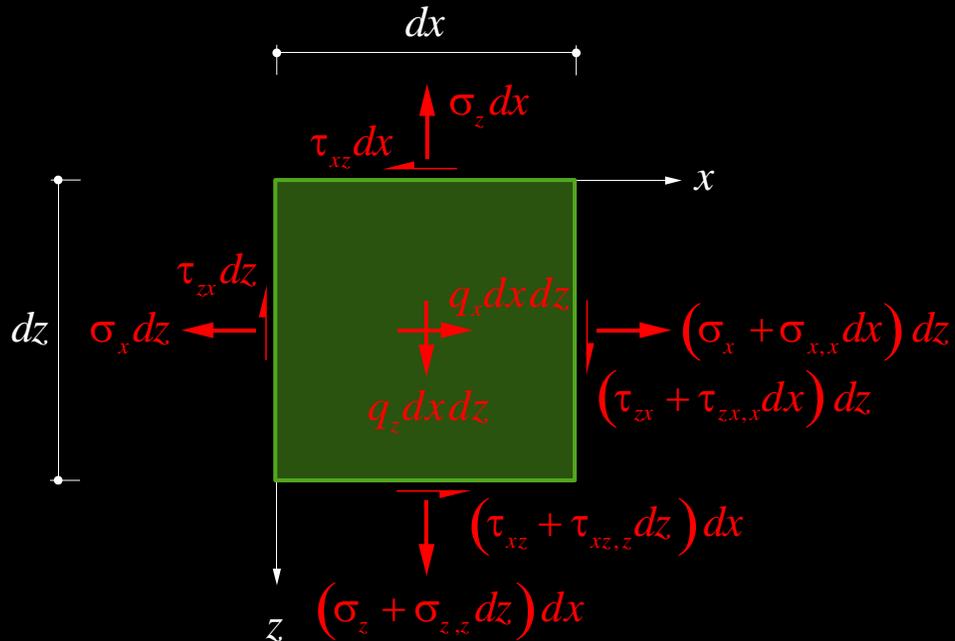


Scheibenelemente

Scheiben – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen



Positive Spannungen wirken an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Achsenrichtung

Positive Membrankräfte entsprechen positiven Spannungen

Indizes: 1-Richtung, 2-Normalenrichtung

Gleichgewicht in Richtungen x, z :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0$$

resp. in Membrankräften

(σ, τ konstant über Scheibendicke h):

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xz}}{\partial z} + h \cdot q_x = 0$$

$$\frac{\partial n_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial n_z}{\partial z} + h \cdot q_z = 0$$

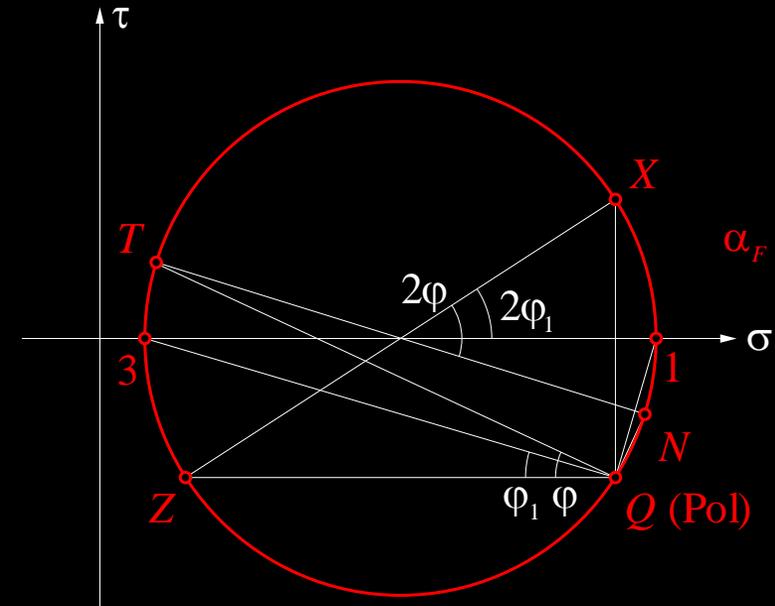
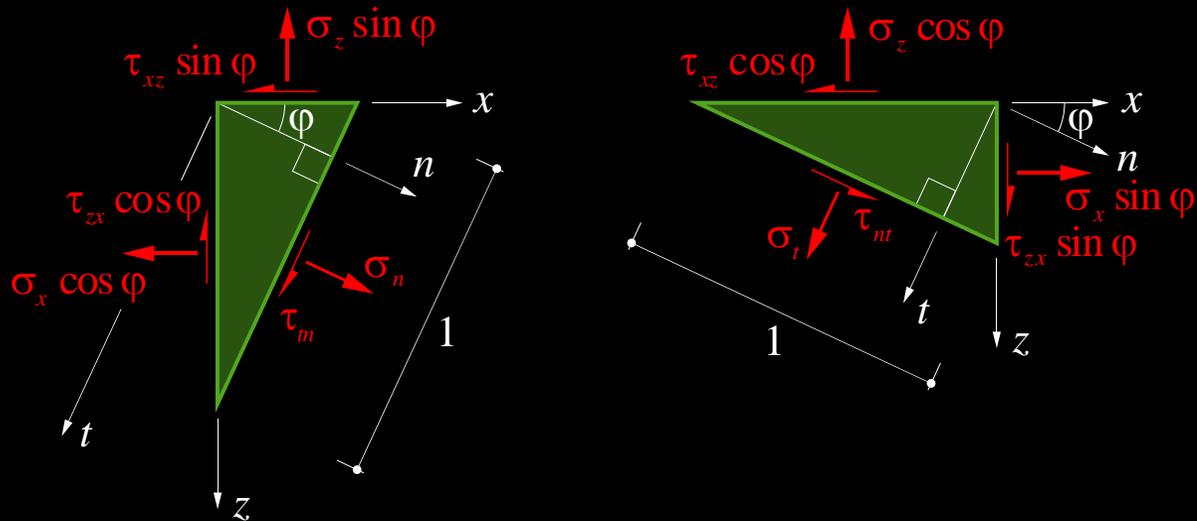
$$(n_x = h\sigma_x \quad n_z = h\sigma_z \quad n_{xz} = h\tau_{xz})$$

mit (Momentenbedingung $M_y = 0$):

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \text{resp.} \quad n_{zx} = n_{xz}$$

