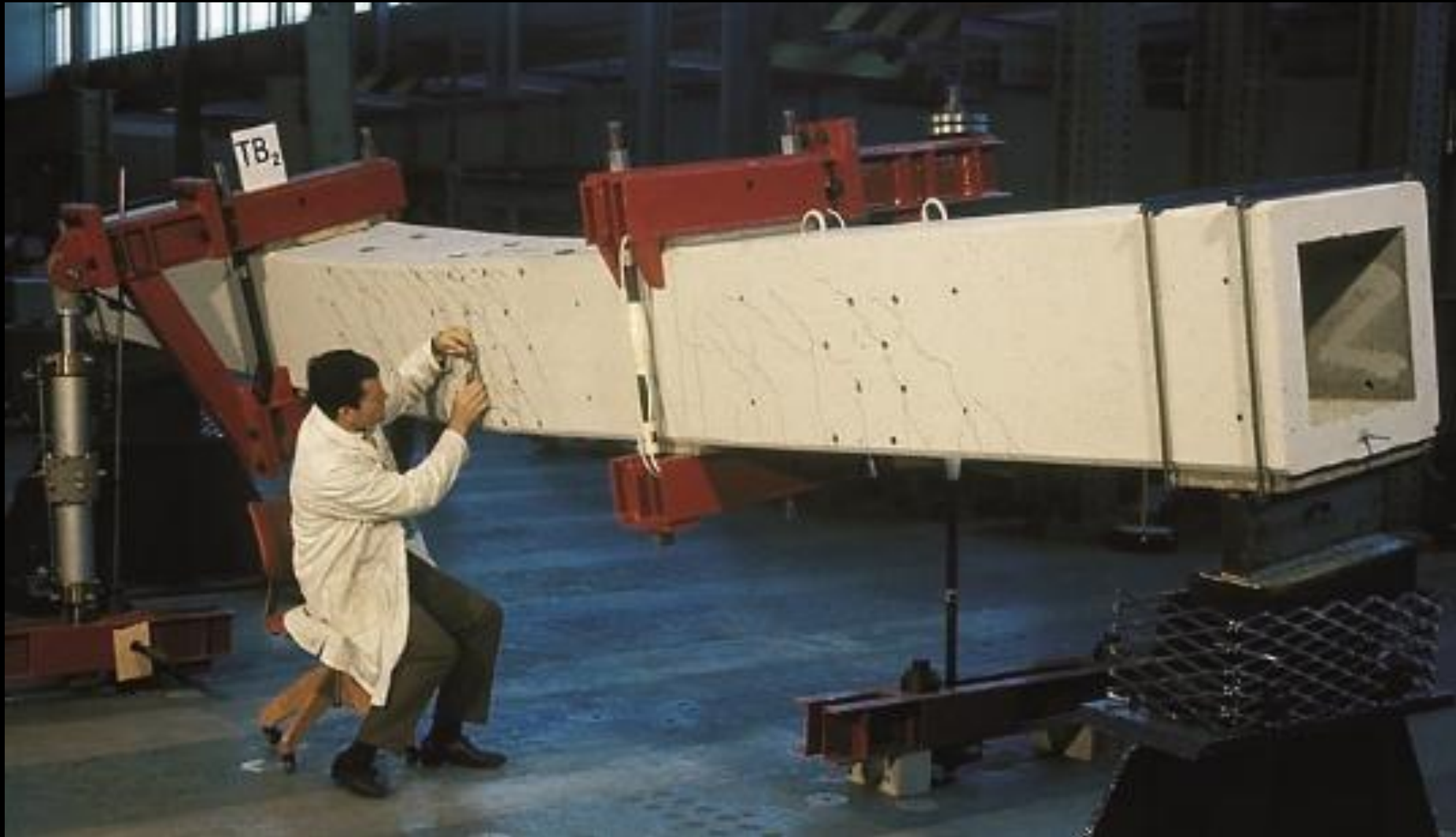


# 3.5 Torsion

# Torsion – Allgemeines

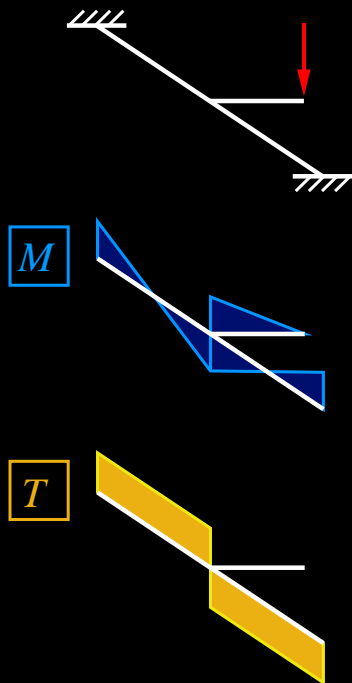


# Torsion – Allgemeines

## Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion

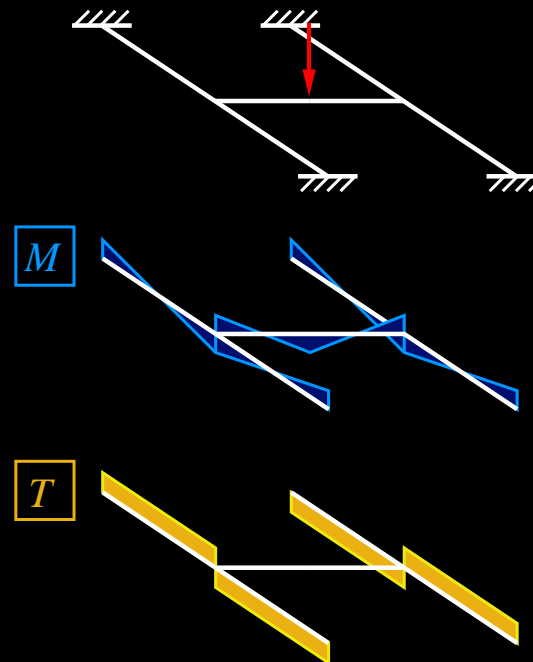
«Gleichgewichtstorsion»:

Torsion ist für Gleichgewicht erforderlich und unabhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :

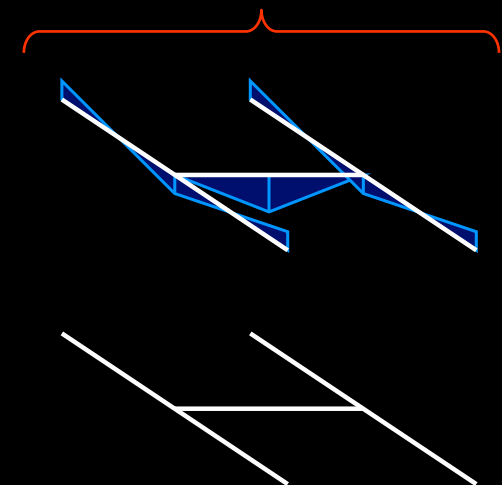


«Verträglichkeitstorsion»:

Torsion ist nicht für Gleichgewicht, sondern nur für die Verträglichkeit der Verformungen erforderlich und abhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :



Gleichgewicht kann mit  $T = 0$  erfüllt werden (Annahme  $GK = 0$ )

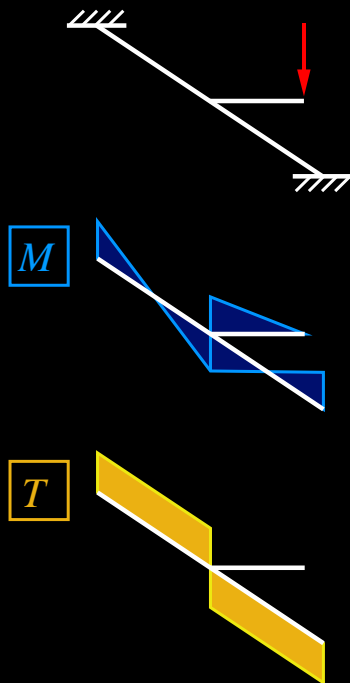


# Torsion – Allgemeines

## Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion

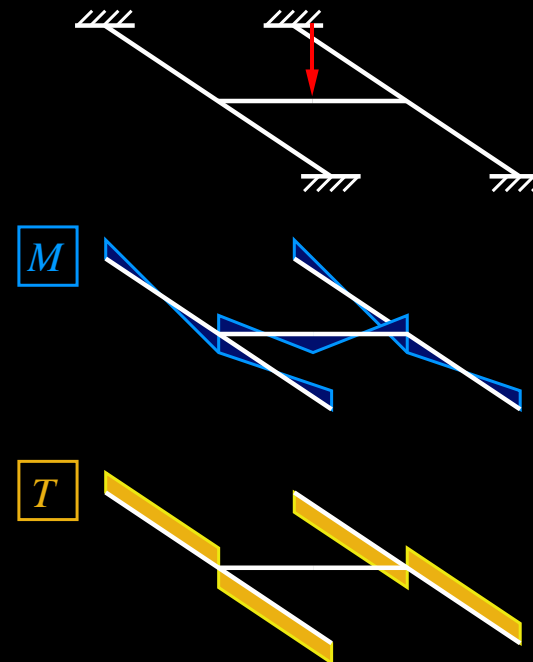
«Gleichgewichtstorsion»:

