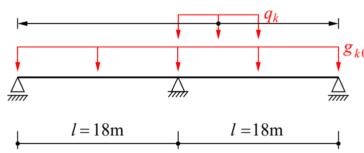
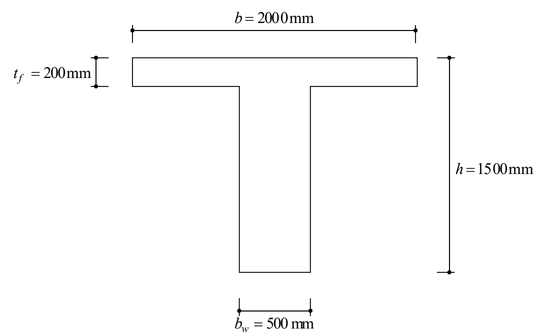
Aufgabe 1

SIA 262

Geometrie





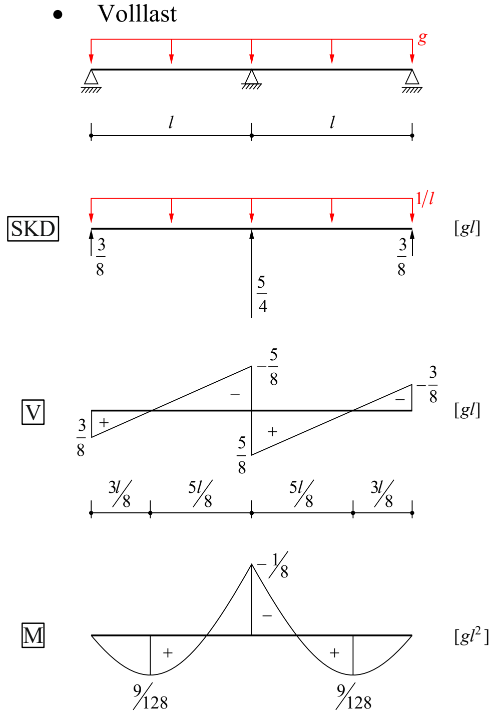
Baustoffe

Beton	C30/37	$f_{cd} = 20\,\text{MPa}$	Tab. 8
		$E_{cm} = k_e \sqrt[3]{f_{cm}} \approx 33.6\,\text{GPa}$ (Annahme $k_e = 10'000$)	3.1.2.3.3
		$D_{max} = 32\,\text{mm}$	
Betonstahl	B500B	$f_{sd} = 435\,\text{MPa}$	Tab. 9
		$E_s = 205\,\text{GPa}$	3.2.2.4
		$c_{nom} = 35\,\text{mm}$	

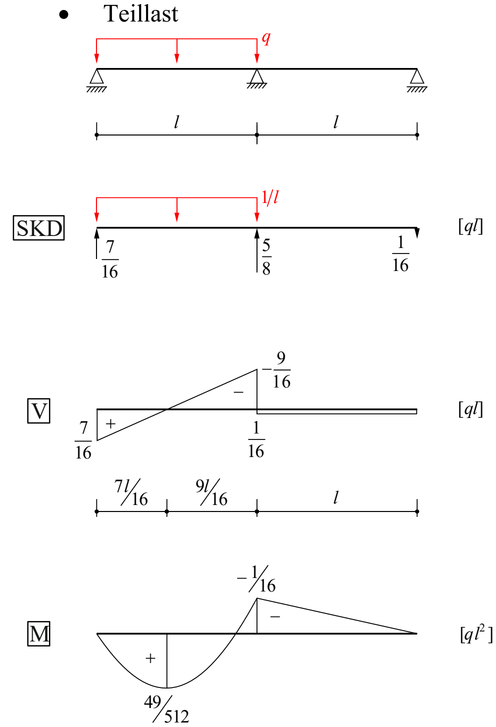
a) Einwirkungen und Schnittgrössen

Baustatische Grundlagen:

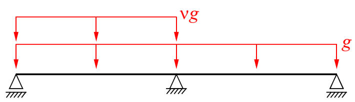
- Volllast



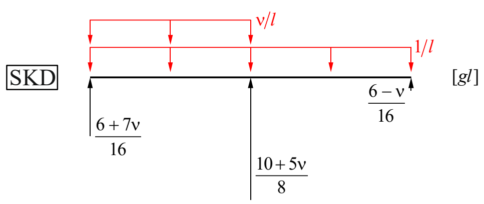
- Teillast

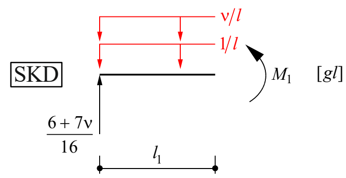


Superposition:



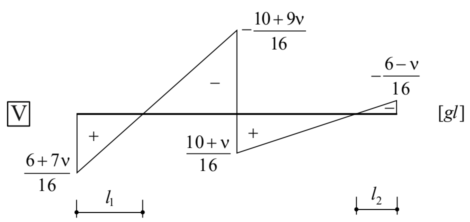
Die Superposition der beiden Lastfälle erfolgt hier zunächst allgemein für beliebige Verhältnisse $\nu = \frac{q}{g}$.

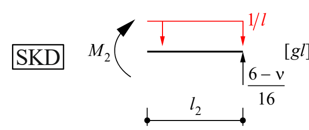


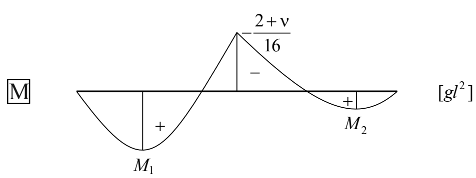


$$gl\frac{6+7v}{16} = gl\frac{v+1}{l}l_1 \rightarrow \frac{l_1}{l} = \frac{6+7v}{16(v+1)} \qquad \sum V = 0$$

$$M_1 = gl\left(\frac{6+7v}{16}l_1 - \frac{v+1}{l}\frac{l_1^2}{2}\right) = gl^2\frac{(6+7v)^2}{512(v+1)} \qquad \sum M = 0$$







$$gl\frac{l_2}{l} = gl\frac{6-v}{16} \rightarrow \frac{l_2}{l} = \frac{6-v}{16} \qquad \sum V = 0$$

$$M_2 = gl\left(\frac{6-v}{16}l_2 - \frac{1}{l}\frac{l_2^2}{2}\right) = gl^2\frac{(6-v)^2}{512} \qquad \sum M = 0$$

Einwirkungen im vorliegenden Fall:

Eigenlast: $A_c = 1.3 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 1.05\text{m}^2$

$g_{k0} = 1.05 \cdot 25 = 26.3\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ SIA 261 Tab. 28

Auflast: $g_{k1} = 0$

Nutzlast: $q_k = 40\frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Bemessungslasten ständig: $g_d = 1.35 \cdot 26.3 = 35.4\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ SIA 260 Tab. 1

Bemessungslasten veränderlich: $q_d = 1.5 \cdot 40 = 60\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $\nu = \frac{q_d}{g_d} = 1.69$

Massgebende Schnittgrössen:

Volllast

$$M_{St}^{VL} = 95.4 \cdot 18^2 \cdot -\frac{1}{8} = \underline{\underline{-3865\,\text{kNm}}}$$

$$M_{Feld}^{VL} = 95.4 \cdot 18^2 \cdot \frac{9}{128} = \underline{\underline{2174\,\text{kNm}}}$$

