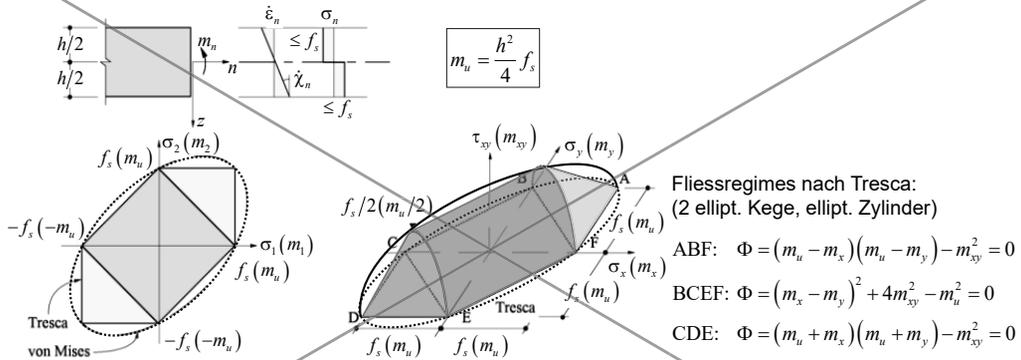


# Platten - Fließbedingungen

# Platten – Fließbedingungen

## Fließbedingungen von Tresca und v. Mises für isotrope Platten (Stahl etc.)

(für Stahlbeton nicht geeignet, auch bei «isotroper Bewehrung»!)



Im vollplastifizierten Zustand (resp. starr-plastisches Verhalten) ist der Spannungszustand auf jeder Seite der Mittelebene konstant → Fließbedingung analog wie im ebenen Spannungszustand:

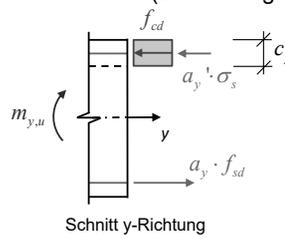
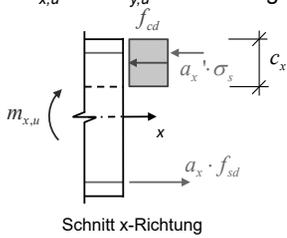
T:  $\text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) - f_s = 0 \rightarrow \text{Max}(|m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2|) - m_u = 0$

vM:  $\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - f_s^2 = 0 \rightarrow m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 - m_u^2 = 0$

# Platten – Fließbedingungen

## Fließbedingungen für Stahlbetonplatten

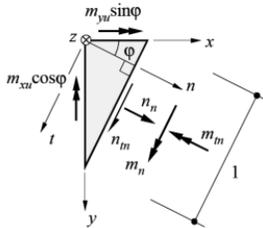
Biege widerstände  $m_{x,u}$  und  $m_{y,u}$  einer orthogonal bewehrten Platte (Bewehrung in x- und y-Richtung):



Ohne Normalkräfte ergeben sich die Druckzonenhöhen  $c_x$  und  $c_y$  und damit  $m_{x,u}$  und  $m_{y,u}$  aus Gleichgewicht.

Da Bewehrung orthogonal, ist  $m_{xy,u} = 0$

Durch Superposition der Biege widerstände in den Bewehrungsrichtungen und Transformation in eine beliebige Richtung (analog zu den Spannungstransformationen) ergeben sich die Biege- und Drillmomente  $m_n$ ,  $m_t$  und  $m_{nt}$  in  $n$ - und  $t$ -Richtung (statisch zulässiger Spannungszustand):



$$m_{nu} = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m_{tu} = m_{xu} \cdot \sin^2 \varphi + m_{yu} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$m_{ntu} = (m_{yu} - m_{xu}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Sämtliche Membrankräfte verschwinden:

$$n_t = n_n = n_{nt} = 0$$

Die Biege widerstände einer orthogonal bewehrten Platte können in x- und y-Richtung unabhängig voneinander ermittelt werden. Die Druckzonenhöhen  $c_x$  und  $c_y$  und somit  $m_{x,u}$  und  $m_{y,u}$  werden über das Gleichgewicht am Querschnitt bestimmt. Da die Bewehrung orthogonal angeordnet ist, ist das Drillmoment  $m_{xy}$  in den entsprechenden Richtungen gleich null.

Durch Überlagerung der plastischen Momente  $m_{x,u}$  und  $m_{y,u}$  in den Bewehrungsrichtungen mit  $m_{xy} = n_x = n_y = 0$  erhält man einen statisch zulässigen Spannungszustand im Element. Die Biege- und Drillmomente, welche diesem Spannungszustand entsprechen, können analog der Spannungstransformation in jeder beliebigen Richtung  $n$  bestimmt werden.

# Platten – Fließbedingungen

## Fließbedingung für Stahlbetonplatten

Der Widerstand wird anhand der Normalmomente überprüft («Normalmomenten-Fließbedingung»).

Falls die Druckzonenhöhen gleich sind, d.h.  $c_x = c_y$ , resultiert die vollständige Lösung:

- statisch zulässiger Spannungszustand (Gleichgewicht)
- Kinematisch verträglicher Bruchmechanismus (Fließgelenklinie, siehe später)

$$\begin{array}{ll}
 m_{n,u} = m_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi & m'_{n,u} = m'_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi \\
 m_{t,u} = m_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi & m'_{t,u} = m'_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi
 \end{array}$$

Biege­wider­stand für positive Biege­momente
Biege­wider­stand für negative Biege­momente («'»)  
(Vorzeichen Biege­wider­stand positiv)

Für  $c_x \neq c_y$  liefert der statisch zulässige Spannungszustand einen unteren Grenzwert der Traglast:

$$\begin{array}{ll}
 m_{n,u} \geq m_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi & m'_{n,u} \geq m'_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi \\
 m_{t,u} \geq m_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi & m'_{t,u} \geq m'_{x,u} \cdot \sin^2 \varphi + m'_{y,u} \cdot \cos^2 \varphi
 \end{array}$$

Die Unterschiede bzgl. der Druckzonenhöhe in x- und y-Richtung sind in der Regel gering, so dass in guter Näherung das Ungleichheitszeichen unterdrückt werden darf.

NB: Mit einem Definitionsbereich für den Winkel  $\varphi$  von  $\{0 \leq \varphi \leq \pi\}$  ist die Beziehung für  $m_n$  ausreichend.

Die Traglast wird anhand der Normalmomenten-Fließbedingung überprüft, welche davon ausgeht, dass das Versagen ausschliesslich durch Bildung einer Fließgelenklinie eintreten kann. Falls die Druckzonenhöhe in x- und y-Richtung gleich sind, d.h.  $c_x = c_y$ , kann zu dem statisch zulässigen Spannungszustand ein kinematisch verträglicher Bruchmechanismus (Fließgelenklinie, siehe später) gefunden werden. Es resultiert daraus somit eine vollständige Lösung.

Im Allgemeinen sind die Druckzonenhöhen in den beiden Bewehrungsrichtungen unterschiedlich,  $c_x \neq c_y$ , und es lässt sich dem betrachteten Spannungszustand kein verträglicher Mechanismus zuordnen. Der ermittelte Wert für  $m_n$  ist somit ein unterer Grenzwert für den Biege­wider­stand  $m_{nu}$  in Richtung  $n$ . Die Abweichungen für  $c_x \neq c_y$  sind in der Regel sehr gering, und das Ungleichheitszeichen kann daher unterdrückt werden.

Die Herleitung der Formel für negative Momente ist analog derjenigen für positive, wobei das negative plastische Moment positiv definiert wird  $m'_{n,u} > 0$ .

### Ergänzende Bemerkung

- «Normalmomente» sind Biegemomente (zur Unterscheidung von den Drillmomenten so bezeichnet). Die Normalmomenten-Fließbedingung überprüft, ob in jeder Richtung die Normalmomente (Biegemomente) kleiner sind als der Biege­wider­stand.

# Platten – Fließbedingungen

## Fließbedingung für Stahlbetonplatten

Wird die Einwirkung  $m_n$  gleich dem Widerstand  $m_{n,u}$  gesetzt, erhält man:

$$m_{x,u} \cdot \cos^2 \varphi_u + m_{y,u} \cdot \sin^2 \varphi_u = m_{n,u} \stackrel{!}{=} m_n = m_x \cdot \cos^2 \varphi_u + m_y \cdot \sin^2 \varphi_u + 2m_{xy} \cdot \sin \varphi_u \cos \varphi_u$$

Unter Beachtung, dass die Bedingung  $m_{n,u} \geq m_n$  für alle Richtungen  $\varphi$  erfüllt sein muss, resultiert (\*):

für positive  
Biegemomente:  $|\tan \varphi_u| = \sqrt{\frac{m_{x,u} - m_x}{m_{y,u} - m_y}}$

für negative  
Biegemomente:  $|\tan \varphi'_u| = \sqrt{\frac{m'_{x,u} + m_x}{m'_{y,u} + m_y}}$

$$\begin{array}{l} m_{x,u} = m_x + m_{xy} \cdot \tan \varphi_u \\ m_{y,u} = m_y + m_{xy} \cdot \cot \varphi_u \end{array}$$

Widerstand    Einwirkung

$$\begin{array}{l} m'_{x,u} = -m_x - m_{xy} \cdot \tan \varphi'_u \\ m'_{y,u} = -m_y - m_{xy} \cdot \cot \varphi'_u \end{array}$$

Widerstand    Einwirkung

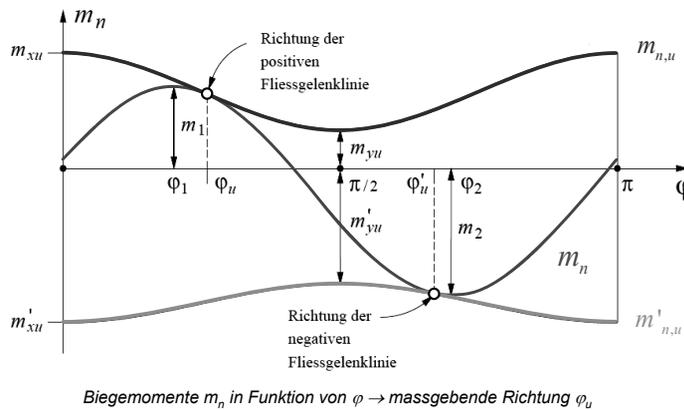
(\*) In der massgebenden Richtung  $\varphi_u$  (Berührungspunkt  $m_{n,u}(\varphi)$  und  $m_n(\varphi)$ ) ist die Differenz  $m_{n,u} - m_n$  minimal, somit:

$$m_{n,u}(\varphi) - m_n(\varphi) = \min! \quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_{n,u}(\varphi) - m_n(\varphi)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} m_{n,u}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} m_n(\varphi) \quad \rightarrow m_{y,u} - m_{x,u} = m_y - m_x + m_{xy} (\cot \varphi_u - \tan \varphi_u)$$

woraus durch Rückeinsetzen, nach einiger Umformung, die angegebenen Beziehungen folgen.

# Platten – Fließbedingungen

## Fließbedingungen für Stahlbetonplatten



$\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow$  Richtungen, in der das einwirkende positive bzw. negative Moment maximal werden (Hauptmomentenrichtungen für  $m_n$ )  
 $\varphi_u, \varphi'_u \rightarrow$  Richtungen, in der die Einwirkungskurve die Widerstandskurve berührt. Hier ist  $m_n = m_{n,u}$

Allgemein ist  $\varphi_1 \neq \varphi_u$  bzw.  $\varphi_2 \neq \varphi'_u \rightarrow$  Bemessung von  $m_{n,u}$  auf Hauptmoment  $m_1$  ist nicht konservativ!

Für eine gegebene Beanspruchung, welche durch die Momente  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  gegeben ist, variiert abhängig der Richtung  $\varphi$  das Moment  $m_n = m_x \cdot \cos(\varphi)^2 + m_y \cdot \sin(\varphi)^2 + 2 \cdot m_{xy} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$ . Der Widerstand variiert gemäss der Fließbedingung  $m_{n,u} = m_{x,u} \cdot \cos(\varphi)^2 + m_{y,u}(\varphi)^2$  ebenfalls mit  $\varphi$ . Somit bildet sich das Fließgelenk im Berührungspunkt der beiden Kurven von Einwirkung und Widerstand. Der zugehörige Winkel  $\varphi_u$  bestimmt die Richtung der Fließgelenklinie. Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen die Richtung des maximalen Moments (Hauptmomentenrichtung  $\varphi_1$ ) nicht mit der Richtung des Fließgelenks übereinstimmen. Eine Bemessung des Tragwerks auf das Hauptmoment liegt daher nicht auf der sicheren Seite.

### Ergänzende Bemerkung

- Da der Winkel  $\varphi$  ab der x-Richtung (= Bewehrungsrichtung) gemessen wird, liegen die Maxima resp. Minima von  $m_{n,u}$  und  $m'_{n,u}$  bei  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi/2$  (x- und y-Richtung).
- Maximum und Minimum der Beanspruchung  $m_n$  treten (ausser bei  $m_{xy} = 0$ ) in anderen Richtungen auf.
- Allgemein wird die Fließbedingung nur für positive oder negative Momente erreicht (Abbildung zeigt Spezialfall einer optimalen Bemessung).

# Platten – Fließbedingungen

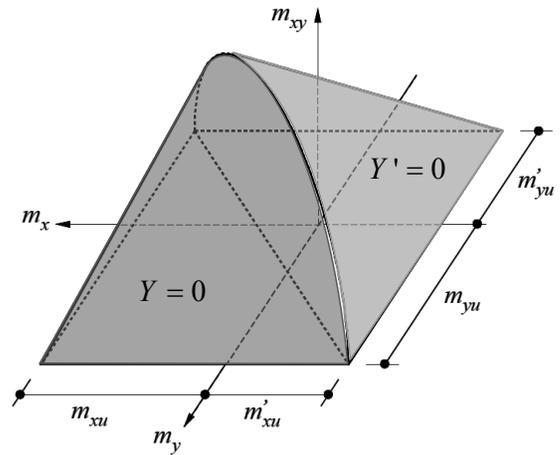
## Normalmomenten-Fließbedingung

Wird  $\varphi_u$ , bzw.  $\varphi'_u$  aus den vorherigen Gleichungen eliminiert, folgt aus der Bedingung  $-m'_{n,u} \leq m_n \leq m_{n,u}$  die sogenannte Normalmomenten-Fließbedingung:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \geq 0 \qquad \qquad \geq 0 \\ \hline Y = m_{xy}^2 - (m_{x,u} - m_x)(m_{y,u} - m_y) = 0 \\ \hline Y' = m_{xy}^2 - (m'_{x,u} + m_x)(m'_{y,u} + m_y) = 0 \\ \hline \geq 0 \qquad \qquad \geq 0 \end{array}
 \end{array}$$

Ist  $Y < 0$  bzw.  $Y' < 0$  (aplastischer Bereich), so ist die Fließbedingung eingehalten.

