Platten - Grundlagen

Platten - Grundlagen

Flächentragwerke allgemein

Flächentragwerke lassen sich in folgende Kategorien einordnen, wobei diese nach Tragwirkung und geometrischer Form charakterisiert werden:

Platten tragen primär senkrecht zu ihrer Ebene wirkende Lasten ab. Somit herrscht hauptsächlich ein Biegezustand mit Biege- und Drillmomenten sowie Querkräften vor. Der Membranspannungszustand mit Scheibenkräften ist vernachlässigbar. Platten sind das häufigste Konstruktionselement im Hochbau, kommen aber auch sonst oft vor: Fahrbahnplatten von Brücken, Wände/Deckel/Bodenplatten von Tagbautunnels etc.

Scheiben tragen primär in ihrer Ebene wirkende Lasten ab. Der Membranspannungszustand ist vorherrschend, während der Biegezustand vernachlässigbar ist. Typische Beispiele sind Wände im Hochbau (Abtrag von Vertikalkräften und ggf. Schubkräften in der Wandebene bei aussteifenden Wänden) sowie Stege von Trägern (Abtrag der Querkraft durch Kräfte in Scheibenebene).

Flächentragwerke mit einfach oder doppelt gekrümmter Mittelebene werden als Schalen (*shells*) bezeichnet. Sie erlauben beispielsweise die Abtragung von vertikal wirkenden Lasten, bspw. des Eigengewichts, über reine Druckmembrankräfte, sofern die Form des Tragwerks der umgedrehten Kettenlinie entspricht. Man spricht dann von Schalen- oder Gewölbewirkung. Links unten sind Betonschalen von Heinz Isler (Autobahnraststätte Deitingen) abgebildet, deren Geometrie experimentell aus hängenden Tüchern ermittelt wurde. Diese «natürliche» Form erlaubt die Überspannung von rund 30 m bei einer Schalendicke von nur 10 cm.

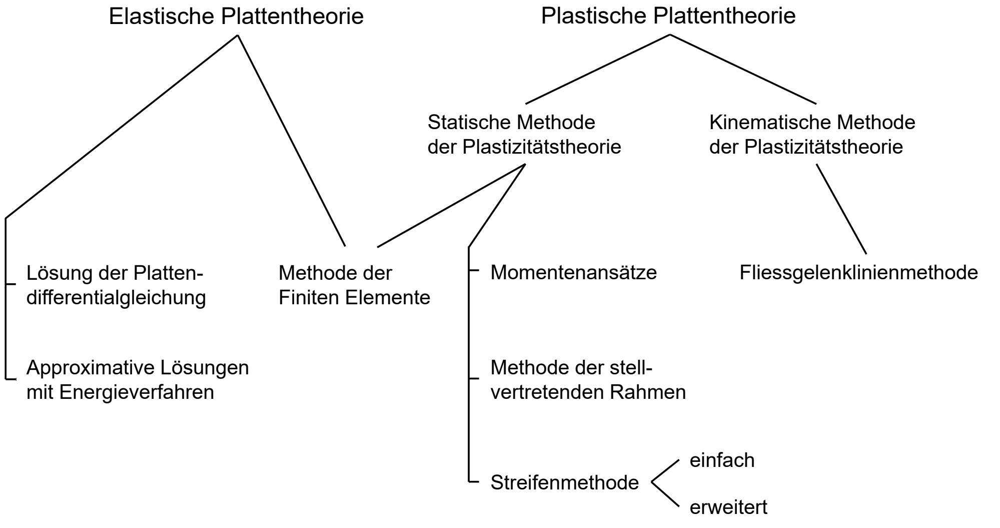
Faltwerke sind aus mehreren Teilflächen aufgebaut, welche jeweils an ihren Kanten miteinander verbunden sind.

Ergänzende Bemerkung

- Die Scheibentragwirkung (Membrankräfte) ist in der Regel wesentlich steifer als die Plattentragwirkung (Biegung), weshalb beispielsweise bei der Berechnung von Gebäudekernen nur die Scheibentragwirkung der Wände berücksichtigt wird.
- Weiterführende Angaben zu Schalen siehe Vorlesung Flächentragwerke (Masterstudium).

Platten - Grundlagen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden - Übersicht



In diesem Kapitel wird die Traglast dünner Platten mit kleinen Durchbiegungen untersucht. Dabei wird ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt, ohne auf Fragen des Verformungsbedarfes und des Verformungsvermögens näher einzugehen. Da Platten in der Regel eher schwach bewehrt sind, besteht diesbezüglich gewöhnlich wenig Anlass zu Bedenken.

Platten sind die am weitesten verbreitete Anwendung der Stahlbetonbauweise. Ihrer Bedeutung entsprechend werden sie in diesem Kapitel eingehend behandelt. Zunächst werden die grundlegenden statischen Beziehungen aufgestellt, aus denen schliesslich die Fliessbedingungen hergeleitet werden können.

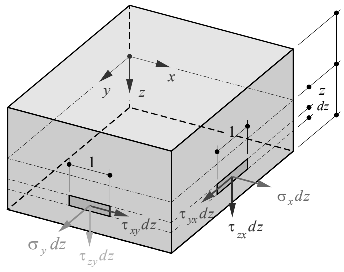
In der Praxis werden heutzutage für die Ermittlung der Beanspruchung meist numerische Verfahren, insbesondere die Methode der finiten Elemente, angewendet. Für Plausibilitätskontrollen eignen sich entsprechende Näherungsverfahren wie bspw. die Methode der stellvertretenden Rahmen.

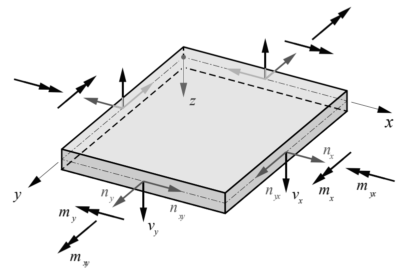
In der plastischen Plattentheorie werden zur Ermittlung der Traglast statische und kinematische Berechnungsmethoden verwendet.

Für die Bemessung wird meist nur der Biegezustand der Platte betrachtet. Der Einfluss der Querkräfte wird normalerweise nur bei konzentrierten Kräften und Stützen massgebend (Durchstanzen).

Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsresultierende





$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\,dz \quad [\text{kNm/m=kN}]$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}\,dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\,dz \quad [\text{kN/m}]$$

Biegespannungs-zustand (Platte): Biegemomente und Querkräfte

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\,dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y\,dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\,dz \quad [\text{kN/m}]$$

Membranspannungs-zustand (Scheibe): Membrankräfte (Normal- /Schubkräfte)

Die in den Schnittflächen eines Plattenelementes angreifenden Spannungen können zu Spannungsresultierenden gemäss der Abbildung zusammengefasst werden.

Die Biege- und Drillmomente sowie die Querkräfte bilden den Biegespannungszustand; die Membrankräfte den Membranspannungszustand. Im folgenden werden primär senkrecht zur ihrer Mittelfläche beanspruchte Platten betrachtet, in welchen ein Biegespannungszustand vorherrscht. Membrankräfte können deshalb vorerst ausser acht gelassen werden.

NB: Analog der Balkentheorie wird $\sigma_z = \sigma_3$ vernachlässigt. In jeder Ebene z = const. herrscht somit ein ebener Spannungszustand.