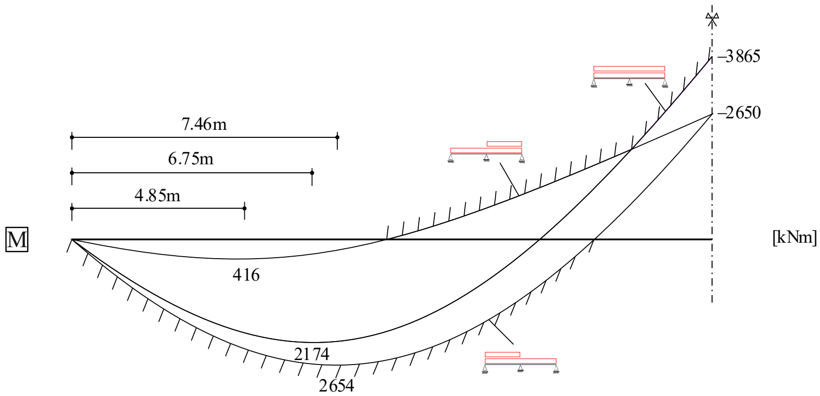
Teillast

$$M_{St}^{TL} = 35.4 \cdot 18^2 \cdot -\frac{(2+1.69)}{16} = \underline{\underline{-2650\,\text{kNm}}}$$

$$M_1^{TL} = 35.4 \cdot 18^2 \cdot \frac{(6+7\cdot 1.69)^2}{512\cdot(1+1.69)} = \underline{\underline{2654\,\text{kNm}}} \qquad l_1 = 7.46\text{m}$$

$$M_2^{TL} = 35.4 \cdot 18^2 \cdot \frac{(6-1.69)^2}{512} = \underline{\underline{416\,\text{kNm}}} \qquad l_2 = 4.85$$

Grenzwertlinie der Biegebeanspruchung:
Die massgebenden Schnittgrössen lassen sich mit sogenannten Grenzwertlinien anschaulich darstellen. Sie bezeichnen die Umhüllende aller Schnittkraftverläufe für verschiedene Laststellungen und –kombinationen.



N.B.

$$\frac{49 q_d l^2}{512} = 1860\,\text{kNm}$$

$$\frac{9 g_d l^2}{128} = 806\,\text{kNm}$$

$$\sum = \underline{\underline{2666\,\text{kNm}}}$$

Zur Abschätzung des max. Feldmoments i.d.R. genügend genau.

Die Grenzwertlinie verdeutlicht, dass zur Aufnahme der negativen Biegemomente auf der lastabgewandten Seite je nach Verhältnis *q/g* über einen grossen Bereich Bewehrung im Flansch eingelegt werden muss. Grenzwertlinien von komplexen Lastkombinationen werden heute mit Hilfe gängiger Computerprogramme ermittelt.

b) <u>Bemessung der Hauptbewehrung</u>

b_{eff}:

SIA 262 4.1.3.3.2 4.1.3.3.3

$$b_{1,2} = \frac{b - b_w}{2} = 0.75\text{m}$$

$$l_0 = 0.85 l = 15.3\text{m}$$

$$b_{eff\,1,2} = \min(0.2 b_{1,2} + 0.1 l_0, 0.2 l_0) = 1.68\text{m}$$

$$b_{eff} = \min(b, 2 b_{eff\,1,2} + b_w) = 2000\,\text{mm} = b$$

Feldquerschnitt:

$M_d = 2654\,\text{kNm}$

Abschätzung von d und z: $d \cong 1450\,\text{mm}$, $z \cong 0.95 d = 1380\,\text{mm}$ (für Plattenbalken 0.95 anstatt 0.9 da viel breitere Druckzone als Träger mit Rechteckquerschnitt)

Abschätzung der erforderlichen Querschnittsfläche A_s: $A_{s,erf} \cong \dfrac{M_d}{z \cdot f_{sd}} = 4429\,\text{mm}^2$

Wahl der Bewehrung: $\underline{\underline{6Ø30}} \rightarrow A_s = 4241\,\text{mm}^2$

Berechnung des Biegewiderstands:

Annahme: $Ø_{BG} = 14\,\text{mm}$

$$d = h - c_{nom} - Ø_{BG} - \frac{Ø}{2} = 1500 - 35 - 14 - 15 = 1436\,\text{mm}$$

$$A_s f_{sd} = 1845\,\text{kN}$$

$$0.85 x = \frac{A_s f_{sd}}{b f_{cd}} = 46.1\,\text{mm} \rightarrow x = 54.3\,\text{mm}$$

$$\underline{\underline{M_{Rd}}} = A_s f_{sd}\left(d - \frac{0.85 x}{2}\right) = \underline{\underline{2607\,\text{kNm}}}$$

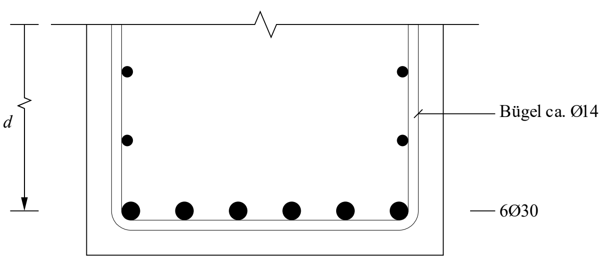
Merke: - $z_{eff} = 1413\,\text{mm} \triangleq 0.94 h \triangleq 0.98 d$

- Duktilität: $\dfrac{x}{d} = 0.038 \ll 0.35$ 4.1.4.2.5

Nachweis: $M_{Rd} = 2607\,\text{kNm} \cong 2654\,\text{kNm} = M_d \rightarrow$ i.O. — $\Delta < 2\%$ (vgl. Bem. Aufgabe 1c))

konstruktive Durchbildung:

1:10



5.2.3.2

lichter Abstand: $\dfrac{500-2\cdot35-2\cdot14-6\cdot30}{5} = 44\,\text{mm} > D_{\max} \rightarrow$ i.O.

$> \varnothing_{\max} \rightarrow$ i.O

$> 20\,\text{mm} \rightarrow$ i.O

Stützenquerschnitt:

M_d = -3865 kNm

Abschätzung von d und z: $d \cong 1400\,\text{mm}$, $z \cong 0.9d = 1260\,\text{mm}$

Abschätzung der erforderlichen Querschnittsfläche A_s: $A_{s,erf} \cong \dfrac{M_d}{z \cdot f_{sd}} = 7052\,\text{mm}^2$

Wahl der Bewehrung: $\underline{\underline{28Ø18}} \rightarrow A_s = 7125\,\text{mm}^2$

Berechnung des Biegewiderstands:

$d = 1400\,\text{mm}$

$A_s f_{sd} = 3099\,\text{kN}$

$0.85x = \dfrac{A_s f_{sd}}{b_w f_{cd}} = 310\,\text{mm} \rightarrow x = 365\,\text{mm}$

$\underline{\underline{M_{Rd}}} = A_s f_{sd}\left(d - \dfrac{0.85x}{2}\right) = \underline{\underline{3859\,\text{kNm}}}$

