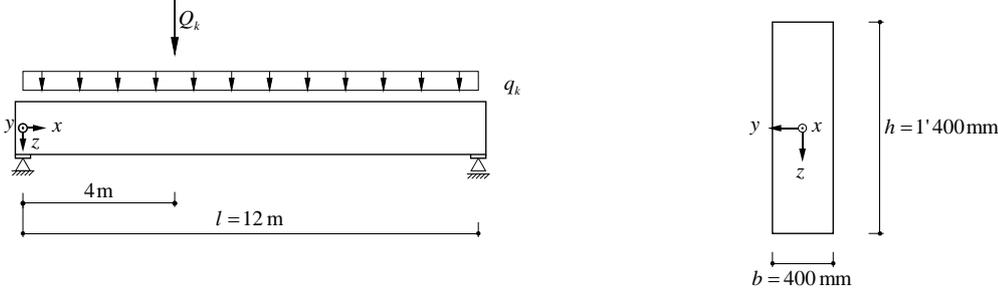


Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 1/8
Hausübung 4	Musterlösung	fm / 16.11.2020

Aufgabe 1

Geometrie



Baustoffe

Beton C25/30 $f_{cd} = 16.5 \text{ MPa}$

Betonstahl B500B $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$
 $c_{nom} = 30 \text{ mm}$

SIA 262

Tab. 8

Tab. 9

a) Schnittgrößen und Biegetragsicherheit

Einwirkungen:

Eigenlast: $g_{k0} = 1.4 \cdot 0.4 \cdot 25 = 14 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

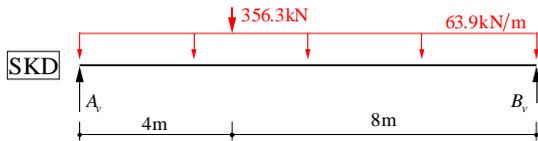
Nutzlast: $q_k = 30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, Q_k = 125 \text{ kN}$

Auflast: $G_{k1} = 125 \text{ kN}$

Bemessungseinwirkungen: $q_d = 1.35 \cdot 14 + 1.5 \cdot 30 = 63.9 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

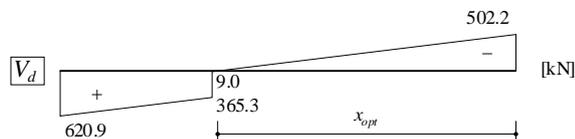
$Q_d = 1.35 \cdot 125 + 1.5 \cdot 125 = 356.3 \text{ kN}$

SIA 261
Tab. 30



$$A_v = \frac{q_d l}{2} + \frac{2}{3} Q_d = 620.9 \text{ kN}$$

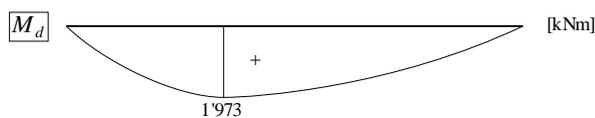
$$B_v = \frac{q_d l}{2} + \frac{1}{3} Q_d = 502.2 \text{ kN}$$



$$A_v - 63.9 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m} = 365.3 \text{ kN}$$

$$x_{opt} = \frac{502.2 \text{ kN}}{63.9 \text{ kN/m}} = 7.86 \text{ m}$$

$V(x_{opt}) = 0$



$$M_{max} = 1'973 \text{ kNm}$$

$$= 7.86 \text{ m} \left(502.2 \text{ kN} - \frac{7.86 \text{ m} \cdot 63.9 \text{ kN/m}}{2} \right)$$

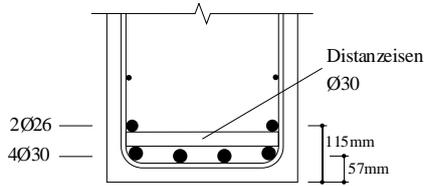
Abschätzung der Bewehrung mit $z \approx 0.8h$:

$$A_{s,erf} \approx \frac{M_d}{z \cdot f_{sd}} = 4'050 \text{ mm}^2$$

$$\rightarrow \text{Wahl: } 4\text{Ø}30 + 2\text{Ø}26 \rightarrow A_s = 4 \cdot 707 \text{ mm}^2 + 2 \cdot 531 \text{ mm}^2 = 3'889 \text{ mm}^2$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 2/8
Hausübung 4	Musterlösung	fm / 16.11.2020