Die Normalmomenten-Fließbedingung bildet im  $(m_x, m_y, m_{xy})$ -Raum zwei elliptische Kegel. Auf den Kegelflächen ist  $\chi_x \chi_y = 0$  (aus Fließgesetz), d.h. eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet. Die verträglichen Mechanismen entsprechen daher abwickelbaren Flächen.



Die Fließbedingung für positive Moment  $m_{nu} \geq m_n$  kann auch als Momenten-Tensor der Form

$$m_{n,u} - m_n = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{xu} - m_x & m_{xy} \\ m_{xy} & m_{yu} - m_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} = 0$$

ausgedrückt werden. Die Gleichung ist erfüllt, wenn die Determinante des Tensors verschwindet. Daraus lassen sich die Fließbedingungen in der Form  $Y = 0$  direkt herleiten. Das Vorgehen ist für negative Momente analog.

Nach der Theorie des plastischen Potentials sind den Fließflächen  $Y = 0$  über das Fließgesetz folgende Krümmungsinkremente zugeordnet ( $\lambda \geq 0$ ):

$$\dot{\chi}_x = \lambda \cdot \frac{\partial Y}{\partial m_x} = \lambda \cdot (m_{yu} - m_y) \qquad \dot{\chi}_y = \lambda \cdot \frac{\partial Y}{\partial m_y} = \lambda \cdot (m_{xu} - m_x) \qquad 2 \cdot \dot{\chi}_{xy} = \lambda \cdot \frac{\partial Y}{\partial m_{xy}} = 2 \cdot \lambda \cdot m_{xy}$$

Daraus folgt  $\dot{\chi}_x \cdot \dot{\chi}_y = \dot{\chi}_{xy}^2$ . Die Transformation in die Hauptrichtungen führt schliesslich zu  $\dot{\chi}_1 \cdot \dot{\chi}_2 = 0$ .

Dies bedingt, dass eine der Hauptkrümmungen verschwindet; somit entsprechen verträglichen Bruchmechanismen kinematisch zulässige Verformungszustände in Form abwickelbarer Flächen.

# Platten – Fließbedingungen

## Normalmomenten-Fließbedingung

Wird  $\varphi_u$ , bzw.  $\varphi'_u$  aus den vorherigen Gleichungen eliminiert, folgt aus der Bedingung  $-m'_{n,u} \leq m_n \leq m_{n,u}$  die sogenannte Normalmomenten-Fließbedingung:

$$\begin{array}{c}
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 Y = m_{xy}^2 - (m_{x,u} - m_x)(m_{y,u} - m_y) = 0 \\
 Y' = m_{xy}^2 - (m'_{x,u} + m_x)(m'_{y,u} + m_y) = 0
 \end{array} \right\} \\
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0
 \end{array}$$

Dito, mit Schreibweise nach SIA 262:

$$\begin{array}{c}
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 Y = m_{xy,d}^2 - (m_{x,Rd} - m_{x,d})(m_{y,Rd} - m_{y,d}) = 0 \\
 Y' = m_{xy,d}^2 - (m'_{x,Rd} + m_{x,d})(m'_{y,Rd} + m_{y,d}) = 0
 \end{array} \right\} \\
 \geq 0 \qquad \qquad \geq 0
 \end{array}$$

Die Ausdrücke der Fließbedingungen ergeben sich analog mit der Schreibweise nach SIA 262, wonach die Einwirkungsmomente  $m_{x,d}$ ,  $m_{y,d}$  und  $m_{xy,d}$  («design») sowie die Biegeiwiderstände  $m_{x,Rd}$  und  $m_{y,Rd}$  («Resistance») auf Bemessungsniveau berechnet werden

# Platten – Fließbedingungen

## Bemessungsmomente

Normalmomenten-Fließbedingung in parametrisierter Form: mit  $k = |\tan \varphi_u|$  und  $k' = |\tan \varphi'_u|$

Daraus folgen die Bemessungsmomente:

für positive  
Biegemomente:

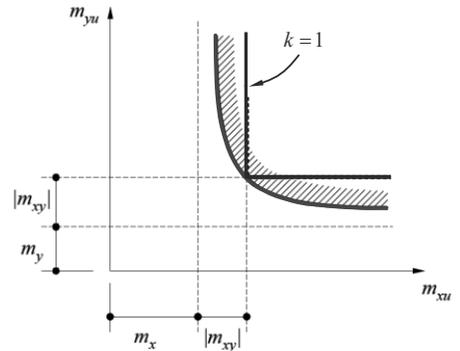
$$\begin{cases} m_{x,u} \geq m_x + k \cdot |m_{xy}| \\ m_{y,u} \geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| \end{cases}$$

für negative  
Biegemomente:

$$\begin{cases} m'_{x,u} \geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m'_{y,u} \geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{cases}$$

Der Parameter  $k$  kann frei gewählt und die Bewehrung direkt bemessen werden. Wird  $k = 1$  gesetzt, so folgt daraus die linearisierte Fließbedingung, welche auch von vielen Computerprogrammen verwendet wird.

NB: Die Normalmomenten-Fließbedingung überschätzt den Drillwiderstand von Platten. Vorsicht ist geboten bei hoher Drillbeanspruchung mit unterschiedlichem Vorzeichen der Hauptmomente, beispielsweise bei Eckstützen.



Die Normalmomenten-Fließbedingung kann in parametrisierter Form geschrieben werden, mit den Substitutionen von  $k = |\tan \varphi_u|$  und  $k' = |\tan \varphi'_u|$ . Der Parameter  $k$  bzw.  $k'$  ist frei wählbar und es wird oft  $k = k' = 1$  gesetzt. Daraus folgt die linearisierte Fließbedingung gem. der Abbildung, welche auch in vielen Computerprogrammen zur Anwendung kommt.

Die Normalmomenten-Fließbedingung überschätzt den Widerstand, insbesondere für grosse Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen und hohen Bewehrungsgehalten. Diese Überschätzung wird in vielen Fällen durch die günstige Wirkung der bei der Bemessung üblicherweise vernachlässigten Membrankräfte kompensiert. Vorsicht ist jedoch bei Eckstützen geboten, in deren unmittelbarer Umgebung näherungsweise ein Zustand reiner Drilling herrscht.

# Platten – Fließbedingungen

## Bemessungsmomente

Normalmomenten-Fließbedingung in parametrisierter Form: mit  $k = |\tan \varphi_u|$  und  $k' = |\tan \varphi'_u|$

Daraus folgen die Bemessungsmomente:

für positive  
Biegemomente:

$$\begin{cases} m_{x,u} \geq m_x + k \cdot |m_{xy}| \\ m_{y,u} \geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| \end{cases}$$

für negative  
Biegemomente:

$$\begin{cases} m'_{x,u} \geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m'_{y,u} \geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{cases}$$

Dito, mit Schreibweise nach SIA 262:

$$\begin{cases} m_{x,Rd} \geq m_{x,d} + k \cdot |m_{xy,d}| \\ m_{y,Rd} \geq m_{y,d} + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy,d}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} m'_{x,Rd} \geq -m_{x,d} + k' \cdot |m_{xy,d}| \\ m'_{y,Rd} \geq -m_{y,d} + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy,d}| \end{cases}$$

NB: Bei mehreren Beanspruchungen resp. Beanspruchungskombinationen ist der erforderliche Biege­widerstand  $(m_x, m_y)_{Rd}$  grundsätzlich für zugehörige Schnittgrößen  $(m_x, m_y, m_{xy})_d$  zu ermitteln. Die in vielen FE-Programmen implementierte Ermittlung der Biege­widerstände  $(m_x, m_y)_{Rd}$  aus nicht zugehörigen, separat ermittelten «Grenzwerten» für  $m_{x,d}$ ,  $m_{y,d}$  und  $m_{xy,d}$  ist oft stark auf der sicheren Seite.

Auch hier ergibt sich die Schreibweise nach SIA 262 analog zur Fließbedingung.

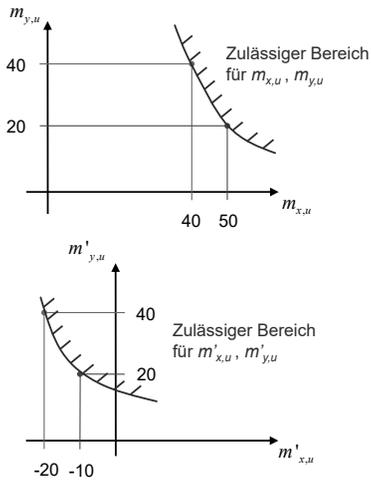
Bei mehreren Beanspruchungskombinationen ist der erforderliche Biege­widerstand  $(m_x, m_y)_{Rd}$  grundsätzlich für die zugehörigen Schnittgrößen  $(m_x, m_y, m_{xy})_d$  zu ermitteln. In vielen FE-Programmen ist dagegen die Ermittlung der Biege­widerstände  $(m_x, m_y)_{Rd}$  aus separat ermittelten «Grenzwerten» für jede einzelne Momenteneinwirkung  $m_{x,d}$ ,  $m_{y,d}$  und  $m_{xy,d}$  implementiert. Dieses Vorgehen liegt oft sehr stark auf der sicheren Seite.

# Platten – Fließbedingungen

## Bemessungsmomente – Beispiel 1

Gegeben: Biegemomente  $\{m_x = 30 \text{ kN}, m_y = 0 \text{ kN}, m_{xy} = 20 \text{ kN}\}$

Gesucht: Bemessungsmomente für  $k = k' = 1$  und  $k = k' = 0.5$



$k = 1$ :

$$m_{x,u} \geq 30 + 1 \cdot 20 = 50 \text{ kN}$$

$$m_{y,u} \geq 0 + 1 \cdot 20 = 20 \text{ kN}$$

$$m'_{x,u} \geq -30 + 1 \cdot 20 = -10 \text{ kN}$$

$$m'_{y,u} \geq 0 + 1 \cdot 20 = 20 \text{ kN}$$

$k = 0.5$ :

$$m_{x,u} \geq 30 + 0.5 \cdot 20 = 40 \text{ kN}$$

$$m_{y,u} \geq 0 + \frac{1}{0.5} \cdot 20 = 40 \text{ kN}$$

$$m'_{x,u} \geq -30 + 0.5 \cdot 20 = -20 \text{ kN}$$

$$m'_{y,u} \geq 0 + \frac{1}{0.5} \cdot 20 = 40 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} m_{x,u} &\geq m_x + k \cdot |m_{xy}| \\ m_{y,u} &\geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'_{x,u} &\geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m'_{y,u} &\geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}$$

N.B.: Bei negativen Bemessungsmomenten ist rechnerisch keine entsprechende Bewehrung notwendig (die für die Aufnahme des Drillmoments notwendige Zugkraft ist durch die Biegedruckkraft aus dem Normalmoment überdrückt)

Das Beispiel zeigt die Ermittlung der Bemessungsmomente für eine gegebene Beanspruchung  $\{m_x, m_y, m_{xy}\}$ . Es wird dabei die Normalmomenten-Fließbedingung in parametrisierter Form mit verschiedenen Werten für  $k$  verwendet. Die linearisierte Fließbedingung ( $k = 1$ ) führt zu den erforderlichen Biegegrößen für positive und negative Momente in den beiden Koordinatenrichtungen.

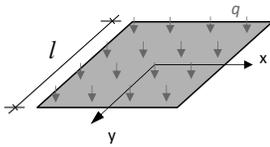
Dabei ist rein rechnerisch keine Bewehrung für negative Momente in x-Richtung anzuordnen, da ein negativer Wert für das Bemessungsmoment resultiert. Dies bedeutet, dass die notwendige Zugkraft zur Aufnahme des Drillmoments durch die Biegedruckkraft aus dem Normalmoment überdrückt wird. Der maximale Biegegrößenwert ist für positive Momente in x-Richtung erforderlich, welcher deutlich grösser ist als die restlichen Bemessungsmomente.

Für  $k = k' = 0.5$  sind ausser dem negativen Bemessungsmoment in x-Richtung alle restlichen Bemessungsmomente gleich gross und niedriger als der für  $k = 1$  erforderliche maximale Widerstand; jedoch ist der totale Bewehrungsaufwand um einen Drittel höher.

# Platten – Fließbedingungen

## Bemessungsmomente – Beispiel 2

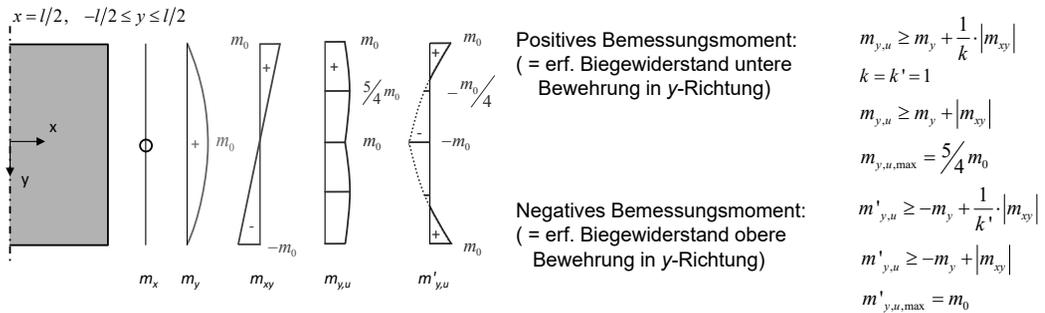
Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast  $q$  mit Ansätzen für Biegemomente  $m_x$ ,  $m_y$  und Drillmoment  $m_{xy}$



$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_0 \quad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_0 \quad m_{xy} = -\frac{4xy}{l^2} \cdot m_0$$

$$\text{Gleichgewicht: } \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \frac{24m_0}{l^2}$$

Gesucht: Erforderliche Biege- und Drillmomente in  $y$ -Richtung entlang Rand  $x = l/2$  mit linearisierter Fließbedingung



Die in Kapitel «7.1 Platten» behandelte Quadratplatte unter einer gleichmässigen Flächenlast  $q$  wird nun mithilfe der Normalmomenten-Fließbedingung bemessen.

Die Verläufe der Biege- und Drillmomente entsprechen den bekannten Ansätzen. Für jeden Schnitt in der Platte können nun die Bemessungsmomente ermittelt werden, anhand derer die Bewehrung bemessen und abgestuft werden kann.

Man erkennt, dass in diesem Beispiel die Fließbedingung mit  $k = 1$  verletzt wäre (mit einem Widerstand  $m_u = m'_u = m_0$  in Richtung  $x$  und  $y$ ). Mit einem anderen Wert von  $k$  ist die Fließbedingung jedoch eingehalten, siehe unten; im vorliegenden Fall ist die Wahl von daher nicht optimal.

