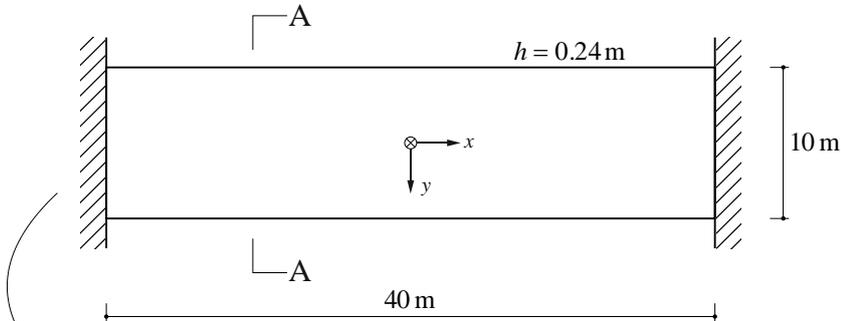


Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 1/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020

### Aufgabe 1

SIA 262

#### Geometrie



An Kern unverschieblich gehalten,  
Verlängerung und Verkürzung verhindert.

#### Baustoffe

Beton	C25/30	$f_{cd} = 16.5 \text{ MPa}$ $f_{cm} = 2.6 \text{ MPa}$ $E_{cm} = k_e \sqrt[3]{f_{cm}} \approx 32.1 \text{ GPa}$ (Annahme $k_e = 10'000$ )	Tab. 8 Tab. 3 3.1.2.3.3
Betonstahl	B500B	$f_{sd} = 435 \text{ MPa}$ $E_s = 205 \text{ GPa}$	Tab. 9 3.2.2.9
	Wertigkeit	$n = \frac{E_s}{E_c} = 6.4$	

#### a) Einwirkungen

Schwinden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cs} &= \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 0.45\text{‰} \\ \varepsilon_{cd}(t) &= \beta(t - t_s) \varepsilon_{cd,\infty} = 0.40\text{‰} \\ \beta(t - t_s) &= 0.8 \text{ (interpoliert zwischen } h_0 = 200 \text{ mm und } h_0 = 300 \text{ mm)} \\ \varepsilon_{cd,\infty} &= 0.5 \text{ (C25 / 30, RH = 60\%)} \\ \varepsilon_{ca}(t) &= 0.05\text{‰} \text{ (C25/30)} \end{aligned}$$

3.1.2.7

Fig. 3

Fig. 4

Temperaturdehnung:

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T = \frac{10^{-5}}{^\circ\text{C}} 20^\circ\text{C} = 0.2\text{‰}$$

3.1.2.4

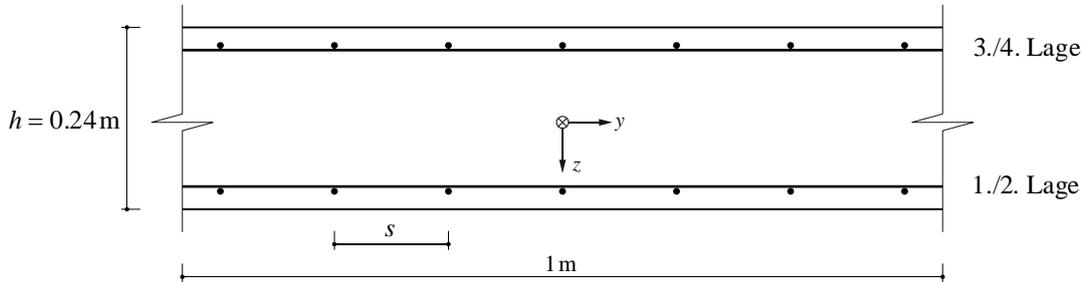
→ massgebende Zwängung aus Schwinden und Temperaturdehnung