Scheiben – Spannungstransformation

Spannungstransformation: Mohrscher Kreis



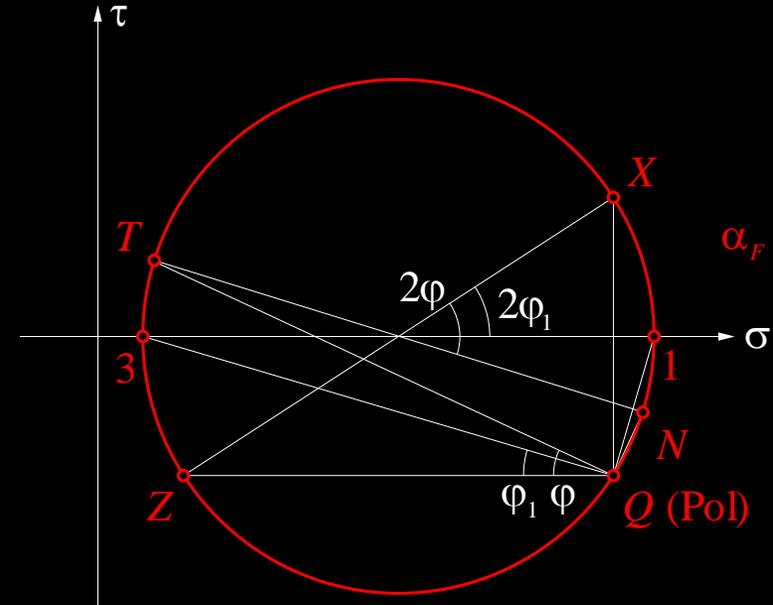
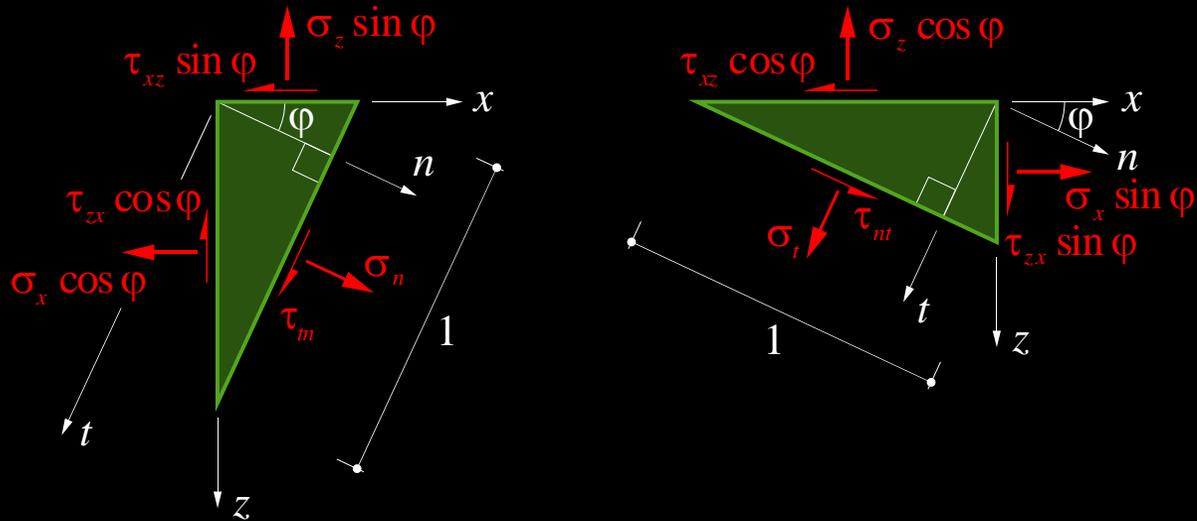
$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_z \sin^2 \varphi + 2\tau_{xz} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma_t = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_z \cos^2 \varphi - 2\tau_{xz} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\tau_{nt} = (\sigma_z - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Scheiben – Spannungstransformation

Spannungstransformation: Mohrscher Kreis



$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

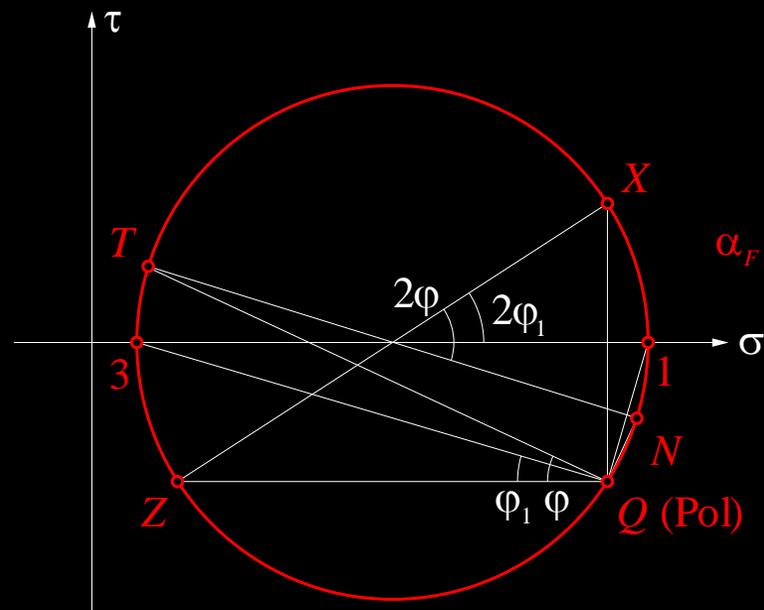
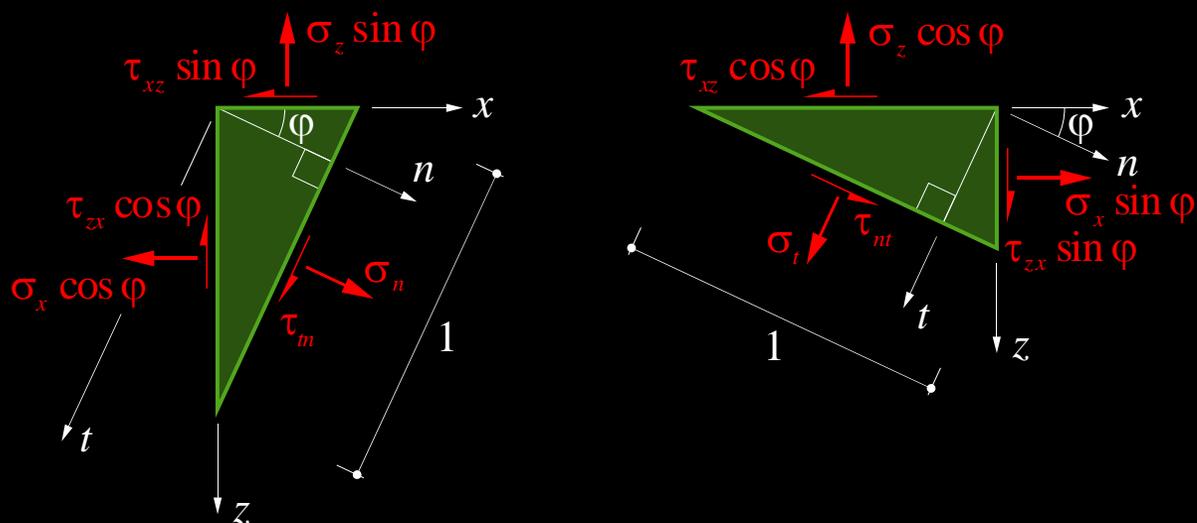
$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

$$\tau_m = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xz} \cos 2\varphi$$

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \\ 1 &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \\ \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Scheiben – Spannungstransformation

Spannungstransformation: Mohrscher Kreis



$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

$$\tau_m = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xz} \cos 2\varphi$$

$$\tau_{nt} = \tau_m = 0 \rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \right)$$

$$\sigma_{1,3} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}}_{\text{Mittelpunkt}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}}{2}}_{\text{Radius Mohrscher Kreis}}$$

Scheiben – Gleichgewicht

Gleichgewicht («Stahlbeton = Beton + Bewehrung»)

Orthogonal bewehrtes Element (Bewehrungsrichtungen x, z):