### Ergänzende Bemerkung

- Tatsächlich ist die Normalmomenten-Fließbedingung mit  $m_u = m'_u = m_0$  in Richtung  $x$  und  $y$  für positive Momente

mit dem gewählten Ansatz der Momente offensichtlich in jedem Punkt der Platte gerade erfüllt (gilt auch für Beispiel 1 in Kapitel 7.1 mit umgekehrtem Vorzeichen der Drillmomente), diejenige für negative Momente

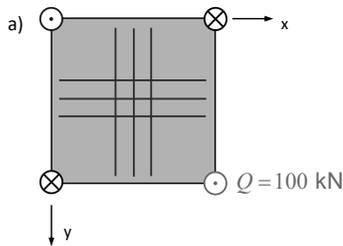
ist dagegen lediglich in den Ecken erfüllt (sonst nicht erreicht, d.h. Platte elastisch). Es handelt sich somit um einen strengen unteren Grenzwert für die Traglast.

## Platten – Fließbedingungen

### Bemessungsmomente – Beispiel 3

Gegeben: An 3 Ecken gestützte Quadratplatte mit Seitenlänge  $l$ , angreifende Eckkraft  $Q = 100 \text{ kN}$

Gesucht: Bemessungsmomente bei Bewehrung in Koordinatenrichtung und unter  $45^\circ$  dazu



Einwirkung: Eckkraft  $2m_{xy} = Q = 100 \text{ kN}$   
 (= reine Drillung bezüglich der Bewehrungsrichtungen  $(x, y)$ )

$$m_x = m_y = 0$$

$$m_{xy} = 50 \text{ kN}$$

Linearisierte Fließbedingungen:

$$m_{x,u} \geq m_x + k \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

$$m_{y,u} \geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

$$m'_{x,u} \geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

$$m'_{y,u} \geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

→ alle vier Bewehrungslagen (oben und unten in  $x$ - und  $y$ -Richtung) müssen auf  $m_u \geq 50 \text{ kN}$  bemessen werden

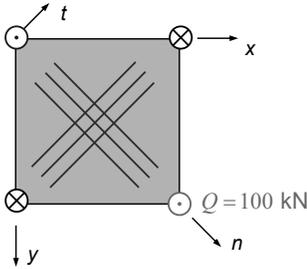
Das Beispiel zeigt eine quadratische Platte mit der Seitenlänge  $l$ , welche in 3 Ecken punktgestützt ist. In der 4. Ecke greift eine Einzellast  $Q$  an. Aus Symmetriegründen ergeben sich die dargestellten Stützenreaktionen von  $\pm Q$ .

Die an den Ecken angreifenden Einzelkräfte werden rein über Drillmomente abgetragen (vgl. Folie 11). Die Biegemomente in Richtung der orthogonalen Bewehrung sind somit gleich null. Mithilfe der linearisierten Fließbedingungen mit  $k = 1$  können die erforderlichen Querschnittswiderstände ermittelt werden, welche hier jeweils für positive und negative Momente in beiden Richtungen der Bewehrung gleich sind.

# Platten – Fließbedingungen

## Bemessungsmomente – Beispiel 3

b) Drehen der Bewehrung um  $45^\circ$  in die  $n$ - $t$ -Richtung



Einwirkungen:  $\varphi = 45^\circ$   
(Bewehrung in Hauptmomentenrichtungen angeordnet!)

$$m_n = m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi = m_{xy} = 50 \text{ kN}$$

$$m_t = m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - m_{xy} \sin 2\varphi = -m_{xy} = -50 \text{ kN}$$

$$m_{nt} = (m_y - m_x) \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

Linearisierte Fließbedingungen:

$$m'_{n,u} \geq m_n + k \cdot |m_{nt}| = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$$

$$m'_{n,s} \geq -m_n + k' \cdot |m_{nt}| = -50 + 0 = -50 \text{ kN} \rightarrow 0$$

$$m'_{t,u} \geq m_t + \frac{1}{k} \cdot |m_{nt}| = -50 + 0 = -50 \text{ kN} \rightarrow 0$$

$$m'_{t,s} \geq -m_t + \frac{1}{k'} \cdot |m_{nt}| = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$$

→ Bei Bewehrung in Hauptmomentenrichtung ist die halbe Bewehrungsmenge ausreichend: untere Bewehrung in  $n$ -Richtung, obere Bewehrung in  $t$ -Richtung je für  $m_u \geq 50 \text{ kN}$

(negative Bemessungsmomente: keine Bewehrung erforderlich)

→ «Trajektorienbewehrung» optimal, aber selten praktikabel (Bewehrungslayout kompliziert, Hauptrichtungen ändern infolge veränderlicher Einwirkungen)

Bei Drehung der orthogonalen Bewehrung müssen für die Anwendung der Fließbedingungen zunächst die Biege- und Drillmomente in Richtung der Bewehrung transformiert werden (vgl. Folie 7). Eine Rotation von  $45^\circ$  bedeutet, dass aus dem Zustand reiner Drillung ein Zustand reiner Biegung entsteht (vgl. Folie 25).

Durch Einsetzen in die Fließbedingung erkennt man, dass nur der halbe Bedarf an Bewehrung resultiert. Es ist statisch lediglich eine untere Bewehrung in  $n$ -Richtung und eine obere Bewehrung in  $t$ -Richtung notwendig.

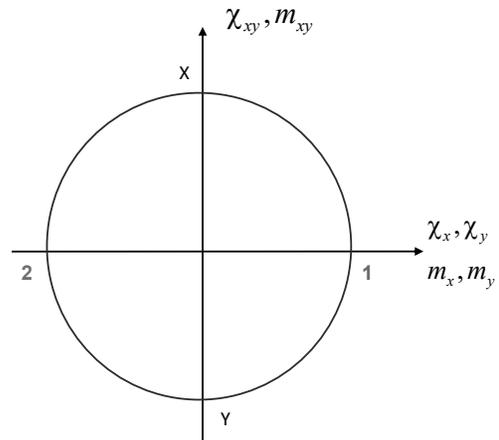
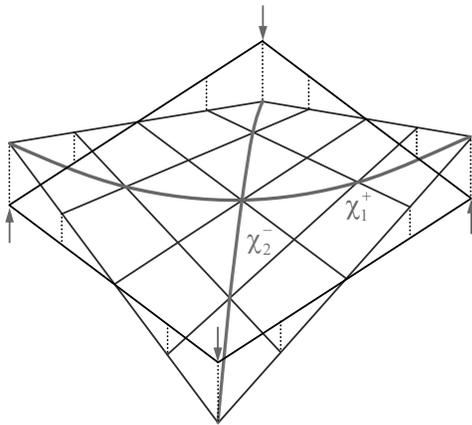
Solch eine «Trajektorienbewehrung» ist zwar am effektivsten in der Materialnutzung, jedoch in der tatsächlichen Bauanwendung wenig praktikabel (höherer Aufwand der Eisenleger, mehrere verschiedene Lastfälle → Hauptrichtung dreht!).

### Ergänzende Bemerkung

- In den Fließbedingungen wurden mit  $x$  und  $y$  die Bewehrungsrichtungen bezeichnet. Hier wird davon abgewichen ( $n$  und  $t$  als Bewehrungsrichtungen)!

## Platten – Fließbedingungen

Reine Drillung  $\chi_{xy}$  ( $\chi_x = \chi_y = 0$ )



Die Quadratplatte mit abwechselnd positiven und negativen Eckkräften trägt in den Koordinatenachsen über reine Drillung (konstante Drillmoment). Der Verzerrungszustand kann mit einem Mohrschen Kreis mit Zentrum im Koordinatenursprung dargestellt werden. Eine Drehung des Plattenelements um  $45^\circ$  führt zu den Hauptrichtungen, in denen reine Biegung herrscht.

Die linke Abbildung zeigt die überhöhten Verformungen infolge der gegebenen Belastung (rote Einzelkräfte). Entlang der Koordinatenachsen verlaufen aufgrund der fehlenden Biegebeanspruchung die jeweiligen Plattenstreifen gerade. Die Verformungsfigur ergibt sich damit aus der horizontalen Staffelung gerader Trajektorien. Die Änderung der Neigung entlang der Koordinatenachsen wird durch das Drillmoment erzeugt (Drillung = Torsion). Die blaue und die grüne Kurve zeigen, dass die Platte in Diagonalrichtung gekrümmt ist und dort ein reiner Biegezustand in den Hauptrichtungen vorliegt.

# Platten – Fließbedingungen

## Ergänzende Bemerkungen

In dieser Vorlesung werden nur Fließbedingungen für orthogonal bewehrte Platten behandelt. Für schiefe Bewehrungen und mehrere Bewehrungslagen können analoge Beziehungen hergeleitet werden, siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete».

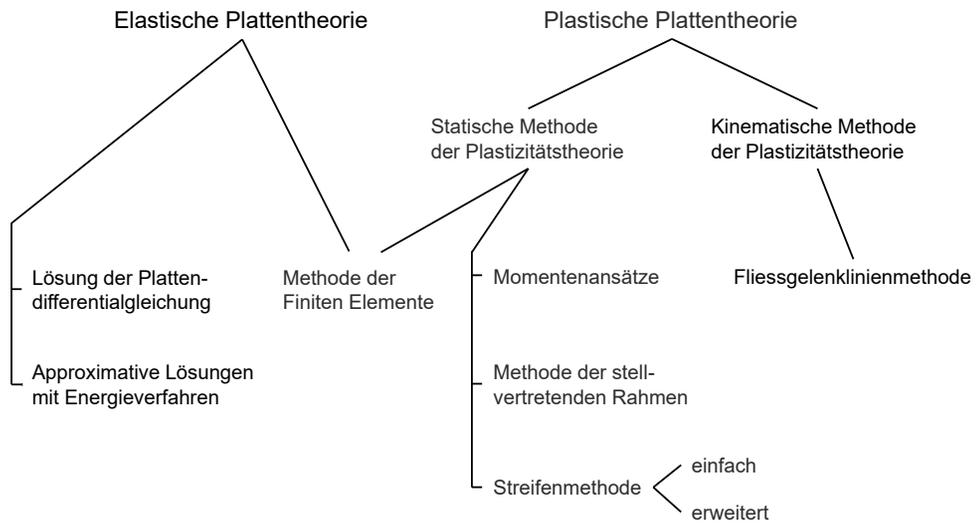
Bei schiefer Bewehrung ist zu beachten, dass die Maxima und Minima der Biegegewiderstände nicht in den Bewehrungsrichtungen auftreten. Vielmehr tritt ein Minimum im Bereich der Winkelhalbierenden des stumpfen Winkels auf, und der Widerstand ist bereits bei geringer Schiefe deutlich reduziert (Beispiel: zwei gleiche Bewehrungen,  $30^\circ$  schief → Biegegewiderstand in Richtung der Winkelhalbierenden des stumpfen Winkels nur 50% des Widerstands jeder einzelnen Bewehrungsrichtung, in Richtung der Winkelhalbierenden des spitzen Winkels dafür 125%).

Die Fließbedingungen können auch mit einer Sandwichmodell-Betrachtung hergeleitet werden (siehe Querkraft in Platten). Damit können auch Bewehrungen im Fall allgemeiner Beanspruchung durch acht Spannungserzeugende (Membrankräfte, Biege- und Drillmomente sowie Plattenquerkräfte) ermittelt werden, siehe «Advanced Structural Concrete».

# Platten – Gleichgewichtslösungen

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht



# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Übersicht

Gleichgewichtslösungen beruhen auf dem unteren bzw. statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie.

Voraussetzungen: → statisch zulässiger Spannungszustand (Gleichgewicht und statische Randbedingungen erfüllt)  
→ Fließbedingungen nirgends verletzt

Ermittlung statisch zulässiger Spannungszustände:

- **Elastische Plattentheorie:** Neben Gleichgewicht und statischen Randbedingungen sind hier auch die elastischen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt. Mit der Methode der Finiten Elemente können Fälle mit beliebiger Geometrie und Belastungen behandelt werden (heute am weitesten verbreitetes Vorgehen). Daneben existieren verschiedene Lehrbücher mit entsprechenden Tabellenwerken.
- **Momentenansätze:** Kombination verschiedener Momentenfelder für ausgewählte Geometrien und Belastungen
- **Streifenmethode:** Diese auf HILLERBORG zurückgehende Methode geht von streifenförmigen Biegeelementen in zwei orthogonalen Richtungen aus (einfache Streifenmethode). Mit der erweiterten Streifenmethode lassen sich Einzelkräfte unter Zuhilfenahme entsprechender Momentenansätze resp. Lastverteilenelemente behandeln.
- **Stellvertretende Rahmen:** Globale Gleichgewichtslösung für Flach- und Pilzdecken (Verteilung der Momente in Querrichtung in Anlehnung an elastische Lösungen).

Werden statisch zulässige Spannungszustände betrachtet, welche die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllen, so resultiert nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ein unterer Grenzwert für die Traglast einer Platte, falls die Fließbedingungen nirgends verletzt werden. Wird eine Platte auf dieser Grundlage bemessen, so liegt ihre Traglast, sofern ihr Verformungsvermögen ausreicht, in keinem Fall unter der zur betrachteten Gleichgewichtslösung gehörigen Belastung. Der Krafftfluss kann dabei bis ins Detail verfolgt werden, was eine entsprechende konstruktive Durchbildung ermöglicht.

Die Bemessung von Stahlbetonplatten erfolgt heute weitgehend aufgrund Berechnungen mittels der Methode der Finiten Elemente, welche auf der Kirchhoffschen Theorie dünner elastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen basiert. Oft ergeben sich jedoch bereits unter Eigengewicht Risse, insbesondere im Bereich von Krafteinleitungen, womit eine Umlagerung der inneren Kräfte verbunden ist. Durch Zwängungen, welche stets vorhanden sind, rechnerisch aber praktisch nicht erfasst werden können, ergeben sich weitere Umlagerungen. Somit weichen die inneren Kräfte bereits im Gebrauchszustand von den für ein homogenes elastisches Verhalten berechneten Werten ab. Es ist deshalb unrichtig, die Verwendung von nach der Kirchhoff'schen Theorie dünner elastischer Platten berechneten Schnittgrößen damit zu begründen, dass der wirkliche Spannungszustand mit ausreichender Genauigkeit erfasst werde. Vielmehr handelt es sich um ein spezielles Vorgehen nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie, liefert doch die elastische Lösung einen von unendlich vielen möglichen Gleichgewichtszuständen in der Platte.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Übersicht

Gleichgewichtslösungen eignen sich insbesondere für die Bemessung von Platten. Wird eine Platte nach diesen Verfahren bemessen und ist ihr Verformungsvermögen ausreichend, so liegt ihre Traglast in keinem Fall unter der zugehörigen Belastung.