Torsion ist für Gleichgewicht erforderlich und unabhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :



«Verträglichkeitstorsion»:

Torsion ist nicht für Gleichgewicht, sondern nur für die Verträglichkeit der Verformungen erforderlich und abhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :



Massgebender Parameter: Verhältnis Torsions- zu Biegesteifigkeit  $(GK)/(EI)$

Im gerissenen Zustand ist

$$GK^{II} \approx 0.1GK^I, EI^{II} \approx 0.3EI^I$$

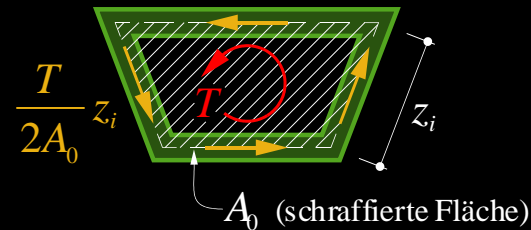
$$\rightarrow \frac{GK^{II}}{EI^{II}} \approx \frac{1}{3} \frac{GK^I}{EI^I}$$

Berücksichtigung z.B. durch Berechnung mit  $(EI^I, GK^I/3)$

(Verformungen dann aber mit Faktor 3 zu erhöhen)

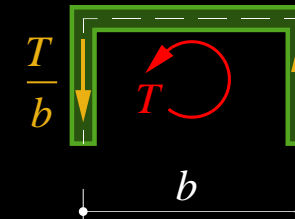
# Torsion – Allgemeines

## Umlauf- und Wölb torsion



### Umlauf torsion

Bei Vollquerschnitten und Hohlkastenträgern kann von Umlauf torsion mit geschlossenem Schubfluss ausgegangen werden.



### Wölb torsion

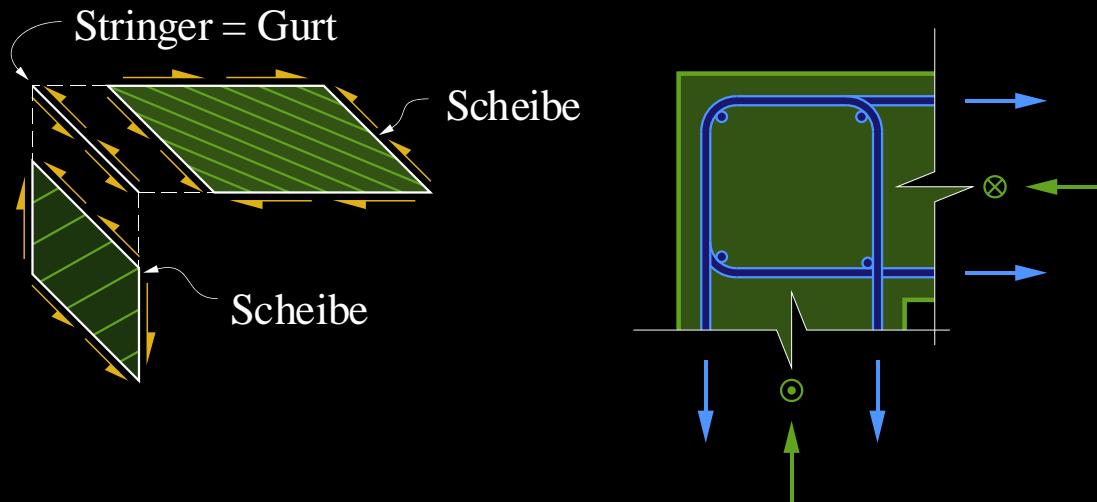
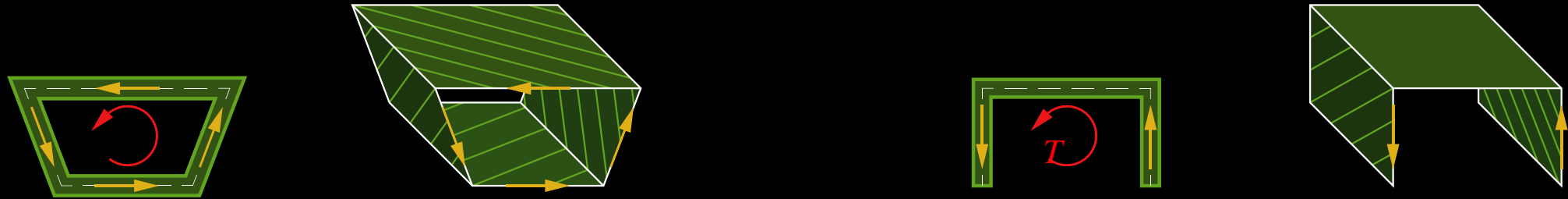
Bei offenen Querschnitten ergibt sich dagegen Wölb torsion.

Im Allgemeinen liegt gemischte Torsion mit Umlauf- und Wölb torsionsanteilen vor, siehe Vorlesung Baustatik III.

Die Schubflüsse aus Torsion in den einzelnen Querschnittsscheiben sind jenen aus Querkraft zu überlagern. Anstelle des Stegfachwerkmodells bei reiner Schubbeanspruchung resultiert für den gerissenen Zustand ein räumliches Fachwerkmodell resp. Spannungsfeld.

# Torsion – Allgemeines

## Räumliches Spannungsfeld

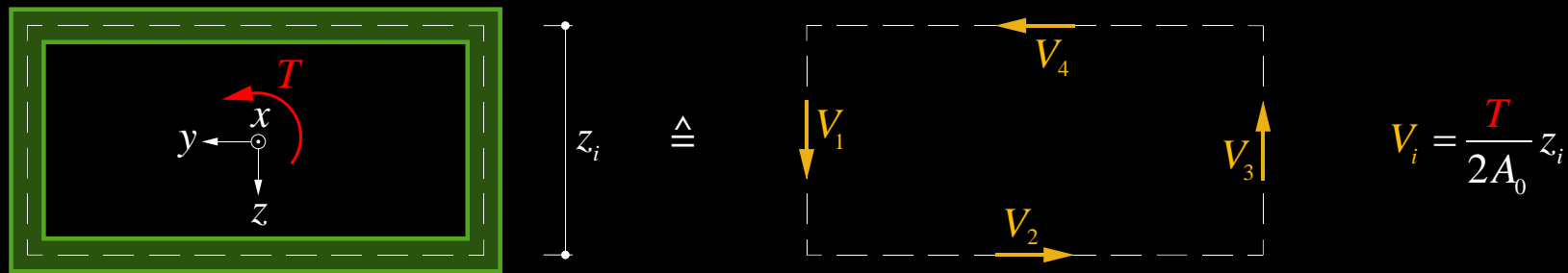


Die Sicherstellung des Schubflusses an den Kanten des Querschnitts erfordert eine entsprechende konstruktive Durchbildung, z.B. mit übergreifenden Steckbügeln.

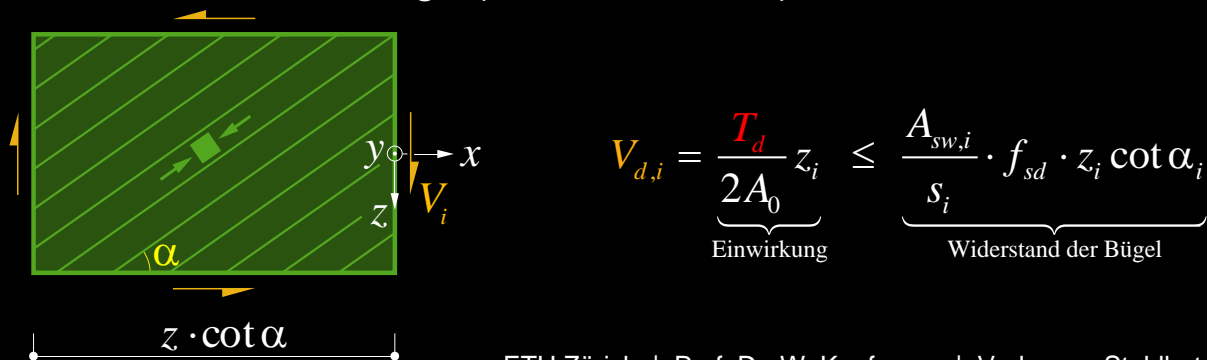
# Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw} / s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl} / u$



Die einzelnen Querschnittsscheiben erfahren eine Schubbeanspruchung; Schubkräfte und Torsionsbeanspruchung sind statisch äquivalent. In jeder Querschnittsscheibe stellt sich ein diagonales Druckfeld mit Neigung  $\alpha$  zur  $x$ -Achse ein → analog zur «Querschnittsbetrachtung» (siehe Querkraft):



# Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw} / s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl} / u$

Setzt man die Druckfeldneigung in allen Scheiben gleich  $\alpha$ , folgt aus dem Widerstand der Bügelbewehrung

$$T_{Rd,Asw} = 2A_0 \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{sd} \cdot \cot \alpha$$