Biegewiderstand bei $x = 4 \text{ m}$:



$$d = 1'400 - \frac{4 \cdot 707 \cdot 57 + 2 \cdot 531 \cdot 115}{A_s} = 1'327 \text{ mm}$$

$$c = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{b \cdot f_{cd}} = 256.3 \text{ mm} \rightarrow x = \frac{c}{0.85} = 301.6 \text{ mm}$$

$$\frac{x}{d} = 0.23 < 0.35 \rightarrow \text{i.O.}$$

$$M_{Rd} = A_s \cdot f_{sd} \left(d - \frac{c}{2} \right) = 2'029 \text{ kNm}$$

$$\left(d - \frac{c}{2} \right) = 1.199 \text{ m} \rightarrow z \approx 1'200 \text{ mm}$$

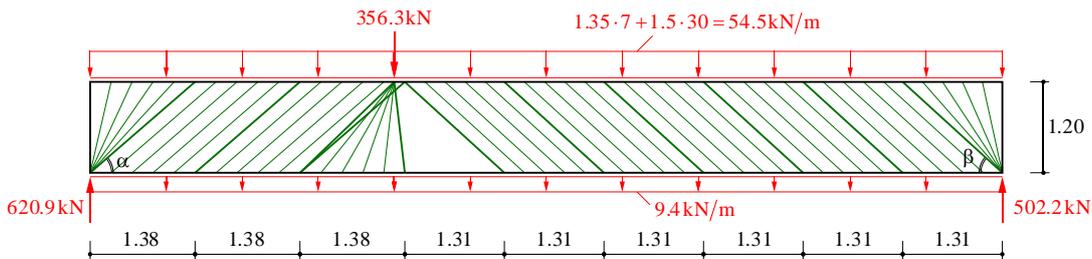
Nachweis:

$$M_{Rd} = 2'029 \text{ kNm} > 1'973 \text{ kNm} = M_{d,max} \rightarrow \text{i.O.}$$

b) Spannungsfeld und Fachwerkmodell

Spannungsfeld:

Das Spannungsfeld wird so aufgebaut, dass eine regelmäßige Anzahl Parallelfelder auf beiden Seiten des Querkraftnullpunkts entstehen. Dabei ist die Begrenzung der Druckfeldneigung zu berücksichtigen. Das Eigengewicht des Trägers wird je zur Hälfte am unteren resp. oberen Querschnittsrand eingeleitet.



$$\alpha = 41^\circ$$

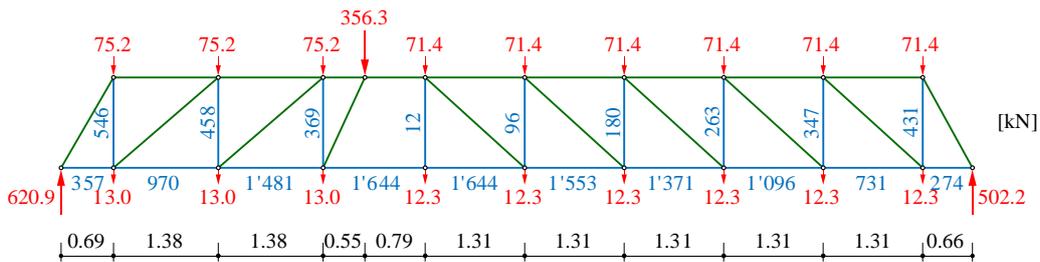
$$\beta = 42.5^\circ$$

$$4.3.3.3.2:$$

$$30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$$

$$\rightarrow \text{i.O.}$$

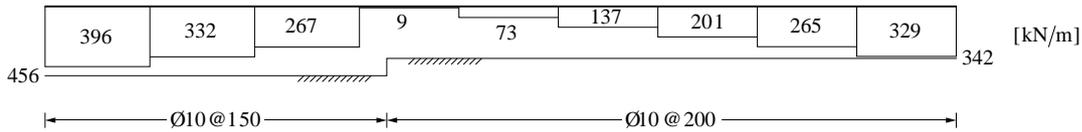
Fachwerkmodell:



Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 3/8
Hausübung 4	Musterlösung	fm / 16.11.2020

c) Verlauf der Bewehrungskräfte und Abstufung

Bügel: Kräfte aus $\frac{F_w}{z \cdot \cot \alpha}$ resp. $\frac{F_w}{z \cdot \cot \beta}$



$$a_{sw,erf} = \frac{396 \text{ kN/m}}{2 \cdot f_{sd}} = 455 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \rightarrow \text{Ø10 @ 150} \hat{=} 524 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = a_{sw}$$

$$a_{s,min} = \frac{\rho_{min}}{2} \cdot b \cdot \bar{l} = 400 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \rightarrow \text{Ø10 @ 200} \hat{=} 393 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = a_{sw,min}$$