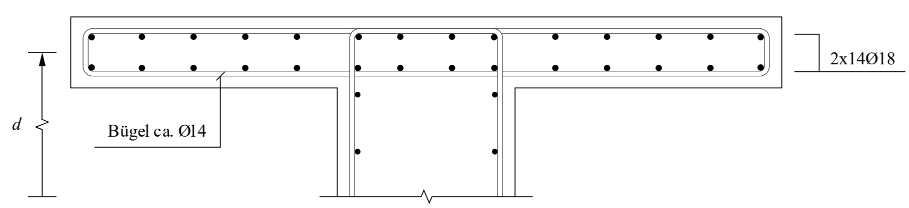
Merke: - $z_{eff} = 1245\,\text{mm} \mathrel{\hat{=}} 0.83h \mathrel{\hat{=}} 0.89d$ — 4.1.4.2.5

- Duktilität: $\dfrac{x}{d} = 0.26 < 0.35$

Nachweis: $M_{Rd} = 3859\,\text{kNm} \cong 3865\,\text{kNm} = M_d \rightarrow$ i.O. — $\Delta < 1\%$ (vgl. Bem. Aufgabe 1c))

konstruktive Durchbildung:

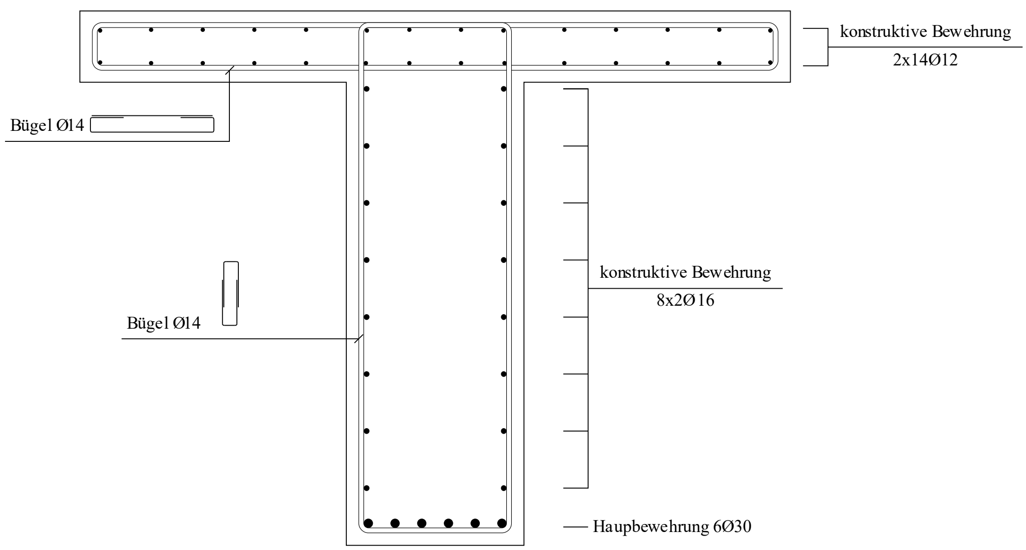
1:20



c) <u>Bewehrungsskizzen</u>

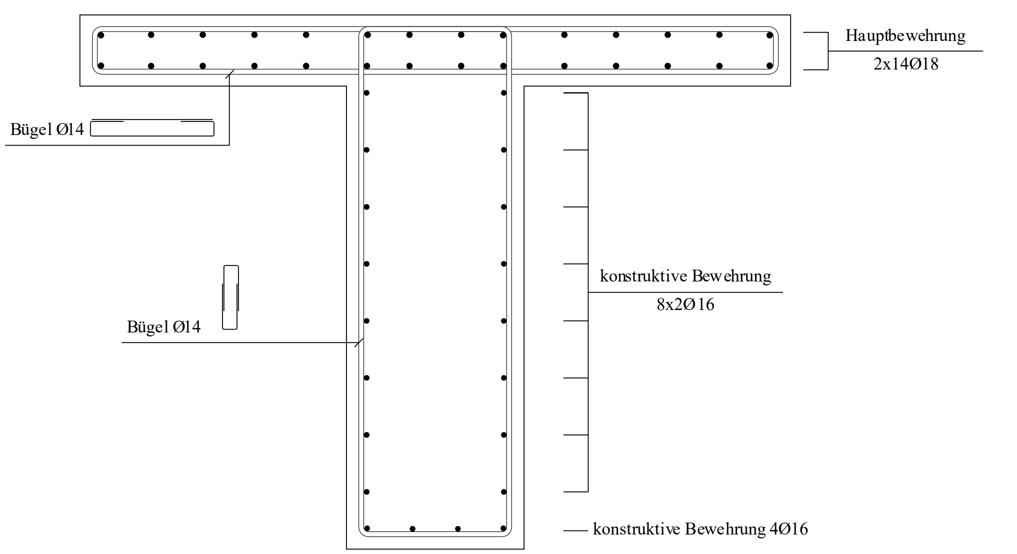
Für die Bemessung der konstruktiven Bewehrung muss jeweils nachgewiesen werden, dass die gewählte Bewehrung ausreichend ist zum Verhindern von Sprödbruch. Aus Platzgründen werden diese Nachweise hier nicht explizit geführt.

Feldquerschnitt:



1:20

Stützenquerschnitt:



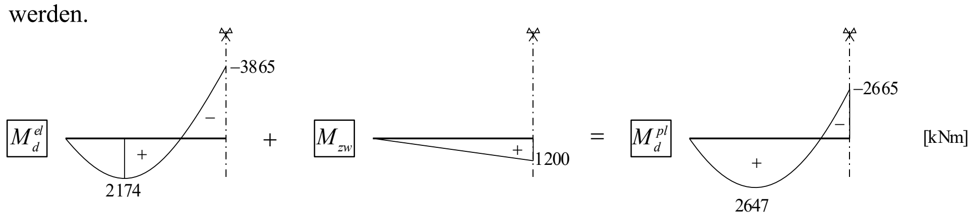
1:20

Durch die Berücksichtigung der verteilten konstruktiven Bewehrung im Steg, würde der Biegewiderstand im Feld um gut 40% auf $M_{Rd,Feld}$ = 3688kNm erhöht. Somit wären auch 5Ø26 ausreichend. Im Stützenquerschnitt ist der Einfluss der Stegbewehrung wegen der hohen Druckzone wesentlich kleiner (ca. +10%). Dies begründet zusätzlich warum die zuvor geführten Tragsicherheitsnachweise, die knapp nicht erfüllt waren, als ausreichend bezeichnet wurden.

d) Schnittgrössenumlagerung

- Da es sich im vorliegenden Fall um ein statisch unbestimmtes, vorwiegend auf Biegung beanspruchtes System handelt und die Duktilitätsbedingung x/d < 0.35 in jedem Querschnitt eingehalten ist, dürfen die elastischen Schnittgrössen plastisch umgelagert werden. 4.1.4.2

- Beim Nachweis der Tragsicherheit darf somit jedem Lastfall ein optimaler Zwängungszustand überlagert werden. Für den Lastfall "Volllast" etwa können 1200 kNm von der Stütze ins Feld umgelagert werden, wodurch ein Biegewiderstand von ca. 2650 kNm im Feld und über der Stütze ausreichend wird. Durch optimales Einpassen der Momentenlinie kann so Bewehrung gespart werden.



- Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass im Grenzzustand der Tragsicherheit Zwängungsschnittgrössen, die bei statisch unbestimmten Systemen zum Beispiel infolge Lagersenkungen, Schwinden, oder Temperaturgradienten entstehen können, wegplastifiziert werden, d.h. vernachlässigt werden können. Die Zwängungsschnittgrössen führen zu einem Eigenspannungszustand im Tragwerk. Nach der Plastizitätstheorie haben Eigenspannungszustände jedoch nur einen Einfluss auf das Last-Verformungsverhalten, jedoch nicht auf die Traglast.

Aufgabe 2

a) Biegewiderstand Träger

Querschnittsfläche der Bewehrung: $A_s = \rho bd$ (1)

Höhe der Betondruckzone (aus horizontalem Gleichgewicht am Querschnitt):

$$x = \frac{A_s f_{sd}}{0.85 b f_{cd}} = \frac{d f_{sd}}{0.85 f_{cd}} \rho \Leftrightarrow \rho = 0.85 \frac{f_{cd}}{f_{sd}} \frac{x}{d} \quad (2)$$

Das Verhältnis zwischen der Betondruckzonenhöhe und dem geometrischen Bewehrungsgehalt ist linear:

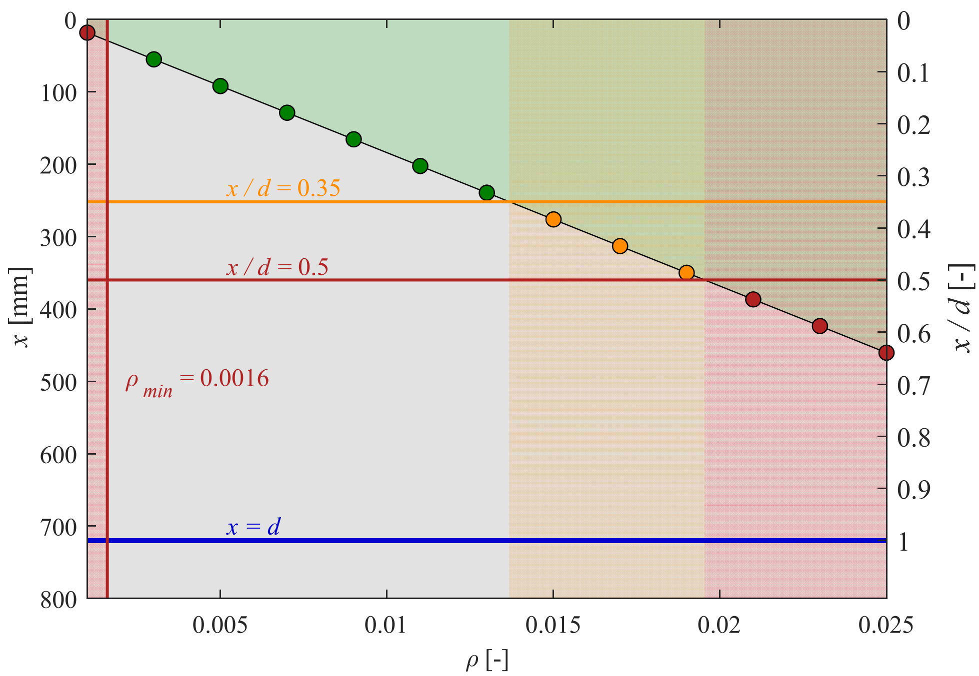


Abb. 1: Höhe der Betondruckzone als Funktion des Bewehrungsgehalts.

Biegewiderstand (aus Momentengleichgewicht am Querschnitt):

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= A_s f_{sd}\left(d - \frac{0.85x}{2}\right) \\ &\overset{(1)}{=} \rho b d f_{sd}\left(d - \frac{0.85x}{2}\right) \\ &\overset{(2)}{=} 0.85 b x f_{cd}\left(d - \frac{0.85x}{2}\right) \\ &= 0.85 b d f_{cd} x - \frac{0.85^2}{2} b f_{cd} x^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Das Verhältnis zwischen der Betondruckzonenhöhe und dem Biegewiderstand ist nicht linear, sondern quadratisch. Bei höherem Bewehrungsgehalt steigt die Fliesslast der Bewehrung, welche sich im Gleichgewicht mit der Druckkraft im Querschnitt befindet. Um die höhere Druckkraft aufzunehmen vergrössert sich die Betondruckzone linear mit dem Bewehrungsgehalt. Dadurch verkleinert sich aber ebenfalls der Hebelarm der inneren Kräfte, sodass der Biegewiderstand unterproportional mit der Betondruckzonenhöhe ansteigt.

Ergänzende Bemerkung:

Dasselbe gilt für den Zusammenhang zwischen Bewehrungsgehalt und Biegewiderstand. Bei einer Verdopplung des Bewehrungsgehaltes wächst der Biegewiderstand um weniger als das Doppelte.

$$M_{Rd} = A_s f_{sd}\left(d - \frac{0.85x}{2}\right) = \rho b d f_{sd}\left(d - \frac{\rho d f_{sd}}{2 f_{cd}}\right) = b d^2 f_{sd}\rho - \frac{b d^2 f_{sd}^2}{2 f_{cd}}\rho^2$$

Bei der Wahl der Bewehrung ist stets darauf zu achten, dass die Mindestbewehrung eingehalten wird. Die Mindestbewehrung wird so gewählt, dass der Biegewiderstand grösser ist als das Rissmoment. Dies verhindert, dass der Träger bei Erreichen des Rissmoments spröde versagt.

Rissmoment für Rechteckquerschnitte:

$$f_{ctk,0.95} = 1.3 f_{ctm} = 3.8\,\text{MPa}$$ SIA 262, (8)

$$k_t = \frac{1}{1+0.5\cdot t} = \frac{1}{1+0.5\cdot\frac{h}{3}} = 0.88$$ SIA 262, 4.4.1.3

$$f_{ctd} = k_t \cdot f_{ctk0.95} = 3.3\,\text{MPa}$$ SIA 262, 4.4.1.4

$$M_r = \frac{bh^2}{6} f_{ctd} = \frac{500\,\text{mm}\cdot(800\,\text{mm})^2}{6} 3.3\,\text{MPa} = 177\,\text{kNm}$$

$$\rho_{min} = \frac{f_{cd}}{f_{sd}}\left(1-\sqrt{1-\frac{2M_r}{bd^2 f_{cd}}}\right) = \frac{20\,\text{MPa}}{435\,\text{MPa}}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\cdot 177\,\text{kNm}}{500\,\text{mm}\cdot(720\,\text{mm})^2\cdot 20}}\right) = 0.0016$$

Ein Bewehrungsgehalt von 0.001 ist für diesen Träger also nicht ausreichend. 4.1.4.2.5

Ausserdem soll darauf geachtet werden, dass die Höhe der Betondruckzone geringer als 0.35*d* ist, damit man von einem duktilen Verhalten ausgehen kann, ohne den Nachweis des Verformungsvermögens zu führen.

$$\rho \overset{(2)}{=} \frac{0.85 f_{cd}}{f_{sd}}\frac{x}{d} = \frac{0.85\cdot 20\,\text{MPa}}{435\,\text{MPa}} 0.35 = 0.0137$$

$$M_{Rd} \overset{(3)}{=} 0.85 b d f_{cd} x - \frac{0.85^2}{2} b f_{cd} x^2$$

$$= 0.85\cdot 500\,\text{mm}\cdot 720\,\text{mm}\cdot 20\,\text{MPa}\cdot 0.35\cdot 720\,\text{mm} - \frac{0.85^2}{2} 500\,\text{mm}\cdot 20\,\text{MPa}\left(0.35\cdot 720\,\text{mm}\right)^2$$

$$= 1313\,\text{kNm}$$

Dies trifft bei einem Bewehrungsgehalt von 0.0137 zu. Es kann ein Biegewiderstand von 1313 kNm erreicht werden.