- Beton homogen und isotrop, nimmt Druckspannungen $\leq f_c$ in beliebige Richtung auf aber keine Zugspannungen
- Bewehrung nimmt nur Kräfte in Stabrichtung auf, bis maximal zum Betrag f_s und ist so verteilt und verankert, dass mit äquivalenten Spannungen gerechnet werden kann
- Starrer Verbund zwischen Beton und Bewehrung

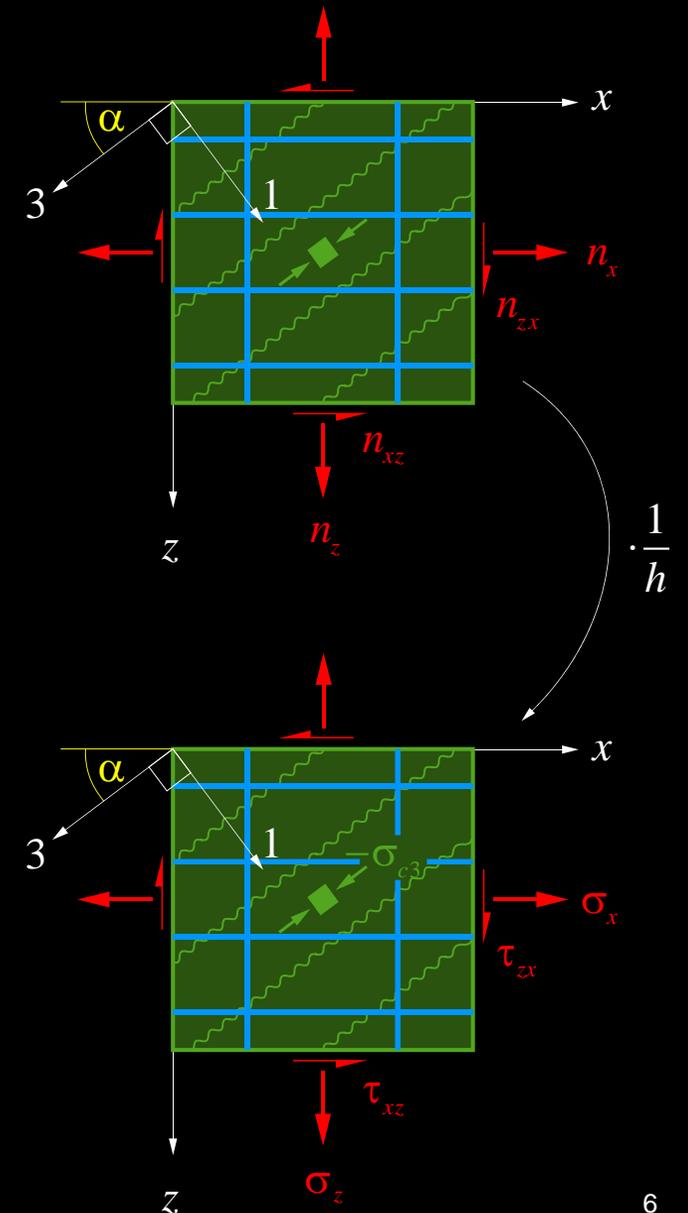
In Membrankräften:

$$\begin{aligned} n_x &= n_{xc} + n_{xs} = n_{xc} + a_{sx} \sigma_{sx} \\ n_z &= n_{zc} + n_{zs} = n_{zc} + a_{sz} \sigma_{sz} \\ n_{xz} &= n_{xzc} + n_{xzs} = n_{xzc} \\ (n_x &= h\sigma_x \quad n_z = h\sigma_z \quad n_{xz} = h\tau_{xz}) \end{aligned}$$

In äquivalenten Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xc} + \rho_x \sigma_{sx} \\ \sigma_z &= \sigma_{zc} + \rho_z \sigma_{sz} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xzc} \end{aligned}$$

(Bewehrungsgehalte $\rho_x = a_{sx}/h$, $\rho_z = a_{sz}/h$)

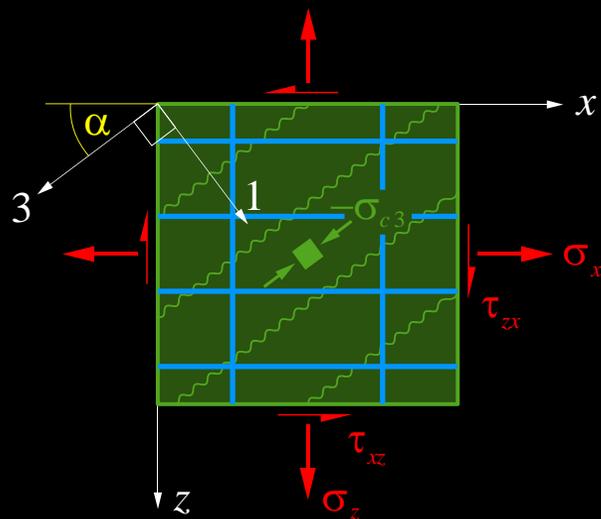


Scheibenelemente – Gleichgewicht

Gleichgewicht («**Stahlbeton** = **Beton** + **Bewehrung**»)

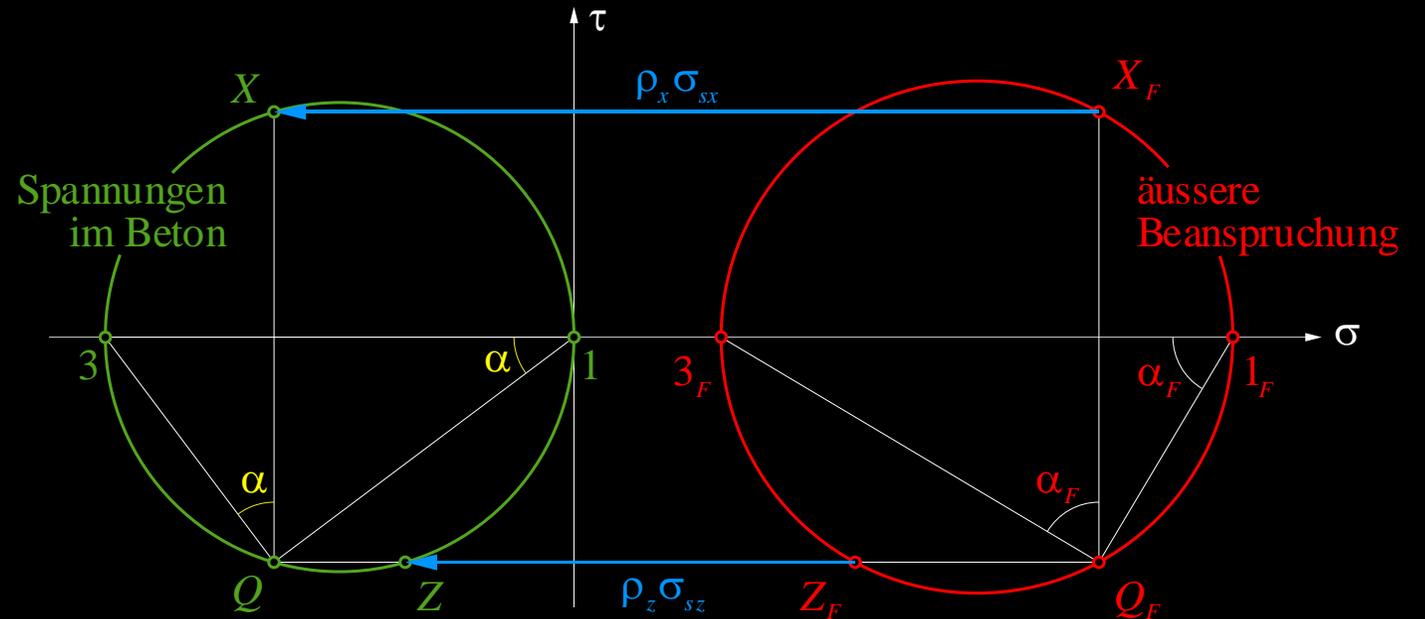
Orthogonal bewehrtes Element (Bewehrungsrichtungen x, z):