Mit der statischen Methode der Plastizitätstheorie wird ein ausreichender Biege­widerstand sichergestellt. Der Einfluss von Querkräften ist jedoch nicht berücksichtigt und separat zu untersuchen.

Findet sich zu einer Gleichgewichtslösung ein verträglicher Bruchmechanismus (siehe Kapitel Fließgelenklinienmethode), so entspricht die gefundene Lösung einer vollständigen Lösung der Plastizitätstheorie. Es resultiert die (theoretisch) korrekte Traglast.

Beschränkt man sich bei der Bemessung auf nach der elastischen Plattentheorie ermittelte Momente, so ergeben sich oft wenig praktikable Lösungen. In der Praxis werden daher die Momente oftmals in Querrichtung über eine bestimmte Breite ausgemittelt, insbesondere im Bereich von Momentenspitzen bei konzentrierten Krafteinleitungen. Dieses Vorgehen ist insofern fragwürdig, als der Einfluss auf die Drillmomente und auf die Momente senkrecht zur betrachteten Richtung vernachlässigt wird und daher im Allgemeinen kein Gleichgewichtszustand resultiert. Dies ist zwar meist unbedenklich, grundsätzlich aber unbefriedigend, und es stellt sich die Frage, ob nicht bereits bei der Schnittgrössenberechnung von über eine bestimmte Breite konstanten Momenten ausgegangen werden kann.

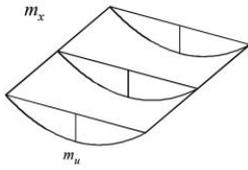
Diesem Wunsch nach grösserer Freiheit bei der praktischen Bemessung kommt die statische Methode der Plastizitätstheorie entgegen. In den folgenden Kapiteln werden für Handrechnungen geeignete Verfahren vorgestellt, welche es ermöglichen, eine Platte mit Gleichgewichtslösungen zu bemessen.

Mit der Bemessung einer Platte nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie wird ein ausreichender Biege­widerstand sichergestellt. Der Einfluss von Querkräften wird dabei nicht berücksichtigt; dies gilt insbesondere auch für die erwähnten Computerprogramme. Da Querkräfte zu einem schlagartigen Versagen führen können, wobei die spröde Natur des Bruches eine Schnittgrössenumlagerung verunmöglicht, dürfen sie bei der Bemessung keinesfalls ausser Acht gelassen werden. Für die Berücksichtigung ihres Einflusses wird auf die Vorlesung 7.4 *Platten* verwiesen

# Platten – Gleichgewichtslösungen

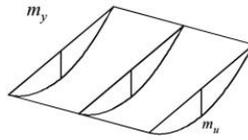
## Momentenfelder: Einführungsbeispiel Quadratplatte

Ansätze:  $m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_u$



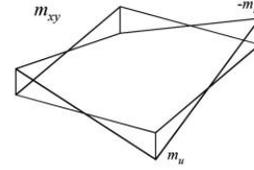
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\frac{8m_u}{l^2}$$

$m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_u$



$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\frac{8m_u}{l^2}$$

$m_{xy} = \frac{4xy}{l^2} \cdot m_u$



$$\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{4m_u}{l^2}$$

Gleichgewicht:  $\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \rightarrow \boxed{q = \frac{8m_u}{l^2}}$

$$v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{4x}{l^2} \cdot m_u$$

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{4m_u}{l^2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -\frac{4y}{l^2} \cdot m_u$$

$$\tan(\varphi_0) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y}{x}$$

Die Stützkraft verschwindet:

$$v_n + \frac{\partial m_n}{\partial t} = 0$$

Die Ansätze entsprechen damit der Momentenverteilung einer eckgestützten Quadratplatte unter der Last  $q = 8m_u/l^2$

Vgl. Bsp. 2 zu den Randbedingungen

Das Beispiel zeigt die Quadratplatte des Beispiels 2 aus dem Kapitel «7.1 Platten» mit den dort eingeführten Ansätzen der Verläufe für Biege- und Drillmomente. Aus der Plattengleichung lässt sich die maximale Traglast  $q_u$  ermitteln.

Aus dem Momentengleichgewicht am Plattenelement können die Ausdrücke für die Querkraft in x- und y-Richtung bestimmt werden. Die Hauptquerkraft und ihre zugehörige Richtung ergeben sich aus der vektoriellen Addition der beiden Querkraftkomponenten. Der Verlauf der Hauptrichtung  $\varphi_0$  zeigt, dass die Schubflusstrajektorien Strahlen durch den Ursprung darstellen. Die Stützkraft entlang der Plattenränder verschwindet und somit ist die Platte lediglich eckgestützt (vgl. Randbedingungen in «7.1 Platten»).

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Momentenfelder: Grundlagen

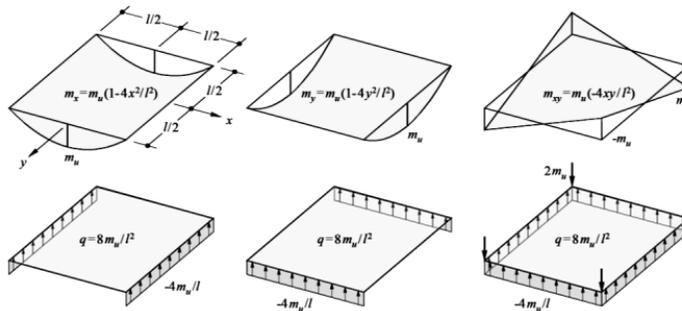
Aufteilen der Last in die Anteile  $q_x$ ,  $q_y$  und  $q_{xy}$  ergibt:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = q_x + q_y + q_{xy} \quad \begin{matrix} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q_x & \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q_y & 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q_{xy} \end{matrix}$$

Balken x-Richtung
Balken y-Richtung
Drillung

Die Aufteilung kann frei und prinzipiell an jeder Stelle der Platte anders vorgenommen werden.

Drei mögliche Grundfälle für  $m_x$ ,  $m_y$ , und  $m_{xy}$  zur Aufnahme einer gleichmässig verteilten Flächenlast:



Durch Aufspalten der Belastung  $q$  in drei Anteile  $q_x$ ,  $q_y$  und  $q_{xy}$  erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung die jeweiligen Beziehungen der Biege- und Drillmomente, gem. der Abbildung.  $q_x$  und  $q_y$  können als diejenigen Anteile der Belastung  $q$  aufgefasst werden, welche durch zu den Richtungen  $x$  und  $y$  parallele Balken abgetragen werden. Neben diesen naheliegenden Möglichkeiten zur Lastabtragung kann die Belastung auch durch eine reine Drillbeanspruchung abgetragen werden. Nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie kann die Aufteilung der Belastung  $q$  in die drei Anteile  $q_x$ ,  $q_y$  und  $q_{xy}$  frei und prinzipiell an jeder Stelle der Platte unterschiedlich gewählt werden. Durch geeignete Ansatzfunktionen für die Biege- und Drillmomente können für einfache Belastungs- und Lagerungskonfigurationen Gleichgewichtslösungen angegeben werden. Wie aus den obigen Formel ersichtlich ist, eignen sich zur Aufnahme einer gleichmässig verteilten Flächenlasten  $q$  Ansätze der Form  $m_x \sim x^2$ ,  $m_y \sim y^2$  und  $m_{xy} \sim xy$ .

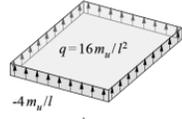
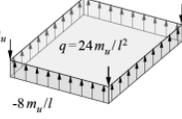
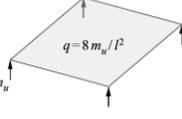
Unten in der Abbildung ist ein Beispiel einer Quadratplatte mit den Anteilen ihrer Tragwirkung aufgezeichnet. Das Gleichgewicht und die Fliessbedingungen sind eingehalten, so dass bereits die einzelnen Grundfälle jeweils einen unteren Grenzwert der Traglast liefern. Aus den Beziehungen zu den Quer- und Stützkräften folgen die zugehörigen Auflagerreaktionen.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Momentenfelder: Kombination der Grundfälle

Die möglichen Grundfälle lassen sich für verschiedene Randbedingungen superponieren (lineare Kombination):

N.B.:  
Vollständige Lösungen  
nach Plastizitätstheorie

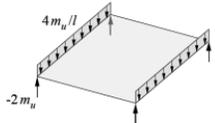
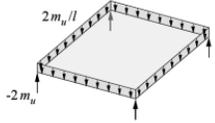
$m_x$ $m_u(1-4x^2/l^2)$	$m_y$ $m_u(1-4y^2/l^2)$	$m_{xy}$ $m_u(-4xy/l^2)$	Belastung und Lagerung (statische Randbedingungen)
1	1	0	 <ul style="list-style-type: none"> <li>- gleichmässig verteilte Flächenlast</li> <li>- umfanggelagert, Ecken nicht gehalten</li> </ul>
1	1	1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>- gleichmässig verteilte Flächenlast</li> <li>- umfanggelagert, Ecken gehalten</li> </ul>
1	1	-1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>- gleichmässig verteilte Flächenlast</li> <li>- eckgestützt</li> </ul>

Durch Superposition der in der vorigen Folie dargestellten Ansätze und der entsprechenden statischen Randbedingungen lassen sich verschiedene Konfigurationen von Belastung und Lagerung behandeln, wovon einige in der Abbildung dargestellt sind. Für die zweite und dritte Kombination von Biege- und Drillmomenten ist die Fließbedingung für positive  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  in jedem Punkt der Platte gerade erfüllt, diejenige für negative Momente für  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  lediglich in den Ecken. Für beide Fälle existieren verträgliche Bruchmechanismen und es handelt sich somit um vollständige Lösungen. Werden Drillmomente in Rechnung gestellt, so ist zur Aufnahme von  $V_t = -m_{tn}$  entlang den Plattenrändern eine entsprechende Bewehrung anzuordnen, und negative Eckreaktionen sind, sofern keine genügende Auflast vorhanden ist, durch eine entsprechende Bewehrung aufzunehmen (vgl. Kapitel 7.1 Platten Folie 15).

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Momentenfelder: Kombination der Grundfälle

Die möglichen Grundfälle lassen sich für verschiedene Randbedingungen superponieren (lineare Kombination):

0	1	-1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>- gleichmässig verteilte Randlast auf 2 Rändern</li> <li>- eckgestützt</li> </ul>
0.5	0.5	-1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>- gleichmässig verteilte Randlast auf 4 Rändern</li> <li>- eckgestützt</li> </ul>
$\frac{m_x}{m_u(1-4x^2/l^2)}$	$\frac{m_y}{m_u(1-4y^2/l^2)}$	$\frac{m_{xy}}{m_u(-4xy/l^2)}$	Belastung und Lagerung (statische Randbedingungen)

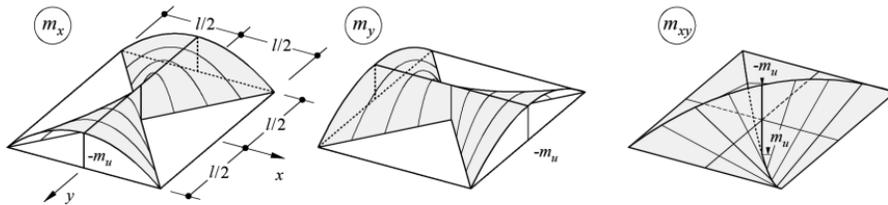
# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Momentenfelder: Einzellasten und punktförmige Stützungen

Ansätze:

$$m_x = 0 \qquad m_y = m_u \left( \frac{y^2}{x^2} - 1 \right) \qquad m_{xy} = m_u \left( \frac{y}{x} - \frac{4xy}{l^2} \right) \qquad \text{für } (x^2 > y^2)$$

$$m_x = m_u \left( \frac{x^2}{y^2} - 1 \right) \qquad m_y = 0 \qquad m_{xy} = m_u \left( \frac{x}{y} - \frac{4xy}{l^2} \right) \qquad \text{für } (x^2 < y^2)$$



Die Kombination entspricht einer in der Mitte gestützten Quadratplatte mit freien Rändern unter gleichmässiger Flächenlast  $q = 8m_u/l^2$ . Die Fließbedingungen sind mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  und  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  nirgends verletzt (für positive Momente im Plattenzentrum, für negative Momente entlang der Koordinatenachsen gerade erfüllt).

Zur Einleitung einer Einzellast oder bei punktförmigen Stützungen wird eine Gleichgewichtslösung für eine in der Mitte gestützte, durch eine gleichmässig verteilte Flächenlast belastete Rechteckplatte mit freien Rändern benötigt. Zu diesem Zweck können für eine Quadratplatte grundsätzlich die in der Abbildung illustrierten diskontinuierlichen Drillmomentenfelder, beziehungsweise die daraus resultierenden Gleichungen, verwendet werden. Die Fließbedingung für positive Momente ist mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  nirgends verletzt und nur im Plattenzentrum gerade erfüllt. Die Fließbedingung für negative Momente ist für  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  ebenfalls nirgends verletzt und lediglich entlang der Koordinatenachsen  $x = 0$  und  $y = 0$  gerade erfüllt. Überlagert man diesen Momentenfeldern konstante positive Momente  $m_x$  und  $m_y$ , so erhält man mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  und  $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$  einen unteren Grenzwert  $q$  für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung.

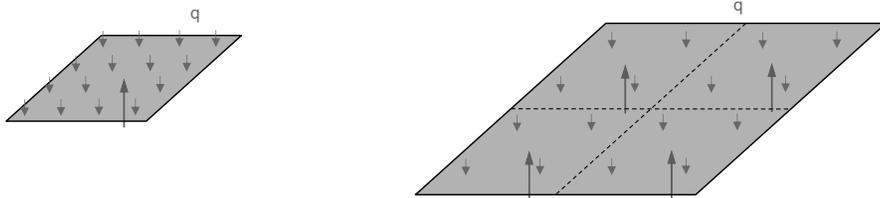
# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Momentenfelder: Einzellasten und punktförmige Stützungen

Diese Momentenfelder sind als «Lastverteilenelemente» zur Umwandlung von Punktlasten in Flächenlasten geeignet (siehe später erweiterte Streifenmethode).