Infolge der Schubabtragung über ein diagonales Druckfeld resultiert in jeder Scheibe eine zusätzliche Längszugkraft von  $V_{di} \cot \alpha_i$  (analog zur Vergrösserung der Längszugkraft aus Biegung durch Querkraft):

$$F_{t,Td} = \sum V_{di} \cot \alpha_i = \frac{T_d}{2A_0} \cdot \sum z_i \cot \alpha_i \stackrel{\alpha_i = \alpha = const.}{=} \frac{T_d}{2A_0} \cdot u \cdot \cot \alpha \leq A_{sl} f_{sd}$$
$$\rightarrow T_{Rd,Asl} = 2A_0 \cdot \frac{A_{sl}}{u} \cdot f_{sd} \cdot \tan \alpha$$



# Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw} / s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl} / u$

Durch Gleichsetzen der Widerstände der Bügel und der Längsbewehrung resultiert die Druckfeldneigung, bei der Bügel- und Längsbewehrung voll ausgenutzt werden und der zugehörige Torsionswiderstand:

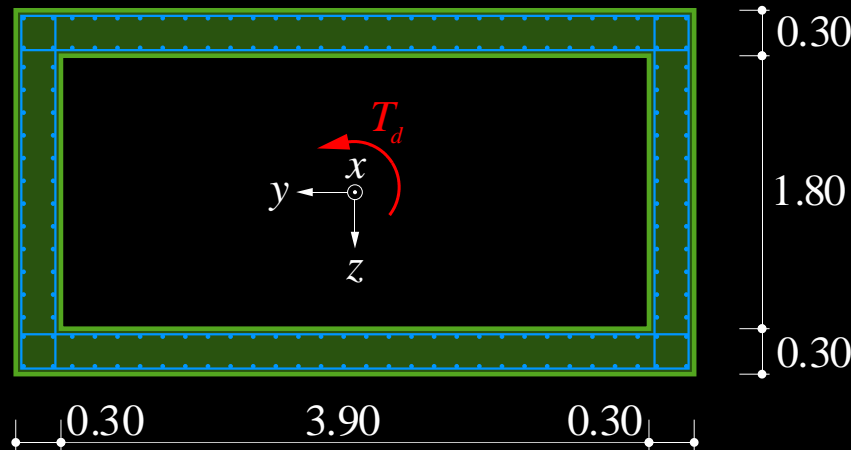
$$T_{Rd,Asw} = 2A_0 \cdot \frac{A_{sw} f_{sd}}{s} \cdot \cot \alpha = 2A_0 \cdot \frac{A_{sl} f_{sd}}{u} \cdot \tan \alpha = T_{Rd,Asl}$$
$$\rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{u}{A_{sl}} \quad \rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{u}{A_{sl}}} \quad \rightarrow T_{Rd} = T_{Rd,Asw} = T_{Rd,Asl} = 2A_0 f_{sd} \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{A_{sl}}{u}}$$

Zusätzlich müssen die Betondruckspannungen in den diagonalen Druckfeldern überprüft werden:

$$\frac{T_d}{2A_0 \cdot t} \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha) \leq k_c f_{cd} \quad \rightarrow \left( \frac{A_{sw}}{s} + \frac{A_{sl}}{u} \right) f_{sd} \leq k_c f_{cd} t$$

# Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitts

## Beispiel: Torsionswiderstand eines Hohlkastenquerschnitts



- Beton C30/37  $f_{cd} = 20$  MPa
- Betonstahl B500B  $f_{sd} = 435$  MPa  $c_{nom} = 30$  mm
- Bügel  $\text{Ø}14@150$  mm  $a_s = 2 \cdot 1'027$  mm<sup>2</sup>/m
- Längsstäbe  $\text{Ø}16@150$  mm  $A_{sl,tot} = 33'778$  mm<sup>2</sup>

$$A_0 = 4.2 \cdot 2.1 = 8.82 \text{ m}^2$$

$$u = 2 \cdot (4.2 + 2.1) = 12.6 \text{ m}$$

$$T_{Rd} = 2A_0 f_{sd} \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{A_{sl}}{u}} = 2 \cdot 8.82 \cdot 0.435 \cdot \sqrt{2 \cdot 1'027 \cdot \frac{33'778}{12.6}} = 18'006 \text{ kNm}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{u}{A_{sl}}} = \sqrt{2 \cdot 1'027 \cdot \frac{12.6}{33'778}} = 0.875 \quad \rightarrow \alpha = 41.2^\circ$$

$$\sigma_c = \left( \frac{A_{sw}}{s} + \frac{A_{sl}}{u} \right) \frac{f_{sd}}{t} = \left( 2 \cdot 1'027 + \frac{33'778}{12.6} \right) \cdot \frac{435}{300} \cdot \frac{1}{1'000} = 6.9 \text{ MPa} < k_c f_{cd} = 0.55 \cdot 20.0 = 11.0 \text{ MPa}$$

# Torsion – Torsionsbemessung Hohlkastenquerschnitte

## Torsionsbemessung

- Konstante Wanddicke  $t$ , konstante Bügelbewehrung, gleichmässig über Umfang verteilte Längsbewehrung
- Annahme / Wahl von  $\alpha$  (Neigung des diagonalen Druckfelds)
- Bügelbewehrung  $A_{sw}$

$$T_{Rd,A_{sw}} = 2 \cdot A_0 \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{sd} \cdot \cot \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{1}{f_{sd}} \cdot \frac{T_d}{2 \cdot A_0} \cdot \tan \alpha$$

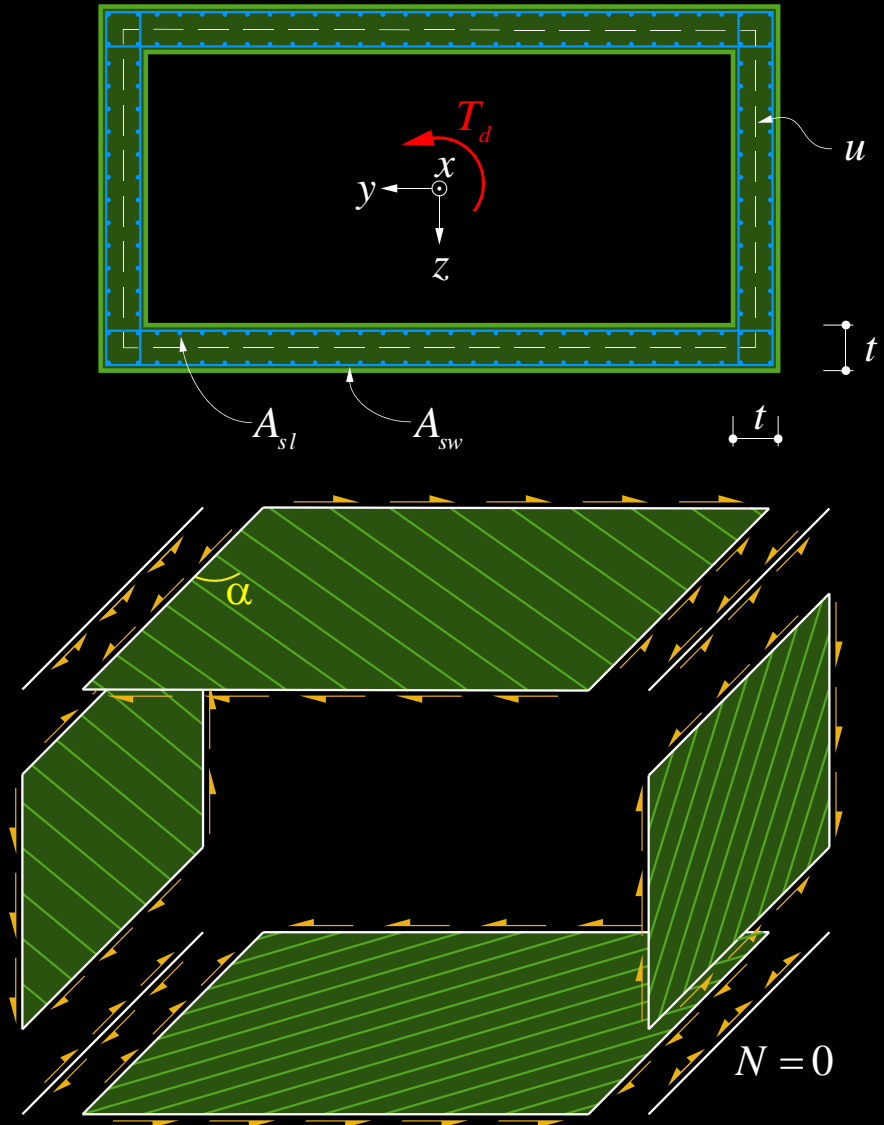
- Längsbewehrung  $A_{sl}$

$$T_{Rd,A_{sl}} = 2 \cdot A_0 \cdot \frac{A_{sl}}{u} \cdot f_{sd} \cdot \tan \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{A_{sl}}{u} \geq \frac{1}{f_{sd}} \cdot \frac{T_d}{2 \cdot A_0} \cdot \cot \alpha$$