Darstellung mit Mohrschen Kreisen (bei orthogonaler Bewehrung einfach, da $\tau_{xzs} = 0$):



$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{xc} + \rho_x \sigma_{sx} = \sigma_{c3} \cos^2 \alpha + \rho_x \sigma_{sx} \\ \sigma_z &= \sigma_{zc} + \rho_z \sigma_{sz} = \sigma_{c3} \sin^2 \alpha + \rho_z \sigma_{sz} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xzc} = -\sigma_{c3} \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

α : Hauptdruckrichtung im Beton

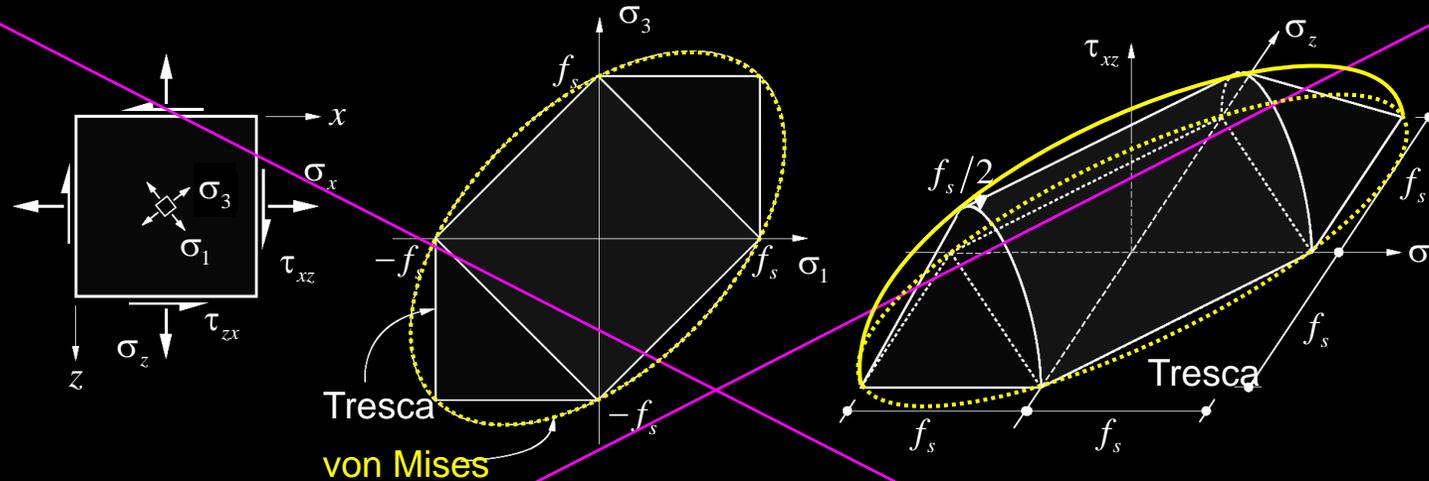


x, z : Richtungen der Bewehrung,
Verhalten nicht isotrop (auch nicht für $a_{sx} = a_{sz}$)!

Scheibenelemente– Fließbedingungen

Fließbedingungen von Tresca und v. Mises für ebenen Spannungszustand

(für Stahlbeton nicht geeignet, auch nicht bei «isotroper Bewehrung»!)



Tresca

$$\text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) - f_s = 0$$

- Hauptspannungsebene: Sechseck
- Raum: zwei elliptische Kegel und verbindender elliptischer Zylinder

v. Mises

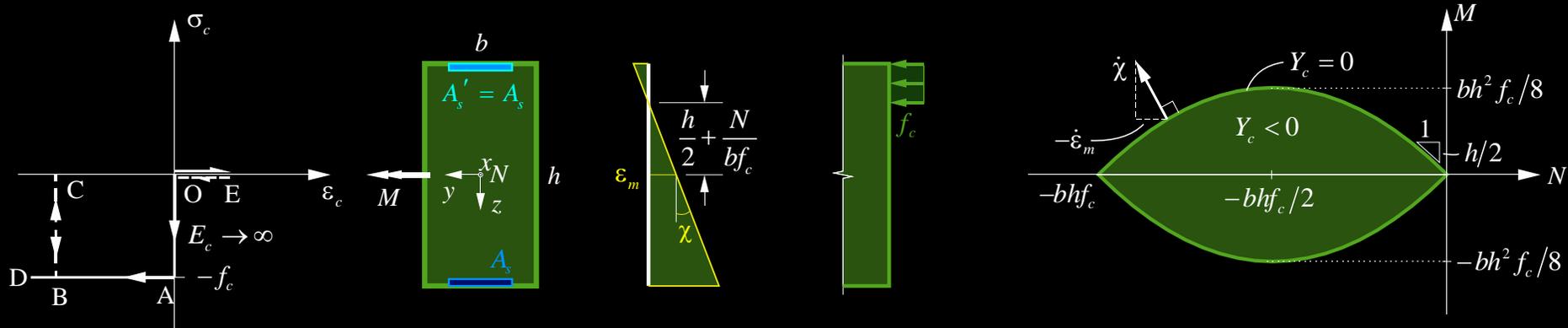
$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{xz}^2 - f_s^2 = 0$$

- Hauptspannungsebene: dem Tresca-Sechseck umschriebene Ellipse
- Raum: Der Fließbedingung von Tresca umschriebenes Ellipsoid

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung

(1) Beton allein



Druckzone oben: $N_c = -\left(\frac{h}{2} - \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right)$

Druckzone unten: $N_c = -\left(\frac{h}{2} + \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad -M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right)$

Fließfunktion: $Y_c = \pm M_{yc} + N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right) = 0$