2-schnittige Bügel

$$\rho_{min} = 0.2\%$$

$$\bar{l} = 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$$

Nachweis der Querkrafttragsicherheit:

$$V_{Rd,c} = k_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2'157 \text{ kN} > V_{Ed} = A_v - 63.9 \text{ kN/m} \cdot 1.38 \text{ m} = 533 \text{ kN} \rightarrow \text{i.O.}$$

$$V_{Rd,s} = 2 \cdot a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \cot \alpha = 628 \text{ kN} > V_{Ed} = A_v - 54.5 \text{ kN/m} \cdot 1.38 \text{ m} = 546 \text{ kN} \rightarrow \text{i.O.}$$

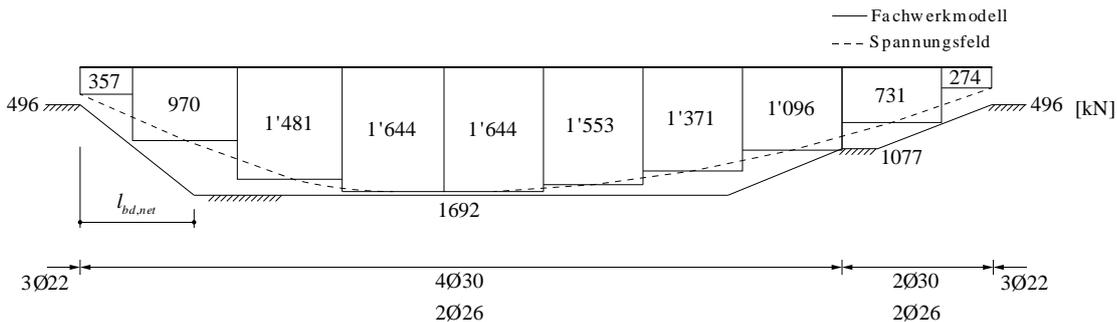
(45)

$$k_c = 0.55$$

(43)

Anmerkung: Für den Nachweis der Betonspannungen ist die Querkraft im Abstand $z \cot(\alpha)$ massgebend. Der Nachweis für die Bügel muss nicht zwingend geführt werden, da die Bügelbewehrung mittels Fachwerkmodell bestimmt worden ist. Der Nachweis dient aber zur Kontrolle. Die Einwirkungen unterscheiden sich, weil ein Teil des Eigengewichts des Trägers am unteren Querschnittsrand eingeleitet wird und deshalb auch noch von den Bügeln abgetragen werden muss.

Biegebewehrung:



Tab. 19

$$l_{bd,net} = 50\text{Ø}$$

$$= 1.5 \text{ m}$$

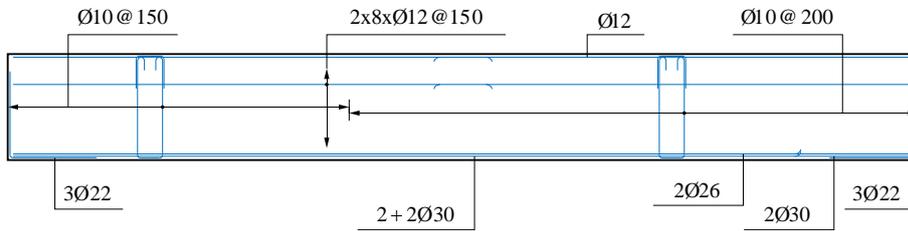
Über den Auflagern ist das Maximum aus 357kN resp. 274kN und 25% der erforderlichen Gurtbewehrung voll zu verankern.

$$A_{s,erf} = \frac{\max(357 \text{ kN}; 0.25 \cdot 1'644 \text{ kN})}{f_{sd}} = 945 \text{ mm}^2 \rightarrow 3\text{Ø}22 \hat{=} 1'140 \text{ mm}^2 = A_s$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 4/8
Hausübung 4	Musterlösung	fm / 16.11.2020