Nach SIA 262 ist es zulässig, den Biegewiderstand weiter zu steigern, falls ein Nachweis des Verformungsvermögens erbracht wird. In diesem Fall beträgt das maximal zulässige Verhältnis x/d = 0.5.

$$\rho \overset{(2)}{=} \frac{0.85 f_{cd}}{f_{sd}}\frac{x}{d} = \frac{0.85\cdot 20\,\text{MPa}}{435\,\text{MPa}} 0.5 = 0.0195$$

$$M_{Rd} \overset{(3)}{=} 0.85 b d f_{cd} x - \frac{0.85^2}{2} b f_{cd} x^2$$

$$= 0.85\cdot 500\,\text{mm}\cdot 720\,\text{mm}\cdot 20\,\text{MPa}\cdot 0.5\cdot 720\,\text{mm} - \frac{0.85^2}{2} 500\,\text{mm}\cdot 20\,\text{MPa}\left(0.5\cdot 720\,\text{mm}\right)^2$$

$$= 1735\,\text{kNm}$$

Bewehrungsgehalte über 0.0195 sind für diesen Träger nicht zulässig und man muss mit einem spröden Versagen rechnen. Der Biegewiderstand darf nicht über 1735 kNm hinaus gesteigert werden.

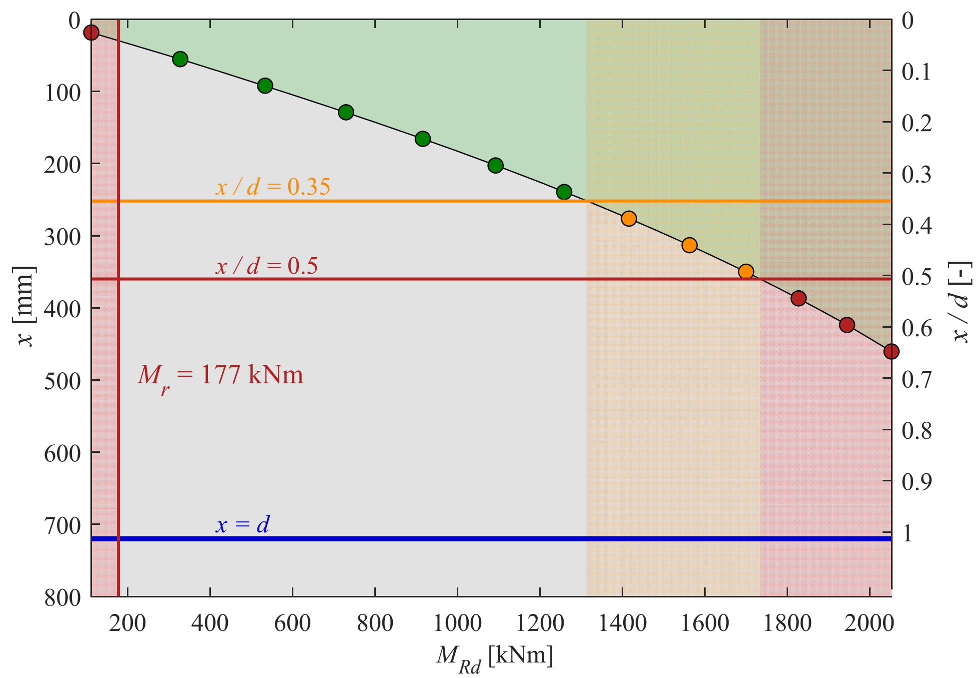


Abb. 2: Höhe der Betondruckzone als Funktion des Biegewiderstands.

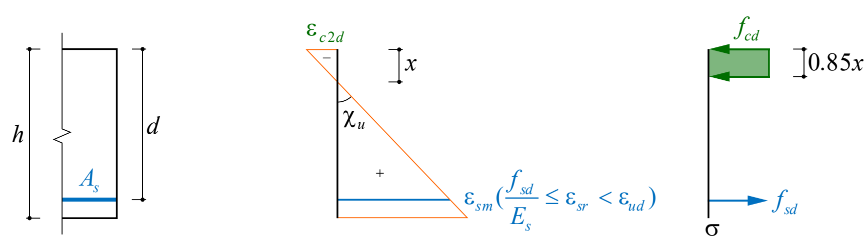
b) <u>Krümmung und Duktilität Träger</u>

Im Allgemeinen wird bei der Bemessung vorausgesetzt, dass der Beton bricht während die Bewehrung fliesst ($\varepsilon_{c,sup} = \varepsilon_{c2d}$, $\sigma_s = f_{sd}$), da dies ein duktiles Versagen gewährleistet. Die Biegewiderstände in Frage 2a) wurden mit dieser Annahme berechnet. Im Folgenden wird die Annahme der Versagensart, je nach Bewehrungsgehalt, überprüft und die entsprechende Bruchkrümmung berechnet. Autogr. 3.2 Folien 19 ff

Das generelle Vorgehen dazu ist wie folgt:
Zuerst wird angenommen, dass die Versagensart Betonbruch während dem Fliessen der Bewehrung ist. Die Betondruckzonenhöhe kann dadurch mit Formel (2) aus dem horizontalem Gleichgewicht gefunden werden und die Krümmung des Querschnitts lässt sich zu

$$\chi_u = \frac{|\varepsilon_{c,sup}|}{x} = \varepsilon_{c2d} \frac{0.85 f_{cd}}{\rho d f_{sd}} \qquad (4)$$

bestimmen, wobei ein linearer Verlauf der Dehnungsebene vorausgesetzt wird.



Dann werden die Annahmen $\sigma_s = f_{sd} \Leftrightarrow \varepsilon_{sr} \geq f_{sd}/E_s$ und $\varepsilon_{sr} < \varepsilon_{sud}$ überprüft. Dafür ist es theoretisch nötig, die mittlere Dehnungsreduktion, welche durch die Zugversteifung hervorgerufen wird, zu berechnen. Häufig muss diese Dehnungsreduktion jedoch nicht explizit berechnet werden, wie im weiteren Verlauf der Aufgabe gezeigt wird.
Falls eine der Annahmen nicht erfüllt ist, liegt eine andere Versagensart vor ($\varepsilon_{c,sup} = \varepsilon_{c2d}$ kann nicht überprüft werden, da es in der Herleitung von χ_u benutzt wurde und daher automatisch zutrifft). Es muss eine neue Annahme der Versagensart getroffen werden. x und χ_u werden mit der neuen Annahme berechnet.

SIA 262

(1) Sprödbruch bei Rissbildung
Bei sehr tiefen Bewehrungsgehalten kann Sprödbruch bei der Rissbildung massgebend werden. Diese Versagensart tritt ein wenn die Mindestbewehrung nicht eingehalten wird, also bei Bewehrungsgehalten < 0.0016 (siehe Teilaufgabe a)).