mit  $u$  = mittlerer Umfang; Stringerkräfte  $N = 0$

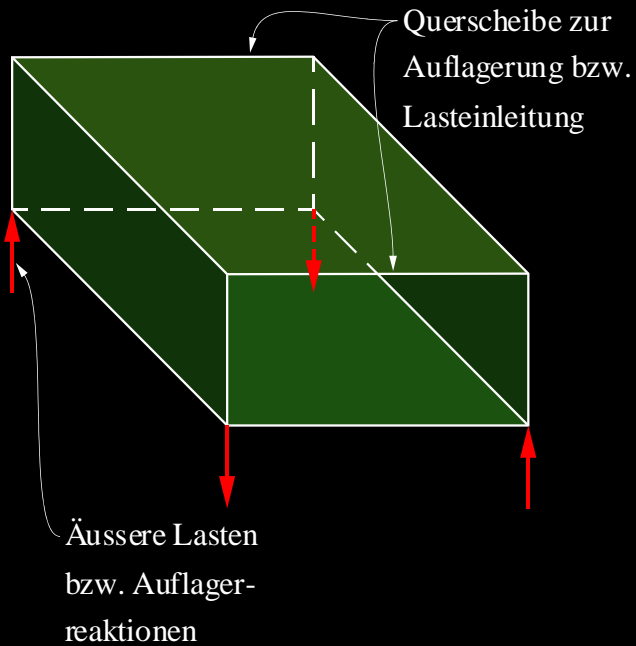
- Scheibendicke  $t$  (Beschränkung der Betondruckspannung)

$$t \geq \frac{1}{k_c \cdot f_{cd}} \cdot \frac{T_d}{2 \cdot A_0} \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha)$$



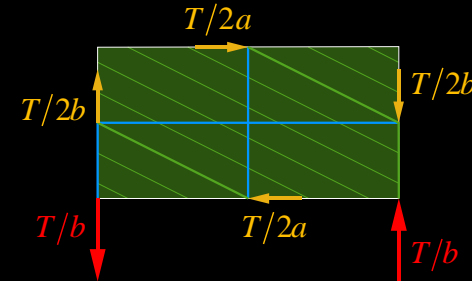
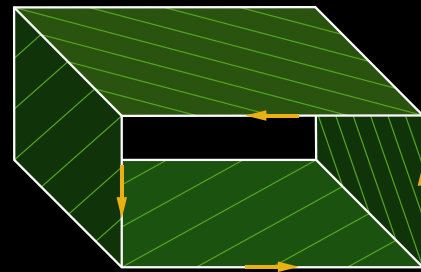
# Torsion – Torsionsbemessung Hohlkastenquerschnitte

## Lasteinleitung über Endträger / Querscheibe



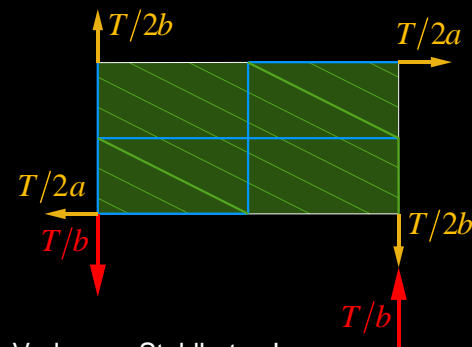
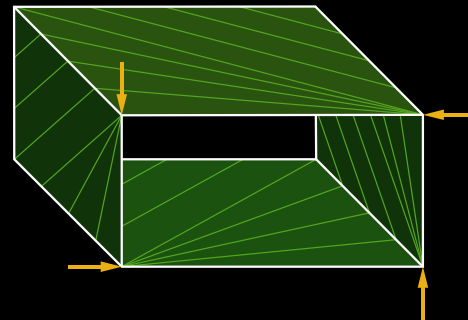
### indirekte Lagerung

gleichmässige Einleitung über ganze Scheibenhöhe, Resultierende in Scheibenmitte

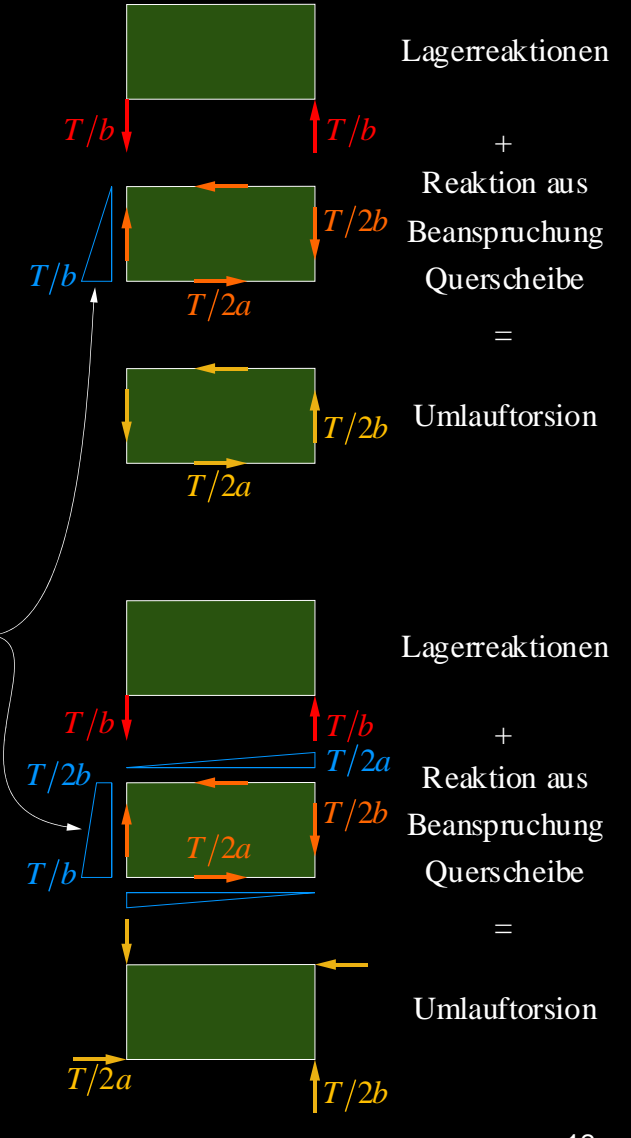
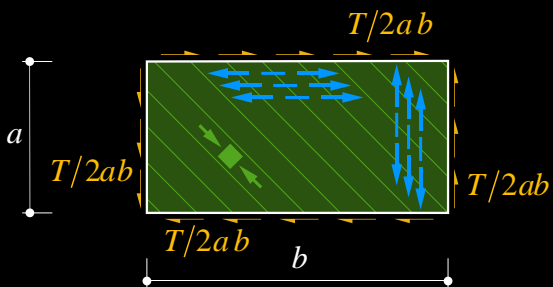


### direkte Lagerung

konzentrierte Einleitung mit Spannungsfächer, Resultierende in Scheibenecke



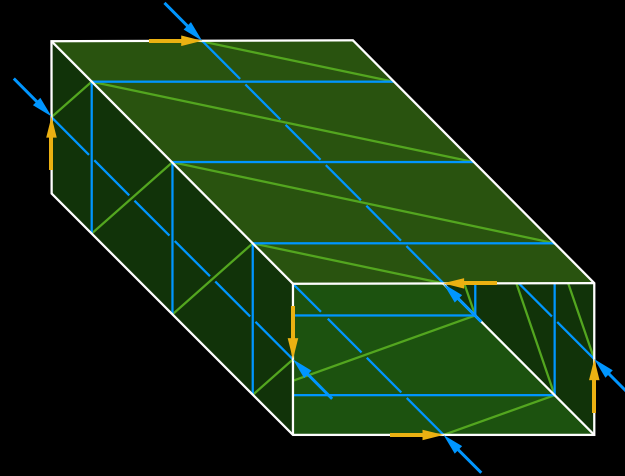
Querscheibe trägt über "reinen Schub"



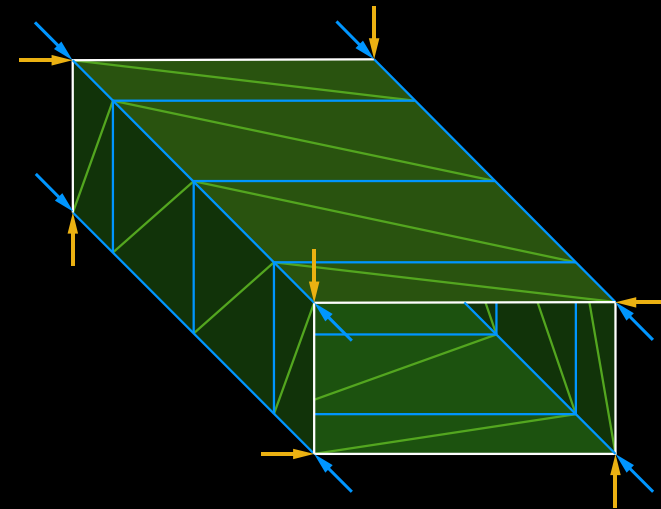
# Torsion – Torsionsbemessung Hohlkastenquerschnitte

