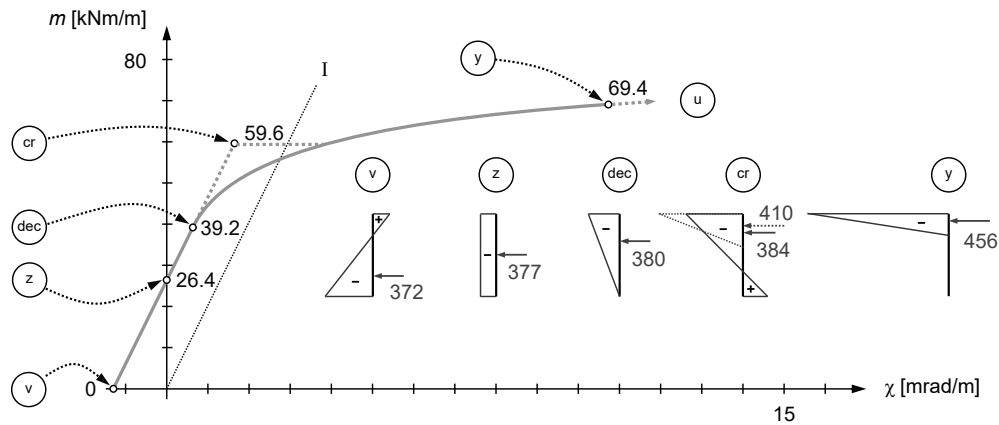
Annahme: Beton linear elastisch, Zugspannungen im Beton vernachlässigt



Die Folie illustriert die punktweise Ermittlung des Momenten-Krümmungs-Diagramms durch Variation von c mittels Tabellenkalkulation am Beispiel.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte: Zusammenfassung



- Nichtlineares Verhalten nach der Dekompression trotz des vorausgesetzten linearen Spannungs-Dehnungsverhaltens von Beton und Spannstahl
- Punktweise Ermittlung nach (y) bis zum Bruch mit nichtlinearem  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm von Beton und Spannstahl möglich
- Theoretische Zugversteifung zwischen (cr) und (y) von untergeordneter Bedeutung

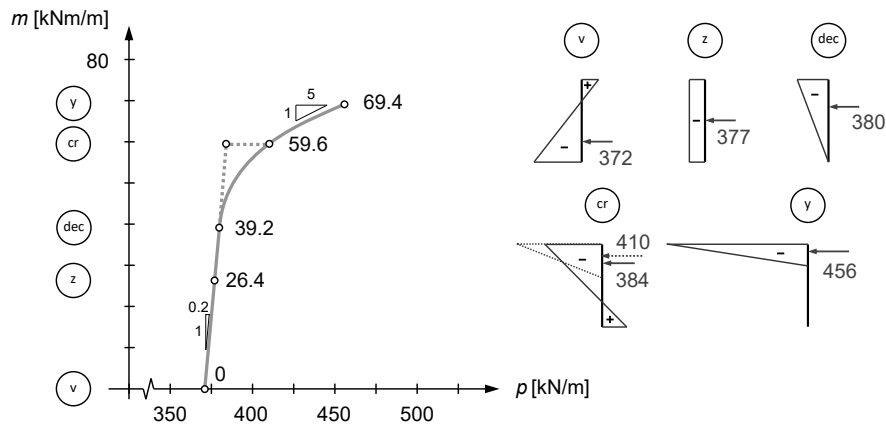
Der untersuchte Beispiel-Querschnitt zeigt das in Folie 76 schematisch erläuterte, typische Verhalten eines vorgespannten Querschnitts.

Vorgespannte Querschnitte nehmen ein zunehmendes Biegemoment auf, indem der Hebelarm der inneren Kräfte und die Kraft in der vorgespannten Bewehrung zunehmen. Der Hebelarm der inneren Kräfte resultiert daraus, dass die Zugkraft in der vorgespannten Bewehrung in der Achse des Spannglieds wirkt, die zugehörige Druckkraft sich hingegen mit zunehmender Beanspruchung nach oben verschiebt. Im Träger resultiert eine Bogenwirkung (Drucklinie im Beton, Vorspannung als Zugband wirkend), siehe Modell in der Vorlesung.



# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten vorgespannter Querschnitte: Zusammenfassung



- Linearer Verlauf der Kraft im Spannstahl mit sehr geringer Zunahme bis zur Dekompression, anschliessend nichtlinearer Verlauf mit deutlich stärkerem Spannkraftzuwachs  
(→ bei Ermüdungsbeanspruchung ist oft eine volle Vorspannung für ständige Einwirkungen + Ermüdungslasten, oder einen grossen Teil davon, sinnvoll)

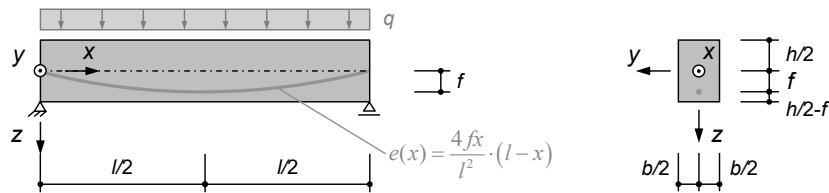
Da die Bogenwirkung im ungerissenen Zustand einen sehr steifen Lastabtragungsmechanismus darstellt, ist die Zunahme der Vorspannkraft bis zur Dekompression **dec** (resp. Rissbildung **cr**) sehr gering, und die zunehmende Beanspruchung wird praktisch ausschliesslich durch eine Vergrösserung des Hebelarms der inneren Kräfte (Vergrösserung der Pfeilhöhe des Bogens) aufgenommen: Der Hebelarm wächst, ausgehend vom Punkt **v** (Druckkraft auf Höhe der Spanngliedachse wirkend, Hebelarm = 0) über den Punkt **z** (Druckkraft in der Schwerachse des Betonquerschnitts wirkend, Hebelarm = Exzentrizität des Spannglieds  $e_p$ ) bis zum Punkt **dec** (Druckkraft im Beispiel im oberen Kernpunkt des vom Spannglied befreiten Betonquerschnitts wirkend, Hebelarm = Exzentrizität des Spannglieds + Kernweite =  $e_p + k_{sup}$ ) stark an.

Bei weiterer Laststeigerung nach Überschreiten des Dekompressionsmoments kann der Hebelarm nur noch wenig zunehmen und die zunehmende Beanspruchung wird primär durch eine Vergrösserung der Kraft in der vorgespannten Bewehrung aufgenommen.

Im dargestellten Beispiel nimmt die Spannkraft zwischen Vorspannung und Dekompressionsmoment um gerade einmal 2.2% zu, vom Dekompressionsmoment bis zum Erreichen des Querschnittswiderstands dagegen um 20%.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken



Ein einfacher Balken mit rechteckigem Querschnitt und parabolisch geführtem Spannglied wird nach dem Vorspannen einer sukzessiv steigenden Belastung  $q$  unterzogen.

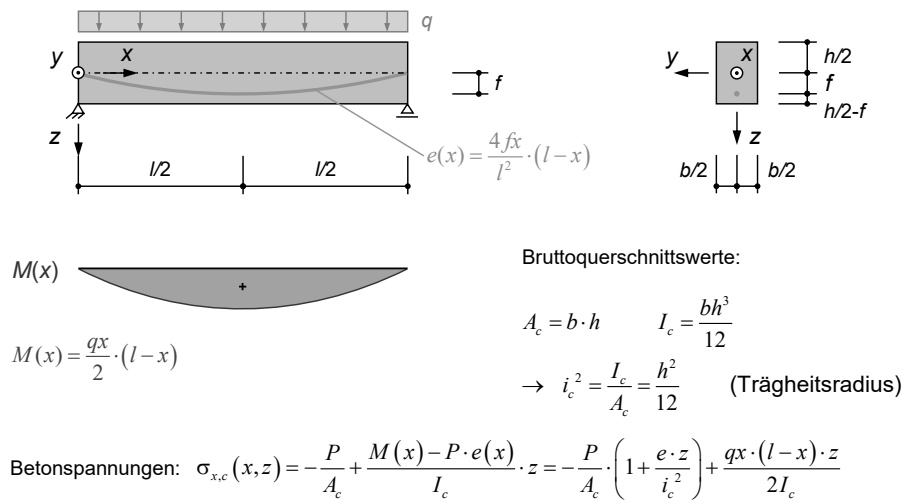
Unter Vernachlässigung der schlaffen Bewehrung soll der Spannungszustand in jedem Querschnitt  $x$  ermittelt werden.

Es wird von linear elastischem Verhalten von Beton und Spannstahl ausgegangen. Zugspannungen im Beton werden vernachlässigt.

Auf den folgenden Seiten wird das Querschnittsverhalten auf das Biegetragverhalten eines vorgespannten Systems (einfacher Balken) übertragen.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken

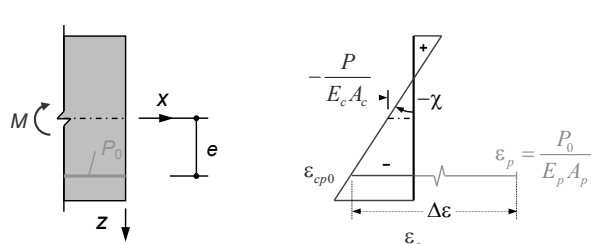


Im ungerissenen Zustand können die Betonspannungen (vereinfachend am Bruttoquerschnitt) infolge der Beanspruchung  $q$  und der parabolischen Vorspannung  $P$  gemäss Folie für den ganzen Träger in den Koordinaten  $(x, z)$  angegeben werden.

Damit können für jede Koordinate  $x$  die Dehnungsebene und die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon$  in Funktion der Spanngliedexzentrizität  $e(x)$  ermittelt werden. Auf den nächsten Folien erfolgt dies für verschiedene Werte der Belastung  $q$ .

## Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: Vorspannen auf  $P_0$  ( $M = 0$ )



$$\varepsilon_{c,\text{sup}} = -\frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 - 6 \cdot \frac{e}{h}\right) \quad \left(z = -\frac{h}{2}\right)$$

$$\varepsilon_{cp0} = -\frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 + 12 \cdot \frac{e^2}{h^2}\right) \quad (z = e)$$

$$\varepsilon_{c,\text{inf}} = -\frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 + 6 \cdot \frac{e}{h}\right) \quad \left(z = +\frac{h}{2}\right)$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp} = \frac{P_0}{E_p A_p} + \frac{P_0}{E_c A_c} \cdot \left(1 + 12 \frac{e^2}{h^2}\right) = \frac{P_0}{E_p A_p} + \frac{P_0}{E_p A_p} \cdot \left(1 + 12 \frac{e^2}{h^2}\right) \cdot \rho_p n_p = \frac{P_0}{E_p A_p} \cdot \left[1 + \rho_p n_p \cdot \left(1 + 12 \frac{e^2}{h^2}\right)\right]$$

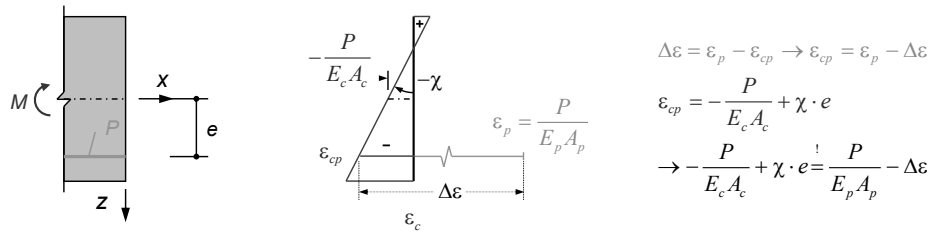
$$n_p = \frac{E_p}{E_c} \quad \rho_p = \frac{A_p}{A_c}$$

Die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon(x)$  bleibt nach dem Injizieren konstant.

Es wird vorausgesetzt, dass beim Vorspannen kein Eigengewicht aktiviert wird und zum Zeitpunkt der Injektion die Vorspannung allein wirksam ist.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten einfacher Balken:** komprimierter Zustand ( $M < M_{dec}$ )



$$\Delta\epsilon = \epsilon_p - \epsilon_{cp} \rightarrow \epsilon_{cp} = \epsilon_p - \Delta\epsilon$$

$$\epsilon_{cp} = -\frac{P}{E_c A_c} + \chi \cdot e$$

$$\rightarrow -\frac{P}{E_c A_c} + \chi \cdot e = \frac{P}{E_p A_p} - \Delta\epsilon$$

$$\chi = \frac{M_c}{E_c I_c} = \frac{M - P \cdot e}{E_c I_c} \rightarrow -\frac{P}{E_c A_c} + \frac{M - P \cdot e}{E_c I_c} \cdot e = \frac{P}{E_p A_p} - \Delta\epsilon$$

$$\rightarrow \text{(mit } \Delta\epsilon \text{ gemäss vorherg. Folie) ... } \rightarrow P = P_0 + \frac{M}{e \cdot \left(1 + \frac{1 + \rho_p n_p}{\rho_p n_p} \cdot \frac{h^2}{12e^2}\right)}$$

Initiale Vorspannkraft

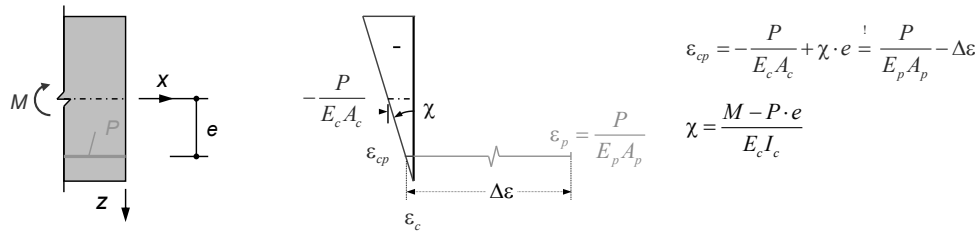
Zuwachs der Kraft im Spannglied infolge Krümmung aus  $M$

Im komprimierten Zustand kann die Spannungsermittlung unter Annahme des Ebenbleibens erfolgen, wobei die Dehnungsdifferenz  $\Delta\epsilon$  zu berücksichtigen ist.

Aus der Spannstahldehnung, die aus der Dehnungsebene für eine bestimmte Beanspruchung  $M$  resultiert (= Betondehnung auf Höhe Spannglied zuzüglich  $\Delta\epsilon$ ) kann die Spannkraft – und damit deren Zuwachs nach der Injektion – ermittelt werden. Weiterhin sind alle Beziehungen in Abhängigkeit der Koordinate  $x$  resp.  $e(x)$  zu verstehen.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: Dekompression ( $M = M_{dec}$ )



$$\epsilon_{cp} = -\frac{P}{E_c A_c} + \chi \cdot e \stackrel{!}{=} \frac{P}{E_p A_p} - \Delta \epsilon$$

$$\chi = \frac{M - P \cdot e}{E_c I_c}$$

$$\sigma_{c,x}(x, z = h/2) = -\frac{P}{A_c} \cdot \left(1 + \frac{6e}{h}\right) + \frac{M_{dec} \cdot h}{2I_c} = -\frac{P}{A_c} \cdot \left(1 + \frac{6e}{h}\right) + M_{dec} \cdot \frac{6}{h \cdot A_c} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow M_{dec} = P \cdot \left(e + \frac{h}{6}\right)$$

und mit  $P = P_0 + \frac{M}{e \cdot \left(1 + \frac{1 + \rho_p n_p}{\rho_p n_p} \cdot \frac{h^2}{12e^2}\right)}$  folgt  $M_{dec} = \dots = P_0 \cdot \left(e + \frac{h}{6}\right) \cdot \frac{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 + 12e^2)}{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 - 2eh)}$

Unter Verwendung der Grösse der Spannkraft, inkl. Spannkraftzuwachs, gemäss vorhergehender Folie kann das Dekompressionsmoment exakt ermittelt werden.

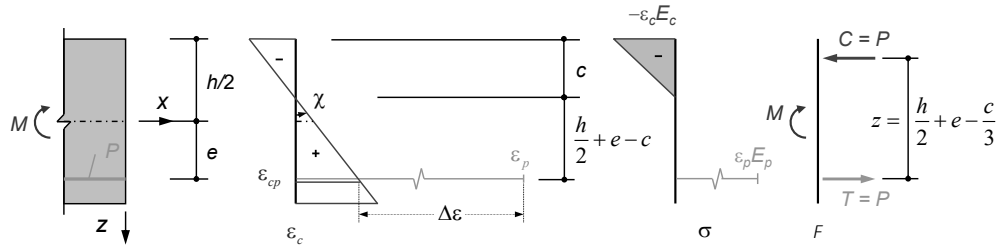
### Ergänzende Bemerkung

- Unter Vernachlässigung des Spannkraftzuwachses bis zur Dekompression beträgt das Dekompressionsmoment näherungsweise (in Praxis ausreichend genau):

$$M_{dec} \approx P_0 \cdot \left(e + \frac{h}{6}\right)$$

## Vorspannung – Biegetragverhalten

Biegetragverhalten einfacher Balken: dekomprimierter Zustand ( $M \geq M_{dec}$ )



$$T = A_p E_p \cdot \varepsilon_p = A_p E_p \cdot (\varepsilon_{cp} + \Delta\varepsilon) = A_p E_p \cdot \chi \cdot \left( \frac{h}{2} + e - c \right) + P_0 \cdot \left( 1 + \rho_p n_p \cdot \left( 1 + 12 \cdot \frac{e^2}{h^2} \right) \right)$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot E_c \cdot \varepsilon_c = \frac{bc^2}{2} \cdot E_c \cdot \chi$$

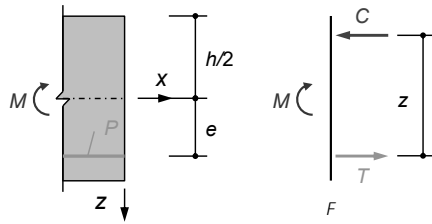
NB: Unterschied zu schlaff bewehrten Trägern: Wegen  $\Delta\varepsilon \neq 0$  kann  $\chi$  nach Gleichsetzen  $C = T$  **nicht** eliminiert werden  $\rightarrow c$  ist nicht konstant,  $M$ - $\chi$  somit trotz linear elastischem Materialverhalten nichtlinear

$$\Sigma F_H : C = T \rightarrow \chi = \frac{P_0 \cdot \left( 1 + \rho_p n_p \cdot \left( 1 + 12 \cdot \frac{e^2}{h^2} \right) \right)}{\frac{bc^2}{2} \cdot E_c - A_p E_p \cdot \left( \frac{h}{2} + e - c \right)} \quad M = P \cdot \left( \frac{h}{2} + e - \frac{c}{3} \right)$$

Im dekomprimierten Zustand wird von einem gerissen elastischen Verhalten (Zustand II) ausgegangen. Die Berechnungen erfolgen grundsätzlich analog wie bei der punkweisen Ermittlung des Momenten-Krümmungs-Diagramms (Folie 88/89), wobei hier iteriert wird, um die Krümmung (und alle weiteren Größen) für eine bestimmte Beanspruchung  $M$  zu ermitteln.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

**Biegetragverhalten einfacher Balken:** dekomprimierter Zustand ( $M \geq M_{dec}$ )



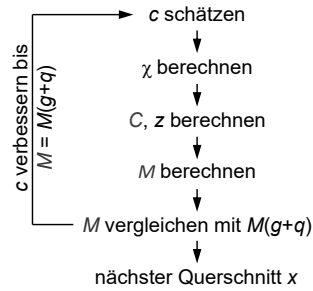
$$\Sigma F_H: C = T \rightarrow \chi = \frac{P_0 \cdot \left( 1 + \rho_p n_p \cdot \left( 1 + 12 \frac{e^2}{h^2} \right) \right)}{\frac{bc^2}{2} \cdot E_c - A_p E_p \cdot \left( \frac{h}{2} + e - c \right)}$$

Für einen gegebenen Querschnitt  $x$  mit gegebenen Lasten  $g + q$  kann die Gleichung für  $\chi$  durch Annahme von  $c$  und sukzessiver Verbesserung iterativ gelöst werden.

$$C = \frac{b}{2} \cdot c \cdot E_c \cdot \varepsilon_c = \frac{bc^2}{2} \cdot E_c \cdot \chi$$

$$z = \frac{h}{2} + e - \frac{c}{3}$$

$$M = C \cdot z$$

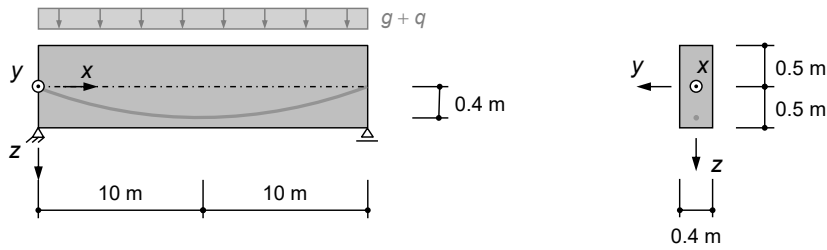


Erläuterungen siehe Folie.



# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel



- Eigenlast  $g_{0k} = 10$  kN/m, Nutzlast  $q = 6$  kN/m
- Parabolisch geführtes Spannglied 6-7 mit 7 Litzen  $\varnothing 0.6''$  Y1770 ( $A_p = 1050$  mm<sup>2</sup>,  $E_s = 195$  GPa)
- Pfeilhöhe  $f = 0.4$  m
- Quasi-konstante initiale Vorspannkraft  $P_0 = 0.6 \cdot A_p \cdot f_{pk} = 1115$  kN (Verluste vernachlässigt)
- Beton C40/50,  $f_{ck} = 40$  MPa,  $f_{cd} = 24$  MPa,  $f_{cm} = 48$  MPa,  $E_{cm} = 36.6$  GPa,  $A_c = 0.4$  m<sup>2</sup>

$$n_p = \frac{E_p}{E_c} = \frac{195}{36.6} = 5.33 \quad \rho_p = \frac{A_p}{A_c} = \frac{1050}{4000} = 0.26 \%$$

Auf den folgenden Seiten wird das vorgängig erläuterte Biegetragverhalten des vorgespannten einfachen Balkens an einem Beispiel untersucht.

Zunächst wird eine Belastung von  $(g + q) = 16$  kN/m untersucht, bei welcher der Träger im mittleren Bereich gerissen ist. Anschliessend werden die Durchbiegungen unter kleineren Lasten (Vorspannung, Dekompression in Feldmitte) ermittelt, bei denen der ganze Träger ungerissen bleibt.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Tabellenrechnung für  $g + q = 16 \text{ kN/m}$ :

$x$ [m]	$M$ [kNm]	$e_p$ [mm]	$M_{dec}$ [kNm]	$c$ [mm]	$\chi$ [mrad/m]	$P$ [kN]	$e_c$ [mm]	$\varphi$ [mrad]	$w$ [mm]
0	0	0	186	1000	0	1115	0	-2.18	0
2	288	144	349	1000	0.104	1122	-113	-2.08	4.3
4	512	256	480	917	0.185	1137	-194	-1.79	8.2
6	672	336	576	764	0.271	1156	-245	-1.33	11.3
8	768	384	636	686	0.340	1172	-271	-0.71	13.4
10	800	400	656	663	0.366	1178	-279	0	14.1

$$M_{dec} = \frac{P_0 \cdot \left( e_p + \frac{h}{6} \right) \cdot \left( h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 + 12e_p^2) \right)}{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 - 2e_p h)}$$

$$c = \begin{cases} h & M \leq M_{dec} \\ \text{iterieren} & M > M_{dec} \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{M - P \cdot e_p}{E_c I_c} & M \leq M_{dec} \\ \text{iterieren} & M > M_{dec} \end{cases}$$

14.02.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton II

99

Die Folie illustriert die Ermittlung des Spannungs- und Dehnungszustands in ausgewählten Querschnitten (alle 2 m) des Trägers unter einer Belastung von  $(g + q) = 16 \text{ kN/m}$ .

Zuerst wird jeweils das Dekompressionsmoment  $M_{dec}$  berechnet. Für  $M \leq M_{dec}$  erfolgt sodann die Ermittlung von  $c$  und  $\chi$  am ungerissenen Querschnitt, für  $M > M_{dec}$  am gerissenen elastischen Querschnitt.

### Ergänzende Bemerkung

- Ohne Berücksichtigung des Spannkraftzuwachses beträgt das Dekompressionsmoment beispielsweise in Feldmitte 632 kNm (Abweichung 3.5%)

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Tabellenrechnung für  $g + q = 16 \text{ kN/m}$ :

$x$ [m]	$M$ [kNm]	$e_p$ [mm]	$M_{dec}$ [kNm]	$c$ [mm]	$\chi$ [mrad/m]	$P$ [kN]	$e_c$ [mm]	$\varphi$ [mrad]	$w$ [mm]
0	0	0	186	1000	0	1115	0	-2.18	0
2	288	144	349	1000	0.104	1122	-113	-2.08	4.3
4	512	256	480	917	0.185	1137	-194	-1.79	8.2
6	672	336	576	764	0.271	1156	-245	-1.33	11.3
8	768	384	636	686	0.340	1172	-271	-0.71	13.4
10	800	400	656	663	0.366	1178	-279	0	14.1

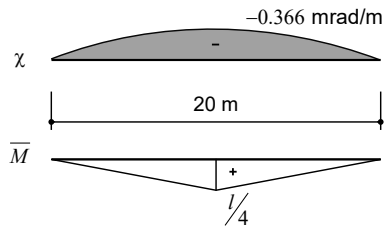
- Die Verdrehungen  $\varphi$  und Durchbiegungen  $w$  können aus Integration der Krümmungen unter Verwendung geeigneter Randbedingungen ermittelt werden.
- Für  $x > 10 \text{ m}$  folgen die Werte aus Symmetrie (Werte entsprechen denjenigen bei  $l-x$ ).

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Vorspannen:



$$\chi_m = -\frac{P_0 \cdot f}{E_c I_c} = \frac{-1.115 \cdot 0.4}{36.6 \cdot \frac{0.4 \cdot 1^3}{12}} = -0.366 \text{ mrad/m}$$

$$w_m = \int \bar{M} \cdot \chi \, dx = -\frac{5}{12} \cdot \frac{20}{4} \cdot 0.366 \cdot 20 = -15.2 \text{ mm}$$

Dekompression in Feldmitte:  $M_{dec} = P_0 \cdot \left( e + \frac{h}{6} \right) \cdot \frac{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 + 12e^2)}{h^2 + \rho_p n_p \cdot (h^2 - 2eh)} = 1115 \cdot \left( 0.4 + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1^2 + 0.0026 \cdot 5.33 \cdot (1^2 + 12 \cdot 0.4^2)}{1^2 + 0.0026 \cdot 5.33 \cdot (1^2 - 2 \cdot 0.4 \cdot 1)} = 655.8 \text{ kNm}$

$$\frac{(g + q_{dec}) \cdot l^2}{8} = M_{dec} \rightarrow q_{dec} = \frac{8 \cdot 655.8}{20^2} - 10 = 3.1 \text{ kN/m}$$

$$P_m = P_0 + \frac{M}{e \cdot \left( 1 + \frac{1 + \rho_p n_p}{\rho_p n_p} \cdot \frac{h^2}{12e^2} \right)} = 1115 + \frac{655.8}{0.4 \cdot \left( 1 + \frac{1 + 0.0026 \cdot 5.33}{0.0026 \cdot 5.33} \cdot \frac{1^2}{12 \cdot 0.4^2} \right)} = 1157 \text{ kN}$$

$$\chi_m = \frac{M_{dec} - P_m \cdot e}{E_c I_c} = \frac{0.6558 - 1.157 \cdot 0.4}{36.6 \cdot \frac{0.4 \cdot 1^3}{12}} = 0.158 \text{ mrad/m}$$

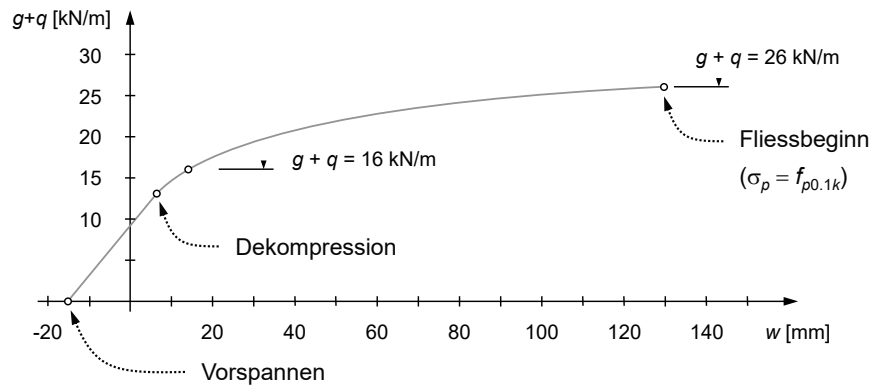
$$w_m = \int \bar{M} \cdot \chi \, dx = \frac{5}{12} \cdot \frac{20}{4} \cdot 0.158 \cdot 20 = 6.6 \text{ mm}$$

N.B. Veränderung von  $P$  zwischen 1115 kN (Auflager) und 1157 kN (Feldmitte) bei der Ermittlung von  $w_m$  vernachlässigt.

Die Durchbiegungen für Belastungen, unter welchen der ganze Träger ungerissen ist, können (unter Vernachlässigung des Spannkraftzuwachses) einfach ermittelt werden, siehe Folie.

# Vorspannung – Biegetragverhalten

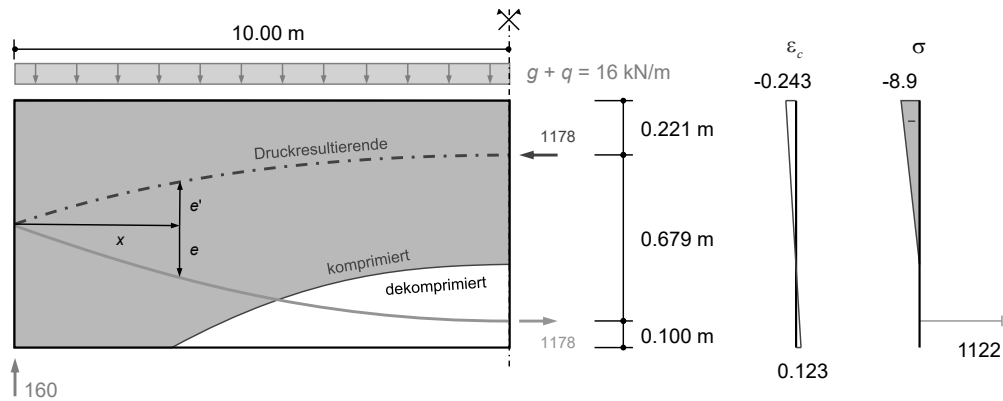
## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel



Werden analog wie für die Belastung von  $(g + q) = 16$  kN/m weitere Belastungen untersucht, kann die gesamte Last-Durchbiegungslinie ermittelt werden.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

### Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel



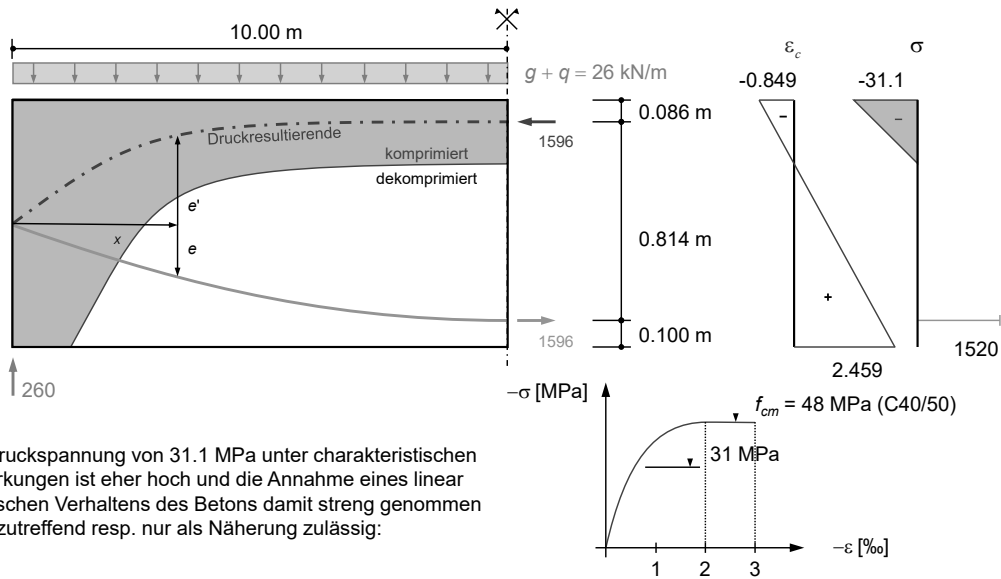
N.B.: Darstellung 5x überhöht

Unter der Belastung  $(g + q) = 16 \text{ kN/m}$  ist der Träger in Auflagernähe ungerissen (komprimiert), im Bereich der Feldmitte dagegen dekomprimiert. Der gedrückte Bereich des Querschnitts (Druckzonenhöhe  $c$ ) ist aber auch in Feldmitte relativ gross.