Überlagert man ihnen konstante positive Momente  $m_x$  und  $m_y$ , so erhält man mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  und  $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$  den unteren Grenzwert für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung (Marti 1981):

$$q \geq 4(1+\lambda) \frac{m_u}{l^2}, \quad \lambda = \frac{m'_{xu}}{m_u} = \frac{m'_{yu}}{m_u}$$



N.B.: Momentenfelder für Eck- und Randfelder von Flachdecken sind ebenfalls verfügbar.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Grundidee

Grundidee:

- Vernachlässigen der Drillmomente, Gleichgewichtsbedingungen nur mit  $m_x$  und  $m_y$  erfüllen
- Aufteilen der Belastung  $q$  in die Anteile  $q_x$  und  $q_y$  ( $q_{xy} = 0$ )

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow q = q_x + q_y, \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q_x, \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q_y$$

Balken in  
x-Richtung

Balken in  
y-Richtung

- gesamte Belastung  $q$  wird damit durch Balkentragwirkung in x- und y-Richtung abgetragen
- Aufteilung der Last kann grundsätzlich frei gewählt werden.
- um ein ausreichendes Verformungsvermögen und zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand zu gewährleisten, ist eine gewisse Vorsicht bei der Wahl von  $q_x$  und  $q_y$  angebracht
- ebenso bei der Wahl allfälliger überzähliger Grössen bei der Berechnung der einzelnen Streifen nach Balkentheorie

Die Idee, eine Platte als zueinander orthogonale Schar von Balken aufzufassen, wurde sehr früh entwickelt. Marcus (1931) schlug beispielsweise vor, die Aufteilung der Belastung so zu wählen, dass die elastischen Durchbiegungen der fiktiven Balken in Plattenmitte übereinstimmen (→ verteilte Last: pro Richtung  $\sim L^{-4}$ ).

HILLERBORG zeigte, dass es sich bei der Streifenmethode um eine Anwendung des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie handelt und verallgemeinerte die Methode.

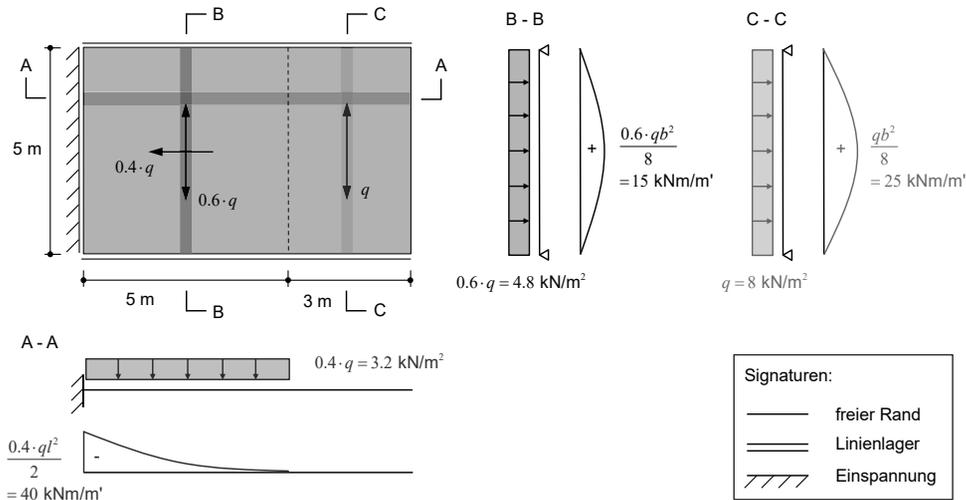
Die Grundidee der einfachen Streifenmethode besteht darin, Drillmomente zu vernachlässigen und die Gleichgewichtsbedingungen mit Biegemomenten  $m_x$  und  $m_y$  allein zu erfüllen. Durch Aufspalten der Belastung  $q$  in zwei Anteile  $q_x$  und  $q_y$  erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung mit  $m_{xy} = 0$  die Formeln gemäss der Folie; somit ist im Unterschied zur allgemein gültigen Beziehung  $q_{xy} = 0$ . Die gesamte Belastung  $q$  wird durch Balkentragwirkung in den Richtungen x und y abgetragen. Die Idee, das Tragverhalten von Platten anhand von zueinander orthogonalen Balkenscharen zu untersuchen, wurde bereits sehr früh verwendet.

Hillerborg zeigte, dass die Behandlung von Platten als zueinander orthogonale Balkenscharen eine Anwendung des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie darstellt, und dass die Aufteilung der Belastung in die beiden Anteile  $q_x$  und  $q_y$  frei und an jeder Stelle der Platte unterschiedlich gewählt werden darf. Um ein ausreichendes Verformungsvermögen und ein zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand zu gewährleisten, ist jedoch eine gewisse Vorsicht bei der Wahl von  $q_x$  und  $q_y$  angebracht, wie auch bei der Wahl allfälliger überzähliger Grössen bei der Berechnung der einzelnen Streifen nach Balkentheorie.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Einführungsbeispiel

Gegeben: Rechteckplatte (8 x 5 Meter),  $h = 0.32$  m unter Eigengewicht ( $q = 8$  kN/m<sup>2</sup>)  
 Gesucht: Bemessungsmomente mit Streifenmethode



Das Beispiel zeigt eine Rechteckplatte, die auf den zwei Längsseiten einfach gelagert und auf einer Stirnseite fest eingespannt ist; die vierte Seite ist frei. Im Grundriss ist eine mögliche Lastaufteilung gezeigt, aus der in den jeweiligen Schnitten die Momente  $m_x$  und  $m_y$  resultieren, für welche die Bewehrung bemessen werden kann.

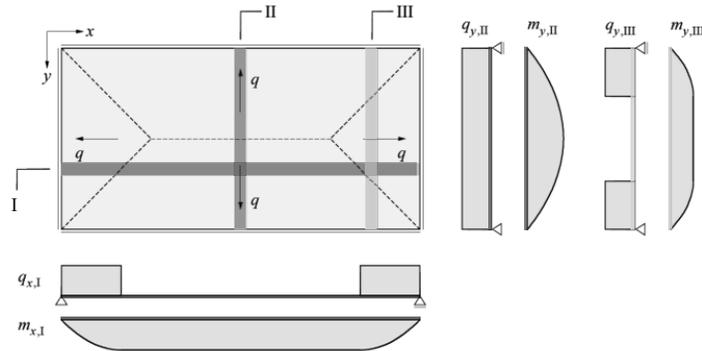
Über die lange Spannweite trägt die Platte als Kragarm. Aufgrund des grossen Abstands zum Lager wird angenommen, dass im rechten Teil der Platte die gesamte Last über die kurze Spannweite abgetragen wird, welche als einfacher Balken wirkt. Die Aufteilung der Last im linken Teil der Platte sowie die Position der Trennlinie der beiden Abschnitte wird frei gewählt. Grundsätzlich dürfen nach der allgemeinen Streifenmethode nach Hillerborg beliebige Bereiche der Lastabtragung gewählt werden. Nicht immer sind Lastabtragungen zu bevorzugen, die rein aus Sicht des Bewehrungsgehalts zur wirtschaftlichsten Lösung führen würden. Bei zu feiner Lastabstufung oder Abschnittsgrenzen, welche nicht orthogonal zur Bewehrung verlaufen, ergeben sich oft unpraktische Bewehrungsanordnungen. Um den Verlegeaufwand der Bewehrung zu minimieren, ist daher eine einfache Lastabtragung wie im gezeigten Beispiel oft zweckmässig.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Effizienteste Lastaufteilung

Für die effizienteste Aufteilung wird die volle Last an jeder Stelle der Platte zum nächsten Rand abgetragen (an jeder Stelle jeweils  $q_x = q$ ,  $q_y = 0$  resp.  $q_y = q$ ,  $q_x = 0$ )

- geringe Bewehrungsaufwände (daher von Hillerborg ursprünglich bevorzugt)
- jedoch unpraktische Bewehrungsanordnungen (kontinuierliche Variation des Biege Widerstandes in den Streifen I und III erforderlich)
- in der Praxis sind daher alternative Lösungen mit konstanter Lastaufteilung pro Streifen besser geeignet  
(  $q_x = \beta \cdot q$ ,  $q_y = (1-\beta) \cdot q$  )

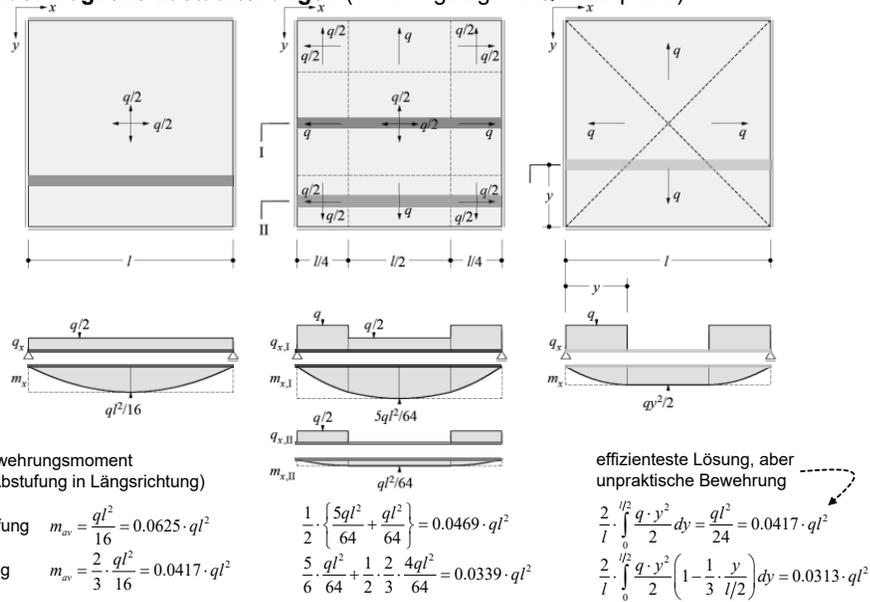


Die Abbildung zeigt eine mögliche Lastaufteilung und die daraus resultierenden Momente  $m_x$ ,  $m_y$  für eine einfach gelagerte Rechteckplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast.

Im vorliegenden Fall wird an jeder Stelle der Platte die volle Belastung zum nächsten Rand hin abgetragen. Diese Art der Lastaufteilung wurde von Hillerborg ursprünglich bevorzugt, da sie zu geringen Bewehrungsaufwänden führt. Die resultierenden Bewehrungsanordnungen sind jedoch unpraktisch, da im Prinzip eine kontinuierliche Variation des Biege Widerstandes in den Streifen I und III erforderlich wäre. In der Regel sind daher, wie im folgenden Beispiel erläutert, andere Lastaufteilungen vorzuziehen.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Mögliche Lastaufteilungen (einfach gelagerte Quadratplatte)



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Lösungen nach der einfachen Streifenmethode für eine einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast  $q$ .

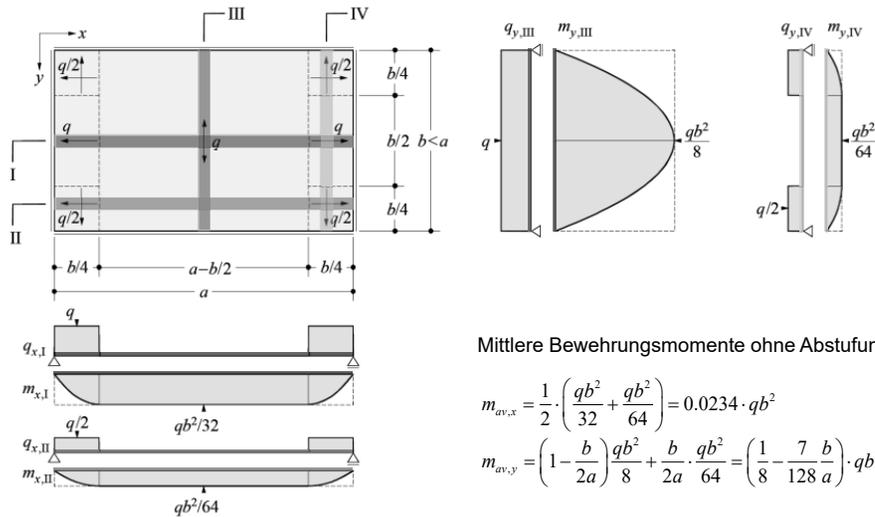
Bei der linken Variante wird an jeder Stelle der Platte je die Hälfte der Belastung in Richtung  $x$  und  $y$  abgetragen. Das mittlere Bewehrungsmoment pro Richtung beträgt  $m_{av} = 0.0417ql^2$  (mit Abstufung in Bewehrungsrichtung) resp.  $m_{av} = 0.0625 ql^2$  (ohne Abstufung in Bewehrungsrichtung). Die resultierende Bewehrungsanordnung ist äusserst einfach.

Bei der mittleren Lösung werden randnahe Lasten direkt in der entsprechenden Richtung abgetragen, und es resultiert daher ein reduzierter Bewehrungsaufwand,  $m_{av} = 0.039 ql^2$  resp.  $m_{av} = 0.047 ql^2$ . Die Bewehrungsanordnung ist relativ einfach, sind doch pro Richtung lediglich zwei unterschiedlich stark bewehrte Streifen erforderlich.

Nach der rechten Lösung wird an jeder Stelle der Platte die volle Belastung zum nächsten Rand hin abgetragen, und der Bewehrungsaufwand ist daher mit  $m_{av} = 0.0313ql^2$  resp.  $m_{av} = 0.0417ql^2$  nochmals geringer. Wie bereits erwähnt ist die entsprechende Bewehrungsanordnung jedoch unpraktisch, da sie eine kontinuierliche Variation des Biege widerstands erfordert.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Mögliche Lastaufteilungen (einfach gelagerte Rechteckplatte)



Mittlere Bewehrungsmomente ohne Abstufung:

$$m_{av,x} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{qb^2}{32} + \frac{qb^2}{64} \right) = 0.0234 \cdot qb^2$$

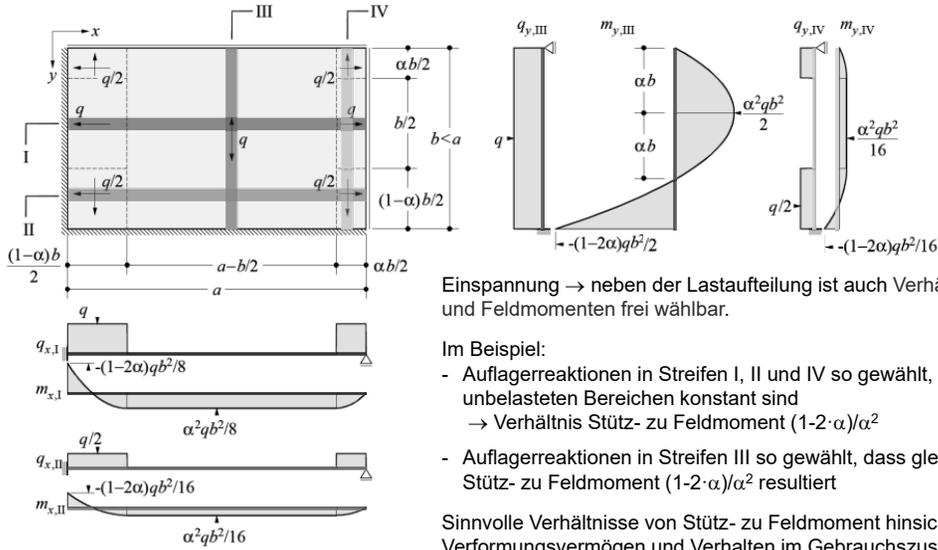
$$m_{av,y} = \left( 1 - \frac{b}{2a} \right) \frac{qb^2}{8} + \frac{b}{2a} \cdot \frac{qb^2}{64} = \left( \frac{1}{8} - \frac{7}{128} \frac{b}{a} \right) \cdot qb^2$$

Die Abbildung zeigt eine einfach gelagerte Rechteckplatte.