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{cs} + \varepsilon_T = 0.65\text{‰}$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 2/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020

b) Mindestbewehrung für hohe Anforderungen nach SIA 262

Konstruktive Durchbildung, Schnitt A-A



Mit Berücksichtigung der Wertigkeit des Betonstahls:

$$\varnothing = 14 \text{ mm (Wahl)}$$

$$w_{nom} = 0.2 \text{ mm}$$

$$\sigma_{s,adm} = \sqrt{\frac{9E_s f_{cm} w_{nom}}{\varnothing}} = 261.8 \text{ MPa}$$

$$f_{ctd} = k_t f_{ctk,0.95} = 3.0 \text{ MPa}$$

$$k_t = \frac{1}{1 + 0.5t}, \quad t = h = 0.24 \text{ [m]}$$

$$f_{ctk,0.95} = 1.3 f_{cm}$$

$$\rho_{min} = \frac{f_{ctd}}{\sigma_{s,adm} - f_{ctd}(n-1)} = 1.23\%$$

$$a_{s,min} = \rho_{min} \cdot h \cdot \bar{b} = 1.23\% \cdot 240 \text{ mm} \cdot 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}'} = 2950 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}'}$$

$$\rightarrow \text{Wahl: } \varnothing 14 @ 100: a_s = 3079 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}'} \rightarrow \rho = \frac{a_s}{h \cdot \bar{b}} = 1.28\%$$

Korrigenda  
C1 zur Norm  
SIA 262

4.4.1.4

4.4.1.3

3.1.2.2.5

Bewehrung  
in 2 Lagen

Ohne Berücksichtigung der Wertigkeit des Betonstahls:

$$\rho_{min} = \frac{f_{ctd}}{\sigma_{s,adm}} = 1.15\% \rightarrow \text{geringer Unterschied}$$

c) Maximale und minimale Rissabstände und -breiten

$$s_{r,0} = \frac{\varnothing}{4} \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) = 269 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \text{Rissabstände: } s_{r,min} = 135 \text{ mm} < s_r < s_{r,max} = 269 \text{ mm}$$

Ist das Rissbild bereits abgeschlossen?

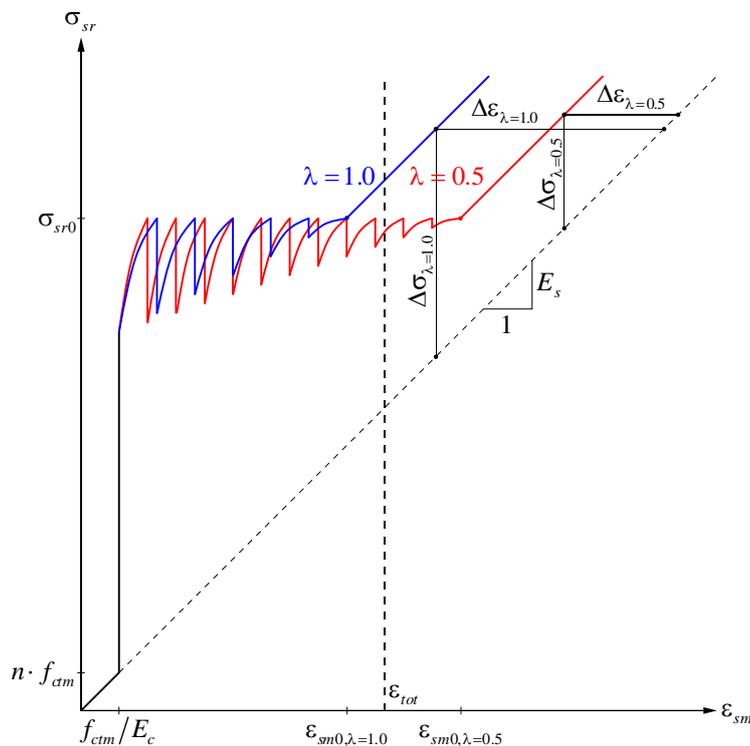
$$\varepsilon_{sm0}(\lambda) = \frac{\sigma_{sr0}}{E_s} - \Delta\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma_{sr0}}{E_s} - \lambda \frac{f_{cm}(1-\rho)}{2\rho E_s}$$

$$\sigma_{sr0} = f_{cm} \left( \frac{1}{\rho} - 1 + n \right) = 216.6 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sm0}(\lambda = 0.5) = 0.081\% > \varepsilon_{tot} = 0.065\% \rightarrow \text{Rissbild nicht abgeschlossen}$$

$$\varepsilon_{sm0}(\lambda = 1.0) = 0.057\% < \varepsilon_{tot} = 0.065\% \rightarrow \text{Rissbild abgeschlossen}$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 3/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020



Darstellung der Stahlspannungen in Funktion der aufgezwungenen Dehnung für  $\lambda = 1.0$  und  $\lambda = 0.5$ . Der Rissbildungsprozess ist nur schematisch dargestellt. Laut Zuggurtmodell treten 149 Risse für  $\lambda = 1.0$  und 297 Risse für  $\lambda = 0.5$  auf.