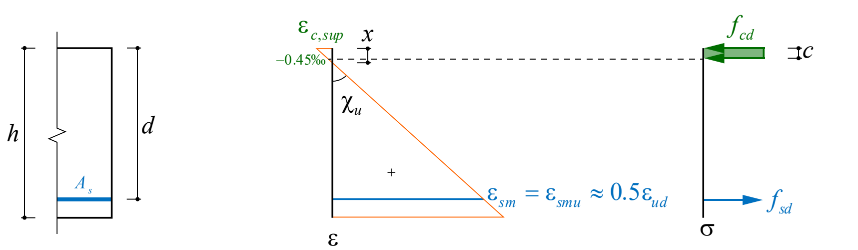
(2) Reissen der Bewehrung bevor der Beton bricht
Bei tiefen Bewehrungsgehalten kann die Bewehrung reissen bevor der Beton bricht. Im Folgenden wird für den Bewehrungsgehalt $\rho = 0.003$ überprüft ob dies der Fall ist (tiefster Bewehrungsgehalt > ρ_{min}).
Zuerst wird angenommen, dass Betonbruch während dem Fliessen der Bewehrung massgebend wird:

$$x \overset{(2)}{=} \frac{df_{sd}}{0.85 f_{cd}} \rho = \frac{720\,\text{mm} \cdot 435\,\text{MPa}}{0.85 \cdot 20\,\text{MPa}} 0.003 = 55\,\text{mm}$$

$$\chi_u \overset{(4)}{=} \varepsilon_{c2d} \frac{0.85 f_{cd}}{\rho d f_{sd}} = 0.003 \frac{0.85 \cdot 20\,\text{MPa}}{0.003 \cdot 720\,\text{mm} \cdot 435\,\text{MPa}} = 54.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = 54.3 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\varepsilon_{sm} = \chi_u (d - x) = 54.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} \cdot (720\,\text{mm} - 55\,\text{mm}) = 36.1‰ \geq 22.5‰ = 0.5\varepsilon_{ud} \approx \varepsilon_{smu}$$ Tab. 9

Damit ist im Fall $\rho = 0.003$ Reissen der Bewehrung vor dem Betonbruch massgebend.
Ergänzung:
Unter Berücksichtigung der Zugversteifung muss streng genommen die Dehnung am Riss ε_{sr} mit der Bruchdehnung des Stahls ε_{ud} verglichen werden.
Stattdessen kann auch die mittlere Dehnung der Bewehrung ε_{sm} mit der infolge Zugversteifung reduzierten Bruchdehnung des Zugggurts ε_{smu} verglichen werden. Eine genaue Berechnung des Verformungsvermögens und damit von ε_{smu} wird in der Vorlesung Advanced Structural Concrete im Master vorgestellt. Hier wird, wie in den Vorlesungsfolien, die vereinfachende Annahme $\varepsilon_{smu} \approx 0.5\,\varepsilon_{ud} = 22.5$ ‰ getroffen.
Eine der Annahmen war nicht erfüllt, also muss eine neue Annahme getroffen werden. Die neue Annahme der Versagensart ist, dass die Bewehrung reisst bevor der Beton bricht.
In diesem Fall ist der Beton nicht zwingend im Bruchzustand, folglich soll die Approximation als Rechteck-Spannungsblock mit der Annahme $c = 0.85x$ nicht verwendet werden. Allerdings ist der Beton auch nicht mehr rein elastisch, weshalb auch die Annahme von vollständig elastischem Verhalten nicht mehr verwendet werden soll. Für eine Handrechnung sind beispielsweise folgende approximative Berechnungsmethoden geeignet: Gerissen-elastisches Verhalten mit Begrenzung der Betonspannung auf f_{cd} (es resultiert eine trapezförmige Spannungsverteilung (siehe auch Manual zur App Biegung)) oder ein „abgeschnittener" Rechteckspannungsblock mit der Bedinung dass die Spannung weiterhin bei $(1-0.85) \cdot \varepsilon_{c2d} = 0.15 \cdot 3‰ = 0.45‰$ von 0 auf f_{cd} springt. Hier wird die zweite Berechnungsmethode gewählt:



$$c = x\left(1 - \frac{0.45‰}{\left|\varepsilon_{c.sup}\right|}\right);\ \varepsilon_{c.sup} = \frac{\varepsilon_{smu} x}{d - x}$$

$$A_s f_{sd} = f_{cd} c b \rightarrow c = \frac{A_s f_{sd}}{f_{cd} b} = \frac{\rho d b f_{sd}}{f_{cd} b} = \frac{\rho d f_{sd}}{f_{cd}} = \frac{0.003 \cdot 720\,\text{mm} \cdot 435\,\text{MPa}}{20\,\text{MPa}} = 47\,\text{mm}$$

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_{smu} + 0.45‰}{d - c} = \frac{22.5‰ + 0.45‰}{720\,\text{mm} - 47\,\text{mm}} = 34.1 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\left|\varepsilon_{c,sup}\right| = 0.45‰ + c \cdot \chi = 0.45‰ + 47\,\text{mm} \cdot 34.1 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} = 2.1‰ < 3‰$$

(3) Beton bricht während die Bewehrung fliesst

Im Fall des Bewehrungsgehalts ρ = 0.005 stimmt die Annahme von Betonbruch während die Bewehrung fliesst:

$$x \overset{(2)}{=} \frac{df_{sd}}{0.85 f_{cd}} \rho = \frac{720\text{mm} \cdot 435\,\text{MPa}}{0.85 \cdot 20\,\text{MPa}} 0.005 = 92\,\text{mm}$$

$$\chi_u \overset{(4)}{=} \varepsilon_{c2d} \frac{0.85 f_{cd}}{\rho d f_{sd}} = 0.003 \frac{0.85 \cdot 20\,\text{MPa}}{0.005 \cdot 720\text{mm} \cdot 435\,\text{MPa}} = 32.6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = 32.6 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\varepsilon_{sm} = \chi_u (d - x) = 32.6 \cdot \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot (720\text{mm} - 92\text{mm}) = 20.4‰ \leq 22.5‰ = 0.5\varepsilon_{ud}$$

$$\varepsilon_{sm} = 20.4‰ \gg 2.12‰ = \frac{f_{sd}}{E_s} \rightarrow \varepsilon_{sr} > \frac{f_{sd}}{E_s}$$

Die allgemeine Formel (4) zeigt, dass die Krümmung beim Bruch bei grösseren Bewehrungsgehalten sinkt, was bedeutet, dass der Träger sich weniger duktil verhält (siehe auch Abbildung 3).

Die gleiche Überprüfung müsste für sämtliche Bewehrungsgehalte 0.007, 0.009, … durchgeführt werden, bis ab einem bestimmten Bewehrunggehalt die Bewehrung nicht mehr fliesst ($\varepsilon_{sr} < f_{sd} / E_s$). Stattdessen wird in einem nächsten Schritt mit dem höchsten Bewehrungsgehalt der Reihe begonnen. Falls bei diesem die Bewehrung fliessen würde, würde das bedeuten, dass die Annahme Betonbruch während die Bewehrung fliesst für alle Bewehrungsgehalte zwischen 0.005 und 0.025 zutrifft.