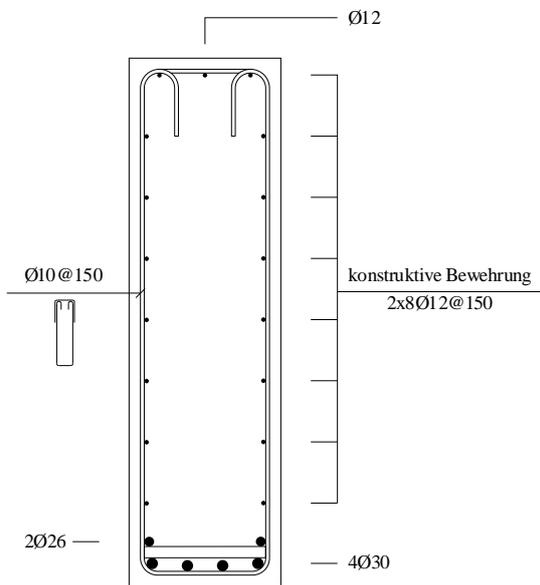
d) Verlauf der Bewehrungskräfte und Abstufung

Längsschnitt:



1:100

Querschnitt:



1:20

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 5/8
Hausübung 4	Musterlösung	fm / 16.11.2020

Aufgabe 2

a) Verankerung der Längsbewehrung beim Auflager

Schnittkörperbetrachtung:

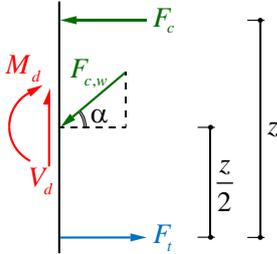


Abb. 1: Schnittkörperbetrachtung an einem beliebigen Querschnitt.

Für einen allgemeinen Querschnitt kann die Zugkraft im Untergurt durch das Querkraft- und Momentengleichgewicht bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 F_{cw} \sin(\alpha) &= V_d \\
 F_t \cdot z &= F_{cw} \cos(\alpha) \frac{z}{2} + M_d \\
 \rightarrow F_t &= \frac{V_d \cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} + \frac{M_d}{z} = \frac{V_d}{2} \cot(\alpha) + \frac{M_d}{z}
 \end{aligned}$$

Am Auflager ist das Moment 0 und die Querkraft entspricht der Lagerreaktion $V_{A,d}$. Die zu verankernde Längszugkraft beim Auflager beträgt:

$$F_t = \frac{V_{A,d} \cot(\alpha)}{2}$$

Fachwerkmodell:

Im Fachwerkmodell entspricht die zu verankernde Längszugkraft der Zugkraft im Untergurt, direkt am Auflager (Abbildung 2).

Autogr. 3.4
Seite 30 ff.

Durch Berechnung der Stabkräfte kann $F_t = \frac{V_{A,d} \cot \alpha}{2}$ gefunden werden.

Die massgebende vertikale Zugkraft in den Bügeln beträgt laut Berechnung der Stabkräfte

$$V_d = V_{A,d} - q_d z \cot \alpha$$

Dies entspricht der Querkraft in einem Schnitt $z \cot \alpha$ vom Auflager entfernt. Man kann diese Beziehung auch so interpretieren, dass die verteilte Last, welche in einem Bereich $z \cot \alpha$ vom Auflager angreift direkt über die erste Druckstrebe ins Auflager geleitet wird und nicht von der Bewehrung abgetragen werden muss.

Spannungsfeld:

Eine andere Möglichkeit ist eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem am Auflager zentrierten Fächer (Abbildung 2). Aus dem Momentengleichgewicht um den Punkt B folgt für die zu verankernde Längszugkraft:

$$F_t \cdot z = V_{A,d} \frac{z \cot \alpha}{2} \Leftrightarrow F_t = \frac{V_{A,d} \cot \alpha}{2}$$