## Lasteinleitung über Endträger / Querscheibe

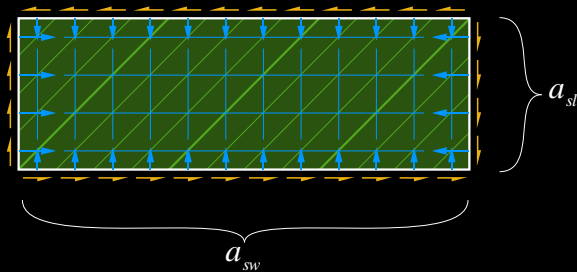
indirekte Lagerung



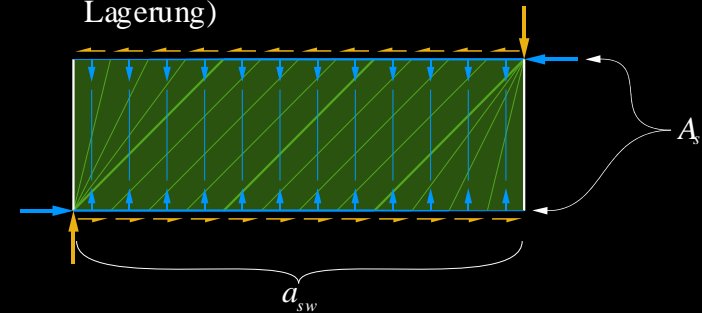
direkte Lagerung



$A_{sl}$  über Scheiben verteilt  $\rightarrow a_{sl} = A_{sl} / u$   
(durchgehend über gesamte Länge)



$A_{sl}$  in Eckstängern konzentriert  
(total gleich gross wie indirekte Lagerung)



# Torsion – Torsionssteifigkeit Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw} / s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl} / u$

Ungerissene Steifigkeit:  
(siehe Baustatik I/II)

$$GK^I = \frac{4A_0^2 G_c}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4A_0^2 G_c}{\sum \frac{z_i}{t_i}} \quad G_c = \frac{E_c}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

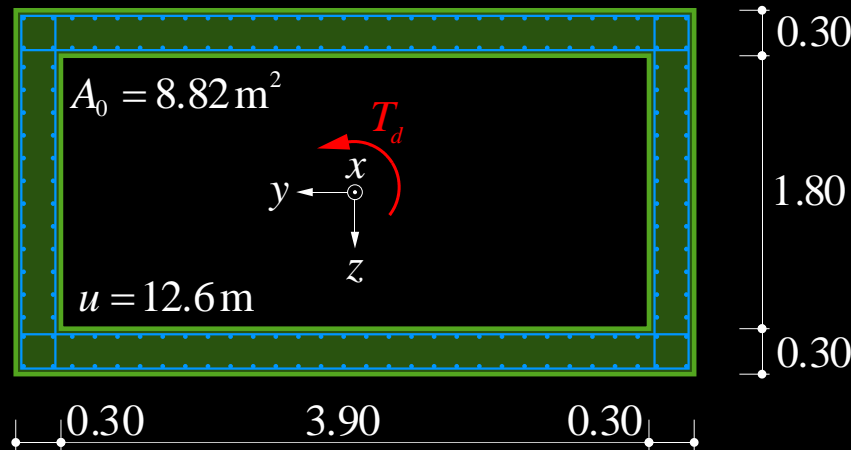
Gerissene Steifigkeit:

$$GK^{II} = \frac{4A_0^2 E_s \frac{t}{u}}{\frac{\cot^2 \alpha}{\rho_l} + \frac{\tan^2 \alpha}{\rho_w} + n \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha)^2}$$

$$\tan \alpha = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{\rho_l} + n}{\frac{1}{\rho_w} + n}} \quad \rho_l = \frac{A_{sl}}{u \cdot t} \quad \rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot t} \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

# Torsion – Torsionssteifigkeit Hohlkastenquerschnitte

## Beispiel: Torsionssteifigkeit eines Hohlkastenquerschnitts



- Beton C25/30  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$   $E_c = 32 \text{ kN/mm}^2$   $\nu = 0.2$
- Betonstahl B500B  $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$   $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$
- Bügel  $\text{Ø}14@150 \text{ mm}$   $a_s = 2 \cdot 1'027 \text{ mm}^2/\text{m}$
- Längsstäbe  $\text{Ø}16@150 \text{ mm}$   $A_{sl,tot} = 33'778 \text{ mm}^2$

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot t} = \frac{2 \cdot 1027}{300 \cdot 1000} = 0.684\%$$

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{u \cdot t} = \frac{33778}{12600 \cdot 300} = 0.894\%$$

$$n = \frac{205}{32} = 6.406$$

$$\tan \alpha = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{\rho_l} + n}{\frac{1}{\rho_w} + n}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{0.00894} + 6.406}{\frac{1}{0.00684} + 6.406}} = 0.9384 \rightarrow \alpha = 43.2^\circ$$

# Torsion – Torsionssteifigkeit Hohlkastenquerschnitte

## Beispiel: Torsionssteifigkeit eines Hohlkastenquerschnitts

$$GK^{II} = \frac{4A_0^2 E_s \frac{t}{u}}{\frac{\cot^2 \alpha}{\rho_l} + \frac{\tan^2 \alpha}{\rho_w} + n \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha)^2} = \frac{4 \cdot 8.82^2 \cdot 205 \cdot \frac{0.3}{12.6}}{\frac{1}{0.9384^2 \cdot 0.00894} + \frac{0.9384^2}{0.00684} + 6.406 \cdot \left(0.9384 + \frac{1}{0.9384}\right)^2}$$

$$GK^{II} = 5.40 \text{ GNm}^2$$

$$GK^{II} \hat{=} 0.0546 \cdot GK^I$$

Zum Vergleich: Biegesteifigkeiten

$$EI^I = 105.2 \text{ GNm}^2$$

$$EI^{II} = 11.14 \text{ GNm}^2 \hat{=} 0.106 \cdot EI^I$$

mit  $A_s = 21'715 \text{ mm}^2$ ,  $d = 1'783.3 \text{ mm}$ ,  $A_s' = 12'064 \text{ mm}^2$ ,  $d' = 150 \text{ mm}$   
 $b = 4'500 \text{ mm}$ ,  $n = 6.406 \rightarrow x = 296 \text{ mm}$

[GNm <sup>2</sup> ]	ungerissen		gerissen
$EI$	105.2	-89%	11.14
$GK$	98.8	-95%	5.40

d.h.  $\frac{EI^{II}/EI^I}{GK^{II}/GK^I} \approx 2$

→ Einfluss auf Schnittgrößen bei statisch unbestimmten Systemen (Verträglichkeitstorsion)



# Torsion – Gekrümmte Träger

## Statik gekrümmter Träger

- Betrachtet wird ein Element eines gekrümmten Trägers mit infinitesimaler Länge unter Gleichstreckenlast und Torsion
- Gleichgewicht am Schnittkörperdiagramm ergibt:

$$\sum F_z = 0 = -V + V + dV + q \cdot ds$$

$$q \cdot ds + dV = q \cdot r \cdot d\varphi + dV = 0 \rightarrow q = -\frac{dV}{rd\varphi}$$

$$\sum M_n = 0 = -M + \underbrace{(M + dM)}_{\approx 1} \cos d\varphi + \underbrace{(T + dT)}_{\approx d\varphi} \sin d\varphi - (V + dV) ds - q \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} + m_t \cdot ds \cdot \sin d\varphi$$