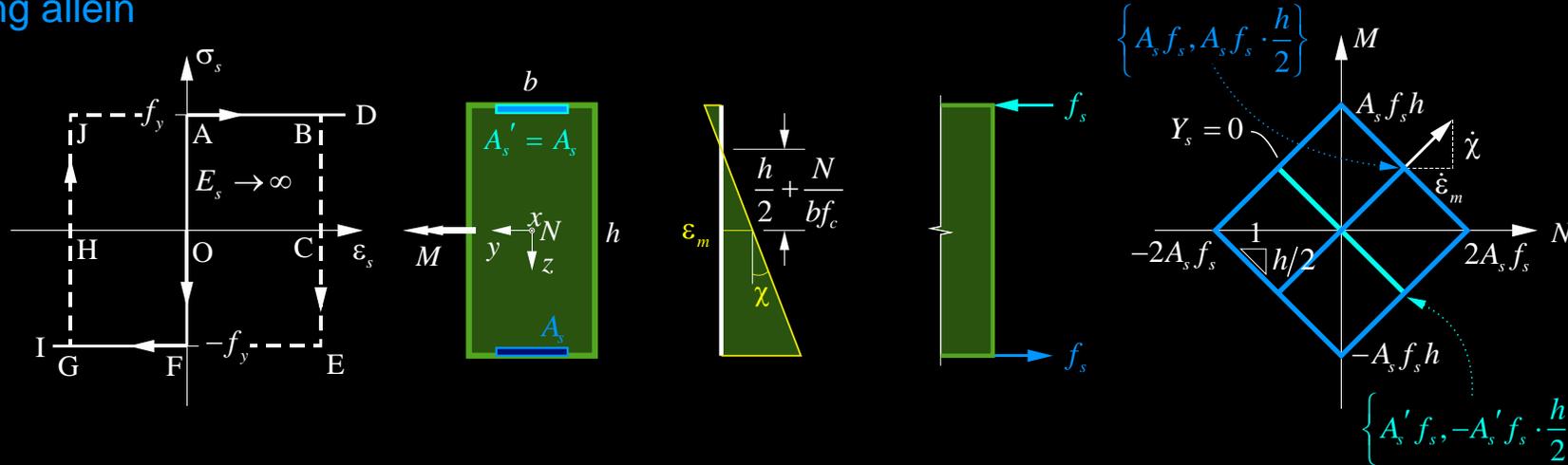
Fließgesetz: $\pm \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\chi}} = \frac{h}{2} + \frac{N_c}{b f_c} = \frac{\partial Y_c / \partial N_c}{\partial Y_c / \partial M_{yc}}$

- **Aplastischer** Bereich $Y_c < 0$, begrenzt durch **Fließgrenze** $Y_c = 0$ (besteht aus **zwei Parabeln**)
- **Plastische Verzerrungszinkremente** sind **orthogonal zur Fließgrenze**, nach aussen gerichtet (Fließgesetz, allgemein $\dot{\varepsilon} = \kappa \cdot \text{grad} Y$)

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung, $A_s = A'_s$

(2) Bewehrung allein



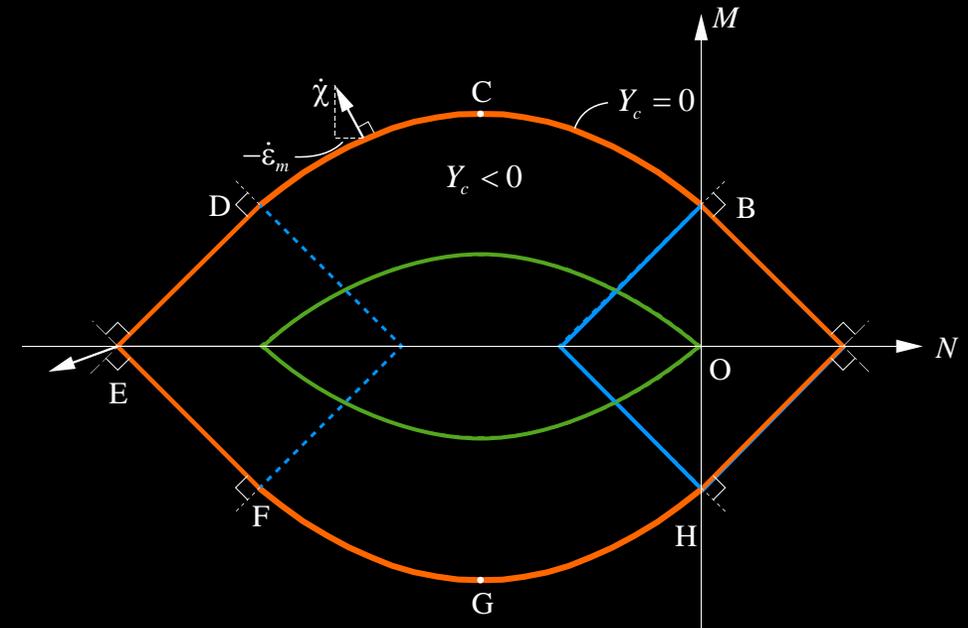
- **Aplastischer** Bereich $Y_s < 0$ ist bei zwei Bewehrungslagen ein **Parallelogramm** (bei symmetrischer Bewehrung $A_s = A'_s$ Rhombus), das durch die den beiden Bewehrungslagen entsprechenden Vektoren aufgespannt wird
- Kombination der beiden Bewehrungslagen grafisch durch geometrische Linearkombination (siehe Kombination von Beton und Bewehrung)
- Eckpunkte: beide Bewehrungen fließen, Seiten: eine Bewehrung fließt
- **Plastische Verzerrungssinkremente** sind **orthogonal zur Fließgrenze** $Y_s = 0$, **nach aussen gerichtet** (Fließgesetz)

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung, $A_s = A'_s$

(3) Stahlbeton = Beton + Bewehrung

- **Fließfigur des Stahlbetons** durch geometrische Linearkombination der Fließgrenzen $Y_c = 0$ und $Y_s = 0$
- **Vorgehen:** Fließgrenze ($Y_c = 0$) rein translatorisch mit ihrem Ursprung entlang Fließgrenze ($Y_s = 0$) bewegen (oder umgekehrt $Y_s = 0$ entlang $Y_c = 0$)
- Resultierender Bereich $Y < 0$ entspricht dem **aplastischen Bereich** des Stahlbetonquerschnitts, mindestens schwach konvex, Fließgesetz (Orthogonalität der plastischen Verzerrungsinkremente bezüglich Fließgrenze) gilt weiterhin
- Entlang gerader Stücke der Fließgrenze bleibt eine Bewehrung elastisch (starr)
- Vorgehen auf beliebige Bauteile und Beanspruchungen übertragbar



Scheibenelemente – Fließbedingungen

Fließbedingung für orthogonal bewehrte Scheiben

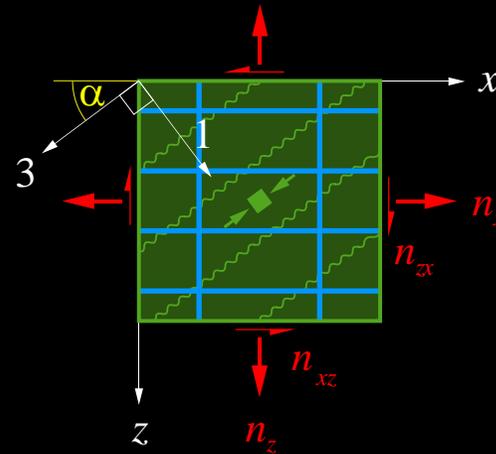
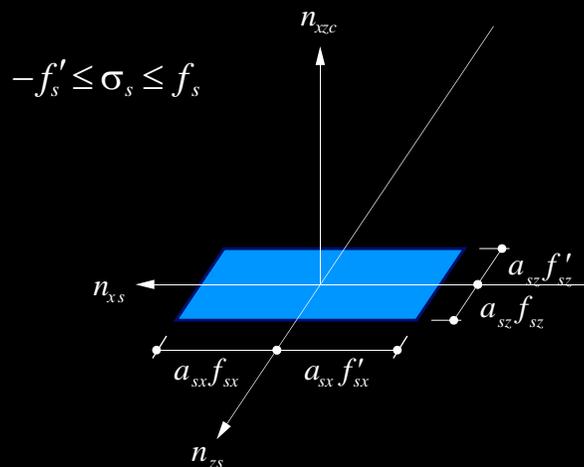
(«**Stahlbeton** = **Beton** + **Bewehrung**»):