(4) Beton bricht bevor die Bewehrung fliesst

Bei sehr hohen Bewehrungehalten kann es sein, dass der Beton bricht bevor die Bewehrung fliesst. Dies führt zu einem sehr spröden Verhalten. Im Folgenden wird für den höchsten Bewehrungsgehalt der Reihe (ρ = 0.025) überprüft ob dies der Fall ist.

Fürs Erste wird wieder die Annahme getroffen, dass die Bewehrung fliesst:

$$x \overset{(2)}{=} \frac{df_{sd}}{0.85 f_{cd}} \rho = \frac{720\text{mm} \cdot 435\,\text{MPa}}{0.85 \cdot 20\,\text{MPa}} 0.025 = 461\,\text{mm}$$

$$\chi_u \overset{(4)}{=} \varepsilon_{c2d} \frac{0.85 f_{cd}}{\rho d f_{sd}} = 0.003 \frac{0.85 \cdot 20\,\text{MPa}}{0.025 \cdot 720\text{mm} \cdot 435\,\text{MPa}} = 6.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = 6.5 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\varepsilon_{sm} = \chi_u (d - x) = 6.5 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot (720\text{mm} - 461\text{mm}) = 1.7‰$$

Da die mittlere Stahldehnung in der Nähe der Fliessdehnung des Stahles liegt und die Stahldehnung am Riss durch die Zugversteifung leicht grösser ist als die mittlere Stahldehnung, muss der Effekt der Zugversteifung analysiert werden, um zu bestimmen, ob die Bewehrung am Riss fliesst.

Für diese Berechnung wird unter anderem das Rissmoment M_r verwendet. Da das Zuggurtmodell meist verwendet wird, um das Verhalten insbesondere im Zustand der Gebrauchstauglichkeit zu analysieren wird für die Berechnung meist f_{ctm} und nicht f_{ctd} verwendet. Hier handelt es sich jedoch um eine Problemstellung, bei welcher der Zustand der Tragsicherheit analysiert wird, folglich wird f_{ctd} verwendet. Wenn die Anforderungen gemäss Norm bezüglich der Begrenzung von x/d eingehalten werden (im vorliegenden Beispiel beträgt dieses $x / d = 461\text{mm}/720\text{mm} = 0.64$), ist die Verwendung des Zuggurtmodelles für die Bestimmung des Biegewiderstandes im Allgemeinen nicht nötig. Für die weitere Berechnung wird der Rissabstandsparameter λ auf den Wert 1 gesetzt. Dieser kann jedoch theoretisch Werte zwischen 0.5 und 1 annehmen.

$$M_r = \frac{bh^2}{6} f_{ctd} = \frac{500\,\text{mm} \cdot (800\,\text{mm})^2}{6} 3.3\,\text{MPa} = 177\,\text{kNm}$$

Für die Berechnung des Effekts der Zugversteifung müssen des weiteren die Querschnittswerte im Zustand II (gerissen-elastisch) berechnet werden: 3.1.2.3.3

$$E_c = k_e \sqrt[3]{f_{cm}} \approx 33.6\,\text{GPa} \;\; (\text{Annahme } k_e = 10'000)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{205\,\text{GPa}}{33.6\,\text{GPa}} = 6.1$$

$$x_{II} = d \cdot \sqrt{n^2\rho^2 + 2n\rho} - n\rho = 720\,\text{mm} \cdot \sqrt{(6.1)^2 \cdot (0.025)^2 + 2 \cdot 6.1 \cdot 0.025} - 6.1 \cdot 0.025 = 303\,\text{mm}$$ VL 3.2, S.51

$$EI_{II} = \rho b d E_s (d - x_{II})(d - \frac{x_{II}}{3})$$ VL 3.2, S. 52

$$= 0.025 \cdot 500\,\text{mm} \cdot 720\,\text{mm} \cdot 205\,\text{GPa} \cdot (720\,\text{mm} - 303\,\text{mm}) \cdot (720\,\text{mm} - \frac{303\,\text{mm}}{3}) = 477 \cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2$$ VL 3.2, S. 61

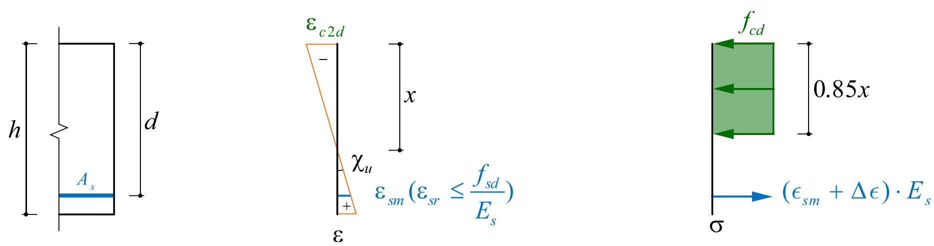
$$\rho_t = \frac{1}{\dfrac{M_r (d - x_{II}) E_s}{f_{ctd} EI_{II}} + 1 - n} = \frac{1}{\dfrac{177\,\text{kNm} \cdot (720\,\text{mm} - 303\,\text{mm}) \cdot 205\,\text{GPa}}{3.3\,\text{MPa} \cdot 477 \cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2} + 1 - 6.1} = 0.22$$

$$\lambda = 1.0$$ Annahme

$$\Delta\varepsilon = \frac{\lambda f_{ctd}(1 - \rho_t)}{2\rho_t E_s} = \frac{1.0 \cdot 3.3\,\text{MPa} \cdot (1 - 0.22)}{2 \cdot 0.22 \cdot 205\,\text{GPa}} = 0.03‰$$ VL 3.1, S. 43

$$\varepsilon_{sm}(\varepsilon_r = \frac{f_{sd}}{E_s}) = \frac{f_{sd}}{E_s} - \Delta\varepsilon = \frac{435\,\text{MPa}}{205\,\text{GPa}} - 0.03‰ = 2.09‰ > 1.7‰ = \varepsilon_{sm}$$

Die Bewehrung fliesst nicht, sodass die oben getroffene Annahme nicht stimmt und die Berechnung auf andere Art und Weise durchgeführt werden muss. Die neue Annahme der Versagensart ist Betonbruch bevor die Bewehrung fliesst. Die Spannung in der Bewehrung kann durch horizontales Gleichgewicht und der Annahme eines linearen Dehnungsverlaufs am Querschnitt bestimmt werden. Da die Bewehrung nicht fliesst, muss für das horizontale Kräftegleichgewicht die Spannung der Bewehrung am Riss $\sigma_s = \epsilon_{sr} \cdot E_s = (\epsilon_{sm} + \Delta\epsilon) \cdot E_s$ anstelle der Fliessspannung f_{sd} eingesetzt werden.



$$\varepsilon_{sm} = \chi(d - x) = \frac{\varepsilon_{c2d}}{x}(d - x) \text{ und } x = \frac{A_s E_s (\varepsilon_{sm} + \Delta\varepsilon)}{0.85 b f_{cd}}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{sm}^2 + \varepsilon_{sm}(\Delta\varepsilon + \varepsilon_{c2d}) + (\Delta\varepsilon \cdot \varepsilon_{c2d} - \frac{\varepsilon_{c2d} \cdot 0.85 b f_{cd} d}{A_s E_s}) = 0 \rightarrow \varepsilon_{sm} = 1.97‰$$

$$\sigma_s = (\varepsilon_{sm} + \Delta\varepsilon) E_s = (1.97‰ + 0.03‰) \cdot 205\,\text{GPa} = 410\,\text{MPa} < f_{sd}$$

Eine ähnliche Berechnung kann für $\rho = 0.021$ durchgeführt werden, mit dem Ergebnis, dass die Bewehrung knapp fliesst, wenn der Beton bricht.