Die Druckresultierende ist auch in Auflagernähe nur wenig geneigt (Darstellung ist 5x überhöht, Neigung in Wirklichkeit deutlich kleiner als dargestellt).

# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel



14.02.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton II

104

Unter einer höheren Belastung ( $g + q$ ) =  $26 \text{ kN/m}$ , die unter den getroffenen Annahmen (linear elastisches Verhalten) dem Fließbeginn des Spannstahls (Biegezugspannung) entspricht, ist der Träger praktisch auf der ganzen Länge gerissen (dekomprimiert), und der gedrückte Bereich des Querschnitts (Druckzonenhöhe  $c$ ) ist im gerissenen Bereich wesentlich kleiner.

Die Druckresultierende ist in Auflagernähe stark geneigt und trägt wesentlich zum Abtrag von Querkräften bei (was bei Norm-Nachweisen unberücksichtigt bleibt).

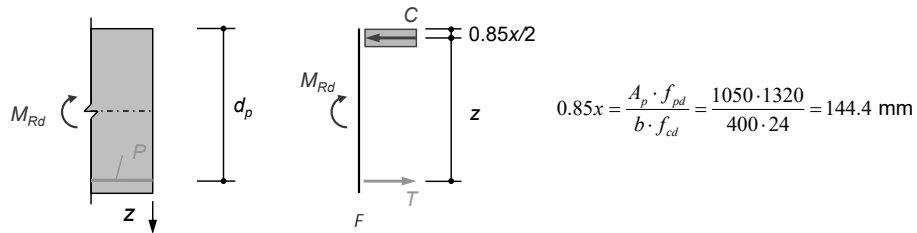
### Ergänzende Bemerkung

- Die Ermittlung des Spannungs- und Dehnungszustands unter ( $g + q$ ) =  $26 \text{ kN/m}$  erfolgt analog wie für ( $g + q$ ) =  $16 \text{ kN/m}$ , hier nicht nochmals dargestellt.

## Vorspannung – Biegetragverhalten

### Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Biege­widerstand



$$0.85x = \frac{A_p \cdot f_{pd}}{b \cdot f_{cd}} = \frac{1050 \cdot 1320}{400 \cdot 24} = 144.4 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} = A_p \cdot f_{pd} \cdot \left( d_p - \frac{0.85 \cdot x}{2} \right) = 1050 \cdot 132 \cdot \left( 0.9 - \frac{0.1444}{2} \right) = 1147 \text{ kNm}$$

$$M_d = \frac{(\gamma_G \cdot g + \gamma_Q \cdot q) \cdot l^2}{8} = M_{Rd} \rightarrow q_{adm} = \left( \frac{8 \cdot M_{Rd}}{l^2} - \gamma_G \cdot g \right) \cdot \frac{1}{\gamma_Q} = \left( \frac{8 \cdot 1147}{20^2} - 1.35 \cdot 10 \right) \cdot \frac{1}{1.5} = 6.3 \text{ kN/m}$$

$$\left( (\gamma_G \cdot g + \gamma_Q \cdot q)_u = \frac{8 \cdot M_{Rd}}{l^2} = 22.9 \text{ kN/m} \right)$$

NB: Biege­widerstand wurde auf Folien 102/104 überschätzt (Druckspannungen >  $f_{cd}$ , daher kleinere Druckzonenhöhe = grösserer Hebelarm der inneren Kräfte)

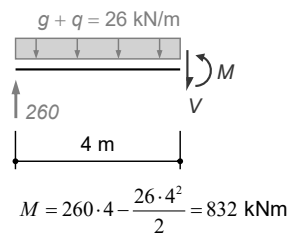
Der Biege­widerstand wird unter der Annahme ermittelt, dass das Versagen durch Betonbruch während Fliessen des Spannstahls erfolgt (Annahme zutreffend).



# Vorspannung – Biegetragverhalten

## Biegetragverhalten einfacher Balken: Beispiel

Querkraftwiderstand (stellvertretend am Schnitt bei  $x = 4$  m)



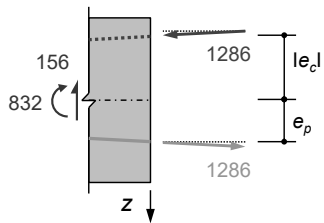
$$M = 260 \cdot 4 - \frac{26 \cdot 4^2}{2} = 832 \text{ kNm}$$

$$V = 260 - 26 \cdot 4 = 156 \text{ kN}$$

$$\frac{de_p}{dx} = \frac{4f}{l^2} \cdot (l - 2x) = \frac{4 \cdot 400}{20000^2} \cdot (20000 - 8000) = 48 \text{ mrad}$$

$$\frac{de_c}{dx} = \dots = 20.3 \text{ mrad}$$

$$V_c = V_d - P \cdot \left( \frac{de_p}{dx} + \frac{de_c}{dx} \right) = 156 - 61.7 - 26.1 = 68.2 \text{ kN}$$



$$M = P \cdot (e_p + e_c)$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$= \frac{dP}{dx} \cdot (e_p + e_c) + P \cdot \left( \frac{de_p}{dx} + \frac{de_c}{dx} \right)$$

Anteil Schubfeld  
zwischen  
Gurtkräften

Anteil der  
geneigten  
Gurtkräfte

$$P \cdot \frac{de_p}{dx} = 1286 \cdot 0.048 = 61.7 \text{ kN}$$

$$P \cdot \frac{de_c}{dx} = 1286 \cdot 0.0203 = 26.1 \text{ kN}$$

Aus Vergleich benachbarter Querschnitte der Tabellenrechnung für 26 kN/m

Ein wesentlicher Teil der Querkraft wird durch die geneigten Zug- resp. Druckgurtkräfte abgetragen!

Betrachtet man in einer Berechnung gemäss Folien 98 - 104 benachbarte Querschnitte, kann der Anteil der Querkraft, welcher über die geneigten Druck- und Zugkräfte abgetragen wird, aus der Grösse und Neigung dieser Kräfte ermittelt werden.

Dadurch vermindert sich die Querkraft, welche vom Träger über ein Schubfeld abzutragen ist. In Norm-Nachweisen der Querkrafttragsicherheit wird bei parallelgurtigen Trägern normalerweise der Anteil der Querkraft, welche durch geneigte Druckkräfte abgetragen wird, vernachlässigt (sichere Seite) und nur der Anteil der geneigten Vorspannkraft berücksichtigt. Bei der Überprüfung bestehender Tragwerke kann es sich dagegen lohnen, die geneigte Druckkraft zu berücksichtigen. Dies muss jedoch auf Basis einer klaren Modellvorstellung (wie auf den vorhergehenden Folien erläutert) erfolgen. Die in zahlreichen wissenschaftlichen Veröffentlichungen anzutreffenden empirischen Modelle, die in einzelnen Querschnitten einen Teil des Querkraftwiderstands der Druckzone zuweisen, ohne den Verlauf der Druckresultierenden zu untersuchen sind dagegen nutzlos (die angenommenen «Querkräfte in der Druckzone» sind oft viel zu gross, um mit der tatsächlichen Neigung der Druckresultierenden aufgenommen werden zu können).

Bei allgemeinen Querschnitten mit gemischter Bewehrung (schlaaffe Bewehrung und Vorspannung) und nichtlinearem Materialverhalten kann grundsätzlich analog vorgegangen werden wie auf den vorhergehenden Folien erläutert. Das Vorgehen wird nachfolgend – nach einer Wiederholung der Grundlagen für die Analyse allgemeiner Querschnitte – beschrieben.

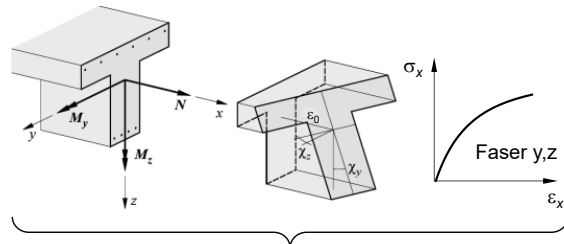
# Allgemeine Querschnitte und Beanspruchungen (SB I)

## Allgemeines

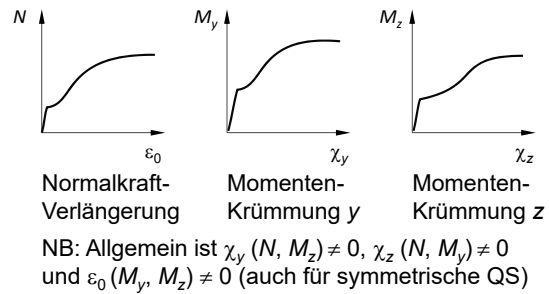
- Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ermöglicht die Ermittlung des Tragverhaltens von Stäben bei gegebenem Baustoffverhalten (Spannungs-Dehnungsdiagramme)
- Schnittgrößen ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) folgen aus den Verformungsgrößen ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) einfach durch Integration, umgekehrt ist im Allgemeinen eine Iteration erforderlich:

$$\begin{array}{l}
 \text{Integration} \\
 \text{Iteration}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{array} \right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right\}$$

- Statische Berechnung: ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) meist auf Hauptachsen Beton-QS bezogen, bei Berücksichtigung ideeller Querschnittswerte beachten!