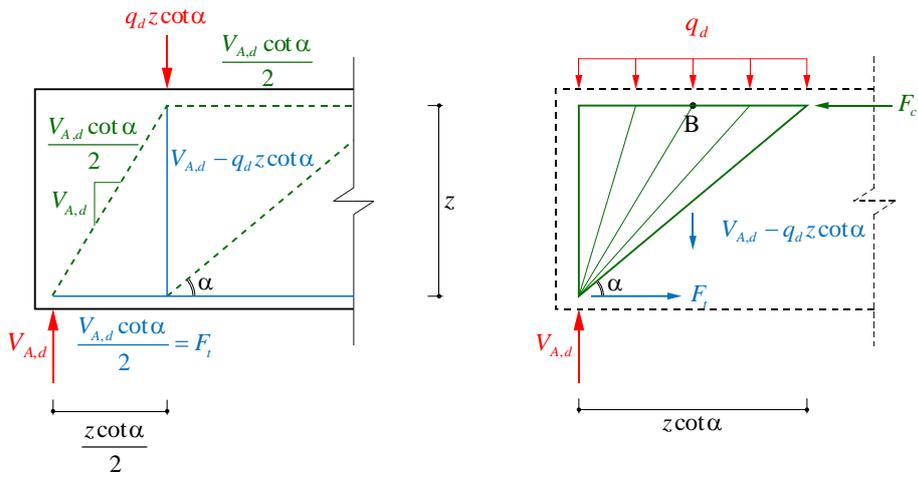


Abb. 2: Fachwerkmodell und Spannungsfeld am Auflager eines einfachen Balkens.

Aus Gleichgewicht der vertikalen Kräfte kann die Kraft V_d , welche von der Bewehrung aufgenommen werden muss, bestimmt werden:

$$V_d = V_{A,d} - q_d z \cot \alpha$$

Die verteilte Last, welche in einem Bereich $z \cot \alpha$ vom Auflager angreift wird direkt über den Fächer ins Auflager geleitet.

Anmerkung:

Mit dem Spannungsfeld und dem zugehörigen Fachwerkmodell können die gleichen Resultate gefunden werden. Je nach Aufgabenstellung und persönlicher Vorliebe kann also entweder ein Fachwerkmodell oder ein Spannungsfeld für die Berechnung verwendet werden. Es ist jeweils auch eine gute Übung sowohl das Spannungsfeld als auch das Fachwerkmodell zu entwickeln.

b) Auflagerknoten

Falls alle Streben die gleiche Druckspannung σ_c haben, herrscht ein zweiachsig gleichförmiger Spannungszustand im Knoten. Die Streben schliessen rechtwinklich an die Knotenberandung an. Die Strebenkräfte wurden bereits in Frage 2a) berechnet und sind in Abbildung 3 dargestellt.

Autogr. 3.4
Seite 55 ff.

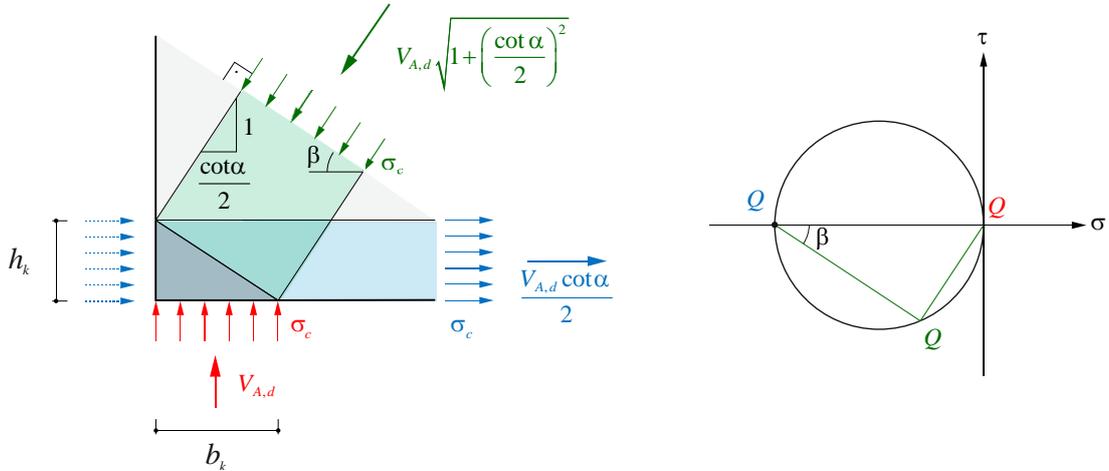


Abb. 3: Spannungen am Knotenbereich eines Auflagers eines einfachen Balkens.

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 7/8
Hausübung 4	Musterlösung	fm / 16.11.2020

Die vertikale Kraft am Knoten beträgt $V_{A,d} = \sigma_c b_k b_w$, wobei b_k die Breite des Knotenbereichs und b_w die Breite des Trägers ist.

Die horizontale Kraft am Knoten beträgt $\frac{V_{A,d} \cot \alpha}{2} = \sigma_c h_k b_w$, wobei h_k die Höhe des Knotenbereichs ist.

Daraus ergibt sich das Verhältnis $\frac{h_k}{b_k} = \frac{\frac{V_{A,d} \cot \alpha}{2}}{V_{A,d}} = \frac{\cot \alpha}{2}$.