NB: Englische Ausdrücke («~~drilling~~»)

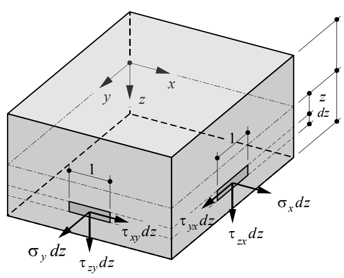
- Biegemoment: bending moment
  Drillmoment: twisting moment (auch: torsional moment)
  (Platten-)Querkraft: out of plane shear force

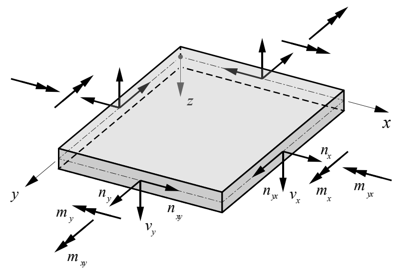
  Membrannormalkraft: (in-plane) normal force
  Membranschubkraft: in-plane shear force

  Biegung: bending
  Drillung: torsion

Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsresultierende





$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz\,, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz\,, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\,dz$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}\,dz\,, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\,dz$$

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\,dz\,, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y\,dz\,, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\,dz$$

Vorzeichenkonvention

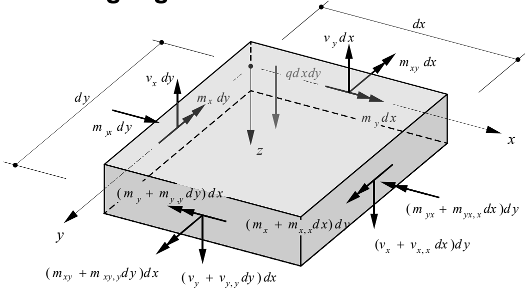
- Positive Spannungen wirken an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Achsenrichtung
- Positive Membran- und Querkräfte entsprechen positiven zugehörigen Spannungen
- Positive Momente entsprechen positiven zugehörigen Spannungen für z > 0
- Indizes: 1. Index: Richtung der Spannung
  2. Index: Normalenrichtung des Elements, an dem Spannung wirkt

Für Spannungen und Spannungsresultierende werden die in der Abbildung illustrierten Vorzeichenkonventionen verwendet. Danach wirken positive Spannungen an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Koordinatenrichtung; für Normalspannungen bedeutet dies, dass Zugspannungen positiv sind. Positive Membran- und Querkräfte entsprechen positiven Spannungen, und positive Momente entsprechen positiven Spannungen nach obenstehender Definition für positive Werte der Koordinate *z*. Bei doppelten Indizes steht jeweils der erste Index für die Richtung, in welcher die Spannung wirkt, während der zweite Index die Normalenrichtung des Flächenelementes bezeichnet, an welchem die Spannung angreift (sind beide Indizes identisch, wird einer weggelassen).

Platten – Statische Beziehungen

Platten – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen – kartesische Koordinaten



→ Plattengleichgewichtsbedingung:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}}_{\text{Balken in x-Richtung}} + \underbrace{2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}}_{\text{zusätzlich: Drillmomente}} + \underbrace{\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}}_{\text{Balken in y-Richtung}} + q = 0}$$

Herleitung über Gleichgewicht am differentiellen Plattenelement:

$$-v_x\,dy - v_y\,dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)dx + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx\right)dy + q\,dxdy = 0 \;\longrightarrow\; \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0$$

$$-m_x\,dy - m_{xy}\,dx + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy\right)dx - v_x dydx = 0 \;\longrightarrow\; \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

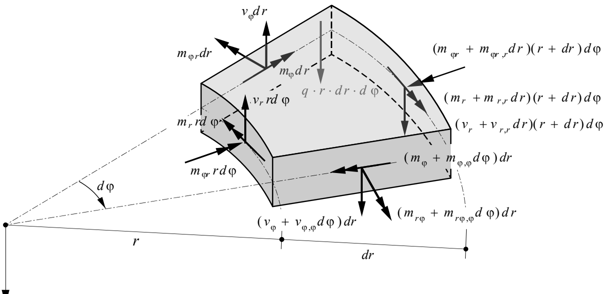
$$-m_y\,dx - m_{yx}\,dy + \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y}dy\right)dx + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}dx\right)dy - v_y dxdy = 0 \;\longrightarrow\; \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} - v_y = 0$$

Terme mit *(dx)*² bzw. *(dy)*² vernachlässigt

Das Gleichgewicht der angreifenden Kräfte und Momente am Plattenelement führt zu drei Gleichungen. Durch Einsetzen der zweiten und dritten Gleichung in die erste ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung für Platten in kartesischen Koordinaten.

Platten – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen – Zylinderkoordinaten



$$\boxed{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rm_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial m_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 (rm_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} + q = 0}$$

Herleitung über Gleichgewicht am differentiellen Plattenelement:

$$\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + qr = 0$$

$$\frac{\partial (rm_r)}{\partial r} - m_\varphi + \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi} - rv_r = 0$$

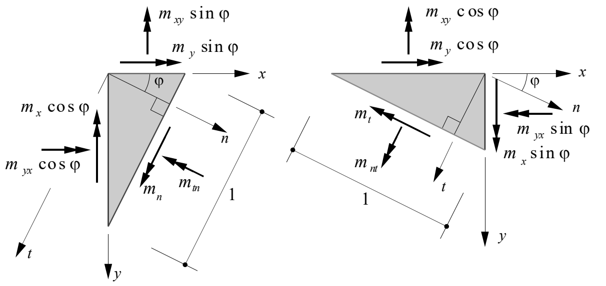
$$2m_{r\varphi} + r \cdot \frac{\partial (m_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} - rv_\varphi = 0$$

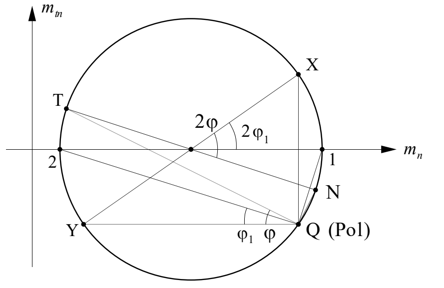
Bzw. für rotationssymmetrische Fälle: $\boxed{\frac{\partial^2 (rm_r)}{\partial r^2} - \frac{\partial m_\varphi}{\partial r} + qr = 0}$

Bei rotationssymmetrischen Platten (Geometrie und Belastung) verschwinden die Drillmomente $m_{r\varphi} = m_{\varphi r}$ und die Querkräfte v_φ; alle Grössen sind zudem definitionsgemäss unabhängig vom Winkel φ.