Der Kraftfluss ist so gewählt, dass randnahe Lasten direkt zum nächsten Auflagerrand abgetragen werden (analog der mittleren Lösung der letzten Folie). Ohne Abstufung des Biegesteifigkeits in Bewehrungsrichtung ergeben sich mittlere Momente von  $m_{x,av} = 0.0234 \cdot qb^2$  und  $m_{y,av} = (0.125 - 0.0547b/a) \cdot qb^2$ .

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Mögliche Lastaufteilungen (Rechteckplatte, 2 Ränder eingespannt)



Einspannung → neben der Lastaufteilung ist auch Verhältnis zwischen Stütz- und Feldmomenten frei wählbar.

Im Beispiel:

- Auflagerreaktionen in Streifen I, II und IV so gewählt, dass Momente in den unbelasteten Bereichen konstant sind  
→ Verhältnis Stütz- zu Feldmoment  $(1-2\cdot\alpha)/\alpha^2$
- Auflagerreaktionen in Streifen III so gewählt, dass gleiches Verhältnis Stütz- zu Feldmoment  $(1-2\cdot\alpha)/\alpha^2$  resultiert

Sinnvolle Verhältnisse von Stütz- zu Feldmoment hinsichtlich Verformungsvermögen und Verhalten im Gebrauchszustand:  
ca.  $(1-2\cdot\alpha)/\alpha^2 = 1.5 \dots 2.5$  →  $\alpha = 0.35 \dots 0.39$

Im Unterschied zum vorigen Beispiel ist diese Rechteckplatte nun an zwei angrenzenden Rändern eingespannt und an den übrigen Rändern einfach gelagert.

Neben der Lastaufteilung kann auch das Verhältnis zwischen Stütz- und Feldmomenten frei gewählt werden. Im vorliegenden Fall wurden die Auflagerreaktionen in den Streifen I, II und IV so gewählt, dass die Momente in den unbelasteten Bereichen konstant sind. Somit beträgt das Verhältnis von Stütz- zu Feldmoment  $(1-2\alpha)/\alpha^2$ . Die Auflagerreaktionen im Streifen III wurden so gewählt, dass das gleiche Verhältnis von Stütz- zu Feldmoment resultiert.

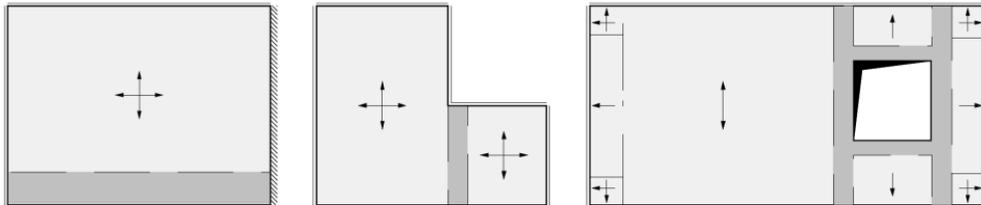
Sinnvolle Werte des Verhältnisses von Stütz- zu Feldmoment hinsichtlich des Verhaltens im Gebrauchszustand und des Verformungsvermögens liegen etwa im Bereich  $(1-2\alpha)/\alpha^2 = 1.5 \dots 2.5$  und resultieren somit für  $\alpha = 0.35 \dots 0.39$ .

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Versteckte Unterzüge («strong bands»)

Versteckte Unterzüge übernehmen die Last anderer (indirekt gelagerter) Streifen und tragen sie zu den Auflagern ab.

- In einem ersten Schritt werden die versteckten Unterzüge als Flächenlager betrachtet (am einfachsten mit gleichmässiger Pressung).
- Anschliessend werden die Reaktionen des Flächenlagers als Belastung auf den versteckten Unterzug aufgebracht und schliesslich die Beanspruchungen superponiert.

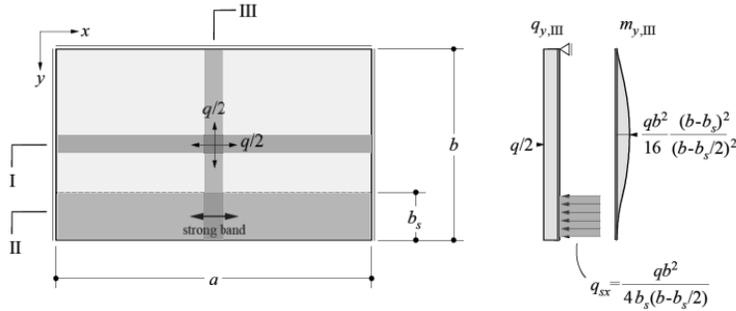


Wichtig: Kraftfluss konsequent vom Lastangriffspunkt bis zu den Auflagern verfolgen!

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Beispiel versteckter Unterzug

**Gegeben:** Rechteckplatte, dreiseitig frei drehbar gelagert, vierter Rand frei, unter gleichmässiger Flächenlast  $q$   
**Gesucht:** Lastabtragung



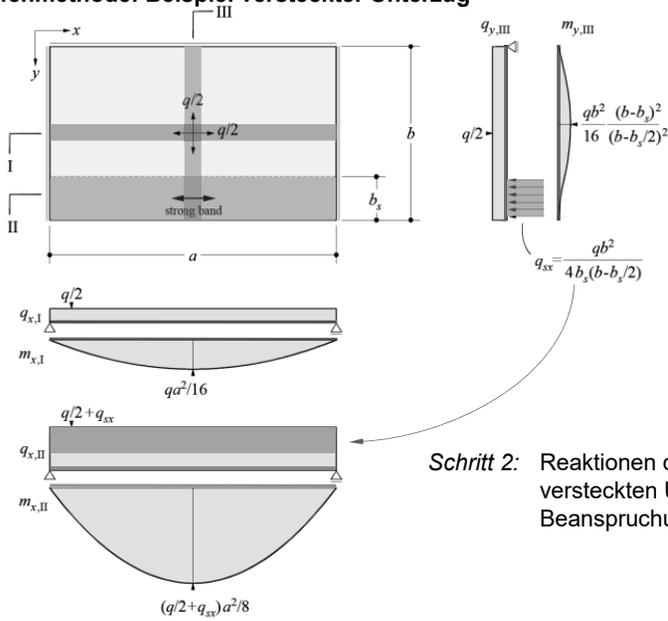
**Schritt 1:** versteckter Unterzug als Flächenlager betrachten (hier mit gleichmässiger Pressung)

$$\sum V = 0: \quad \frac{qb}{2} = q_{sx}b_s + A \quad \sum M = 0: \quad \frac{qb^2}{4} = \frac{q_{sx}b_s^2}{2} + A \cdot b \quad \longrightarrow \quad q_{sx} = \frac{qb^2}{4b_s \left( b - \frac{b_s}{2} \right)}$$

In den bisher behandelten Beispielen wurde die Belastung von jedem Streifen direkt zu einem Auflager abgetragen. Alternativ dazu bietet es sich oft an, sogenannte versteckte Unterzüge («strong bands») zu verwenden, auf welchen einzelne Streifen indirekt gelagert werden. Die Abbildung illustriert das Vorgehen anhand einer dreiseitig frei drehbar gelagerten Rechteckplatte. In einem ersten Schritt denkt man sich dabei den versteckten Unterzug als Flächenlager mit gleichmässig verteilter Reaktion und berechnet die entsprechenden Momente nach der Streifenmethode. Im zweiten Schritt werden die Reaktionen des Flächenlagers mit umgekehrtem Vorzeichen als Belastung auf den versteckten Unterzug aufgebracht und die resultierenden Momente der Beanspruchung aus dem ersten Schritt im Bereich des versteckten Unterzugs superponiert. Wichtig ist dabei, den Kraftfluss konsequent vom Lastangriffspunkt bis zu den Lagern zu verfolgen.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Einfache Streifenmethode: Beispiel versteckter Unterzug



**Schritt 2:** Reaktionen des Flächenlagers als Belastung auf versteckten Unterzug aufbringen und Beanspruchungen superponieren ( $q/2 + q_{sx}$ )

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilerelemente

Um Stützen und Einzellasten mit der Streifenmethode behandeln zu können, werden Lastverteilerelemente eingesetzt. Diese wandeln eine Punktlast in eine Flächenlast um oder umgekehrt. Sie entsprechen somit den Lösungen für (in der Mitte) punktgestützte Platten unter gleichmässig verteilter Last.

*Stützen:* Die Lastverteilerelemente werden als Flächenlager mit gleichmässiger Pressung betrachtet, welche durch indirekt gelagerte Streifen oder (in der Regel) versteckte Unterzüge belastet werden. Den resultierenden Biegegewiderständen aus den Unterzügen werden die für die Lastabtragung im Stützenbereich erforderlichen Biegegewiderstände superponiert.

*Einzellasten:* Die Einzellasten werden als gleichmässig verteilte Flächenlasten auf die Platte aufgebracht, welche durch Streifen oder (in der Regel) versteckte Unterzüge zu den Auflagern abgetragen werden. Den resultierenden Biegegewiderständen werden die für die Umwandlung der Punktlast in eine gleichmässig verteilte Belastung erforderlichen Biegegewiderstände superponiert.

Die Streifenmethode eignet sich naturgemäss primär für die Behandlung von linien- oder flächengestützten Platten mit verteilter Belastung. Die erweiterte Streifenmethode ermöglicht es, auch konzentrierte Belastungen und Punktstützen zu berücksichtigen. Dies wird nachfolgend für Punktstützen illustriert; konzentrierte Belastungen können analog behandelt werden.

Bei der Anwendung der erweiterten Streifenmethode kann ähnlich vorgegangen werden wie bei der Behandlung versteckter Unterzüge. Dabei denkt man sich in einem ersten Schritt die Punktstützen als Flächenlager mit endlichen Abmessungen und gleichmässig verteilter Reaktion und berechnet die entsprechenden Plattenmomente  $m_x$  und  $m_y$ . Hierzu können auch versteckte Unterzüge berücksichtigt werden. Im zweiten Schritt werden diesen Momenten die Biegegewiderstände  $m_{xu}$  und  $m_{yu}$  superponiert, so dass die mit umgekehrtem Vorzeichen als Belastung aufgebrachten, gleichmässig verteilten Reaktionen der Flächenlager zu den punktförmigen Stützen abgetragen werden können, ohne die Fließbedingungen zu verletzen.

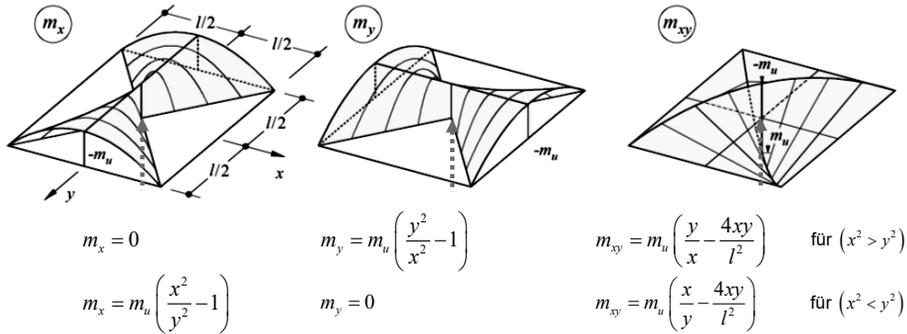
# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilenelemente – Repetition Momentenfelder

Die untenstehenden Momentenfelder sind als «Lastverteilenelemente» zur Umwandlung von Punktlasten in Flächenlasten geeignet.

Überlagert man ihnen konstante positive Momente  $m_x$  und  $m_y$ , so erhält man mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  und  $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$  den unteren Grenzwert für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung (Marti 1981):

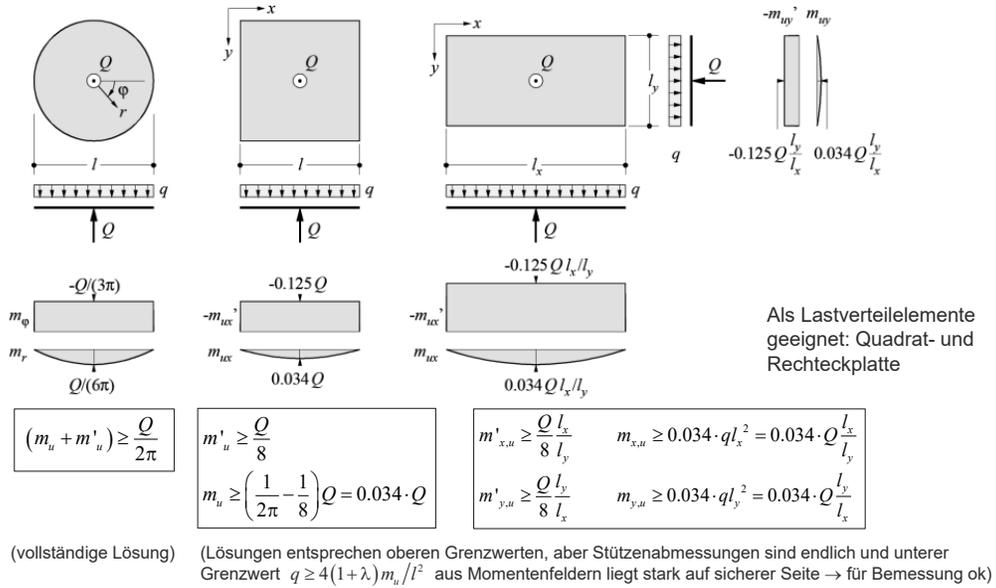
$$q \geq 4(1 + \lambda) \frac{m_u}{l^2}, \quad \lambda = \frac{m'_{xu}}{m_u} = \frac{m'_{yu}}{m_u}$$



Im zweiten Schritt wird eine Gleichgewichtslösung für eine in der Mitte gestützte, durch eine gleichmässig verteilte Flächenlast belastete Rechteckplatte mit freien Rändern benötigt. Zu diesem Zweck können für eine Quadratplatte grundsätzlich die in der Abbildung illustrierten diskontinuierlichen Drillmomentenfelder, beziehungsweise die daraus resultierenden Gleichungen, verwendet werden. Die Fließbedingung für positive Momente ist mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  nirgends verletzt und nur im Plattenzentrum gerade erfüllt. Die Fließbedingung für negative Momente ist für  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  ebenfalls nirgends verletzt und lediglich entlang der Koordinatenachsen  $x = 0$  und  $y = 0$  gerade erfüllt. Überlagert man diesen Momentenfeldern konstante positive Momente  $m_x$  und  $m_y$ , so erhält man mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  und  $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$  einen unteren Grenzwert  $q$  für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilerelemente



Die Abbildung zeigt weitere Beispiele von punktgestützten Lastverteilerelementen mit den zugehörigen Bedingungen der Biegegewiderstände.