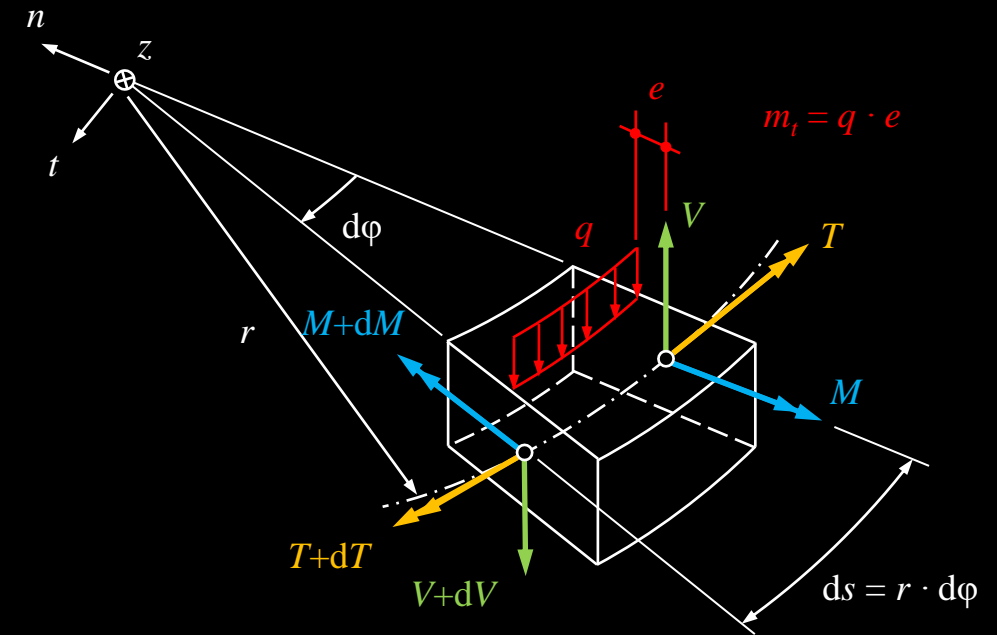
$$-V \cdot ds + dM + Td\varphi = -V \cdot r \cdot d\varphi + dM + Td\varphi = 0$$

$$\sum M_t = 0 = -T + (T + dT) \cos d\varphi - (M + dM) \sin d\varphi + (V + dV) \cdot ds \cdot \sin d\varphi + q \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} \sin d\varphi + m_t \cdot ds \cdot \cos d\varphi$$

$$m_t \cdot ds - Md\varphi + dT = m_t \cdot r \cdot d\varphi - Md\varphi + dT = 0$$

$$\rightarrow \frac{dM}{rd\varphi} = V - \frac{T}{r}$$

$$\rightarrow \frac{dT}{rd\varphi} = \frac{M}{r} - m_t$$



# Torsion – Gekrümmte Träger

## Statik gekrümmter Träger

- Betrachtet wird ein Element eines gekrümmten Trägers mit infinitesimaler Länge unter Gleichstreckenlast und Torsion
- Gleichgewicht am Schnittkörperdiagramm ergibt:

$$q = -\frac{dV}{r \cdot d\varphi} \quad \frac{dM}{r \cdot d\varphi} = V - \frac{T}{r} \quad \frac{dT}{r \cdot d\varphi} = \frac{M}{r} - m_t$$

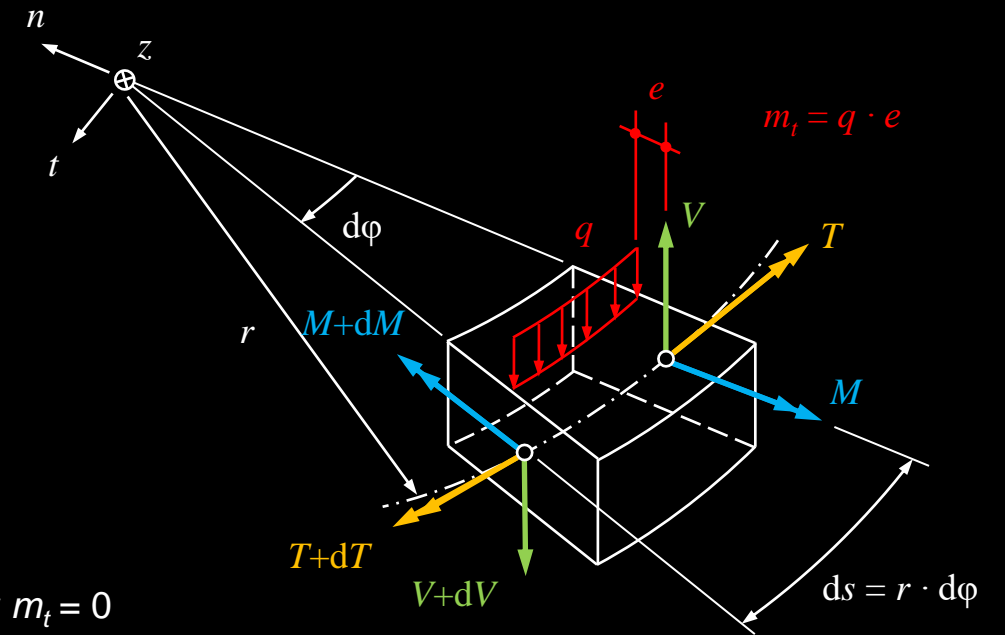
$$q \cdot r = -\frac{dV}{d\varphi} \quad \frac{dM}{d\varphi} = V \cdot r - T \quad \frac{dT}{d\varphi} = M - m_t \cdot r$$

**M und T sind gekoppelt**

Bei einem geraden Balken ( $r \rightarrow \infty$ ) reduzieren sich die obigen Gleichungen zur bekannten Form:

$$q = -\frac{dV}{ds} \quad \frac{dM}{ds} = V \quad \frac{dT}{ds} = -m_t$$

**M und T sind entkoppelt**



für  $m_t = 0$

$$\frac{dT}{d\varphi} = M \rightarrow \Delta T = \int M d\varphi$$

d.h. die Variation des Torsionsmoments zwischen zwei Schnitten entspricht der Fläche des Biegemomentendiagramms (integriert über  $\varphi$ ) zwischen diesen beiden Schnitten

→ **Wichtig bei Durchlaufträgern mit veränderlichem Vorzeichen des Biegemoments**

# Torsion – Gekrümmte Träger

## Statik gekrümmter Träger

- Lösen des Differentialgleichungssystems:

$$q \cdot r = -\frac{dV}{d\varphi} \quad \frac{dM}{d\varphi} = V \cdot r - T \quad \frac{dT}{d\varphi} = M - m_t \cdot r$$

$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} (V \cdot r - T) = -q \cdot r^2 - M + m_t \cdot r$$

für Kreisringträger ( $r = \text{const.}$ )

$$\rightarrow \frac{d^2 M}{d\varphi^2} + M = m_t \cdot r - q \cdot r^2$$

→ inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung;  
allgemeine Lösung für konstante Koeffizienten d.h.

$$m_t(\varphi) = m_t = \text{const. und } q(\varphi) = q = \text{const.,}$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$M(\varphi) = c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi + m_t r - q r^2$$

Die Differentialgleichung lässt sich auch iterativ lösen. Das Vorgehen ist anschaulich und konvergiert für kleine Öffnungswinkel resp. grosse Radien sehr schnell.

### 1. Erste Näherung für $M$ :

Gerader Träger mit Spannweite  $s = r \cdot \varphi$  unter Belastung  $q - \frac{m_t}{r}$

$$\frac{d^2 M}{ds^2} + M = m_t \cdot r - q \cdot r^2 \rightarrow \frac{d^2 M}{ds^2} = \frac{m_t}{r} - \frac{M}{r^2} - q \approx \frac{m_t}{r} - q$$

### 2. Iteration von (1) mit Belastung $q + \frac{M}{r^2} - \frac{m_t}{r}$ bis Konvergenz erreicht ist

$$\text{(oft unnötig da } \left| \frac{M}{r^2} \right| \ll |q|)$$

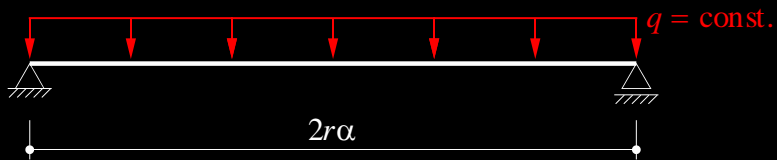
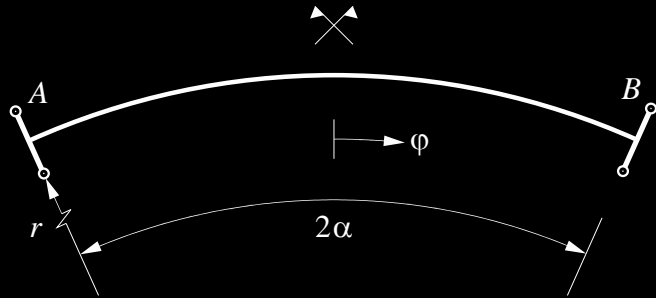
### 3. Ermittlung von $T$ :

Gerader Träger mit Spannweite  $s = r \cdot \varphi$  unter Torsionsbelastung  $\frac{M}{r} - m_t$ :

$$\frac{dT}{d\varphi} = M - m_t \cdot r \rightarrow \frac{dT}{ds} = \frac{M}{r} - m_t$$

# Torsion – Gekrümmte Träger

Beispiel:



- Träger mit gekrümmter Länge  $l = 2r\alpha$
- Konstante Streckenlast  $q = \text{const.}$
- Allgemeine Lösung:

$$M = c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi - qr^2$$

- Randbedingungen:

- $\left. \frac{dM}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \rightarrow c_1 = 0$