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Biege- und Drillmomente





Biege- und Drillmomente in einer beliebigen Richtung φ:

$$m_n = m_x \cos^2\varphi + m_y \sin^2\varphi + m_{xy} \sin 2\varphi$$

$$m_t = m_x \sin^2\varphi + m_y \cos^2\varphi - m_{xy} \sin 2\varphi$$

$$m_{tn} = \left(m_y - m_x\right)\sin\varphi\cos\varphi + m_{xy}\cos 2\varphi$$

NB: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,\ \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

Hauptrichtung φ_1 (Drillmomente = 0) und Hauptmomente (→ Mohr'scher Kreis):

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}$$

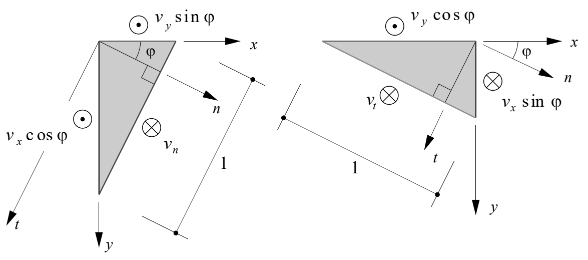
$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(m_x - m_y\right)^2 + 4m_{xy}^2}}{2}$$

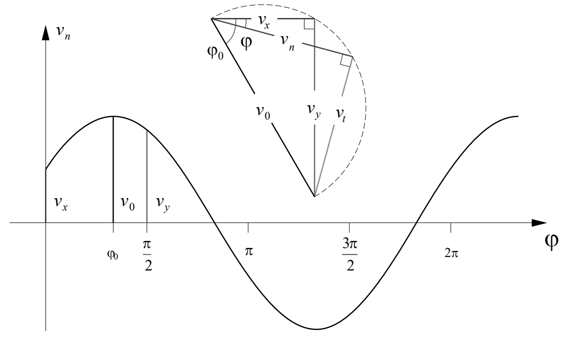
Das Momentengleichgewicht an den in der Abbildung dargestellten Plattenelementen führt zu Beziehungen, welche als Transformationsformeln für Biege- und Drillmomente dienen. Es können beliebige Schnitte mit der Normalen *n*, deren Richtung durch den Winkel φ festgelegt ist, betrachtet werden. Sie lassen sich mithilfe eines Mohr'schen Kreises darstellen; Drillmomente werden hier (nur für die Konstruktion des Mohr'schen Kreises) positiv gerechnet, wenn der ihnen entsprechende positive (rechtsdrehende) Momentenpfeil in Richtung des betrachteten Schnittrandes weist.

Die Hauptrichtung, für welche die Drillmomente verschwinden, $m_{tn} = 0$, sowie die zugehörigen Hauptmomente m_1 und m_2 in den entsprechenden Richtungen können sowohl grafisch im Mohr'schen Kreis als auch analytisch bestimmt werden.

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Querkräfte





Querkräfte in einer beliebigen Richtung φ:

$$v_n = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi$$

$$v_t = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$$

Hauptquerkraft und zugehörige Richtung φ_0
(Interpretation mit Thaleskreis):

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{v_y}{v_x}$$

(allgemein ist $\varphi_0 \neq \varphi_1$)

Analog zu den Momenten kann auch das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte an den abgebildeten Plattenelement aufgestellt werden. Dies führt zu Transformationsregeln für Querkräfte an einem beliebigen Schnitt mit der Normalen *n*, deren Richtung durch den Winkel φ festgelegt ist. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich mithilfe eines Thaleskreises deuten. An jeder Stelle der Platte wird eine Hauptquerkraft v_0 in Richtung φ_0 übertragen. Senkrecht zu dieser Richtung wird keine Querkraft abgetragen. Die Hauptrichtungen der Querkräfte und der Momente fallen nur in Spezialfällen zusammen, allgemein ist $\varphi_0 \neq \varphi_1$.

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen allgemein (elastische Platten)

Am Rand einer Platte greifen allgemein Momente m_n, m_{tn} und eine Querkraft v_n an.

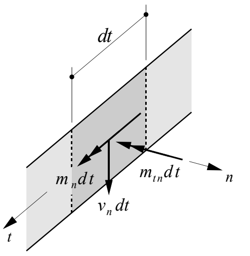
Inhomogene Bipotentialgleichung gemäss Kirchhoffscher Theorie dünner elastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta\Delta w = \frac{q}{D} \qquad mit \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}}$$

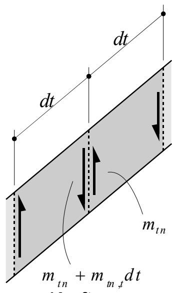
→ dabei sind nur 2 Randbedingungen an die Lösung anpassbar
→ jedoch 3 Kraftgrössen vorhanden (m_n, m_{tn}, v_n)
→ zusätzliche Bedingung erforderlich

Weitere Bedingung für einfach gelagerte und freie Plattenränder:

→ Ersetzen der Drillmomente $m_{tn} \cdot dt$ durch stetige Verteilung von vertikalen Kräftepaaren m_{tn}, welche sich an den Grenzen zwischen den infinitesimalen Elementen jeweils bis auf den Zuwachs $m_{tn,t} \cdot dt$ aufheben



Kräfte am Plattenrand



Kräftepaare

Am Rand einer Platte greifen allgemein ein Biegemoment m_n, ein Drillmoment m_{tn} und eine Querkraft v_n an. Nach Kirchhoff erhält man für dünne elastische Platten mit kleinen Durchbiegungen eine inhomogene Bipotentialgleichung für die Durchbiegungen der Platte, deren Lösungen sich nur zwei Randbedingungen anpassen lassen. Deshalb wird bei der Behandlung von einfach gelagerten und freien Plattenrändern eine weitere Bedingung eingeführt. Die Drillmomente m_{tn} werden dabei durch eine stetige Verteilung von vertikalen Kräftepaaren ersetzt, wobei sich an den Grenzen zwischen den infinitesimalen Elementen der Länge dt die Kräfte bis auf den Zuwachs $m_{tn,t}\, dt$ aufheben.

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen allgemein (elastische Platten)

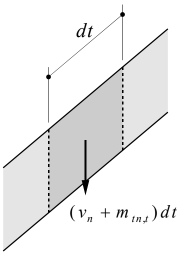
$\rightarrow$ Zuwachs pro Längeneinheit dm_{tn} / dt wird mit der Querkraft v_n zu einer Stützkraft zusammengefasst

$$\boxed{v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t}}$$

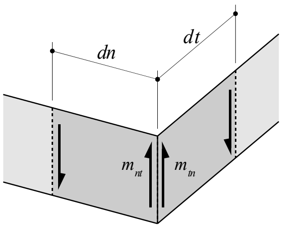
(Herleitung mit Gleichgewichtsbeziehung $\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$)

$\rightarrow$ In einer Plattenecke addieren sich die Drillmomente der beiden Ränder zu einer Eckkraft von 2 m_{tn}

Diese Behandlung von Drillmomenten am Plattenrand geht auf Thomson und Tait (1883) zurück und lässt sich mit dem Prinzip von de Saint Venant «begründen».



Stützkraft



Eckkraft

Der Zuwachs pro Längeneinheit $m_{tn,t}$ wird nun mit der Querkraft v_n zu einer Stützkraft $v_n+m_{tn,\mathrm{t}}$ = $m_{n,n}+2m_{nt,t}$ zusammengefasst. Die beschriebene Behandlung von Drillmomenten am Plattenrand geht auf Thomson und Tait (1883) zurück und lässt sich mit dem Prinzip von de Saint Venant begründen.