Rissbreiten bei noch nicht abgeschlossenem Rissbild:

$$w_r(\lambda) = \lambda \frac{s_{r0}(2\sigma_{sr0} - \lambda\sigma_{sr0})}{2E_s}$$

$$w_r(\lambda = 0.5) = 0.11 \text{ mm}$$

Rissbreiten bei bereits abgeschlossenem Rissbild:

$$w_r(\lambda) = \lambda \frac{s_{r0}(2\sigma_{sr} - \lambda\sigma_{sr0})}{2E_s}$$

$$\Delta\sigma_s(\lambda) = \Delta\varepsilon_s(\lambda)E_s = \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho}, \quad \Delta\sigma_s(\lambda = 1.0) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{sr} = \varepsilon_{tot}E_s + \Delta\sigma_s(\lambda = 1.0) = 233.2 \text{ MPa}$$

$$w_r(\lambda = 1.0) = 0.16 \text{ mm}$$

Anmerkung: Die Querbewehrung wird in einem Abstand  $s = 150 \text{ mm}$  angeordnet, daher ist  $\lambda$  näher bei 0.5 als 1.0 und das Rissbild noch nicht abgeschlossen.

Anstatt  $\text{Ø}14@100$  könnte für die Mindestbewehrung auch  $\text{Ø}16@125$  gewählt werden. Dies würde zu folgenden Rissabständen und -breiten führen:

$$s_r(\lambda = 1.0) = 295 \text{ mm}$$

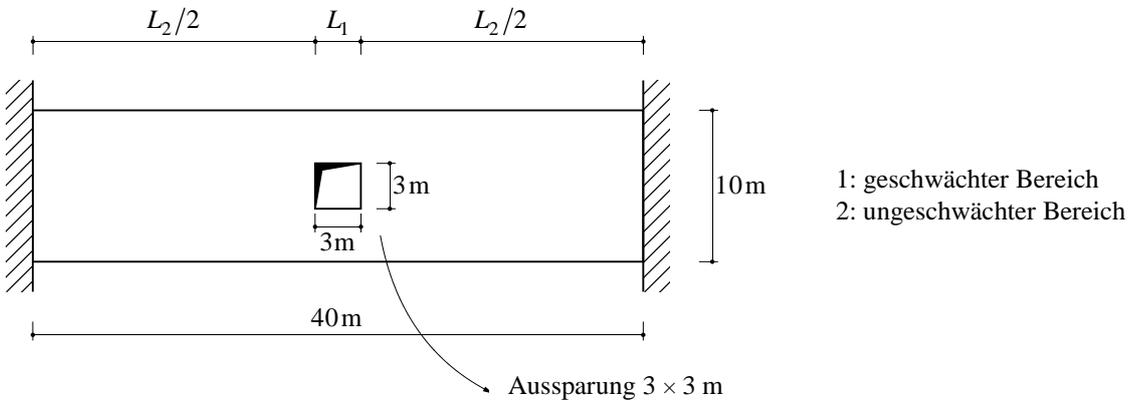
$$s_r(\lambda = 0.5) = 147 \text{ mm}$$

$$w_r(\lambda = 1.0) = 0.18 \text{ mm}$$

$$w_r(\lambda = 0.5) = 0.11 \text{ mm}$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 4/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020

d) Abschätzung der Rissbreiten



$$L_1 = 3 \text{ m}, L_2 = 37 \text{ m}$$

$$a_s = 2053 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}'}$$

Kann die Zwangseinwirkung durch ein abgeschlossenes Rissbild in Bereich 1 plus die elastische Verlängerung des Bereichs 2 aufgenommen werden?