- $M|_{\varphi=\alpha} = 0 \rightarrow c_2 = \frac{qr^2}{\cos \alpha}$

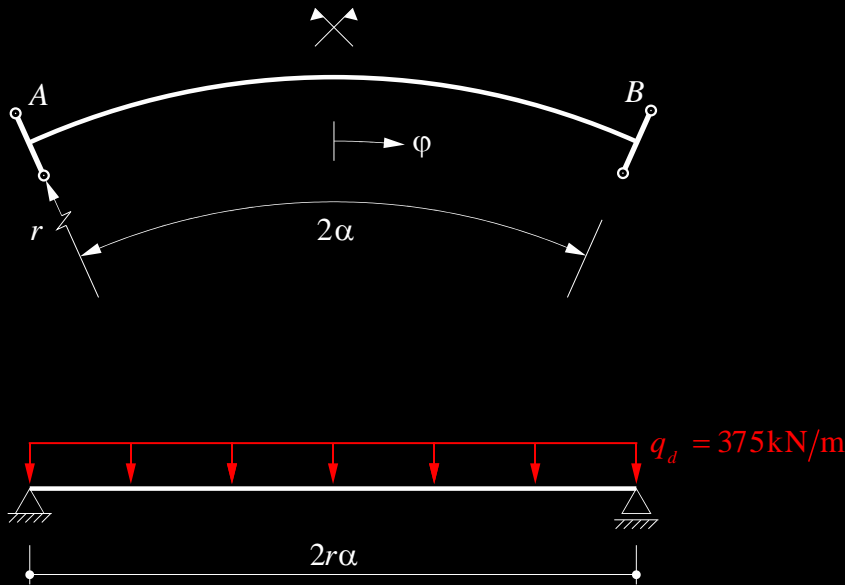
$$M = qr^2 \left( \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

$$V = -qr\varphi$$

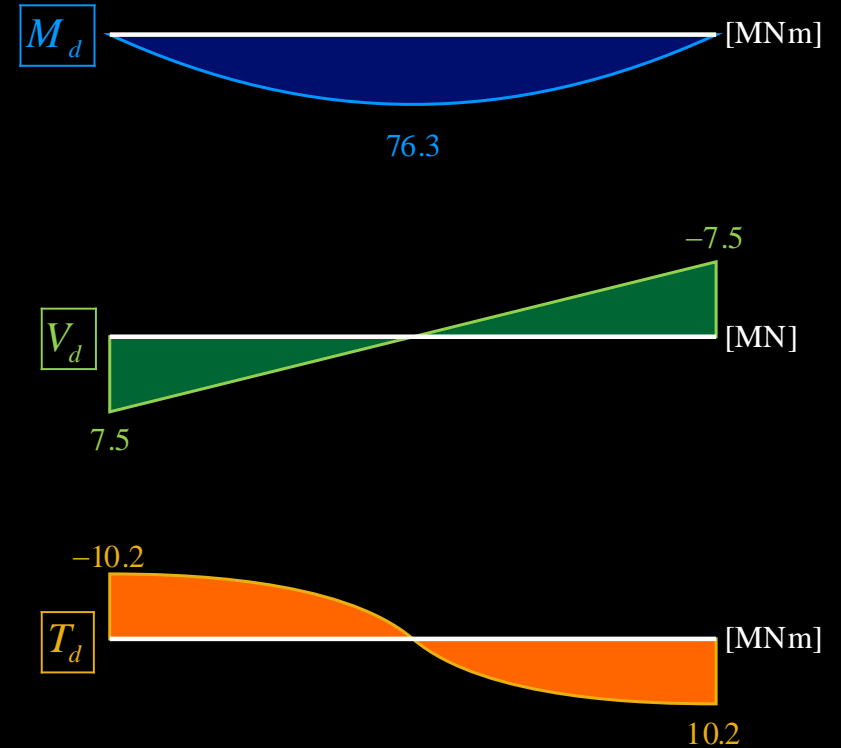
$$T = qr^2 \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha} - \varphi \right)$$

# Torsion – Gekrümmte Träger

Beispiel:



$r = 100\text{ m}$     $l = 40\text{ m}$     $\alpha = 0.2\text{ rad } (\approx 11.46^\circ)$     $q_d = 375\text{ kN/m}$

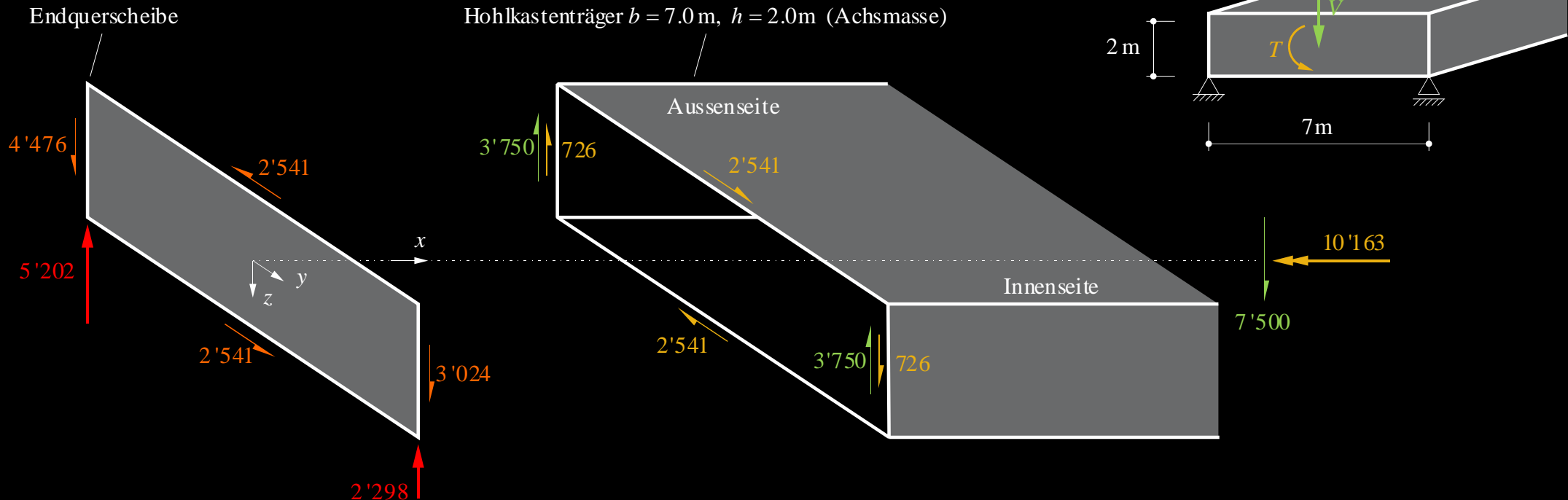


NB: Näherung gerader Träger mit Spannweite  $2r\alpha = 40\text{ m}$

- ①  $M_d(q_d) = 75\text{ MNm}$  (parabolisch), ② Iteration unnötig da zusätzliche Belastung  $M_d(①)/r^2 = 7.5\text{ kN/m} = \text{nur } 2\% \text{ von } q_d$
  - ③  $T_d$  unter parabolischer Torsionsbelastung  $M_d/r = 750\text{ kNm/m} \rightarrow T_d = 750 \cdot 20 \cdot 2/3 = 10.0\text{ MNm}$  in A resp. B  $\rightarrow 2\% \text{ weniger als exakte Lösung}$
- (mit Iteration ②:  $M_d(①)/r^2 = 7.5\text{ kN/m}$  (parabolisch)  $\rightarrow \Delta M_d = 5/6 \cdot 7.5 \cdot 40^2/8 = 1.3\text{ MNm} \rightarrow M_d = 76.3\text{ MNm}$ ,  $T_d \approx 763 \cdot 20 \cdot 2/3 = 10.2\text{ MNm}$ )

# Torsion – Krafteinleitung

Beispiel Auflagerbereich A (Lager vertikal):



Auflagerkräfte (vertikal):

$$A_{d,aussen} = \frac{10'163 \text{ kNm}}{7 \text{ m}} + \frac{7'500 \text{ kN}}{2} = 5'202 \text{ kN},$$

$$A_{d,innen} = -\frac{10'163 \text{ kNm}}{7 \text{ m}} + \frac{7'500 \text{ kN}}{2} = 2'298 \text{ kN}$$

Scheibenkräfte in Stegen infolge Umlauf torsion:

$$S_{d,vertikal} = \frac{10'163 \text{ kNm}}{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 7 \text{ m}} \cdot 2 \text{ m} = 726 \text{ kN},$$

$$S_{d,horizontal} = \frac{10'163 \text{ kNm}}{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 7 \text{ m}} \cdot 7 \text{ m} = 2'541 \text{ kN}$$