Platten – Randbedingungen

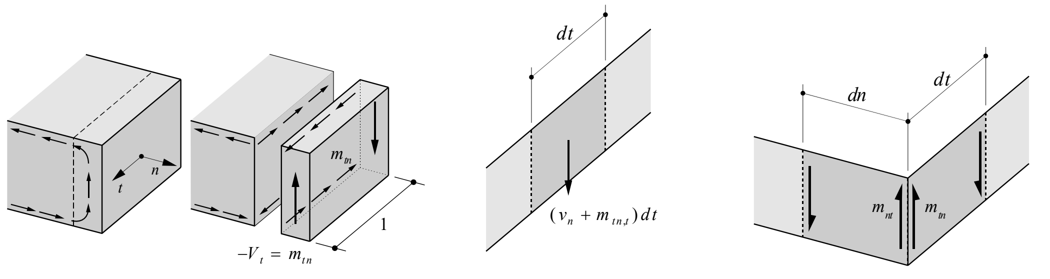
Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

Statische Methode der Plastizitätstheorie – Erklärung mit Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern, welche nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruht:

→ Aus Gleichgewicht in einer schmalen Randzone der Platte folgt die Randquerkraft: $V_t = -m_{tn}$

→ *sofern*: Plattenrand ist spannungsfrei und die in der Randzone auftretenden Spannungen σ_t ändern sich nicht in t-Richtung (Clyde, 1979).

→ Aus der Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$ folgen die Eckkräfte 2 m_{tn} und der Beitrag von $m_{tn,t}$ zur Stützkraft



Querkraft in Randzone *Stützkraft* *Eckkraft*

Aus der Sicht der statischen Methode der Plastizitätstheorie ist jedoch eine Erklärung der Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern vorzuziehen, welche nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruht. Dies ist in der Abbildung illustriert. In einer schmalen Randzone der Platte muss aus Gleichgewichtsgründen eine Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$ existieren, sofern der Plattenrand spannungsfrei ist und die in der Randzone auftretenden Spannungen σ_t sich in *t*-Richtung nicht ändern. Aus der Existenz der Randquerkräfte V_t folgen die Eckkräfte $2m_{tn}$ und der Beitrag $m_{tn,t}$ der Drillmomente zur Stützkraft.

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

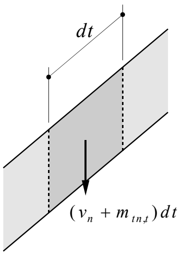
→ Randbedingungen auf Basis von Gleichgewichtsüberlegungen:

- eingespannter Rand: m_n, m_{tn} und v_n beliebig
- einfach gelagerter Rand: m_n = 0, resultierende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$$

- freier Rand: m_n = 0, verschwindende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$$



Stützkraft

Die entsprechenden Randbedingungen lassen sich wie in der Abbildung angegeben zusammenfassen. Diese folgen aus reinen Gleichgewichtsbetrachtungen und sind somit für beliebiges Materialverhalten gültig. Für dünne elastische Platten können strengere Randbedingungen formuliert werden, welche jedoch für die Behandlung nach der Plastizitätstheorie nicht relevant sind.

Platten – Randbedingungen

Randbewehrung

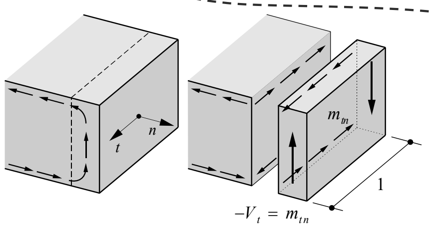
Werden entlang von einfach gelagerten und freien Rändern Drillmomente in Rechnung gestellt, so ist eine Bewehrung zur Aufnahme von $V_t = -m_{tn}$ anzuordnen.

Veranschaulichung (Ecke, reine Drillung):

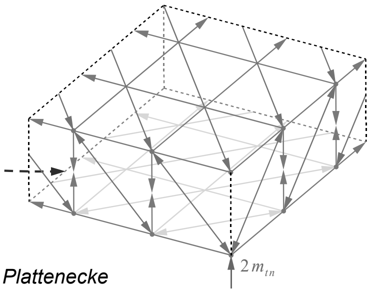
→ Ober- und Unterseite: zueinander senkrechte, unter 45° zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben, Aufnahme der randnormalen Komponenten durch randparallele Bewehrung

→ Komponenten in Richtung der Plattenränder werden durch geneigte Betondruckstreben in den Randstreifen weitergeleitet; Vertikalkomponenten entsprechen den Randquerkräften $V_t = -m_{tn}$

→ Aufnahme von $\underbrace{V_t = -m_{tn}}$ mit Steckbügeln oder entsprechender Abbiegung der Biegebewehrung



Querkraft in Randzone



Kraftfluss in Plattenecke

Die Randquerkräfte sind bei der Ausbildung der Bewehrung entlang von einfach gelagerten und freien Rändern von Stahlbetonplatten zu berücksichtigen. Die Abbildung zeigt den Kraftfluss einer auf reine Drillung beanspruchten Rechteckplatte, welcher mit einem Fachwerkmodell dargestellt werden kann.

An der Plattenoberseite und an der Plattenunterseite bilden sich zueinander senkrechte, unter 45° zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben aus, deren Komponenten in Richtung der Randnormalen durch randparallele Bewehrung aufgenommen werden. Die Komponenten in Richtung der Plattenränder werden über geneigte Betondruckstreben in den Randstreifen weitergeleitet, deren Vertikalkomponente – welche den Randquerkräften entspricht – über eine Bewehrung aufgenommen werden muss. Diese kann mit Steckbügeln oder durch entsprechende Abbiegung der Biegebewehrung realisiert werden. Man erkennt auch, dass sich die Randquerkräfte in der Plattenecke nicht aufheben, sondern zu einer Eckkraft $2m_{nt}$ addieren.

Platten – Randbedingungen

Diskontinuitäten

Im Platteninnern sind statische Diskontinuitätslinien zulässig (↔ Äquivalenz von Drillmomenten am Plattenrand und Randquerkräften, man füge in Gedanken zwei freie Plattenränder zusammen).

An Diskontinuitätslinien

→ müssen Biegemomente m_n stetig sein ($m_n^+ = m_n^-$)

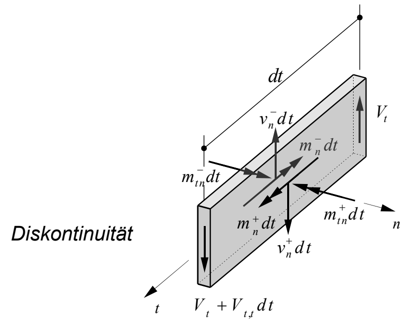
→ dürfen Drillmomente m_{nt} und Querkräfte v_n springen ($m_{nt}^+ \neq m_{nt}^-$, $v_n^+ \neq v_n^-$)

Somit gelten für eine statische Diskontinuitätslinie, entlang welcher eine Querkraft V_t abgetragen wird, folgende Bedingungen:

$$m_n^- = m_n^+$$

$$V_t = m_{nt}^+ - m_{nt}^-$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = v_n^- - v_n^+$$

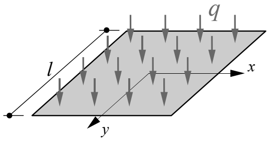


Fügt man in Gedanken zwei Platten an ihren freien Rändern zusammen (man beachte, dass Plattenränder Diskontinuitäten darstellen, an denen i.A. ein Biegemoment m_n, ein Drillmoment m_{tn} und eine Querkraft v_n angreift!), so kann aus der Äquivalenz von Drillmomenten am Plattenrand und Randquerkräften gemäss der Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$ darauf geschlossen werden, dass an statischen Diskontinuitätslinien im Platteninnern die Biegemomente m_n stetig verlaufen müssen, die Drillmomente m_{nt} und die Querkräfte v_n hingegen springen dürfen. Dabei müssen an einer statischen Diskontinuitätslinie, entlang welcher eine Querkraft V_t abgetragen wird, die Beziehungen gemäss der Abbildung erfüllt sein.