Ermittlung des Tragverhaltens für beliebige Querschnittsgeometrie / Baustoffe möglich:



## Wiederholung aus Stahlbeton I:

Unter der Annahme einer linearen Verteilung der Längsdehnungen («Ebenbleiben des Querschnitts») ist der Verformungszustand («Dehnungsebene») in jedem Querschnitt durch drei Verformungsgrößen («verallgemeinerte Dehnungen») eindeutig definiert. Üblicherweise verwendet man als verallgemeinerte Dehnungen die Dehnung der Schwerachse  $\varepsilon_0$  und die Krümmungen  $\chi_y$  und  $\chi_z$ .

Ist für jede Faser des Querschnitts das Materialverhalten bekannt (Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Beton und Bewehrung), können für einen beliebigen Verzerrungszustand ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) die zugehörigen Schnittgrößen resp. Spannungsergebnisse («verallgemeinerte Spannungen») durch Integration der Spannungen über den Querschnitt ermittelt werden. Üblicherweise verwendet man als Spannungsergebnisse die Normalkraft  $N$  und die auf die Schwerachse bezogenen Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$ .

Soll umgekehrt für eine gegebene Beanspruchung (Spannungsergebnisse  $N$ ,  $M_y$  und  $M_z$ ) der Verzerrungszustand ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) ermittelt werden, ist ausser in einfachen Spezialfällen ein iteratives Vorgehen erforderlich.

## Ergänzende Bemerkung

- Die Querkraft  $V$  wird bei diesem Vorgehen nicht betrachtet (alle Spannungen sind senkrecht zum Querschnitt resp. parallel zur Stabachse). Sie kann indirekt berücksichtigt werden, indem – auf Basis der Modellvorstellung eines parallelen, geneigten Schubfelds im Steg – eine zusätzliche Normalkraft der Grösse  $V \cdot \cot \alpha$  eingeführt wird, die in Stegmitte angreift und der resultierenden Horizontalkraft im Steg entspricht (Druckkraft im Steg muss durch Gurte aufgenommen werden, siehe «Querschnittsbetrachtung» im Kapitel Querkraft, Stahlbeton I).

# Allgemeine Querschnitte und Beanspruchungen

## Vorgespannte Querschnitte

- Behandlung analog, Vordehnung des Spannstahls berücksichtigen

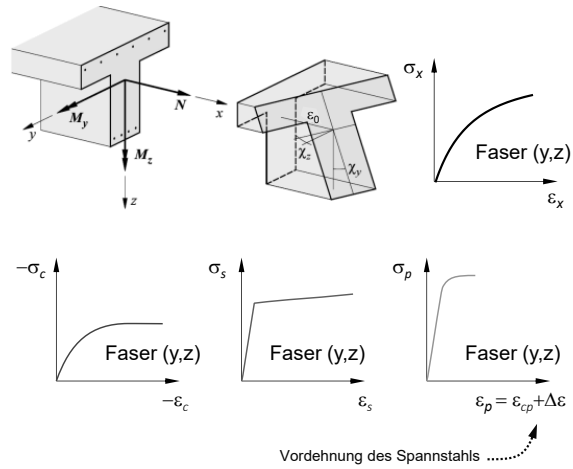
$$\varepsilon_x(y, z) = \varepsilon_0 + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y$$

$$\varepsilon_c(y, z) = \varepsilon_x(y, z)$$

$$\varepsilon_s(y, z) = \varepsilon_x(y, z)$$

$$\varepsilon_p(y, z) = \varepsilon_x(y, z) + \Delta\varepsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Integration}} \\ \xleftarrow{\text{Iteration}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right\}$$

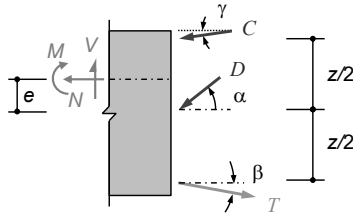


Bei vorgespannten Querschnitten kann grundsätzlich gleich vorgegangen werden wie bei schlaff bewehrten Querschnitten. Der Unterschied besteht einzig darin, dass die vorgespannte Bewehrung (Spannstahl) eine Vordehnung  $\Delta\varepsilon$  aufweist. Die Dehnung in der vorgespannten Bewehrung ist um die Vordehnung  $\Delta\varepsilon$  grösser als die Dehnung  $\varepsilon_{cp}$  des Betons (resp. einer nicht vorgespannten Bewehrung) an gleicher Stelle des Querschnitts:  $\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \Delta\varepsilon$ .

Während die Grösse von  $\varepsilon_{cp}$  aus der Dehnungsebene folgt, resultiert die Vordehnung  $\Delta\varepsilon$  aus dem Spannvorgang (Höhe der Vorspannkraft inkl. Reibungsverluste, Verkürzung des Betons auf Höhe der Vorspannung beim Spannvorgang). Unter der Annahme eines starren Verbunds zwischen Vorspannung und Beton (Vorspannung mit Verbund) bleibt der Wert von  $\Delta\varepsilon$ , unabhängig vom Verzerrungszustand, konstant.

## Vorspannung – Querkraft

### Allgemeines Lösungsverfahren (dual section analysis)



Annahme: geneigtes Druckfeld zwischen den resultierenden Druck- und Zugkräften  $T$  und  $C$

$$\Sigma F_H: N = T \cdot \cos \beta - D \cdot \cos \alpha - C \cdot \cos \gamma$$

$$\Sigma F_V: V = T \cdot \sin \beta + D \cdot \sin \alpha + C \cdot \sin \gamma$$

$$\rightarrow N + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha = T \cdot \cos \beta - C \cdot \cos \gamma$$

$$\Sigma M: M = (T \cdot \cos \beta + C \cdot \cos \gamma) \cdot \frac{z}{2} + N \cdot e$$

Bei gegebenen Schnittgrößen ( $M, V, N$ ) und Querschnittseigenschaften (Geometrie, Bewehrung, Vordehnungen,  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramme) erfordert die Bestimmung der übrigen Größen ( $T, \beta, C, \gamma, z, e$ ) bei angenommenem  $\alpha$  ein iteratives Vorgehen. Aus einer Querschnittsanalyse für das Moment  $M + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha \cdot e$  (auf Schwerachse bezogen) und die Normalkraft  $N + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha$  mit zunächst geschätzten Werten  $e$  sowie  $T \cdot \sin \beta + C \cdot \sin \gamma$  folgen die Verformungsgrößen  $\epsilon_0$  und  $\chi_y$  und damit die Kräfte  $C \cdot \cos \gamma$ ,  $T \cdot \cos \beta$  sowie die geometrischen Größen  $e, z$ .

Aus der Betrachtung benachbarter Querschnitte resultieren ferner die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$ , womit die Analyse mit verbesserten Werten  $e$  sowie  $T \cdot \sin \beta + C \cdot \sin \gamma$  wiederholt werden kann, bis die angestrebte Genauigkeit erreicht ist.

Erforderlicher Widerstand der Bügel:

$$V_{Rd,s,erf} = \frac{V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma}{z \cdot \cot \alpha}$$

Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Wie erläutert (Folie 106), wird die Querkraft in einem vorgespannten Träger durch folgende Mechanismen abgetragen:

- Schubfeld im Steg (geneigte Druckkraft  $D$  im Steg, wie bei schlaff bewehrten Trägern)
- Vertikalkomponente der Zugkraft  $T$  ( $T$ : Resultierende aus schlaffer Bewehrung und Vorspannung)
- Vertikalkomponente der Druckkraft  $C$

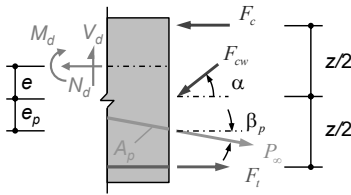
Ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der unbekanntenen Größen ( $T, \beta, C, \gamma, z$  und  $e$ ) für eine gegebene Beanspruchung ( $M, V, N$ ) und eine gewählte Druckfeldneigung  $\alpha$  ist in der Folie angegeben. Weil dabei jeweils zwei angrenzende Querschnitte zu betrachten sind, um die Neigungen  $\beta$  und  $\gamma$  der Gurtkräfte zu ermitteln, spricht man von einer «dual section analysis».

### Ergänzende Bemerkungen

- Die Querschnittsanalysen erfolgen gemäss Folie für auf die Schwerachse bezogene Schnittgrößen (Moment  $M + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha \cdot e$ , Normalkraft  $N + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha$ ). Dies hat den Vorteil, dass die Bezugsachse nicht variiert ( $e$  ist eine Unbekannte, da die Höhe der Druckzone und damit die Lage von  $C$  nicht a priori bekannt sind). Alternativ kann aber auch – wie in den Folien zur Vorlesung bis 2016 angegeben – mit auf die Stegmitte (Mitte zwischen Angriffspunkten von  $C$  und  $T$ ) bezogenen Schnittgrößen (Moment  $M - N \cdot e$ , Normalkraft  $N + (V - T \cdot \sin \beta - C \cdot \sin \gamma) \cdot \cot \alpha$ ) gearbeitet werden. Wichtig ist in jedem Fall, dass bei der Querschnittsanalyse die richtige Bezugsachse für die Schnittgrößen verwendet wird (viele Programmen erlauben beliebige Bezugsachsen, die beispielsweise mit sogenannten «Achspunkten» definiert werden können).
- Die Neigung  $\beta$  der Zugkraft  $T$  (welche sich aus den Kräften in schlaffer und vorgespannter Bewehrung zusammensetzt) entspricht nur bei Vernachlässigung der schlaffen Bewehrung der Spanngliedneigung; allgemein ist die Zugresultierende weniger geneigt.
- Als Startwerte für die Iterationen können die Werte gemäss vereinfachter Untersuchung (folgende Folie) verwendet werden.

## Vorspannung – Querkraft

Vereinfachungen gemäss SIA 262 (siehe Tragsicherheit, Folie 19-20) :



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den parallelen Druck- und Zugkräften  $F_c$  bzw.  $F_t$  wird eine geneigte Spannkraft  $P_\infty$  betrachtet. Die Druckkraft wird auf der sicheren Seite liegend als horizontal wirkend angenommen.

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um Terme infolge Vorspannung.

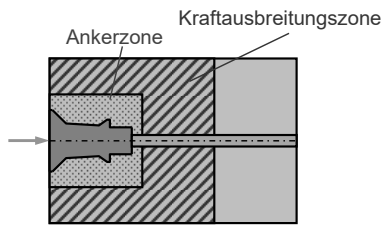
$$\begin{aligned}
 \Sigma F_V: F_{cw} &= \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha} && \rightarrow \text{Erf. Widerstand der Bügel:} \\
 \Sigma M_T: F_c &= \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha && V_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha} \\
 \Sigma M_C: F_t &= \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha && \rightarrow \text{Betondruckspannungen:} \\
 &&& \sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\
 &&& b_{w,nom} = b_w - k_H \cdot \sum \varnothing_H
 \end{aligned}$$

Vernachlässigt man die Neigung der Druckresultierenden und den Spannkraftzuwachs im Spannglied (konservative Annahme: Langzeitwert der Vorspannkraft wirksam), sind die Verhältnisse wesentlich einfacher. Es reicht aus, einen einzelnen Querschnitt zu betrachten, und die Kräfte können ohne Iteration ermittelt werden.