Scheibendicke h

Beton und Stahl ideal plastisch, starrer Verbund

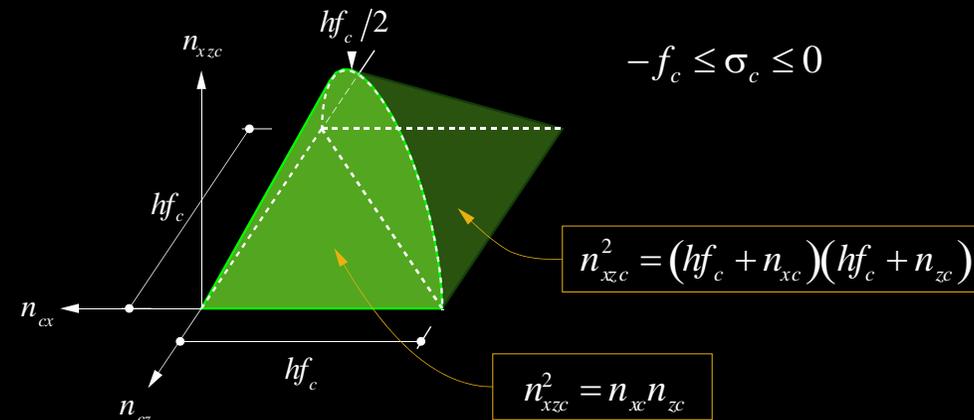
Bezeichnungen f_c und f_y (Zug) resp. f'_y (Druck) bei **Bemessung** ersetzen durch $f_c = k_c f_{cd}$ und $f_y = -f'_y = f_{sd}$

Fließbedingung Bewehrung:
(nimmt nur Kräfte in Stabrichtung auf)



$$\begin{aligned} n_x &= n_{xc} + n_{xs} = n_{xc} + a_{sx} \sigma_{sx} \\ n_z &= n_{zc} + n_{zs} = n_{zc} + a_{sz} \sigma_{sz} \\ n_{xz} &= n_{xzc} + n_{xzs} = n_{xzc} \end{aligned}$$

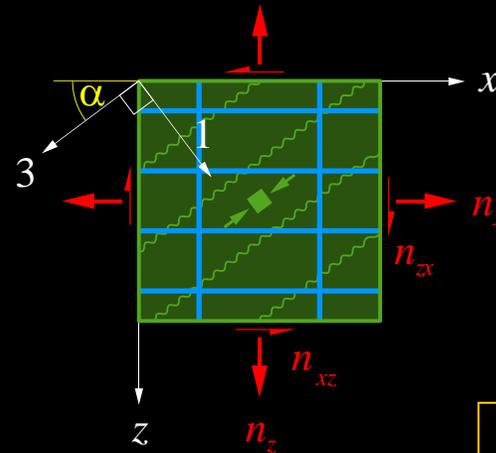
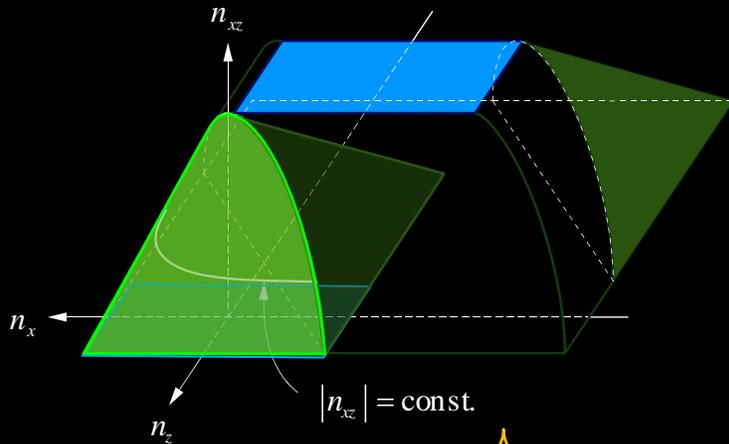
Fließbedingung Beton:
(homogen, isotrop, mit $f_{ct} = 0$)



Scheibenelemente – Fließbedingungen

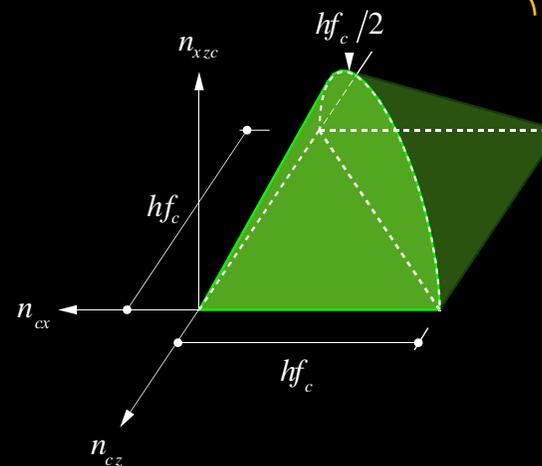
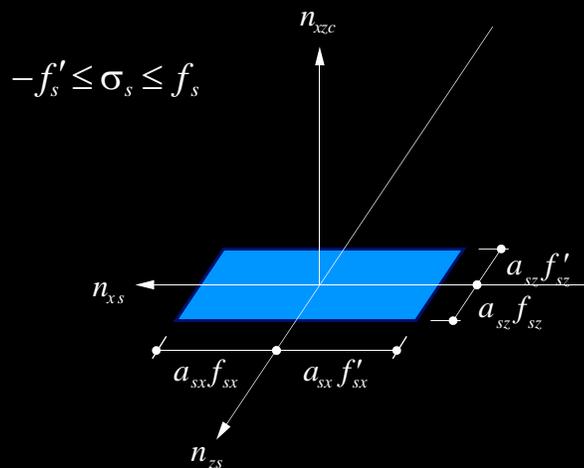
Fließbedingung für orthogonal bewehrte Scheiben

Geometr. Linearkombination Beton + Bewehrung



$$\begin{aligned}
 n_x &= n_{xc} + n_{xs} = n_{xc} + a_{sx} \sigma_{sx} \\
 n_z &= n_{zc} + n_{zs} = n_{zc} + a_{sz} \sigma_{sz} \\
 n_{xz} &= n_{xzc} + n_{xzs} = n_{xzc}
 \end{aligned}$$

Vorgehen:
 Fließgrenze $Y_c = 0$ rein translatorisch mit ihrem Ursprung entlang der Fließgrenze $Y_s = 0$ bewegen (oder umgekehrt $Y_s = 0$ entlang $Y_c = 0$)



Scheibenelemente – Fließbedingungen

Fließbedingung / Fließregimes Stahlbeton

Linearkombination der Fließbedingungen, d.h. verschieben der Fließbedingung des Betons (Ursprung) entlang der Fließbedingung der Bewehrung