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 1 (Gleichgewichtslösung)

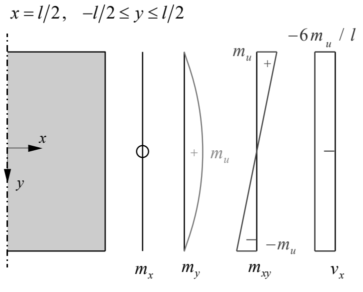
Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast q mit Ansätzen für Biegemomente m_x , m_y und Drillmoment m_{xy}



$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_u \qquad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_u \qquad m_{xy} = -\frac{4xy}{l^2} \cdot m_u$$

Gleichgewicht: $\dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \dfrac{24 m_u}{l^2}$

Gesucht: Schnittkraftverläufe am Plattenrand, Stützkraft, Eckkraft, Lagerung der Platte



Drillmoment entlang Plattenrand: $m_{xy} = -\dfrac{2y}{l} \cdot m_u$

Querkraft entlang Plattenrand:

aus $\dfrac{\partial m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$ folgt: $v_x = -\dfrac{8x}{l^2} \cdot m_u - \dfrac{4x}{l^2} \cdot m_u = -\dfrac{6}{l} \cdot m_u$

Stützkraft: $v_x + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\dfrac{6}{l} \cdot m_u - \dfrac{4x}{l^2} \cdot m_u = -\dfrac{8}{l} \cdot m_u$

Eckkraft: $-2 \cdot (-m_u) = 2 \cdot m_u$

Das erste Beispiel behandelt eine Quadratplatte mit Seitenlänge l unter einer gleichmässigen Flächenlast q. Die Ansätze für die Biegemomente m_x und m_y sowie das Drillmoment m_{xy} (welches entlang der Koordinatenachsen verschwindet) ergeben mithilfe der Gleichgewichtsbedingung für Platten die maximal aufnehmbare Last q_u.

Die Schnittkraftverläufe an den Plattenrändern folgen aus den gewählten Momentenansätzen; die Querkraft sowie die Stütz- und Eckkräfte werden aus den bereits hergeleiteten Gleichgewichtsbedingungen ermittelt.

Die Lösung basiert auf der statischen Methode der Plastizitätstheorie: das Gleichgewicht ist in jedem Punkt erfüllt und die Fliessbedingung nirgends verletzt; es wurden jedoch keine Verträglichkeitsbedingungen aufgestellt. Im Allgemeinen handelt sich hierbei somit um einen unteren Grenzwert der Traglast. Für das gezeigte Beispiel existieren verträgliche Bruchmechanismen, und es handelt sich somit im Rahmen der getroffenen Annahmen um vollständige Lösungen.

Ergänzende Bemerkung

- Dass die Fliessbedingung nirgends verletzt ist (unter Berücksichtigung der Drillmomente m_{xy}), kann mit der Normalmomenten-Fliessbedingung überprüft werden, siehe später.

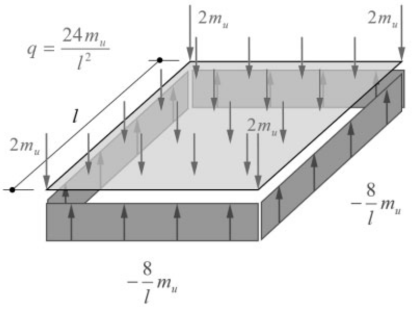
Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 1 (Gleichgewichtslösung)

Lagerung der Platte: Aus der konstanten Stützkraft folgt, dass die Platte entlang ihrer Ränder einfach gelagert sein muss. Die Ecken sind gegen Abheben gesichert (→ nach unten gerichtete Eckkräfte)

Stützkraft: $v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{8}{l} \cdot m_u$

Eckkraft: $2 \cdot m_u$



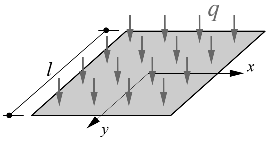
Aus der Grösse der Querkräfte senkrecht zum jeweiligen Plattenrand (q_x bei $x = \pm l / 2$ resp. q_y bei $y = \pm l / 2$) und den Drillmomenten ($m_{yx,y}$ bei $x = \pm l / 2$ resp. $m_{xy,x}$ bei $y = \pm l / 2$) resultiert die Stützkraft am Plattenrand. Aus der konstanten Stützkraft folgt, dass die Platte an den Rändern einfach gelagert sein muss.

Aus den Randquerkräften (Querkraft entlang Plattenrand, siehe vorhergehende Folie) folgen die Eckkräfte. Die nach unten gerichteten Eckkräfte bedeuten, dass die Ecken gegen Abheben gesichert sind.

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 2 (Gleichgewichtslösung)

Gegeben: Quadratplatte unter Flächenlast q mit Ansätzen für Biegemomente m_x, m_y und Drillmoment m_{xy}

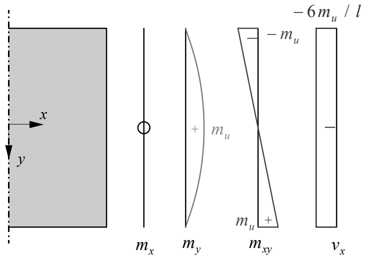


$$m_x = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \cdot m_u \qquad m_y = \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \cdot m_u \qquad m_{xy} = + \frac{4xy}{l^2} \cdot m_u$$

Gleichgewicht: $\dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad \rightarrow \quad q = \dfrac{8 m_u}{l^2}$

Gesucht: Schnittkraftverläufe am Plattenrand, Stützkraft, Eckkraft, Lagerung der Platte

$x = l/2, \quad -l/2 \leq y \leq l/2$



Drillmoment entlang Plattenrand: $m_{xy} = \dfrac{2y}{l} \cdot m_u$

Querkraft entlang Plattenrand:

aus $\dfrac{\partial m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$ folgt: $v_x = -\dfrac{8x}{l^2} \cdot m_u + \dfrac{4x}{l^2} \cdot m_u = -\dfrac{2}{l} \cdot m_u$

Stützkraft: $v_x + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\dfrac{2}{l} \cdot m_u + \dfrac{4x}{l^2} \cdot m_u = 0$

Eckkraft: $-2 \cdot (+m_u) = -2 \cdot m_u$

Das zweite Beispiel behandelt dieselbe Quadratplatte unter der Flächenlast q. Im Unterschied wird hier der Ansatz der Drillmomente mit umgekehrtem Vorzeichen definiert. Aus der Gleichgewichtsbedingung der Platte folgt damit eine drei Mal tiefere Traglast.

Auch hier können mithilfe der Momentenansätze die Querkraft, die Stützkräfte an den Plattenrändern sowie die Eckkraft bestimmt werden. Der Wechsel des Vorzeichens der Drillmomente reduziert die Querkräfte entlang der Plattenränder auf einen Drittel; die Stützkraft verschwindet somit.