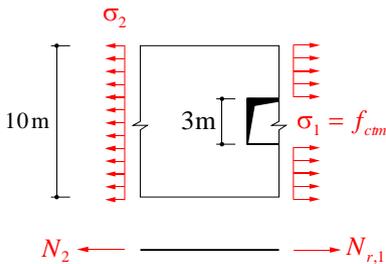
$$\Delta L_{tot} = \epsilon_{tot} L = 26 \text{ mm}$$

$$\rho = \frac{a_s}{h \cdot b} = 0.86\%$$

$$\sigma_{sr0} = f_{cm} \left( \frac{1}{\rho} - 1 + n \right) = 317.8 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{sm0}(\lambda) = \frac{\sigma_{sr0}}{E_s} - \lambda \frac{f_{cm}(1-\rho)}{2\rho E_s}, \quad \epsilon_{sm0}(\lambda=1) = 0.082\%$$

$$\Delta L_{sr,1} = \epsilon_{sm0}(\lambda=1) L_1 = 2.4 \text{ mm}$$



$$N_2 = N_{r,1} \leftrightarrow \sigma_2 \cdot 10 \text{ m} \cdot h \cdot (1 - \rho + n\rho) = f_{cm} \cdot 7 \text{ m} \cdot h \cdot (1 - \rho + n\rho) \rightarrow \sigma_2 = f_{cm} \frac{7}{10}$$

$$\Delta L_{el,2} = \frac{\sigma_2}{E_c} L_2 = \frac{f_{cm}}{E_c} \frac{7}{10} L_2 = 2.1 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \Delta L_{sr,1} + \Delta L_{el,2} = 4.5 \text{ mm} < 26 \text{ mm} = \Delta L_{tot} \rightarrow \text{Zwängung noch nicht abgebaut}$$

Reisst Bereich 2 bevor Bereich 1 ins Fließen kommt?

$$N_{Rd,1} = A_{c1} \rho f_{sd} = 3.72 \text{ MPa} \cdot A_{c1}$$

$$N_{r,2} = f_{cm} \frac{10}{7} A_{c1} (1 - \rho + n\rho) = 3.89 \text{ MPa} \cdot A_{c1}$$

$$\rightarrow N_{r,2} > N_{Rd,1}$$

$$A_{c,2} = \frac{10}{7} A_{c1}$$

Die zusätzlich aufzunehmende Zwängung wird über Rissverbreiterung in Bereich 1 (Stahlfließen) und nicht über Rissbildung in Bereich 2 aufgenommen!

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 5/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020
<p>Wie gross werden die Rissbreiten?</p> $s_{r0} = \frac{\emptyset}{4} \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) = 405 \text{ mm}$ <p>→ Rissabstände: <math>s_{r,min} = 203 \text{ mm} &lt; s_r &lt; s_{r,max} = 405 \text{ mm}</math></p> <p>→ Rissbildung alle 300 mm (wegen Querbewehrung) → <math>n_{Risse} = \frac{L_1}{300 \text{ mm}} = 10 \text{ Risse}</math></p> <p>Elastische Verlängerung in den Bereichen 1 und 2:</p> $\Delta L_{el,1} = \epsilon_{cm} L_1 = \frac{f_{ctm}}{2E_c} L_1 = 0.1 \text{ mm}$ $\Delta L_{el,2} = \frac{N_{Rd,1}}{7 A_{c1} E_{cm}} L_2 = 3 \text{ mm}$ <p>Abschätzung der Rissbreiten in Bereich 1:</p> $\sum \Delta w_r = \Delta L_{tot} - \Delta L_{el,c,1} - \Delta L_{el,2} = 22.9 \text{ mm}$ $w_r = \frac{\sum \Delta w_r}{10} = 2.3 \text{ mm}$ <p>Es entstehen klaffende Risse von 2.3 mm in Bereich 1. Dies ist unbedingt zu vermeiden und kann verhindert werden indem die Bewehrung so gewählt wird, dass Bereich 2 reisst bevor Bereich 1 ins Fliesen kommt (z.B. durch Zulagen in Bereich 1).</p> <p>Da die Bewehrung teilweise fließt, müssten weitere Effekte berücksichtigt werden (<math>\tau_b = \tau_{b1}</math>, <math>E_{sh}</math> anstatt <math>E_s</math>), was die Berechnung sehr kompliziert macht. Als Abschätzung reicht die vereinfachte Berechnung aus.</p>		