Man erhält damit die bereits auf den Folien 20 - 21 erläuterten Beziehungen (Details siehe dort).

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Unterscheidung Ankerzone – Kraftausbreitzungszone



Verankerungsbereiche von Spanngliedern werden in Ankerzonen und Kraftausbreitzungszonen unterteilt.

Die konstruktive Durchbildung der Ankerzonen ist Teil des Spannsystems und in der Verantwortung der Vorspannfirma (Spiralbewehrung). Sie ist für übliche Abstände und Spannglieder in der technischen Dokumentation (Zulassung) standardisiert und darf nur in Ausnahmefällen und in Absprache mit der Vorspannfirma modifiziert werden.

Kraftausbreitzungszonen sind für die Einleitung der Spannkraften in das Tragwerk zu bemessen und gehören in den Verantwortungsbereich des Projektverfassers. An ihre Ausbildung stellt jedes Projekt andere Anforderungen, weshalb keine standardisierte Lösungen angegeben werden können.

Einer konsistenten Abgrenzung zwischen Ankerzone und Kraftausbreitzungszone und entsprechenden Absprachen zwischen Vorspannfirma und Projektverfasser ist spezielle Beachtung zu schenken.

Die konstruktive Durchbildung vorgespannter Tragwerke verdient besondere Aufmerksamkeit. Beim Vorspannen werden sehr grosse, konzentrierte Kräfte an das Tragwerk abgegeben (diese Kräfte treten im Gegensatz zu vielen anderen Belastungen, für die Tragwerke dimensioniert werden, mit Sicherheit in der vollen Grösse auf).

Für die Tragsicherheit ist insbesondere die konstruktive Durchbildung der Ankerzonen relevant. Hier sind wenn immer möglich die Standardlösungen gemäss Zulassung des Spannsystems zu verwenden.

Die konstruktive Durchbildung der Kraftausbreitzungszonen ist für die Tragsicherheit oft weniger kritisch, bei ungeeigneter Bewehrungsanordnung können aber grosse Rissbreiten und entsprechende Probleme (Dauerhaftigkeit, Aussehen, ...) auftreten.

### *Ergänzende Bemerkung*

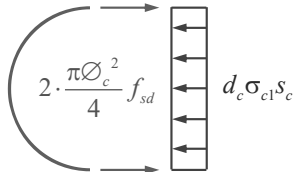
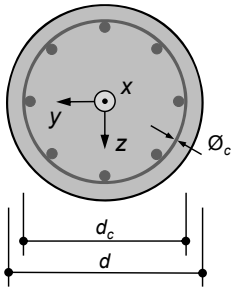
- Die lokale Einleitung grosser Einzelkräfte in Betontragwerke ist grundsätzlich ein komplexes Phänomen und nicht abschliessend erforscht. Die in den heutigen Normen angegebenen Formeln für «Teilflächenbelastung», ohne Berücksichtigung einer Querbewehrung, sind weitgehend empirischer Natur. Die Bemessung der Ankerzonen beruht daher auf der wesentlich besser erforschten Aktivierung einer dreidimensionalen Druckfestigkeit mittels Umschnürungsbewehrung, siehe folgende Folien.

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Ankerzone

Zur Ankerzone gehören der Ankerkopf, die Ankerplatte sowie der Bereich direkt hinter der Ankerplatte. Im Ankerkopf werden die Vorspanndrähte oder -litzen verkeilt. Die Ankerplatte verteilt die Kräfte aus dem Ankerkopf gleichmässig auf den dahinterliegenden Beton, wozu eine ausreichende Plattenstärke erforderlich ist (einige cm!).

Im Beton hinter der Ankerplatte entstehen Druckspannungen, die i.d.R. über der einachsigen Betondruckfestigkeit liegen (bei Verankerungen in C30/37 beispielsweise ca. 40 MPa). Durch die auf Zug aktivierte Spiralbewehrung ergibt sich im Beton ein günstiger dreiachsiger Druckspannungszustand, wodurch die Festigkeit erhöht werden kann (siehe Stahlbeton I, Umschnürung).



$$\sigma_{cy} = \sigma_{cz} = \sigma_{c1} = -\frac{\pi \varnothing_c^2 f_{sd}}{2 d_c s_c}$$

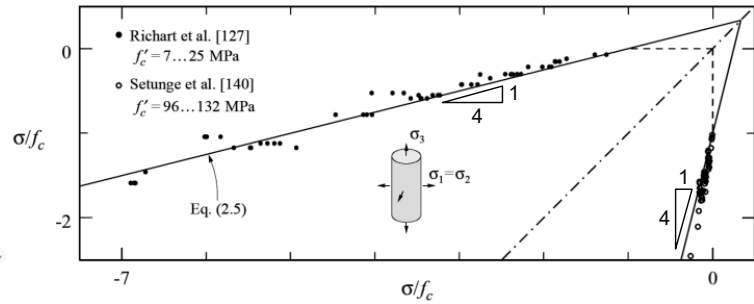
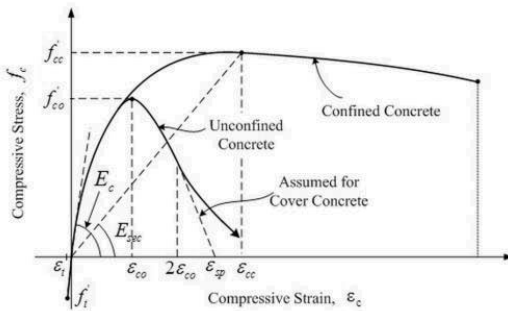
$$f_{cd3} = f_{cd} + 4 \cdot \sigma_{c1} = f_{cd} + \frac{2 \pi \varnothing_c^2 f_{sd}}{d_c s_c}$$



Wie in Stahlbeton I erläutert, kann durch eine Umschnürungsbewehrung ein Querdruck aktiviert werden, wodurch die axiale Druckfestigkeit des Betons deutlich vergrößert wird. Spanngliedverankerungen basieren meist auf diesem Prinzip, wobei die Umschnürung durch eine Spiralbewehrung sichergestellt wird.

## Vorspannung – konstruktive Durchbildung

- Druckfestigkeit wird durch dreiachsige Beanspruchung stark erhöht
- Näherungsweise gilt  $f_{c3} \cong f_c - 4\sigma_{c1}$  (mit  $\sigma_{c3} \leq \sigma_{c1} = \sigma_{c2}$ )
- Querbewehrung wirkt wie Querdruck (wirksamer als Längsbewehrung !)  
(Vorzeichen hier: Druckfestigkeit positiv, Druckspannung negativ)



### Wiederholung aus Stahlbeton I

Durch allseitigen Querdruck wird die Druckfestigkeit des Betons stark erhöht (etwa um den vierfachen Betrag der betragsmässig kleineren Querdruckspannung). Dies, da die bei einachsiger Beanspruchung auftretenden, mit einer Volumenzunahme einhergehenden Versagensarten (Abscheren, laminares Aufspalten) durch den Querdruck behindert werden.

Anstatt «aktiv» einen Querdruck aufzubringen, kann dieser auch «passiv» durch einlegen einer Umschnürungsbewehrung erzielt werden, welche durch das dilatante Verhalten (Volumenzunahme) des Betons beim Bruch aktiviert wird. Dies ist seit der Anfangszeit des Betonbaus bekannt, und es gab dafür damals sogar eigene Patente für umschnürte Betondruckglieder («Béton frotté»).

Die in frühen Versuchen (insbesondere Richart, Brandtzaeg und Brown vor fast 100 Jahren) an Beton mit sehr geringen Druckfestigkeiten festgestellte ungefähre Proportionalität zwischen Querdruck und Festigkeitserhöhung (ca. Faktor 4) konnte auch für höherfeste Betone (und im Falle passiver Umschnürung für höherfeste Bewehrung) bestätigt werden. Hier ist der durch Versuche abgesicherte Bereich infolge beschränkter Kapazität der Prüfmaschinen jedoch noch gering.

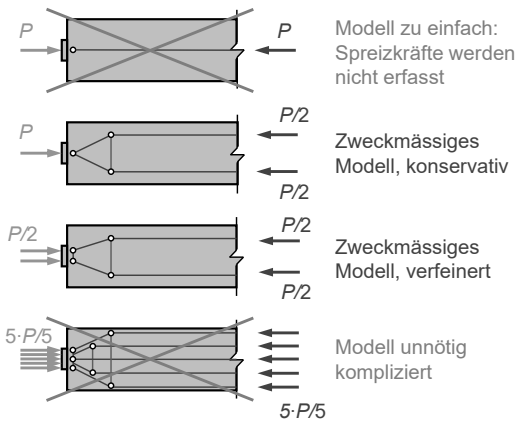
Neben der Erhöhung der Druckfestigkeit bewirkt allseitiger Querdruck auch eine ausgeprägte Erhöhung der Bruchstauchung (duktileres Verhalten).



## Vorspannung – konstruktive Durchbildung

### Kraftausbreitungszone: Spreizkraftbewehrung

- Die konzentrierte Ankerkraft muss auf einer gewissen Länge über den ganzen Querschnitt ausgebreitet werden.
- Die Länge ist in Übereinstimmung mit dem Prinzip von St. Venant näherungsweise gleich gross wie die Tiefe resp. die Höhe des Bauteils.



- Die Ausbreitung der Kraft bringt – ähnlich wie beim Anschluss des Steges an die Platte bei Plattenbalken – Zugkräfte senkrecht zur Spanngliedachse mit sich.
- Fachwerkmodelle eignen sich gut für die näherungsweise Ermittlung des Kraftflusses in den Verankerungsbereichen.
- Das Fachwerkmodell soll stets so einfach wie möglich gewählt werden und dennoch die wichtigsten Kräfte erfassen.
- Die Neigung der Druckstreben, resp. die Grösse der Querzugkräfte, wird i.A. anhand von Erfahrungswerten (kalibriert an Vergleichsrechnungen für elastisches Verhalten) gewählt.