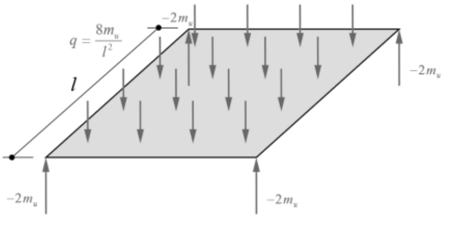
Platten – Randbedingungen

Randbedingungen – Beispiel 2 (Gleichgewichtslösung)

Lagerung der Platte: Aus der verschwindenden Stützkraft folgt, dass die Platte entlang ihrer Ränder frei und lediglich an den Ecken gestützt ist.

Stützkraft: $v_x + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$

Eckkraft: $-2 \cdot m_u$



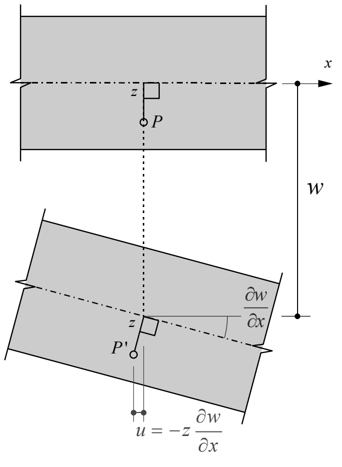
Die Stützkraft verschwindet entlang der Plattenränder; somit ist die Platte dort frei und lediglich an den Ecken gestützt (nach oben gerichtete, negative Eckkräfte = Reaktionen).

Platten –
Kinematische Beziehungen

Platten – Kinematische Beziehungen

Beziehungen für dünne Platten

Nach der Theorie von Kirchhoff über dünne Platten wird angenommen, dass die Normalen zur Plattenmittelebene während der Verformung gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben.



Verschiebungen: $u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ x - Richtung

$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$ y - Richtung

Verzerrungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \cdot \chi_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \cdot \chi_y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z \cdot \chi_{xy}$$

Krümmungen: $\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

Drillung: $\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

In der elastische Plattentheorie werden neben den Gleichgewichtsbedingungen auch die kinematischen Beziehungen benötigt, um die Verträglichkeitsbedingungen zu definieren.

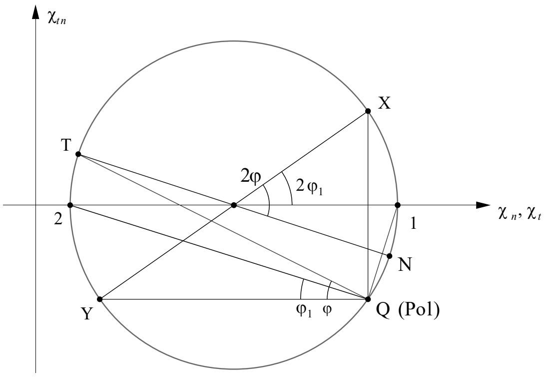
Nach der Theorie von Kirchhoff für dünne elastische Platten wird angenommen, dass die Normalen zur Plattenmittelebene während der Verformung gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben (analog Balkenbiegung, Annahme von Bernoulli/Navier).

Aus der Abbildung können jeweils die kinematischen Relationen der Verschiebungen in Abhängigkeit der Plattendurchbiegung *w* ermittelt werden. Daraus folgen die Verzerrungen ε_x, ε_y und γ_{xy} bzw. die Krümmungen χ_x, χ_y und die Drillung χ_{xy}.

Platten – Kinematische Beziehungen

Transformation der Krümmungen und Drillungen

Analog zur Transformation der Normal- und Schubspannungen



Aus den Beziehungen der Verzerrungen (ε_x, ε_y, γ_{xy}) ist ersichtlich, dass auch die Krümmungen (χ_x, χ_y, χ_{xy}) mit einem Mohrschen Kreis dargestellt werden können.

Im Allgemeinen ist die Mittelebene nicht verzerrungsfrei, sondern weist Verzerrungen (ε_{x0}, ε_{y0}, γ_{xy0}) auf, womit die Verformung eines Plattenelementes allgemein durch sechs kinematische Parameter (ε_{x0}, ε_{y0}, γ_{xy0}, χ_x, χ_y, χ_{xy}) festgelegt ist.

Elastische Platten

Elastische Platten

Annahmen der elastischen Plattentheorie

Die Theorie von Gustav Robert KIRCHHOFF für dünne Platten gründet auf folgenden Annahmen:

1. Die Plattendicke h ist konstant und klein gegenüber anderen Abmessungen.
   → Die Normalspannungen σ_z werden vernachlässigt. Die Spannungsverteilung in der Platte darf damit als eben und über h linear angenommen werden.

2. Die Normalen zur Plattenmittelebene bleiben gerade und senkrecht zur verformten Mittelebene.
   → Die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} verschwinden in der Folge (schubstarre Platten). Damit ist z eine Hauptrichtung.

3. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Plattenschichten wird als gelöst betrachtet.
   → Zusammen mit Annahme 2 entspricht dies den Grundannahmen der Balkentheorie.

4. Die Durchbiegungen w sind klein gegenüber h und unabhängig von z.
   → Das Gleichgewicht kann damit am unverformten System gebildet werden, es treten i.d.R. keine Membrankräfte auf. In Kombination mit Annahme 2 ergeben sich die kinematischen Beziehungen.

5. Der Werkstoff ist homogen, isotrop und linear elastisch.

(Erläuterungen siehe Folie)

Elastische Platten

Plattengleichung

Aus dem Stoffgesetz (linear elastisch, Hooke'sches Gesetz), den kinematischen Beziehungen sowie dem Gleichgewicht am infinitesimalen Element folgt die sogenannte Plattengleichung.

Hooke'sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand: $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y\right)$ $\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x\right)$ $\quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}$

Plattengleichung:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}}_{\text{Balken in x-Richtung}} + \underbrace{2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}}_{\text{Zusatz-term}} + \underbrace{\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}}_{\text{Balken in y-Richtung}} = \Delta\Delta w = \frac{q}{D} \qquad mit \qquad \underbrace{D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}}_{\text{Plattensteifigkeit}}}$$

Inhomogene Differentialgleichung 4. Ordnung (inhomogene Bipotentialgleichung)
→ 2 Randbedingungen anpassbar, jedoch 3 Grössen vorhanden (m_n, m_{nt} und v_t) → Stützkraft

- eingespannter Rand: m_n, m_{tn} und v_n beliebig
- einfach gelagerter Rand: m_n = 0, resultierende Stützkraft: $v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$
- freier Rand: m_n = 0, verschwindende Stützkraft: $v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$

Vergleiche Folie zu den Randbedingungen

Mithilfe des Hooke'schen Gesetzes können unter Berücksichtigung der Querdehnung die Normal- und Schubspannungen ermittelt werden. Durch Einsetzen der kinematischen Beziehungen in die Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich die bereits in Folie 11 vorgestellte Bipotentialgleichung der elastischen Platten.