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 6/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020

## Aufgabe 2

### a) Einfluss der Betonverformungen an der Rissöffnung

Rissöffnung mit Berücksichtigung der Betonverformungen:

$$w_r = \frac{\lambda s_{r0} (2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0})}{2E_s}$$

Autogr. 3.1  
Folie 39

Rissöffnung ohne Berücksichtigung der Betonverformungen:

$$w_{r,s} = w_r + w_c \rightarrow w_{r,s} > w_r$$

$$w_c = \lambda s_{r0} \varepsilon_{cm} = \lambda s_{r0} \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c}$$

Werden die Betonverformungen vernachlässigt, werden die Rissbreiten überschätzt:

$$\frac{w_{r,s}}{w_r} - 1 = \frac{w_r + w_c}{w_r} - 1 = \frac{w_c}{w_r} = \frac{\lambda n f_{ctm}}{2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0}}$$

$\lambda = 0.5..1$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}} &= n \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \frac{\rho}{(1-\rho+n\rho)} \\ &= 6.1 \frac{0.5..1}{(2-0.5..1)} \frac{0.02}{(1-0.02+6.1 \cdot 0.02)} = 3.69..11.07\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\sigma_{sr} = f_{sk} = 500 \text{MPa}} &= \frac{n \lambda f_{ctm}}{2f_{sk} - \lambda f_{ctm}} \frac{1-\rho+n\rho}{\rho} \\ &= \frac{6.1 \cdot 0.5..1 \cdot 2.9}{2 \cdot 500 - 0.5..1 \cdot 2.9} \frac{1-0.02+6.1 \cdot 0.02}{0.02} = 0.96..2.10\% \end{aligned}$$

Die Betonverformungen bleiben im gerissen-elastischen Bereich konstant, da sich die Betonspannungen ab der Rissbildung nicht mehr ändern. Somit ist der Einfluss der Betonverformungen auf die Rissbreiten bei tiefen Lasten deutlich höher. Bei der Rissbildung für  $\lambda = 1$  werden die Rissöffnungen um 11% überschätzt, falls man die Betonverformungen nicht berücksichtigt. Beim Erreichen der Fließspannung des Stahls liegt der Unterschied nur noch bei rund 2% und kann somit vernachlässigt werden.

### b) Rissöffnungen beim Bruch der Bewehrung

Rissöffnung:

$$w_r = \lambda s_{r0} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \lambda \frac{\varnothing}{4} \frac{1-\rho}{\rho} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

Autogr. 3.1  
Folie 39

Mittlere Stahldehnung beim Bruch:

(Stahl fließt bei  $\sigma_{sr} = f_{tk}$  über die ganze Elementlänge in allen Duktilitätsklassen ( $\sigma_{s,min} \geq f_{sk}$ ))

→ Kontrolle in App)

$$\varepsilon_{sm} = \underbrace{\frac{\sigma_{sm} - f_{sk}}{E_{sh}} + \frac{f_{sk}}{E_s}}_{\text{bilineares Fließgesetz}} = \underbrace{\left( \frac{f_{tk} - \frac{\tau_{b1}}{\varnothing} \lambda s_{r0}}{E_{sh}} - \frac{f_{sk}}{E_{sh}} \right) + \frac{f_{sk}}{E_s}}_{\frac{d\sigma_s}{dx} = \frac{4\tau_{b1}}{\varnothing} \text{ da } \sigma_{s,min} \geq f_{sk}}$$

Autogr. 3.1  
Folie 45

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 7/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020