Für die Kreisplatte kann das gleiche Resultat mit dem oberen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie hergeleitet werden, so dass dieses der vollständigen Lösung entspricht.

Für die Quadratplatte mit freien Rändern ist in Anlehnung an die Kreisplatte auch eine Lösung nach Nielsen (1984) möglich. Der negative Widerstand  $m'_u = Q/8$ , welcher dem Mittelwert der negativen Biegemomente in den Stützenachsen entspricht, ist über die gesamte Platte beizubehalten, während der positive Widerstand wie bei der Kreisplatte parabolisch abgestuft werden darf. Für eine Platte beliebiger Geometrie unter punktförmiger Belastung  $Q$  entspricht diese Lösung eigentlich einem oberen Grenzwert. Da in Wirklichkeit immer endliche Stützenabmessungen vorhanden sind und der untere Grenzwert stark auf der sicheren Seite liegt, können die Beziehungen trotzdem für die Bemessung benützt werden.

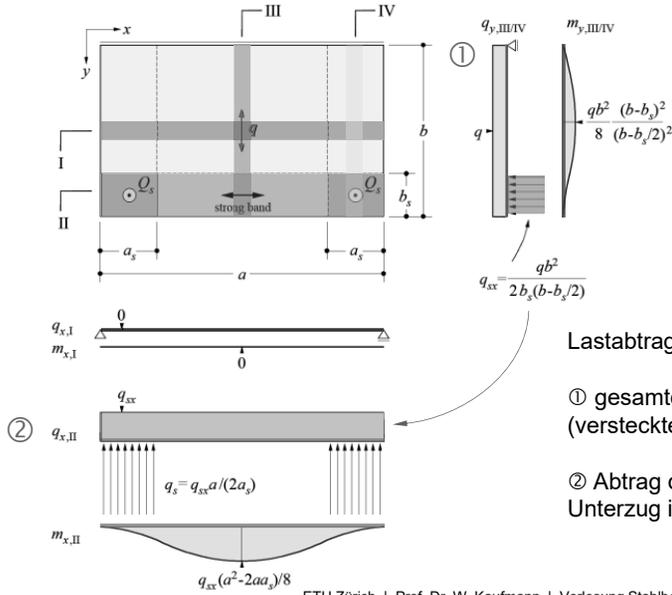
Ist die Fläche, auf welcher die gleichmässig verteilte Flächenlast angreift, nicht quadratisch, sondern rechteckig, so erhält man durch Anwendung des Affinitätstheorems die oben angegebenen Formulierungen.

### Ergänzende Bemerkung

- Mithilfe dem Affinitätstheorem kann eine in den Koordinaten  $x$  und  $y$  gültige Lösung für eine isotrop bewehrte Platte mit den Biegegewiderständen  $m_u$  (positive Momente) und  $m'_u$  (negative Momente) unter verteilter Belastung  $q$  und punktförmiger Belastung  $Q$  auf eine orthotrop bewehrte Platte mit  $m_{yu} = \mu \cdot m_{xu} = \mu \cdot m_u$  und  $m'_{yu} = \mu \cdot m'_{xu} = \mu \cdot m'_u$  übertragen werden. Dabei sind die Koordinaten gemäss den Beziehungen  $x^* = x$  und  $y^* = y \cdot \sqrt{\mu}$  zu transformieren, eine konzentrierte Belastung gemäss  $Q^* = Q \cdot \sqrt{\mu}$ , und verteilte Belastungen  $q^* = q$ . (siehe auch Folie 67)

# Platten – Gleichgewichtslösungen

Erweiterte Streifenmethode: Beispiel Rechteckplatte, einseitig aufgelegt, auf 2 Stützen gelagert



26.04.2021

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton II

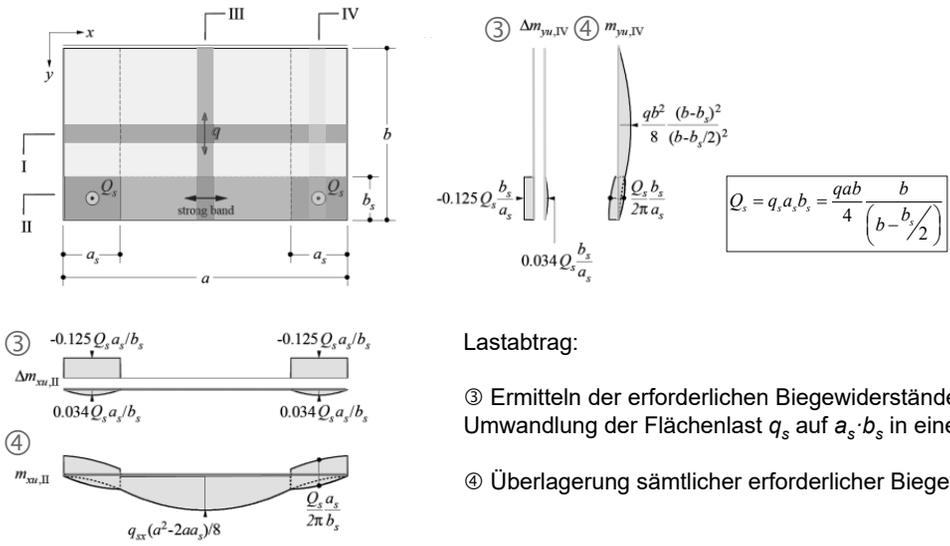
39

Das Beispiel illustriert die Anwendung der Lastverteilerelemente auf eine einseitig aufgelegte und auf zwei Stützen gelagerte Rechteckplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast.

Die gesamte Belastung wird zunächst in y-Richtung abgetragen, wobei der versteckte Unterzug der Breite  $b_s$  entlang des freien Randes als Flächenlager mit gleichmässig verteilter Auflagerpressung betrachtet wird. Die entsprechenden Reaktionen werden sodann vom versteckten Unterzug in x-Richtung abgetragen, wobei nun die Stützen als Flächenlager mit über den Bereich  $a_s \cdot b_s$  gleichmässig verteilten Auflagerpressungen betrachtet werden. Im letzten Schritt werden den auf die beschriebene Weise berechneten Momenten, die für die Lastabtragung im Stützenbereich  $a_s \cdot b_s$  (also für die Aufnahme der mit umgekehrten Vorzeichen als Belastung aufgebracht, gleichmässig verteilten Auflagerpressungen durch die konzentrierte Stützenkraft) erforderlichen Biegegrößen  $\Delta m_u$  superponiert.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

Erweiterte Streifenmethode: Beispiel Rechteckplatte, einseitig aufgelegt, auf 2 Stützen gelagert



Lastabtrag:

- ③ Ermitteln der erforderlichen Biegesteifigkeiten für die Umwandlung der Flächenlast  $q_s$  auf  $a_s \cdot b_s$  in eine Einzellast  $Q_s$
- ④ Überlagerung sämtlicher erforderlicher Biegesteifigkeiten

Gemäss der Superposition der Momentenbeanspruchung ist im Bereich von Punktlasten und Punktstützen sowohl eine obere als auch eine untere Bewehrung in beiden Bewehrungsrichtungen erforderlich. Dies rührt daher, dass zur Aufnahme der punktförmigen Lasten Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen verwendet werden, welche gemäss den Fließbedingungen sowohl eine obere als auch eine untere Bewehrung erfordern.

Durch die Verwendung von statischen Diskontinuitäten, ist es möglich, punktförmige Lasten auch ohne Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen aufzunehmen. Dies wird jedoch hier nicht weiter erläutert.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: Übersicht der Möglichkeiten zur Bemessung

### 1. Momentenfelder

Verwendung der behandelten Lösungen für in der Mitte gestützte Quadrat- oder Rechteckplatten mit freien Rändern unter gleichmässig verteilter Flächenlast (bei Anwendung der Momentenfelder nach statischer Methode resultiert ein strenger unterer Grenzwert für die Traglast).

### 2. «Trägerrost in Stützenachsen» (Anwendung der Streifenmethode) (\*)

- Trägerrost in Stützenachsen (Breite  $\rightarrow 0$ ) annehmen, Schnittgrössen und Auflagerreaktionen für eine umfanggelagerte Quadratplatte nach der einfachen Streifenmethode ermitteln.
- Auflagerreaktionen der Plattenberechnung umgekehrt als Belastung auf den (torsionsweichen) Trägerrost aufbringen, Schnittgrössen im Trägerrost ermitteln, auf endliche Breite der Platte verteilen
- Schnittgrössen des Trägerrosts mit Momenten aus der Plattenberechnung superponieren.  
(Integration der Momente in Feldmitte über die Plattenbreite liefert in jedem Fall  $\int m_x dy = \int m_y dx = ql^2/8$   
d.h. in x- und y-Richtung wird jeweils die volle Belastung  $q$  abgetragen)

→ siehe nachfolgendes Beispiel

Grundsätzlich ist es möglich, Flachdecken aufgrund der durch Momentenfelder oder durch die Streifenmethode hergeleiteten Lösungen für in der Mitte gestützte, durch eine gleichmässig verteilte Flächenlast belastete Quadrat- oder Rechteckplatten mit freien Rändern zu bemessen. Bei Verwendung der in Folie 37 illustrierten Momentenfelder resultiert bei diesem Vorgehen ein strenger unterer Grenzwert für die Traglast.

Eine alternative Anwendung der Streifenmethode zur Behandlung von Flachdecken soll am Beispiel einer in den Ecken gestützten Quadratplatte gezeigt werden. Dabei denkt man sich zunächst einen Trägerrost in den Stützenachsen und berechnet in einem ersten Schritt Schnittgrössen und Auflagerreaktionen für eine umfanggelagerte Quadratplatte nach der einfachen Streifenmethode. In einem zweiten Schritt werden die Auflagerreaktionen aus der Plattenberechnung mit umgekehrtem Vorzeichen als Belastung auf den (torsionsweichen) Trägerrost aufgebracht und die entsprechenden Schnittgrössen im Trägerrost berechnet. Diese Schnittgrössen werden sodann auf eine endliche Breite der Platte verteilt und mit den Momenten aus der Plattenberechnung superponiert. Je nach der bei der Plattenberechnung nach der Streifenmethode gewählten Lösung und je nach Verteilbreite der Trägerrostmomente, resultiert eine unterschiedliche Querverteilung der Biegemomente. Integration der Momente in Feldmitte über die Plattenbreite liefert in jedem Fall das Ergebnis  $\int m_x dy = \int m_y dx = ql^2/8$ ; in x- und y-Richtung wird also jeweils die volle Belastung  $q$  abgetragen.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: Übersicht der Möglichkeiten zur Bemessung

### 3. Stellvertretende Rahmen (in Praxis früher oft verwendet) (\*)

- (a) Ermittlung der Beanspruchung von Rahmen in den Stützenachsen, wobei in x- und y-Richtung je die volle Belastung  $q$  abgetragen werden muss. (Beliebige Lastfallkombinationen, ggf. Aufnahme von Momenten durch Stützen und die Modellierung von (Rand-)unterzügen als torsionssteife Elemente sind dabei möglich.)
- (b) Momente der Rahmenelemente in Querrichtung auf Platte verteilen. Die hierbei angewandten Regeln orientieren sich an elastischen Lösungen. (Es resultieren unterschiedliche Querverteilungen für Pilzdecken mit Stützenkopfverstärkungen und für Flachdecken.)  
→ siehe nachfolgendes Beispiel

### 4. Linear elastische Plattenberechnung mit Finite-Element-Methode

Anwendung entsprechender Computerprogramme zur Berechnung der Bemessungsschnittgrössen.

(\*) Kraftfluss im Stützenbereich wird nicht untersucht → es resultiert kein strenger unterer Grenzwert → Biege­widerstand im Stützenbereich überprüfen! Richtwerte:

Innenstützen:  $m'_y \geq Q/8$  im Mittel über eine Breite von  $0.3 \cdot l_x$  resp.  $0.3 \cdot l_y$ ;  $Q =$  Stützenlast

In der Praxis wird für die Berechnung von Flachdecken oft die Methode der stellvertretenden Rahmen verwendet. In einem ersten Schritt werden mit Methoden der Stabstatik an stellvertretenden Rahmen in den Stützenachsen die Schnittgrössen oder entsprechende Grenzwerte berechnet, wobei in x- und y-Richtung je die volle Belastung  $q$  abgetragen werden muss. In einem zweiten Schritt werden die Momente nach an elastischen Lösungen orientierten Regeln in Querrichtung auf die Platte verteilt. Die Methode der stellvertretenden Rahmen ist eng verwandt mit der Variante «Trägerrost in Stützenachsen»; für beide Berechnungsverfahren wird der Kraftfluss im Bereich der Stützen nicht im Detail untersucht. Auch wenn Schubversagen von der Betrachtung ausgeschlossen werden, resultiert somit kein strenger unterer Grenzwert für die Traglast. Um dennoch eine sichere Lastabtragung zu gewährleisten, ist im Bereich der Stützen ein ausreichender Biege­widerstand vorzusehen. Einen Anhaltspunkt für die Grösse des erforderlichen Widerstandes liefern die Bedingungen der Lastverteilerelemente (vgl. Folie 25 - 26). Demnach ist ein negativer Biege­widerstand vom Betrag  $m'_y \geq Q/8$  (+ ein allfälliger Anteil aus Exzentrizität) pro Richtung erforderlich, wie dies beispielsweise auch von der Norm SIA 262, im Mittel über ein repräsentative Breite  $b_s$ , verlangt wird.