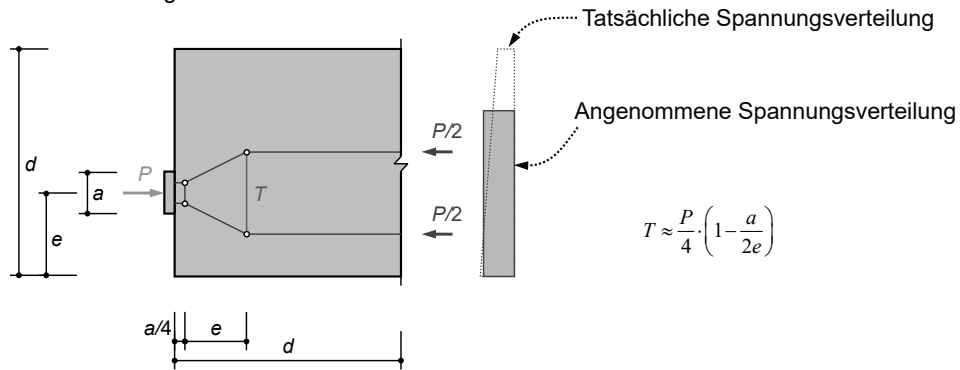
Die Kraftausbreitung kann mit Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern untersucht werden. Dabei ist die Vorspannung als Anker- und Umlenkkräfte einzuführen; eine Betrachtung am Gesamtsystem macht selten Sinn (Eigenspannungszustand nicht bestimmbar, siehe Advanced Structural Concrete).

Auf den folgenden Folien sind einige Hinweise dazu angegeben. Für nähere Angaben wird auf die Publikation «Detailing for Posttensioning» der Firma VSL AG verwiesen.

## Vorspannung – konstruktive Durchbildung

### Kraftausbreitzzone: Spreizkraftbewehrung

- Üblicherweise wird die Ankerkraft durch zwei statisch äquivalente Einzelkräfte ersetzt. Wenn die Ankerplatte im Vergleich zur Abmessung des Bauteils klein ist, genügt eine statisch äquivalente Einzelkraft.
- Am gegenüberliegenden Ende der Kraftausbreitzzone sollen die (Bernoulli-)Spannungen mit mindestens zwei statisch äquivalenten Kräften ersetzt werden.
- Der Winkel zwischen der Betondruckdiagonalen und der Achse des Spannglieds variiert je nach Abmessung der Ankerplatte. Er ist i.d.R. nicht grösser als  $\tan\alpha = 0.5$ .



Erläuterungen siehe Folie.

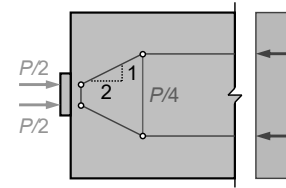
# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Kraftausbreitungszone: Spreizkraftbewehrung

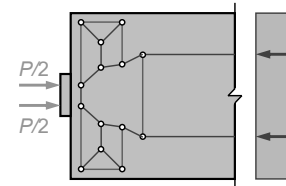
Um die Rissbreiten im Gebrauchszustand zu begrenzen, wird empfohlen, die Spannungen in der Spreizkraftbewehrung auf etwa 250 MPa zu beschränken. Oft resultiert damit eine Querschnittsfläche der Spreizkraftbewehrung in der gleichen Grössenordnung wie die Querschnittsfläche des verankerten Spannglieds.

Der räumlichen Kraftausbreitung ist spezielle Beachtung zu schenken (räumliche Fachwerkmodelle!)

Neben den primären Spreizkräften (für Gleichgewicht erforderlich) entstehen in «toten Ecken» des Betons senkrecht zu den Drucktrajektorien verträglichkeitsbedingte Zugspannungen. Um ein lokales Abplatzen des Betons zu verhindern, sind solche Bereiche ausreichend zu bewehren. I.d.R. genügt eine auf 2% der Vorspannkraft bemessene Bewehrung (konstruktiv, Fachwerkmodell nur zur Illustration dargestellt).



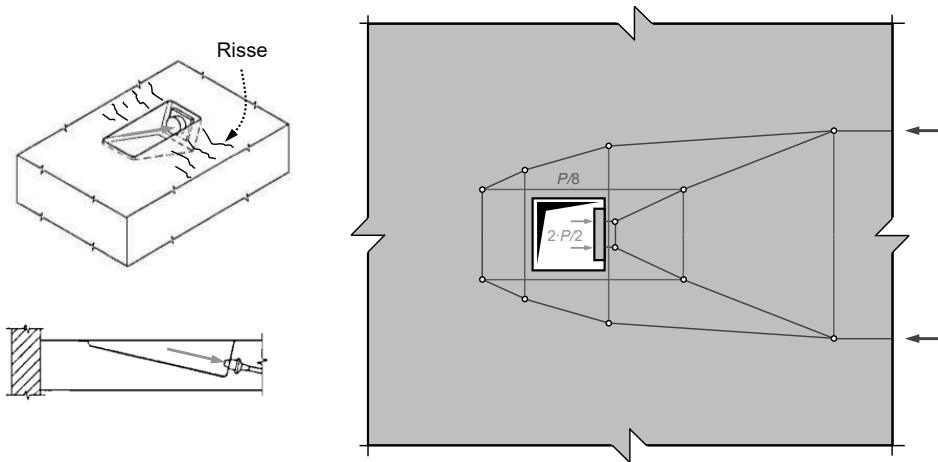
$$\frac{A_p \cdot \sigma_{p0}}{4} \approx A_s \cdot \sigma_s \quad \text{wobei } \sigma_{p0} \approx 4 \cdot \sigma_s$$



Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Abspannstellen – Spannischen



Müssen Spannglieder nicht am Trägerende, sondern an einer anderen Stelle verankert werden, sind Spann-Nischen oder Lisenen (siehe nächste Folie) erforderlich.

Aus Verträglichkeit bewirkt die Vorspannung in Spann-Nischen eine Zugbeanspruchung neben der resp. hinter der Aussparung, siehe Abbildung. Um ein zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand zu gewährleisten, sollte daher mindestens ca. 25% der Vorspannkraft zurückverankert werden, gemäss Fachwerkmodell in der Abbildung. Dies gilt auch für Lisenen (nächste Folie).

Bei Kupplungen (Koppelfugen) von in Etappen betonierten Trägern (beispielsweise Balkenbrücken) stellt sich ein ähnliches Problem, das durch das unterschiedliche Schwind- und Kriechverhalten älteren resp. jüngeren Betons überlagert wird. Es empfiehlt sich, etwa 50% der Spannkraft (resp. Kupplungskraft) durch eine auf beiden Seiten der Koppelfuge voll verankerte schlaaffe Bewehrung abzudecken.

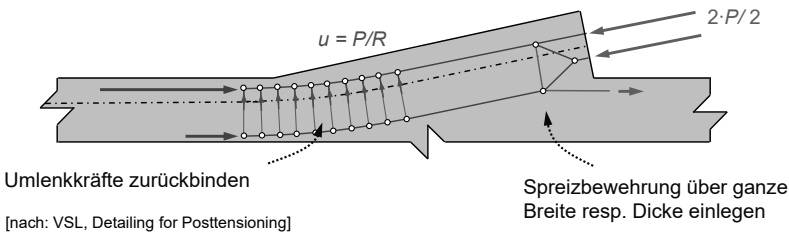
# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Lisenen (anchorage blisters)

Die Bemessung der Bewehrung und die konstruktive Durchbildung (Platzprobleme Bewehrung) ist bei Lisenen nicht trivial.

Grundsätzlich ist die Lisenen ein gekrümmtes, vorgespanntes Element, in welchem die «Druckbanane» mit der Spannkraft in jedem Querschnitt im Gleichgewicht steht. Da sich die Druckkraft im Beton ausbreitet, entstehen jedoch Querkraftkräfte, die mit einer Bewehrung abgedeckt werden müssen.

Die Betrachtung mit einem Fachwerkmodell zeigt, dass eine Spreizbewehrung erforderlich ist, und dass ein Teil der Umlenkkräfte (zugbeanspruchter Teil der Streben, in Zeichnung unten) zurückgebunden werden muss. In der Praxis empfiehlt es sich, die gesamten Umlenkkräfte  $u = P/R$  mit einer Querbewehrung abzudecken.



Aus konstruktiven Gründen sind Spann-Nischen – zumindest bei Spannankern = aktiven Verankerungen – oft nicht machbar (sie müssen relativ gross sein, um die Spannpresse ansetzen zu können).

In solchen Fällen können Lisenen vorgesehen werden. Diese haben den Nachteil, dass die Schalung (meist Innenschalung des Kastens) angepasst werden muss, was umständlich ist.

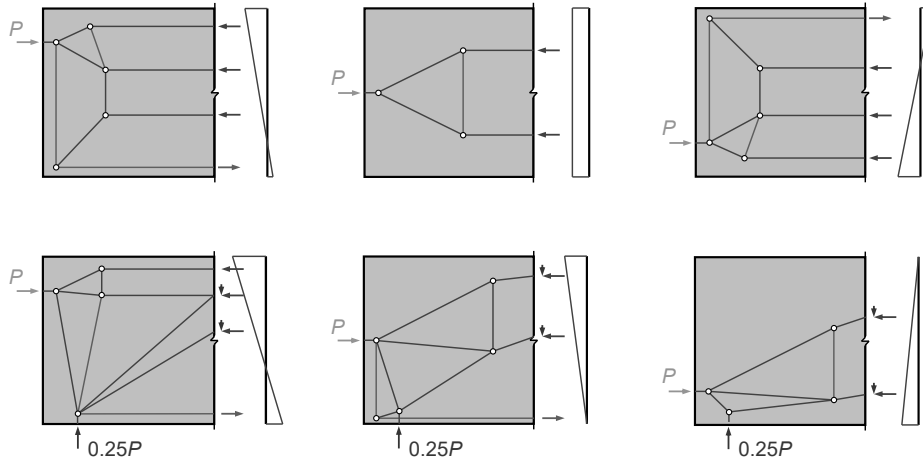
## Ergänzende Bemerkung

- Meist sind die Lisenen mit Steg und Flansch verbunden, so dass der Kraftfluss räumlich untersucht werden muss. In der Folie ist nur eine der zu betrachtenden Ebenen dargestellt; für Details siehe z.B. VSL, detailing for posttensioning.

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Kraftausbreitungszone: Spreizkraftbewehrung

Lagerkräfte haben einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Spreizkräfte.

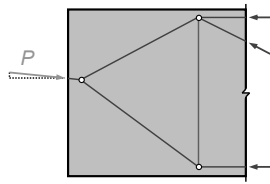


Erläuterungen siehe Folie.

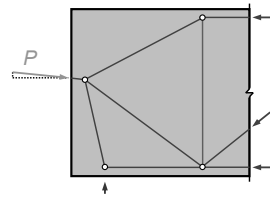
# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

## Fachwerkmodelle von Trägerstegen

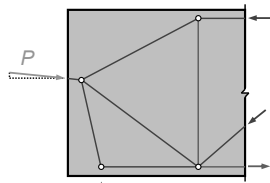
Typische Fachwerkmodelle abhängig von der Belastung



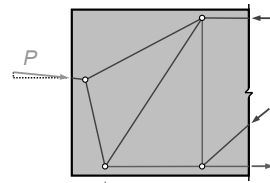
a) Nur Vorspannung



b) Vorspannung +  $0.25P$



c) Vorspannung +  $0.46P$



d) Vorspannung +  $0.66P$

[nach: VSL, Detailing for Posttensioning]

Erläuterungen siehe Folie.