«Stahlbeton = Stahl + Beton»

$$Y_1 = n_{xz}^2 - (a_{sx} f_{sx} - n_x)(a_{sz} f_{sz} - n_z) = 0$$

$$Y_2 = n_{xz}^2 - (hf_c - a_{sz} f_{sz} + n_z)(a_{sz} f_{sz} - n_z) = 0$$

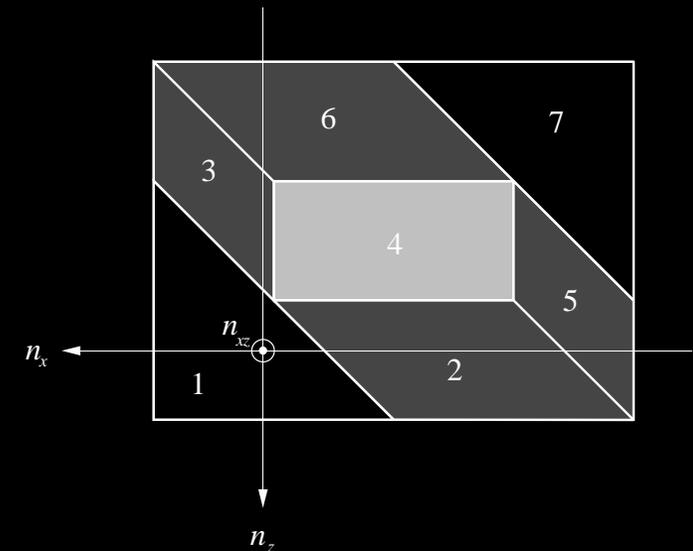
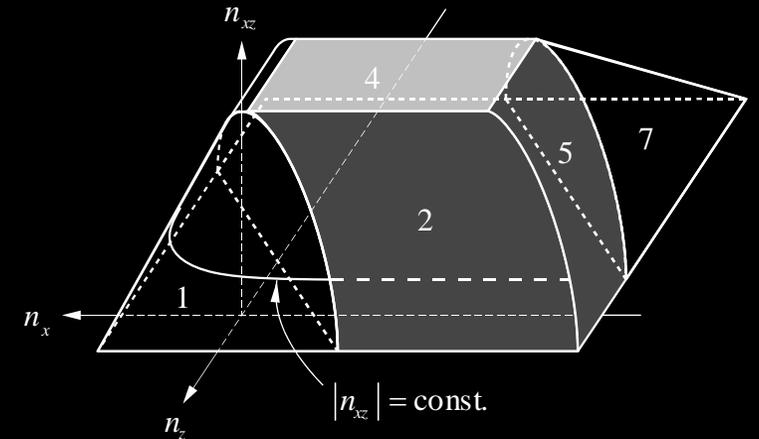
$$Y_3 = n_{xz}^2 - (a_{sx} f_{sx} - n_x)(hf_c - a_{sx} f_{sx} + n_x) = 0$$

$$Y_4 = n_{xz}^2 - (hf_c/2)^2 = 0$$

$$Y_5 = n_{xz}^2 + (a_{sx} f'_{sx} + n_x)(hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x) = 0$$

$$Y_6 = n_{xz}^2 + (hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z)(a_{sz} f'_{sz} + n_z) = 0$$

$$Y_7 = n_{xz}^2 - (hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x)(hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z) = 0$$



NB: Bewehrungsflächen je Längeneinheit in x- und z-Richtung $a_{sx} = A_{sx}/s_x$ $a_{sz} = A_{sz}/s_z$

Scheibenelemente – Fließbedingungen

Fließbedingung / Fließregimes Stahlbeton

Y_1 : Beide Bewehrungen fließen auf Zug
 $(\sigma_{sx} = f_{sx}, \sigma_{sz} = f_{sz}, 0 \geq \sigma_{c3} \geq -f_c)$

Y_2 : z-Bewehrung fließt auf Zug, Beton bricht
 $(\sigma_{sz} = f_{sz}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{sx})$

Y_3 : x-Bewehrung fließt auf Zug, Beton bricht
 $(\sigma_{sx} = f_{sx}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{sz})$

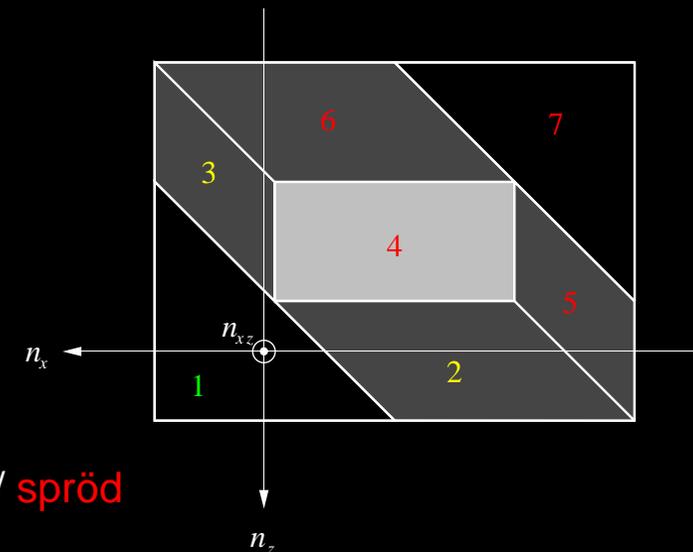
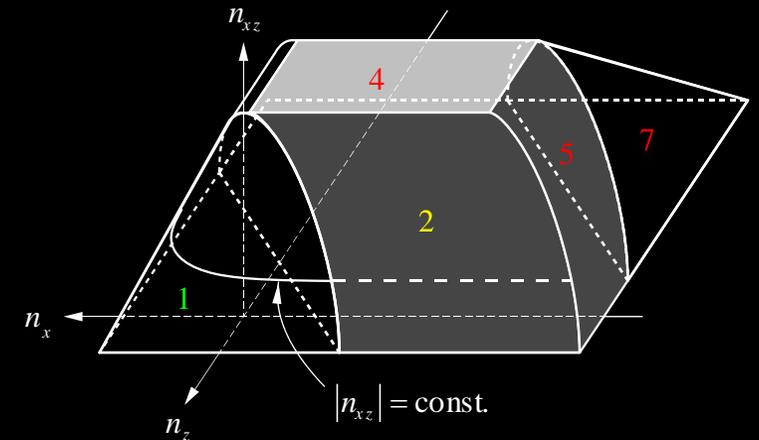
Y_4 : Beton bricht
 $(\sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{sx}, -f'_{sz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{sz})$

Y_5 : x-Bewehrung fließt auf Druck, Beton bricht
 $(\sigma_{sx} = -f'_{sx}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{sz})$

Y_6 : z-Bewehrung fließt auf Druck, Beton bricht
 $(\sigma_{sz} = -f'_{sz}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{sx})$

Y_7 : Beide Bewehrungen fließen auf Druck, Beton bricht
 $(\sigma_{sx} = -f'_{sx}, \sigma_{sz} = -f'_{sz}, \sigma_{c3} = -f_c)$
 (mittlere Betonhauptspannung ebenfalls negativ)

NB: Bruchart: **sehr duktil** / **duktil** (ausser bei sehr flachen Druckfeldneigungen) / **spröd**