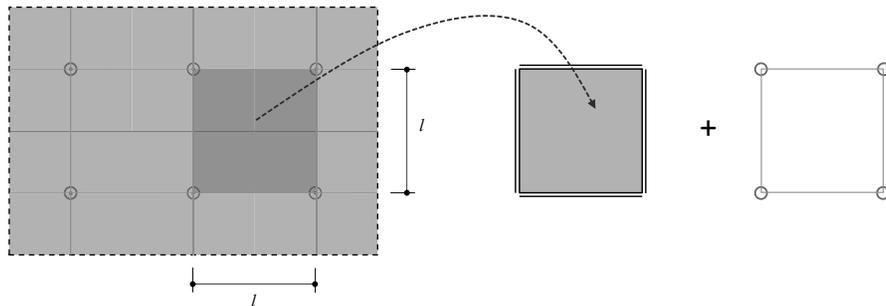
Bei Verwendung von computergestützten Berechnungsverfahren wird meist auf die Methode der Finiten Elemente zurückgegriffen, welche ein kontinuierliches System abschnittsweise in diskrete Systeme überführt, die aus einer endlichen Anzahl Knoten bestehen. Die diskreten Spannungs-, Verzerrungs- und Lastgrössen existieren nur in den Knotenpunkten, dazwischen wird mit angenommenen kinematischen Ansatzfunktionen interpoliert. Üblicherweise wird ein Vorgehen auf Basis von Verformungsansätzen verwendet, wobei die Gleichgewichtsbedingungen nur in den Knoten streng erfüllt ist. Die Verwendung von Ansatzfunktionen reduziert die Anzahl Freiheitsgrade; für die Durchbiegungen werden dabei schon für wenige Freiheitsgrade gute Näherungslösungen erreicht. Vorsicht ist stets bei den Momenten und insbesondere den Querkräften geboten, da diese aus der Ableitung der Durchbiegungen ermittelt werden und somit die Genauigkeit der Lösung abnimmt. Insbesondere bei der Lagerung und den Diskontinuitäten (z.B. Punktstützen, einspringende Ecken, Änderung der Plattendicke, Unterzüge etc.) muss auf eine korrekte Modellbildung und Interpretation geachtet werden; man sollte berücksichtigen, dass die FE-Methode auf einschneidenden Annahmen, wie bspw. der Vernachlässigung der Rissbildung oder der Annahme eines initial spannungsfreien Zustands, basiert. Die Ergebnisse einer FE-Berechnung sind

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: «Trägerrost in Stützenachsen»

Ausgangslage: Flachdecke mit in quadratischem Raster angeordneten Stützen.

- Modellierung als Aneinanderreihung einfach gelagerter Quadratplatten und Lastabtrag nach Streifenmethode
- Lastabtragung der «Auflagerreaktionen» über fiktive Trägerroste zu den Stützen
- Durchlaufwirkung wird hier vernachlässigt, kann aber durch nachträgliche Momentenumlagerung (in Richtung der betrachteten Streifen) berücksichtigt werden



Auf dieser und den nächsten beiden Folien wird ein Modell für Flachdecken untersucht, anhand dessen der Lastabtrag, basierend auf der Streifenmethode, anschaulich dargestellt werden kann. Dieses Modell dient als Grundlage für die Methode der stellvertretenden Rahmen.

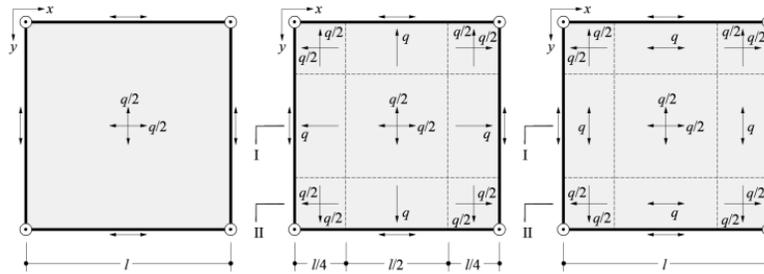
Bei einer regelmässig gestützten Flachdecke mit weiter Ausdehnung können die Felder zwischen den Stützenachsen als Aneinanderreihung einfach gelagerter Quadratplatten angesehen werden. Der Lastabtrag zu den Auflagern wird in einem ersten Schritt mittels der Streifenmethode ermittelt.

Die Auflagerreaktionen werden im zweiten Schritt als Einwirkung an die fiktiven Trägerroste abgegeben, welche die Lasten schliesslich zu den Stützen abtragen. Die Durchlaufwirkung der Platte zwischen den Feldern wird hier zunächst vernachlässigt, kann aber durch nachträgliche Momentenumlagerung berücksichtigt werden.

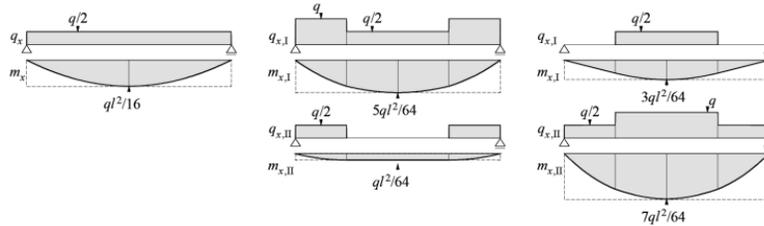
# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: «Trägerrost in Stützenachsen»

Einfach gelagerte Quadratplatte: Mögliche Lastaufteilungen



Belastung und Beanspruchung der Platte nach dem Prinzip der einfachen Streifenmethode



Für den Lastabtrag innerhalb der einfach gelagerten Quadratplatte sind viele verschiedene Lösungen nach der Streifenmethode möglich.

Gut geeignet ist hier die rechte Variante, welche entlang der Auflager die Lasten nicht zum geometrisch näheren Auflagerrand, sondern direkt zur Stütze abträgt. Somit wird der Trägerrost entlastet, indem die Einflussbreite der Lastabtragung in den Stützenachsen vergrößert wird. Die Momentenbeanspruchung in den Plattenstreifen entlang der Trägerroste ist deshalb viel grösser als bei den anderen beiden Lösungen (→ siehe Methode der stellvertretenden Rahmen).

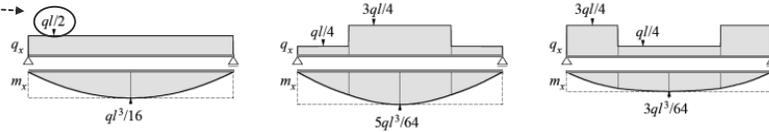
# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: «Trägerrost in Stützenachsen»

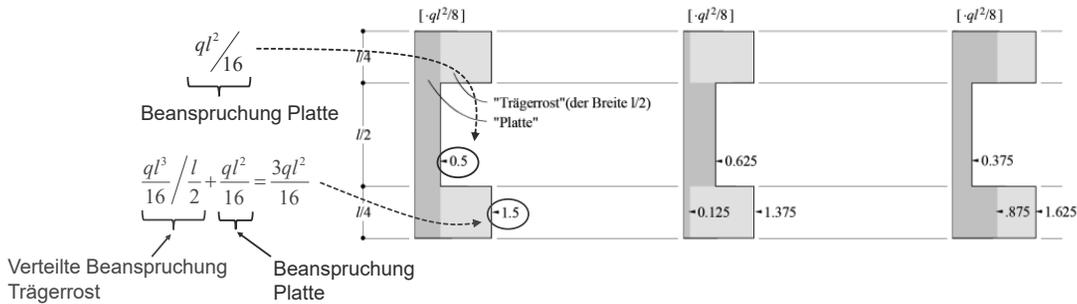
«Auflagerreaktionen» der Platte als Belastung des Trägerrostes

Auflagerreaktionen beider angrenzender Quadratplatten:

$$2 \cdot \frac{ql}{4} = \frac{ql}{2}$$



Verteilung der Beanspruchung des Trägerrostes auf eine Plattenbreite von  $l/2$   
Abgebildet ist die Beanspruchung in x-Richtung in Feldmitte



Die «Auflagerreaktionen» der Quadratplatte gemäss den drei Lastabtragungen der vorhergehenden Folie wird nun auf den Trägerrost als Belastung aufgebracht. Es ist zu beachten, dass die Aneinanderreihung von zwei Platten auch zur Verdopplung der Lagerreaktion resp. Belastung führt.

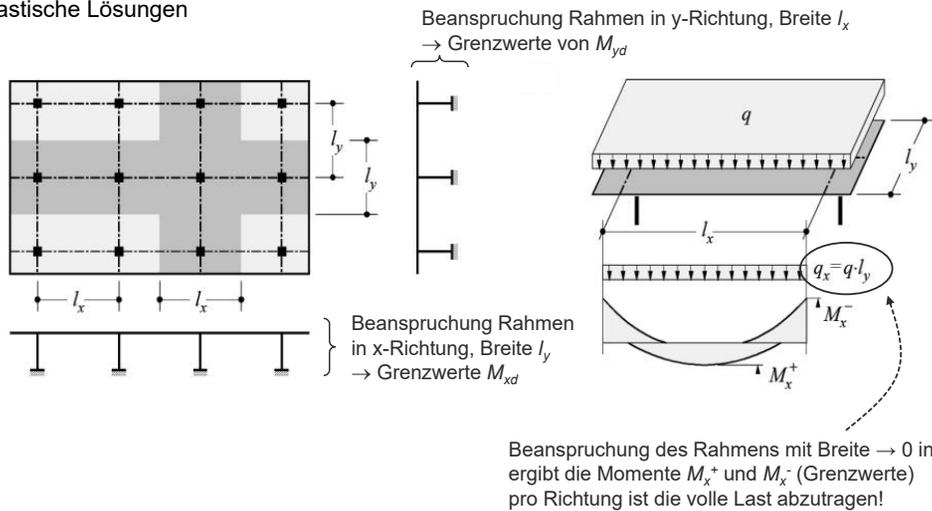
Bei der rechten Variante erkennt man den Vorteil der direkten Lastabtragung zur Stütze entlang der Plattenränder, da in Feldmitte des Trägerrostes nun die Belastungen auch viel kleiner sind. Die Beanspruchung des Trägerrostes wird auf eine Plattenbreite von  $l/2$  verteilt.

Die untere Abbildung zeigt die Beanspruchung in x-Richtung in Feldmitte. Es ist ersichtlich, dass durch die Superposition der Plattenwirkung mit dem Trägerrost die Beanspruchung in den Stützenachsen am grössten ist; dafür ist das Moment in der Mitte der Quadratplatte reduziert. Die Querverteilung der Momente variiert je nach Einteilung des Lastabtrags der Quadratplatte. Integration der Momente in Feldmitte über die Plattenbreite liefert in jedem Fall das Ergebnis  $\int m_x dy = \int m_y dx = ql^2/8$ ; in x- und y-Richtung wird also jeweils die volle Belastung  $q$  abgetragen.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: Stellvertretende Rahmen

Vorgehen ähnlich wie beim «Trägerrost in Stützenachsen», jedoch unter Berücksichtigung einer Durchlaufwirkung und in Anlehnung an elastische Lösungen



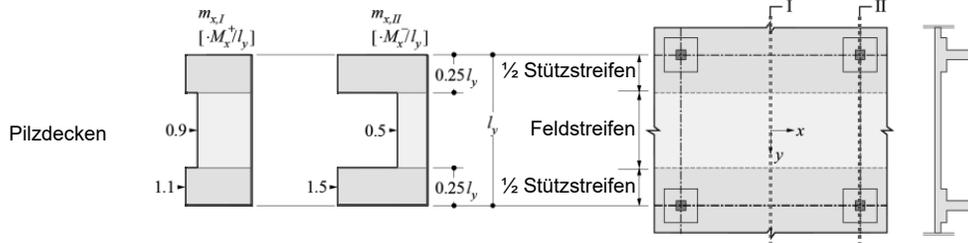
Im Gegensatz zum «Trägerrost in Stützenachsen» wird bei den stellvertretenden Rahmen die Durchlaufträgerwirkung explizit mitberücksichtigt. Es können beliebige Lastfallkombinationen untersucht werden, aus denen die massgebende Grenzlinie der Momente bestimmt wird.

Die Schnittkräfte werden auf einem Streifen der Breite  $l_y$  in x-Richtung bzw.  $l_x$  in y-Richtung bestimmt. Entsprechend ihrer Steifigkeit können den Stützen Momente zugewiesen sowie allenfalls vorhandene (Rand-)unterzüge wahlweise als torsionssteife Elemente modelliert werden; Stützen und Unterzüge sind dann natürlich für die entsprechenden Schnittgrössenkombinationen zu bemessen.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: Stellvertretende Rahmen

Verteilung der Momente  $M_x^+$  und  $M_x^-$  über die Breite  $l_y$ . Die Verteilzahlen sind in Anlehnung an elastische Lösungen festgelegt.



Bsp.: Moment in Feldmitte in x-Richtung zwischen den Stützen:  $m_{x,I} = 0.9 \cdot \frac{M_x^+}{l_y}$   
 über und neben den Stützen:  $m_{x,II} = 1.1 \cdot \frac{M_x^+}{l_y}$

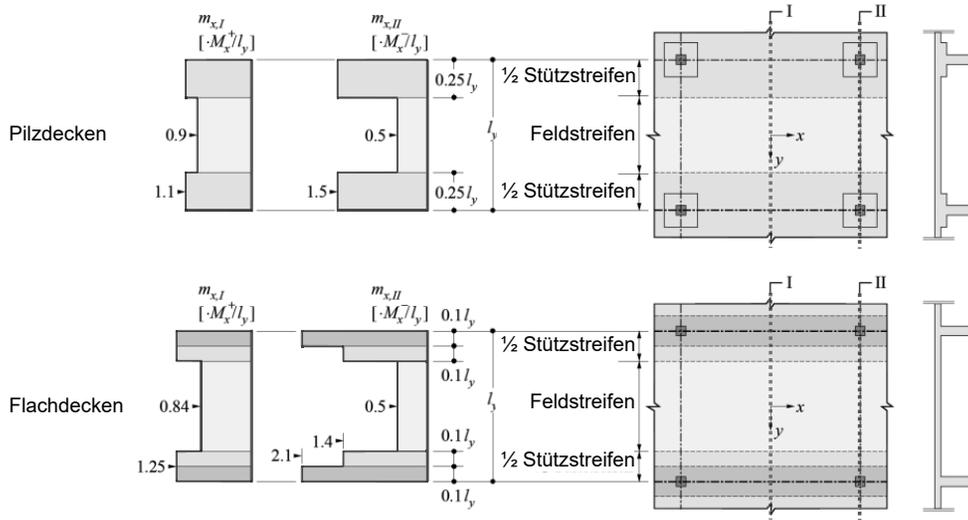
In y-Richtung analoges Vorgehen (Verteilung  $M_y^+$  und  $M_y^-$  über die Breite  $l_x$ )

Die proportionale Verteilung der Momente sowie die Gurtbreite werden in Anlehnung an die elastische Lösung bestimmt. Wie bei der Methode «Trägerrost in Stützenachsen» gezeigt wurde, muss – da die Platte punktgestützt ist – gesamthaft die ganze Last jeweils in beide Richtungen abtragen. Der Kraftfluss an sich wird jedoch nicht im Detail untersucht, deshalb liegt hier im Allgemeinen kein strenger unterer Grenzwert vor. Jedoch genügt das Verfahren als grobe Näherung einer globalen Gleichgewichtslösung.

# Platten – Gleichgewichtslösungen

## Flachdecken: Stellvertretende Rahmen

Unterschiedliche Verteilzahlen für Pilz- und Flachdecken



Für Pilzdecken mit Stützenkopfverstärkungen und für Flachdecken resultieren aufgrund der verschiedenen Steifigkeiten innerhalb der Platte unterschiedliche Querverteilungen der Momente.