### *Ergänzende Bemerkung*

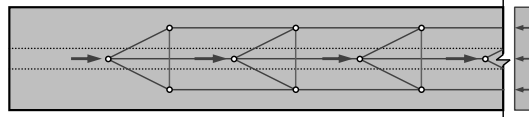
Es ist nicht notwendig resp. nicht sinnvoll, Spreizbewehrung und Schubbewehrung separat zu bemessen und einzulegen; sie können – anhand von Fachwerkmodellen gemäss Folie – gemeinsam bemessen werden.

# Vorspannung – konstruktive Durchbildung

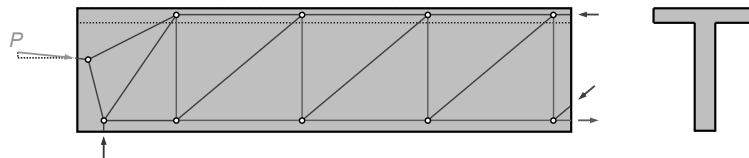
## Fachwerkmodelle von Trägerstegen

Bei profilierten Trägern muss die Vorspannkraft in den Flansch ausgebreitet werden

Draufsicht Flansch:



Ansicht Steg:



Erläuterungen siehe Folie.



# Vorspannung ohne Verbund

## Unterschied Vorspannung ohne Verbund – Vorspannung mit Verbund

Eine Vorspannung ohne Verbund (inkl. Spezialfall externe Vorspannung) kann grundsätzlich analog behandelt werden wie eine Vorspannung mit Verbund.

Ein wesentlicher Unterschied liegt jedoch darin, dass bei einer Vorspannung ohne Verbund die Dehnungen des Spannstahls  $\varepsilon_p$  nicht mit den Dehnungen des Betons  $\varepsilon_{cp}$  im gleichen Querschnitt verknüpft sind, sondern von der Geometrie und dem Verformungszustand des gesamten Systems abhängen.

Vernachlässigt man die Reibungskräfte, ergibt sich der Spannkraftzuwachs eines Spanngliedes mit der ursprünglichen Länge  $l_0$  aus der Verlängerung  $\Delta l_0$  des Spanngliedes zwischen den Verankerungen:

*Vorspannung mit Verbund:*

$\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} + (\varepsilon_{cp} - \varepsilon_{cp0})$  mit  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0}$   
(in jedem Querschnitt  $\Delta\varepsilon$  bei Injektion «eingefroren»)

*Vorspannung ohne Verbund:*

$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta l_0 / l_0$   
(über ganze Spanngliedlänge identisch)

Grundsätzlich kann die Spanngliedverlängerung aus der Integration der zwischen den Verankerungen auftretenden Dehnungen des Betons im Schwerpunkt des Spanngliedes ermittelt werden. Dies ist aufwändig (iterativ), da die Betondehnungen vom zunächst unbekanntem Spannkraftzuwachs abhängen.

Alternativ kann man von einem nominellen Bruchzustand ausgehen, der durch das Erreichen einer maximalen Durchbiegung definiert wird (SIA 262:  $w_R = L / 40$ ). Die Spanngliedverlängerung kann dann aus geometrischen Überlegungen relativ einfach bestimmt werden.

Für eine dreieckförmige Spanngliedführung resultiert beispielsweise  
( $e_m$  = Exzentrizität des Spanngliedes in Feldmitte)

$$\frac{\Delta l_0}{l_0} \approx 4 \frac{e_m w_R}{l_0^2}$$

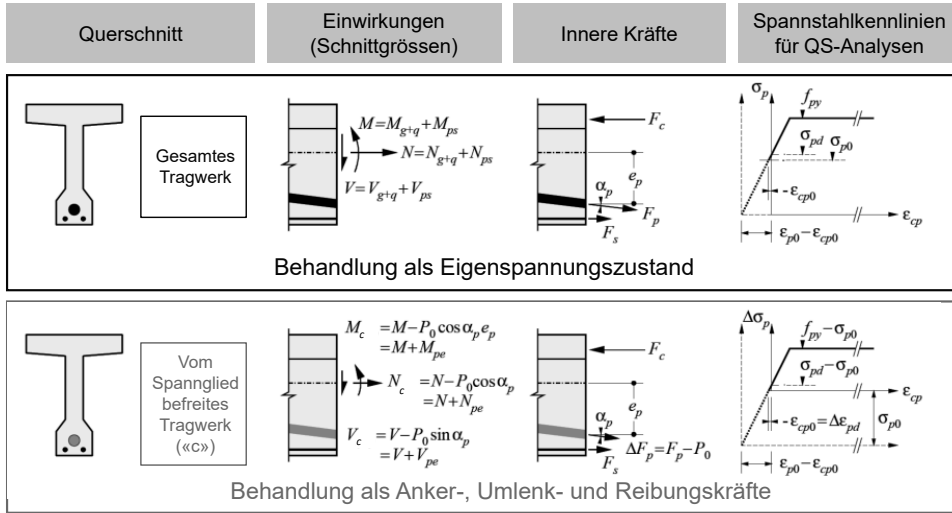
Erläuterungen siehe Folie.

## Vorspannung – Zusammenfassung

1. Die vorliegende Vorlesung beschränkt sich auf interne Kabelvorspannung mit Verbund unter Verwendung von Litzenspanngliedern. Für Draht- und Stabspannglieder sowie im Spannbett hergestellte Bauteile können die Überlegungen ohne weiteres übertragen werden. Für interne Vorspannung ohne Verbund sowie für extern vorgespannte Bauteile sind Verformungsbetrachtungen am Gesamtsystem erforderlich, wenn eine Spannkraft  $> P_{\infty}$  in Rechnung gestellt werden soll.
2. Ausser den einschlägigen Normen (SIA 262 und SIA 262/1) sind die Angaben in der «Technischen Dokumentation» des jeweiligen Spannsystems zu beachten.
3. Beim Vorspannen werden durch das Spannen von Spannstahl kontrolliert Kräfte auf ein Tragwerk oder Bauteil aufgebracht.
4. Zwischen dem Spannstahl und dem vom Spannstahl befreiten Tragwerk bzw. Bauteil wirken Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte.
5. Das Vorspannen erzeugt im Tragwerk einen Eigenspannungszustand und verursacht Tragwerksverformungen.
6. Bei statisch unbestimmten Systemen entstehen im Allgemeinen Zwangsschnittgrössen aus behinderter Verformung.
7. Die Vorspannung kann rechnerisch als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte (die auf das vom Spannglied befreite Tragwerk wirken), oder aber als Eigenspannungszustand (der am Gesamtsystem inkl. Spannglied wirkt) behandelt werden.

## Vorspannung – Zusammenfassung

8. Die Behandlung als Eigenspannungszustand (der am Gesamtsystem inkl. Spannglied wirkt) oder als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte (die auf das vom Spannglied befreite Tragwerk wirken) führt zum gleichen Resultat. Je nach Fragestellung ist die eine oder andere Vorgehensweise besser geeignet.



## Vorspannung – Zusammenfassung

9. Bei Spanngliedern mit Verbund bleibt die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{cp}$  nach dem Vorspannen und Injizieren konstant.
10. Infolge der Reibung im Hüllrohr ändert sich die Spannkraft entlang des Spannglieds. Bei der Berechnung des Spannkraftverlaufs sowie des Spannwegs ist zusätzlich der Verankerungsschlupf zu berücksichtigen.
11. Kriechen und Schwinden des Betons sowie Relaxation des Spannstahls führen zu zeitabhängigen Spannkraftverlusten. Näherungsweise können diese zu 15% der initialen Vorspannung angenommen werden.
12. Mit dem Vorspannkonzepkt werden die Kabelgrösse, das Kabelprofil und der Spannvorgang festgelegt. Dazu sind gute Kenntnisse der Komponenten des gewählten Spannsystems erforderlich.
13. Aufgrund der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte kann das Tragverhalten beliebiger Querschnitte unter Biegung und Normalkraft analog wie für Stahlbeton diskutiert werden, wobei die Vordehnungen  $\Delta\varepsilon$  des Spannstahls zu berücksichtigen sind. Die Ermittlung der zu einem Satz von Schnittgrössen gehörigen Verformungsgrössen erfordert im Allgemeinen ein iteratives Vorgehen.
14. Durch Betrachtung benachbarter Querschnitte lässt sich über das Längsgleichgewicht auf den Schubspannungsverlauf über den Trägerquerschnitt resp. die Neigung der infolge von Biegung und Normalkraft resultierenden Druckkraft schliessen.

## Vorspannung – Zusammenfassung

15. Bei vorgespannten Trägern wird oft ein wesentlicher Anteil der Querkraft über die zur Stabachse geneigten resultierenden Druck- und Zugkräfte aus Biegung und Normalkraft abgetragen. In der Regel wird bei der Bemessung die günstige Wirkung der geneigten resultierenden Druckkraft vernachlässigt.
16. Bei der konstruktiven Durchbildung ist die Aufteilung der Verantwortlichkeiten zwischen Systemlieferant (Ankerzone) und Projektverfasser (Kraftausbreitzzone) zu beachten. Für die Bemessung der Spreizkraftbewehrung eignen sich Fachwerkmodelle, wobei die Spannungen in der Spreizkraftbewehrung unter Gebrauchslasten auf etwa 250 MPa beschränkt werden sollten.
17. Der Projektverfasser definiert den Spannvorgang (Reihenfolge der Vorspannung, Spannstufen etc.) und ermittelt vorgängig den erwarteten Spannweg. Bei unzulässig grossen Abweichungen vom erwarteten Spannweg ist der Projektverfasser zu informieren, und das Hüllrohr darf erst nach Klärung der Ursachen injiziert werden.
18. Eine qualitativ einwandfreie Injektion der Spannglieder ist für die Gewährleistung der Dauerhaftigkeit absolut zentral. Der Injektionsvorgang ist ebenso sorgfältig zu planen und durchzuführen wie der Spannvorgang.
19. Im Normalfall werden Stahlhüllrohre eingesetzt (Kategorie a). Bei erhöhten Anforderungen an die Dauerhaftigkeit und bei Ermüdungsbeanspruchung sind Kunststoffhüllrohre vorzusehen (Kategorie b). Bei höchsten Anforderungen an die Dauerhaftigkeit oder bei Kriechstromgefährdung sind die Kabel elektrisch zu isolieren (Kategorie c).