D ist dabei die Plattensteifigkeit; bei Vernachlässigung der Querdehnung (ν = 0) ist sie gleich der Balkensteifigkeit EI = $Eh^3/12$ (pro Einheitsbreite). Die Platte ist selbst in den einzelnen Richtungen etwas steifer als der Balken, da nicht alle Fasern getrennt sind, sondern lediglich die horizontal liegenden Schichten (Einfluss der Querdehnungszahl).

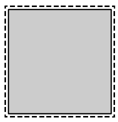
Die Randbedingungen ergeben sich gemäss der Überlegungen aus Folie 14.

Elastische Platten

Abschätzung der Durchbiegungen

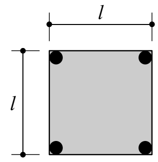
Die Durchbiegungen in Plattenmitte können als Vielfaches derjenigen des einfachen Balkens gleicher Spannweite abgeschätzt werden (nach Bachmann, 1991):

$$w = c \cdot \frac{5}{384}\frac{ql^4}{D} \qquad D = \frac{EI}{1-\nu^2} \qquad q = const.$$



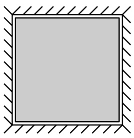
Einfach gelagerte Platte

c = 0.312



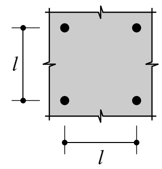
In den Ecken gestützte Platte

c = 2.25



Eingespannte Platte

c = 0.098



Mittelfeld einer unendlich ausgedehnten Flachdecke

c = 0.446

Zu beachten ist der Steifigkeitsabfall infolge Kriechen ($E_{c\infty} \approx E_{c0}/3$) und Rissbildung bzw. die Steifigkeitserhöhung infolge Zugversteifung und die kleineren Durchbiegungen bei Vorspannung

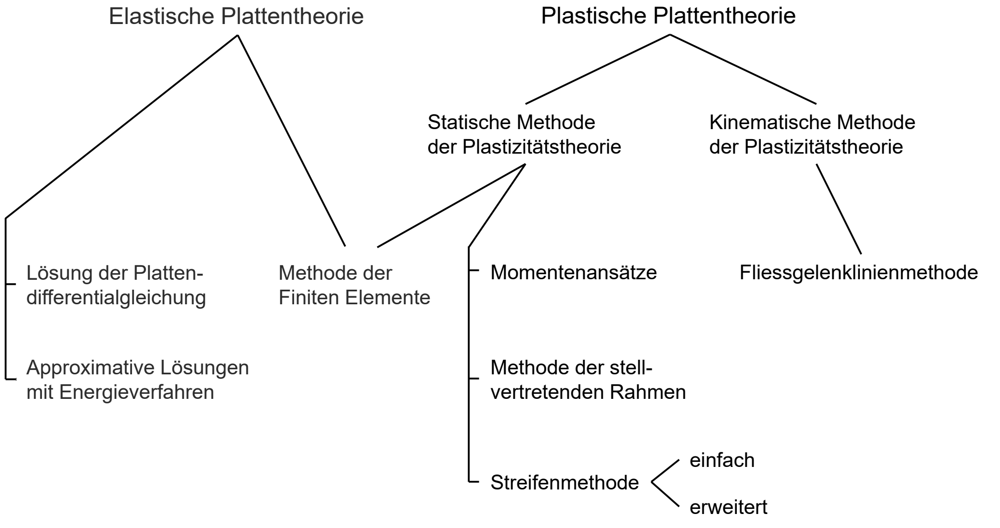
Bei Quadratplatten unter gleichmässiger Flächenlast q kann die Durchbiegung in Plattenmitte als Vielfaches derjenigen des einfachen Balkens gleicher Spannweite abgeschätzt werden.

Daraus ist auch der Einfluss der verschiedenen Lagerungsarten ersichtlich; bspw. weist eine eckgestützte Platte viel höhere Verformungen auf als eine einfach gelagerte.

Weiter zu beachten sind die Einflüsse auf die Steifigkeit infolge Kriechen und Rissbildung sowie Zugversteifung oder eine allfällige Vorspannung.

Elastische Platten

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden – Übersicht



Elastische Platten

Lösungsverfahren

- Direkte Lösung der Plattengleichung
  → für spezielle Problemstellungen möglich (z.B. rotationssymmetrische Platten)
  → Resultate sind in Literatur vorhanden und insbesondere für Abschätzungen und Plausibilitätskontrollen wertvoll

- Approximative Lösung der Plattengleichung mit Fourier-Reihenansätzen oder Energieverfahren
  → z.B. für Rechteckplatten mit unterschiedlichen Randbedingungen und Belastungsanordnungen

- Lösung der Plattengleichung mit der Methode der Finiten Elemente
  → Lösung der Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Element
  → beliebige Randbedingungen und Belastungen möglich
  → heute meistens verwendet

Die Lösung der Plattendifferentialgleichung ist nur in wenigen Fällen analytisch möglich (z.B. für rotationssymmetrische Fälle), nicht direkt anwendbar oder nur mit starken Vereinfachung (da es kaum rotationssymmetrische Probleme gibt; z.B. Durchstanztheorie basiert auf rotationssymmetrischen Annahmen – obschon orthogonal bewehrte Platten nicht wirklich rotationssymmetrisch sind). In der Literatur finden sich einige Ansätze zur Lösung verschiedener Probleme mit unterschiedlichen Geometrie und Randbedingungen; sie sind insbesondere für Abschätzungen und Plausibilitätskontrollen wertvoll.

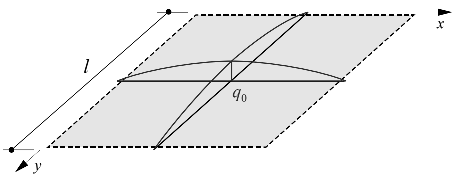
Andere Möglichkeiten bestehen in der Verwendung von Fourierreihen, um Gleichlasten/Randbedingungen anzunähern oder Energieverfahren nach Ritz und Galerkin.

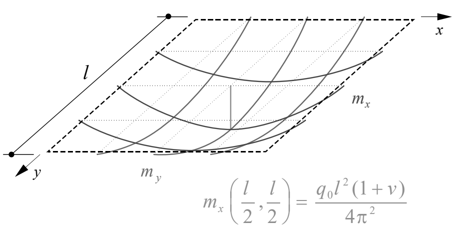
Aufgrund dessen werden in der Praxis meist computergestützte Berechnungen basierend auf der Methode der Finiten Elemente durchgeführt. Hierbei werden am infinitesimalen Element die Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen gelöst. Heutige Computer erlauben aufgrund der hohen Rechenkapazität eine angemessene Anzahl an Elementen, so dass beliebige Randbedingungen und Belastungen möglich sind. Aufgrund der hohen Dichte an Diskretisierungspunkten ist eine direkte rechnerische Überprüfung der FE-Methode schwierig; daher sind die Eingabedaten und die Resultate stets kritisch zu hinterfragen und mit vereinfachten Handrechnungen zu überprüfen.

Elastische Platten

Direkte Lösung der Plattendifferentialgleichung – Beispiel

Einfach gelagerte Quadratplatte unter sinusförmiger Flächenlast *q* (*x*,*y*) (Lsg. n. Navier) ν: Querdehnungszahl





Last: $q = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

Differentialgleichung: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta\Delta w = \frac{q}{D}$

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

Ansatz: $w = C \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

Randbedingungen: $w(0,y) = w(l,y) = w(x,0) = w(x,l) = 0$

$$m_x(0,y) = m_x(l,y) = m_y(x,0) = m_y(x,l) = 0$$

Lösung: $C = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D}$ $\quad w = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right)$

Das Beispiel zeigt eine einfach gelagerte Quadratplatte unter sinusförmiger Flächenlast.