Ergänzende Bemerkung:
Die Bewehrungsgehalte 0.021, 0.023 und 0.025 sind nach SIA 262 für diesen Träger nicht zulässig, da $x / d > 0.5$. Ein Versagen durch Betonbruch bevor die Bewehrung fliesst wird also implizit ausgeschlossen.

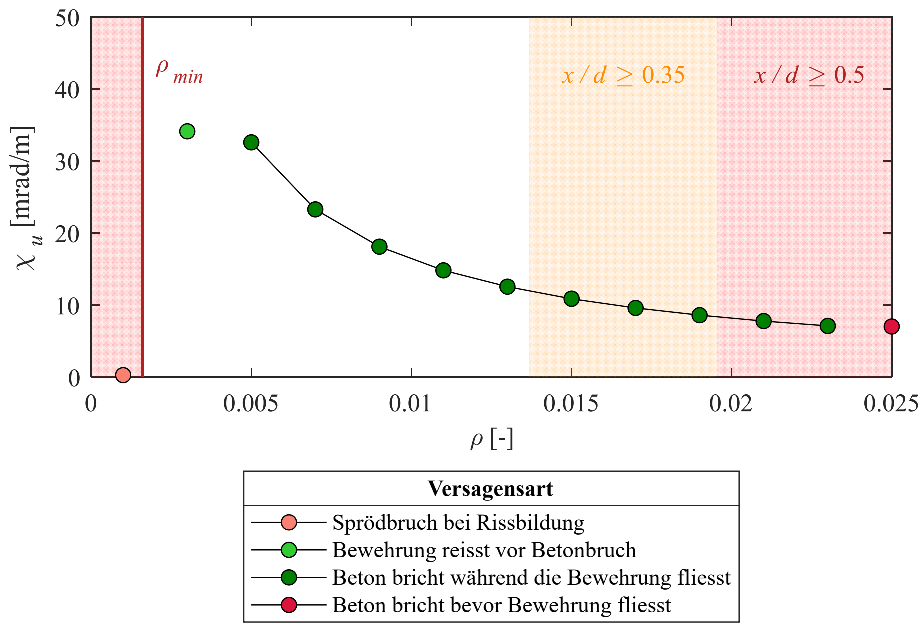


Abb. 3: Bruchkrümmung als Funktion des Bewehrungsgehalts, mit Angabe der Versagensarten.

In den Berechnungen in Frage 2a) wurde implizit angenommen, dass der Träger durch Betonbruch während dem Fliessen der Bewehrung versagt. In Frage 2b) wurde gezeigt, dass dies nicht für alle Bewehrungsgehalte der Fall ist. Konsequenterweise muss der Biegewiderstand ebenfalls gemäss der neuen Annahme des Versagensmechanismus berechnet werden. Es resultieren etwas andere Biegewiderstände als in Abbildung 2 angegeben. Abbildung 4 zeigt die Biegewiderstände aus Frage 2a) in weiss, falls die Annahme Betonbruch während dem Fliessen der Bewehrung nicht zutrifft, und in dunkelgrün, falls die Annahme zutrifft.

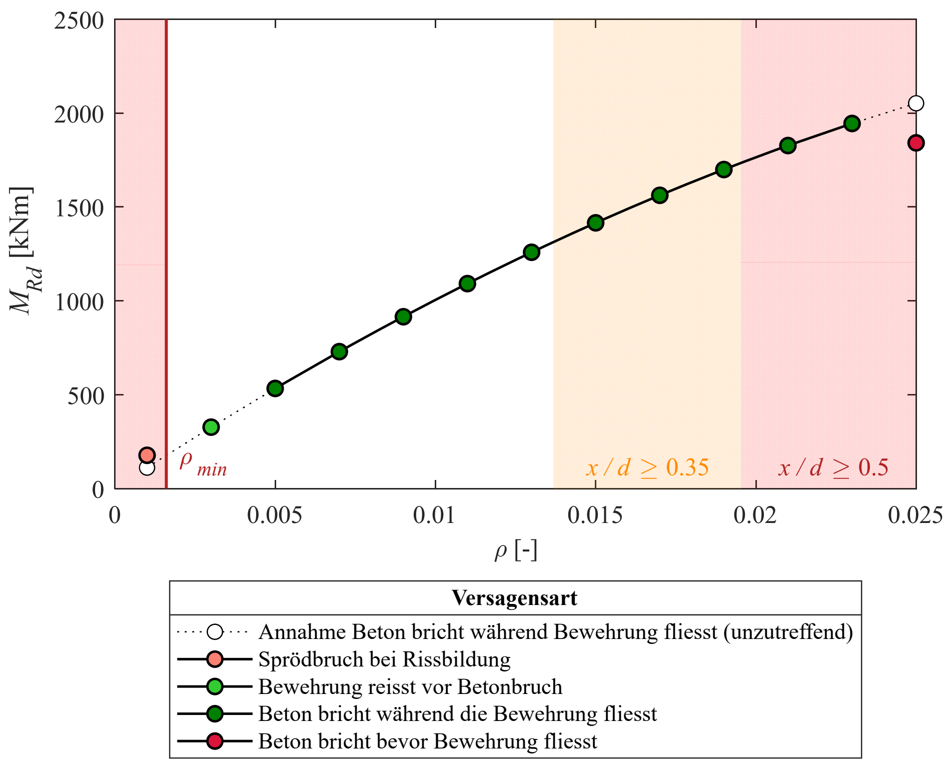


Abb. 4: Biegewiderstand als Funktion des Bewehrungsgehalts, mit Angabe der Versagensarten.

Bei kleinen Bewehrungsgehalten unterhalb der Mindestbewehrung resultiert mit zuvor genannter Annahme ein kleinerer Biegewiderstand als das Rissmoment. Das ist durch die Definition der Mindestbewehrung bei $M_r = M_{Rd}$ bedingt.

Der Biegewiderstand bei der Versagensart Reissen der Bewehrung beträgt exakt gleich viel wie in Frage 2a). Dies liegt daran, dass der Spannungsblock verwendet wurde. Dieser muss aufgrund des horizontalen Gleichgewichts für beide Varianten gleich gross sein, wodurch auch der Hebelarm derselbe ist. Der grosse Unterschied der zwei Versagensarten liegt in der Duktilität. Die maximale Krümmung beträgt 34.1 mrad/m beim Reissen der Bewehrung und würde 54.3 mrad/m betragen wenn die Bewehrung fliessen würde.

Bei Betonbruch bevor die Bewehrung fliesst resultieren geringere Biegewiderstände als in Frage 2a) angenommen, da die Kraft in der Bewehrung geringer ist ($A_s\sigma_s < A_s f_{sd}$). Dies hat einen stärkeren Einfluss als der leicht grössere Hebelarm infolge kleinerer Betondruckzone.