Kontrolle, dass die Spannung der diagonalen Strebe ebenfalls σ_c ist:

$$\frac{F}{A} = \frac{\sqrt{\left(\frac{V_{A,d} \cot \alpha}{2}\right)^2 + V_{A,d}^2}}{b_w \sqrt{b_k^2 + h_k^2}} = \frac{V_{A,d} \sqrt{1 + \left(\frac{\cot \alpha}{2}\right)^2}}{b_w \sqrt{b_k^2 + b_k^2 \left(\frac{\cot \alpha}{2}\right)^2}} = \frac{V_{A,d}}{b_w b_k} = \sigma_c$$

Anmerkung:

Der Mohr'sche Kreis des Knotenbereichs degeneriert zu einem Punkt ($\sigma = \sigma_c$). Das zeigt, dass im Knoten ein zweiachsig gleichförmiger (oft als „hydrostatisch“ bezeichneter) Spannungszustand herrscht.

Die Mohr'schen Kreise der angrenzenden Streben sind identisch und in Abbildung 3 in schwarz dargestellt.

Die Pole Q der einzelnen Kreise sind in der Farbe der entsprechenden Strebe dargestellt.

Zum Nachvollziehen der Konstruktion der Mohr'schen Kreise sei nochmals darauf hingewiesen, dass in den Streben ein einachsiger Druckspannungszustand herrscht ($\sigma_3 = \sigma_c$, $\sigma_1 = 0$).

c) Biegemechanismus

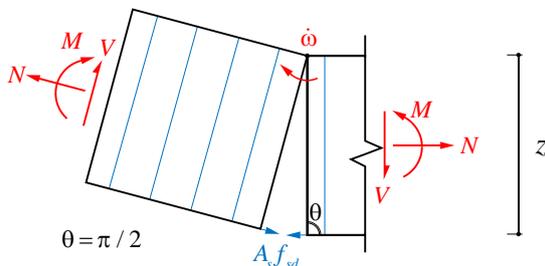


Abb. 4: Biegemechanismus.

Nach dem oberen Grenzwert der Plastizitätstheorie:

Arbeit der Schnittgrößen:

$$W = M \dot{\omega} + N \frac{z}{2} \dot{\omega} = \dot{\omega} \left(M + N \frac{z}{2} \right)$$

Dissipationsarbeit:

$$D = D_c + D_s = A_s f_{sd} z \dot{\omega}$$

Die Dissipation im Beton ist 0, da eine Verschiebung senkrecht zur Gleitlinie stattfindet ($\theta = \pi/2$). Es handelt sich um einen Kollapsriss.

Gleichsetzen der Arbeit der Schnittgrößen und der Dissipationsarbeit:

$$W = D \Leftrightarrow M + N \frac{z}{2} = A_s f_{sd} z$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 8/8
Hausübung 4	Musterlösung	fm / 16.11.2020
<p>Nach dem unteren Grenzwert der Plastizitätstheorie:</p> <p>Gleichgewicht um den Angriffspunkt der Druckkraft im Beton:</p> $M = A_s f_{sd} z - N \frac{z}{2}$ <p>Die Lösungen nach dem unteren und oberen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie sind identisch, es handelt sich also um eine vollständige Lösung.</p> <p>Beim Biegemechanismus öffnet sich der Kollapsriss senkrecht zur Richtung der Bügelbewehrung. Da Bewehrung nur entlang ihrer Achse dissipiert, gibt sie in diesem Fall keinen Beitrag zur Gesamtdissipation. Zudem liefert die Querkraft keinen Anteil zur Arbeit der Schnittgrößen, da sie senkrecht zur Verschiebungsrichtung ist.</p> <p>Beim Biegeschubbruch hat der Kollapsriss eine Neigung θ, dadurch entsteht eine Komponente der Verschiebung in Richtung der Bügelbewehrung und sie liefert einen Anteil zur Gesamtdissipation.</p> <p>Beim Stegdrukkbruch ist das Verschiebungsinkrement parallel zur Richtung der Bügelbewehrung und senkrecht zur Längsbewehrung. Dadurch liefert die Längsbewehrung keinen Anteil zur Dissipation. Die Arbeit der Schnittgrößen ist unabhängig vom angreifenden Moment da es keine Rotation gibt. Der Biegeschubbruch ist ein kombiniertes Biege- und Schubversagen, während der Biegemechanismus ein reines Biegeversagen ist und der Stegdrukkbruch ein reines Schubversagen.</p>		