Scheibenelemente – Fließbedingungen

Verzerrungsinkremente und Hauptdruckrichtung

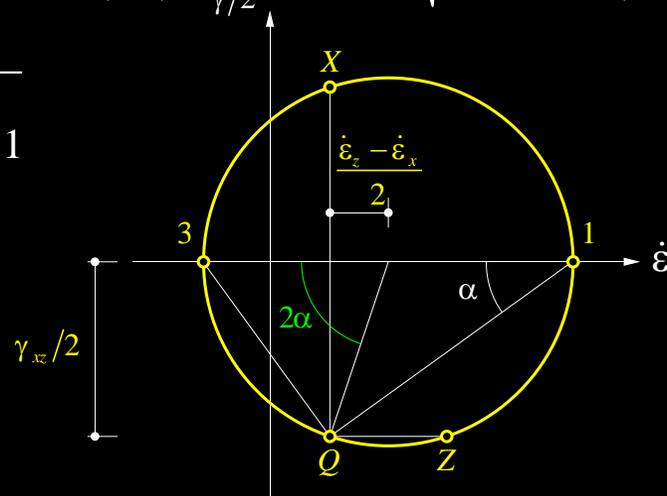
Verzerrungsinkremente sind proportional zu den Komponenten der äusseren Normalen auf die Fließfläche (Gradient) im jeweiligen Punkt der Fließfigur ($\kappa \geq 0$: beliebiger Faktor):

$$\dot{\epsilon}_x = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_x}, \quad \dot{\epsilon}_z = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_z}, \quad \dot{\gamma}_{xz} = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_{xz}}$$

Neigung α der Hauptdruckrichtung 3 bez. x-Achse folgt mit Mohrschem Kreis aus plastischen Dehnungsinkrementen (Hauptverzerrungsrichtung = Hauptdruckspannungsrichtung Beton):

$$\cot 2\alpha = \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}} \quad \text{mit} \quad \cot \alpha = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{\sin(2\alpha)} = \cot(2\alpha) + \sqrt{\frac{\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}}\right)^2 + 1}$$



$$Y_1 : \cot^2 \alpha = (a_{sx} f_{sx} - n_x) / (a_{sz} f_{sz} - n_z)$$

$$Y_2 : \cot^2 \alpha = (hf_c - a_{sz} f_{sz} + n_z) / (a_{sz} f_{sz} - n_z)$$

$$Y_3 : \cot^2 \alpha = (a_{sx} f_{sx} - n_x) / (hf_c - a_{sx} f_{sx} + n_x)$$

$$Y_4 : \cot^2 \alpha = 1$$

$$Y_5 : \cot^2 \alpha = -(a_{sx} f'_{sx} + n_x) / (hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x)$$

$$Y_6 : \cot^2 \alpha = -(hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z) / (a_{sz} f'_{sz} + n_z)$$

$$Y_7 : \cot^2 \alpha = (hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z) / (hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x)$$

Scheibenelemente – Fließbedingungen

Bemessung der Bewehrung

Bemessungspraxis: in der Regel Regime 1 (duktile Bruchart; Fließen der beiden Bewehrungen vor Betonbruch, Beton bleibt intakt).

Fließbedingung für Regime 1 in Parameterform (→ direkte Bemessung):

$$Y_1 = n_{xz}^2 - (a_{sx} f_{sx} - n_x)(a_{sz} f_{sz} - n_z) = 0$$

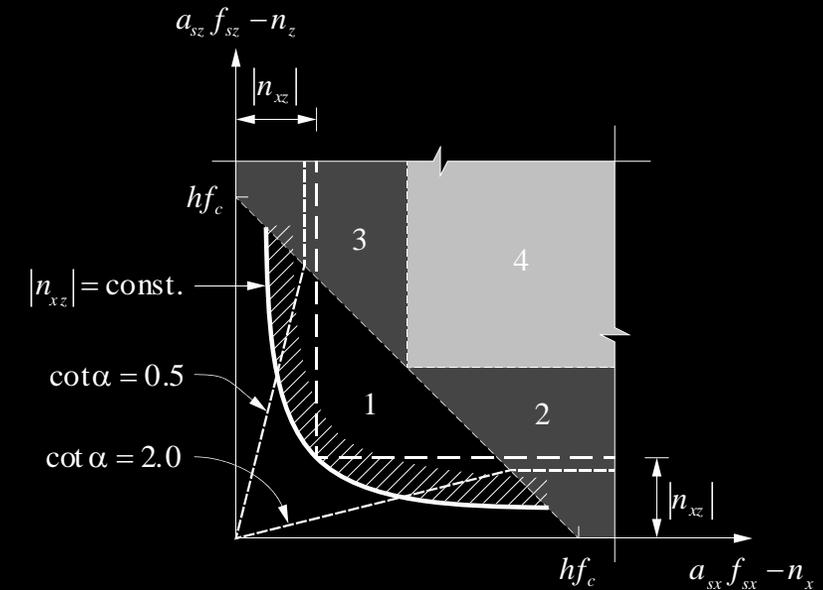
$$k = \cot \alpha \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} a_{sx} f_{sx} &\geq n_x + k |n_{xz}| \\ a_{sz} f_{sz} &\geq n_z + k^{-1} |n_{xz}| \end{aligned}$$

Bedingung, damit Fließregime 1 massgebend wird (kein Betonbruch):

$$h f_c \geq a_{sx} f_{sx} + a_{sz} f_{sz} - (n_x + n_z)$$

NB:

- Grösse von f_c siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete». Näherung gemäss SIA 262 : $f_c = k_c f_{cd}$ (mit $k_c = 0.55$)
- Neigung des Betondruckfelds im Regime 1 folgt aus: $\cot^2 \alpha = (a_{sx} f_{sx} - n_x) / (a_{sz} f_{sz} - n_z)$
- Wert $k = \cot \alpha$ theoretisch frei wählbar, in Bemessungsnormen oft Bedingung $0.5 \leq k \leq 2$
- Verwendung von $k = 1$, d.h. $\alpha = 45^\circ$: «linearisierte Fließbedingungen», in vielen FE-Programmen implementiert. Sichere Bemessung, aber nur eine von vielen Möglichkeiten (bei separater Grenzwertbildung für n_x , n_y , n_{xy} u.U. stark auf sicherer Seite)



Scheibenelemente – Fließbedingungen

Stegdruckbruch (Regime 2)

Ist die Bedingung $hf_c \geq a_{sx}f_{sx} + a_{sz}f_{sz} - (n_x + n_z)$ nicht eingehalten, liegt eine Bruchart vor, bei welcher der **Beton auf Druck versagt**.

Praktisch relevant ist insbesondere bei Trägern das Regime 2, welches in Fällen mit $a_{sx}f_{sx} - n_x > a_{sz}f_{sz} - n_z$ vorliegt.

- Bruchart: Fließen der z-Bewehrung mit gleichzeitigem Betondruckbruch heisst **Stegdruckbruch** («web crushing»)
- Schubwiderstand des Scheibenelements lässt sich als Viertelkreisbogen darstellen
- Begrenzungen für $\cot\alpha$ entsprechen im Diagramm Geraden

NB: Darstellung rechts = Projektion der Fließfigur in die Ebene (n_z, n_{xz}) , um Betrag $a_{sz}f_{sz}$ verschoben (n_x = verallgemeinerte Reaktion)