Mittlere Betondehnung beim Bruch:

$$\varepsilon_{cm} = \frac{\lambda f_{ctm}}{4E_c}$$

da  $\sigma_{s,min} \geq f_{sk}$

$$w_r = \lambda \frac{\varnothing}{4} \frac{1-\rho}{\rho} \left( \frac{\left( f_{tk} - \frac{\lambda f_{ctm}}{4} \frac{1-\rho}{\rho} \right) - f_{sk}}{E_{sh}} + \frac{f_{sk}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}}{4E_c} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{B500A}} = 0.65 \frac{20}{4} \frac{1-0.035}{0.035} \left( \frac{\left( 525 - \frac{0.65 \cdot 2.6}{4} \frac{1-0.035}{0.035} \right) - 500}{1108} + \frac{500}{205'000} - \frac{0.65 \cdot 2.6}{4 \cdot 32'075} \right) = 1.3 \text{ mm}$$

$$\xrightarrow{\text{B500B}} = 0.65 \frac{20}{4} \frac{1-0.035}{0.035} \left( \frac{\left( 540 - \frac{0.65 \cdot 2.6}{4} \frac{1-0.035}{0.035} \right) - 500}{841} + \frac{500}{205'000} - \frac{0.65 \cdot 2.6}{4 \cdot 32'075} \right) = 3.2 \text{ mm}$$

$$\xrightarrow{\text{B500C}} = 0.65 \frac{20}{4} \frac{1-0.035}{0.035} \left( \frac{\left( 625 - \frac{0.65 \cdot 2.6}{4} \frac{1-0.035}{0.035} \right) - 500}{1723} + \frac{500}{205000} - \frac{0.65 \cdot 2.6}{4 \cdot 32'075} \right) = 6.1 \text{ mm}$$

### c) Einfluss hochfester Beton

Die Rissabstände werden durch die Betonsorte nach dem Zuggurtmodell nicht beeinflusst. Die Rissbreiten werden jedoch durch die erhöhte Zugfestigkeit bei hochfesten Betonen verringert. Diese Versteifung kann mit zwei Effekten erklärt werden: (i) Durch die höheren Verbundspannungen bei hochfesten Betonen nehmen die mittleren Stahldehnungen ab und (ii) durch die höhere Zugfestigkeit erhöhen sich die mittleren Betondehnungen. Andererseits liegt bei höherfesten Betonen auch die Risslast höher, was dazu führt, dass die Rissbreiten bei Rissbildung grösser ausfallen.

### d) Zuggurt mit B500A

Die Stahlspannung am Riss bei einer aufgezwungenen Längsdehnung von 0.7 ‰ (=  $\varepsilon_{sm}$ ) beträgt in Abhängigkeit des Durchmessers der vier Bewehrungsstäbe:

$$\sigma_{sr} = \sigma_{sm} + \Delta \varepsilon E_s = \varepsilon_{sm} E_s + \lambda s_{r0} \frac{\tau_{b0}}{\varnothing} = \varepsilon_{sm} E_s + \lambda \frac{\varnothing}{4} \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) \frac{\tau_{b0}}{\varnothing} = \varepsilon_{sm} E_s + \frac{\lambda \tau_{b0}}{4} \left( \frac{A_c}{\varnothing^2 \pi} - 1 \right)$$

Die grösste Stahlspannung am Riss wird bei einem Durchmesser von 6 mm und  $\lambda = 1$  erreicht.

$$\sigma_{sr} = 0.7\text{‰} \cdot 205'000 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3.5}{4} \left( \frac{22'500}{6^2 \pi} - 1 \right) = 490 \text{ MPa} < 500 \text{ MPa} = f_{sk}$$

Die Fließgrenze wird nicht erreicht. Daher hat die Rissöffnung bei einer aufgezwungenen Längsdehnung von 0.7 ‰ die folgende Abhängigkeit zum Durchmesser der vier Bewehrungsstäbe:

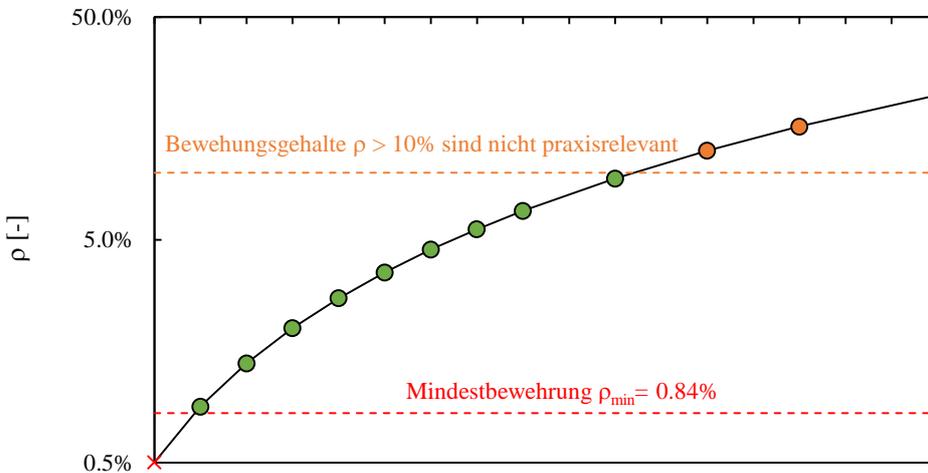
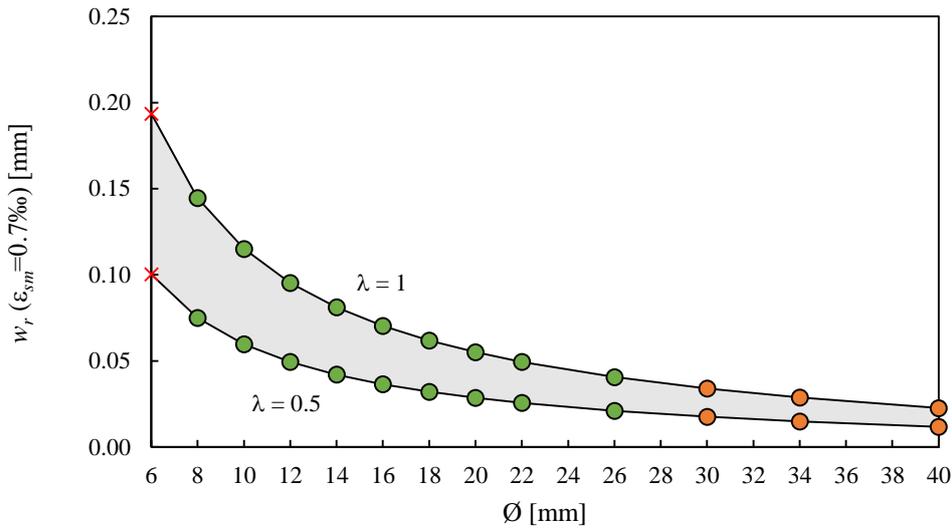
Autogr. 3.1  
Folie 42

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 8/8
Hausübung 1	Musterlösung	fm / 15.10.2020

Rissöffnung bei  $\varepsilon_{sm} = 0.7 \text{‰}$  :

$$\begin{aligned}
 w_r &= s_r \left( 0.7\text{‰} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c} \right) \\
 &= \lambda \frac{\varnothing}{4} \left( \frac{A_c}{\varnothing^2 \pi} - 1 \right) \left( 0.7\text{‰} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c} \right) \\
 &= \lambda \frac{\varnothing}{4} \left( \frac{22'500}{\varnothing^2 \pi} - 1 \right) \left( 0.7\text{‰} - \frac{\lambda \cdot 3.5}{2 \cdot 36'342} \right)
 \end{aligned}$$

Autogr. 3.1  
Folie 39



Mit zunehmendem Durchmesser nimmt die Rissöffnung ab. Da der Einfluss der Betonverformungen an der Rissöffnung vernachlässigbar klein ist, verläuft die Abnahme der Rissöffnung bei zunehmendem Stabdurchmesser näherungsweise hyperbolisch.

Es ist anzumerken, dass der Bewehrungsgehalt der Bewehrung 4Ø6 ( $\rho = 0.5\%$ ) unter der Mindestbewehrung  $\rho_{min} = f_{ctd} / (f_{sd} - f_{ctd} (n - 1)) = 3.5 / (435 - 3.5(5.64 - 1)) = 0.84\%$  (Normalfall und  $k_r = 1$ ) liegt und somit ein Sprödversagen des Zuggurtes nicht ausgeschlossen werden kann. Zudem resultieren für  $\varnothing \geq 30 \text{ mm}$  Bewehrungsgehalte  $> 10\%$ , welche als nicht praxisrelevant eingestuft werden.