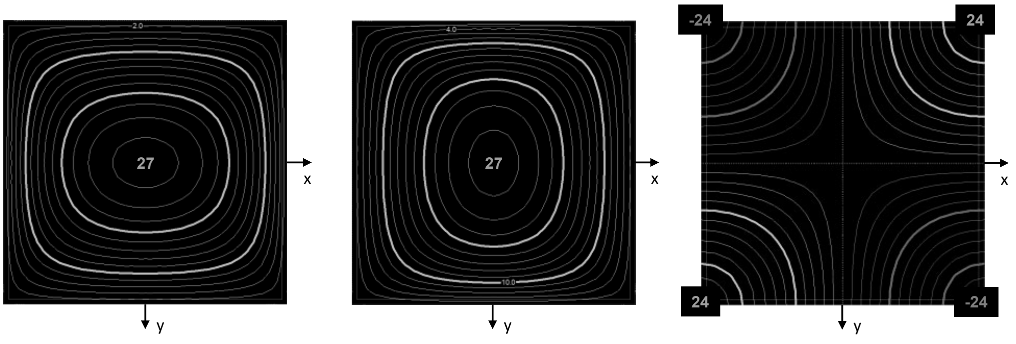
Der Ansatz für die Lösung der Bipotentialgleichung (von Navier vorgeschlagen) ist affin zur Belastung. Die Momentenverläufe können aus den zweiten Ableitungen der Durchbiegungen ermittelt werden. Die einfache Lagerung der Platte bedingt, dass jeweils die Durchbiegungen wie auch die Momente an den Rändern gleich null ist.

Daraus können die Durchbiegungen der Platte, und daraus die Beanspruchungen, ermittelt werden.

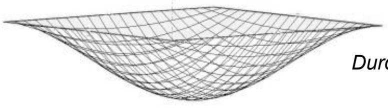
Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast (l = 10 m, h = 0.25 m)



m_x [kN] m_y [kN] m_{xy} [kN]



Durchbiegungen qualitativ und überhöht
$w_{max} = w(l/2, l/2) = 5.6$ mm

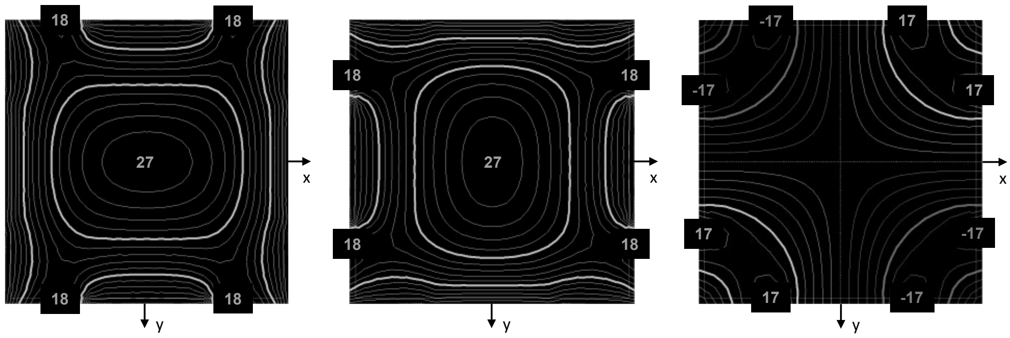
Die Lösung der Plattengleichung kann auch numerisch, mithilfe der Methode der Finiten Elemente angenähert werden. Bei genügend feiner Diskretisierung resultiert dabei die elastische Lösung.

In der Abbildung sind für eine umfanggelagerte Platte unter gleichmässiger Belastung die Biege- und Drillmomente m_x, m_y und m_{xy} als Isolinien und die (überhöhten) Durchbiegungen isometrisch dargestellt (Berechnung mit kommerzieller Software Cedrus-7 von Cubus AG). Die Durchbiegungen sind gemäss den Randbedingungen gleich null entlang der Plattenränder. Dies bedingt, dass die Ecken gegen Abheben gehalten sind, was auch an den Maxima der Drillmomente an eben jenen Orten ersichtlich ist.

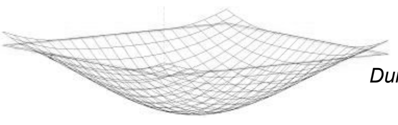
Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast (l = 10 m, h = 0.25 m) – ohne negative Stützkräfte (=Eckkräfte)



m_x [kN] *m_y [kN]* *m_{xy} [kN]*



Durchbiegungen qualitativ und überhöht
$w_{max} = w(l/2, l/2) = 6.6$ mm

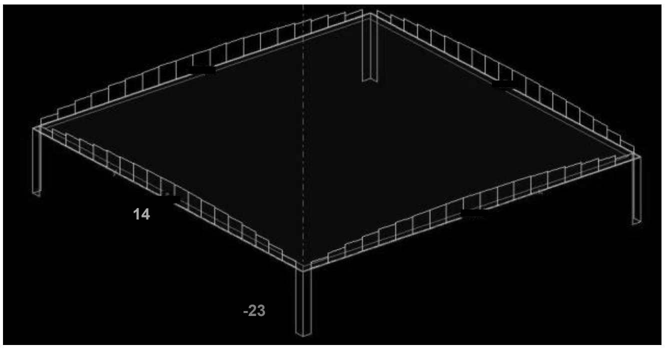
Ist die Platte nicht gegen Abheben gesichert, gibt es keine Stützkräfte in den Ecken; somit verschwinden die Drillmomente dort (bei Platten mit Eckkräften treten dort die Maxima und Minima auf).

Die Verformungen sind gegenüber der Platte mit Eckkräften leicht höher, da das System weicher ist.

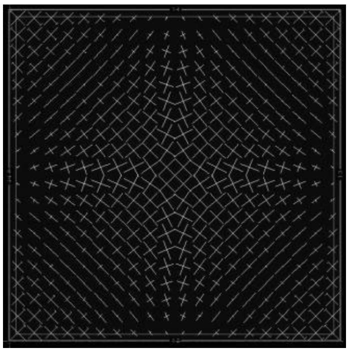
Elastische Platten

Lösungsverfahren mit finiten Elementen – Beispiel

Randgestützte Quadratplatte unter Eigenlast (l = 10 m, h = 0.25 m)



Stützkraft am Rand [kN pro Abschnitt]



Richtungen der Hauptmomente (blau: positiv, rot: negativ)

Bei Betrachtung der Reaktionen der Auflager (Wände) erkennt man die konzentrierten Eckkräfte, welche die Platte gegen Abheben sichern.

Die Richtung der Hauptmomente veranschaulicht die Tragwirkung der Platte. In den Plattenvierteln zu den Ecken hin verlaufen die Hauptrichtungen jeweils im Winkel von 45° zu den Koordinatenachsen, was darauf hinweist, dass die Drillmomente in xy-Richtung maximal sind (vgl. Mohrscher Kreis). In den Symmetrieachsen verschwinden die Drillmomente, somit verlaufen die Hauptrichtungen dort in Richtung der x- und y-Achse.