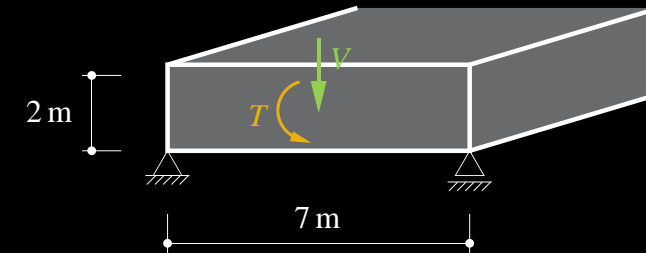
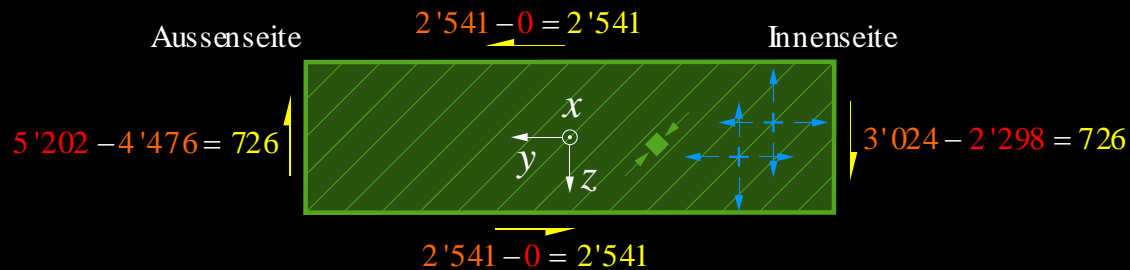
Scheibenkräfte in vertikalen Stegen total:

$$S_{d,aussen} = \frac{7'500 \text{ kN}}{2} + 726 \text{ kN} = 4'476 \text{ kN},$$

$$S_{d,innen} = \frac{7'500 \text{ kN}}{2} - 726 \text{ kN} = 3'024 \text{ kN}$$

# Torsion – Krafteinleitung

## Beispiel Endquerscheibe A (Lager vertikal):



- Die Endquerscheibe muss die **Differenz** zwischen den **Scheibenkräften aus dem Träger** und den **Auflagerreaktionen** aufnehmen  
→ reine Schubbeanspruchung, Schubfluss:  $726/2 = 2541/7 = 363 \text{ kN/m}$
- Die in den Flanschen und im inneren Steg verlaufenden geneigten Risse werden in der Endquerscheibe spiralförmig fortgesetzt.
- Der Schubfluss kann beispielsweise über ein unter  $45^\circ$  zur  $y$ -Achse geneigtes Druckfeld abgetragen werden. Dies erfordert gleichmässig verteilte Bewehrung in  $x$ - und  $y$ -Richtung mit einem Widerstand von je  $363 \text{ kN/m}$ .

$$a_{s,erf} = \frac{363}{0.435} = 834 \text{ mm}^2/\text{m} \rightarrow \text{beidseitig } \varnothing 10 @ 150 \quad (a_s = 2 \cdot 523 = 1046 \text{ mm}^2/\text{m})$$

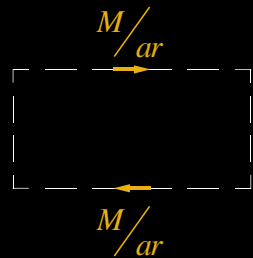
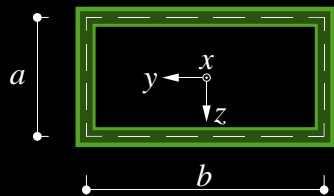
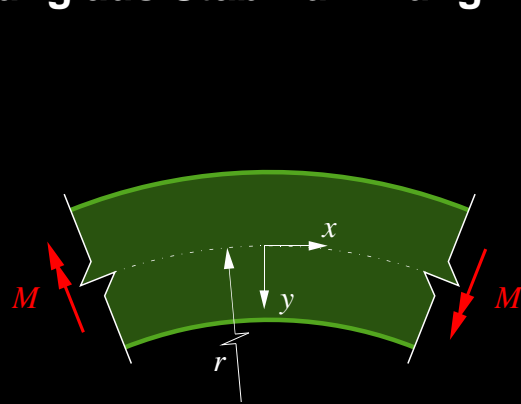
- Die Betondruckspannungen betragen mit einer Scheibenstärke von  $t = 200 \text{ mm}$

$$\sigma_c = \frac{726}{200 \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ \cos 45^\circ} = 3.63 \text{ N/mm}^2$$

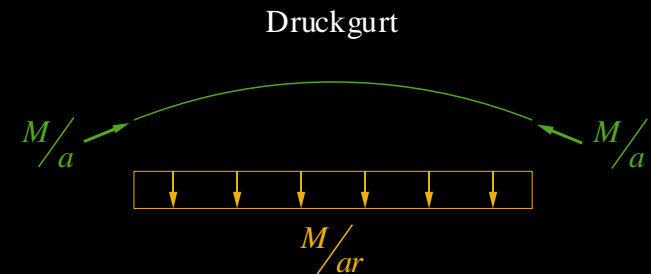
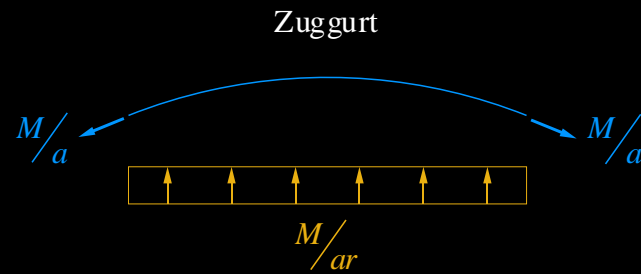
**NB:** Normalerweise ist in den Endquerträgern eine Öffnung vorzusehen (Zugang für Unterhalt, Werkleitungen). Die Bemessung erfolgt mit Spannungsfeldern / Fachwerkmodellen, siehe Vorlesung Stahlbeton III.

# Torsion – gekrümmte Träger

Querbiegung aus Stabkrümmung:



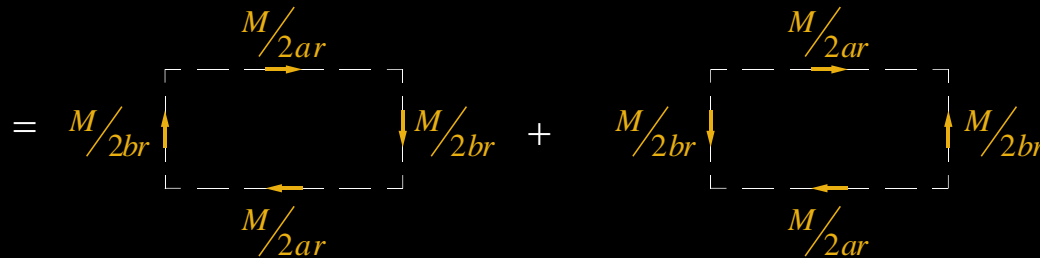
Umlenkräfte



Die Zug- und Druckkräfte in den Flanschen  $M/a$ , infolge Biegung produzieren Umlenkräfte  $M/(ar)$ , welche einerseits zum Torsionsschubfluss beitragen und andererseits Querbiegung verursachen.

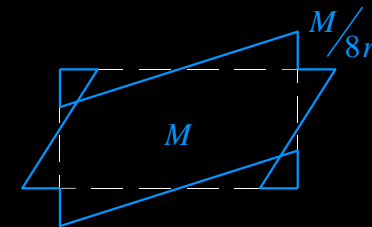
Die Umlenkräfte entsprechen einer verteilten Torsionsbelastung  $m_t$ , welche durch horizontale Kräftepaare erzeugt wird und in eine Umlauf-torsion umgewandelt werden muss.

Die Eckmomente betragen bei gleicher Steifigkeit der beiden Flanschplatten  $M/(8r)$ .



Schubfluss (Umlauf-torsion)

<< profilverformende Gruppe >>



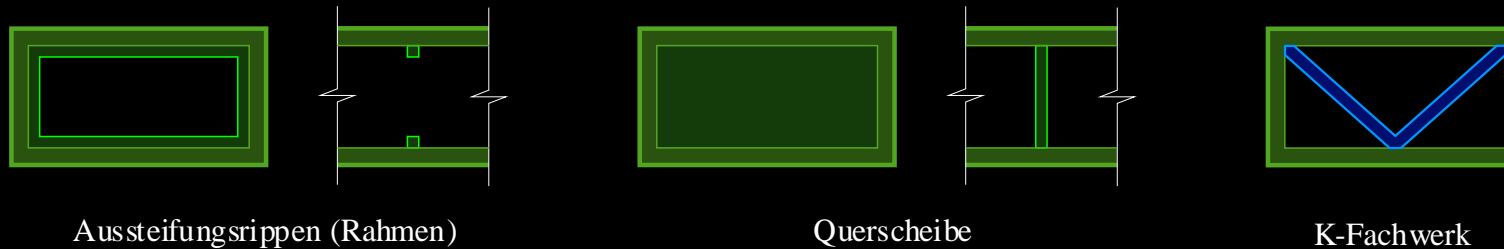
Querbiegung



# Torsion – gekrümmte Träger

## Querbiegung aus Stabkrümmung

Die Querbiegemomente infolge Stabkrümmung können als verteilte Beanspruchungen (kNm/m) grundsätzlich durch den Querschnitt selber aufgenommen werden (Plattenbiegung und -querkräfte in Querrichtung). Bei starker Krümmung wird die Beanspruchung der Stege und Flansche resp. die Querschnittsverwölbung zu gross, so dass zur Aufnahme der Querbiegemomente Aussteifungsrippen oder Querscheiben angeordnet werden müssen («Feldquerträger»). Alternativ können beispielsweise K-Fachwerke vorgesehen werden (analog wie im Stahlbau).



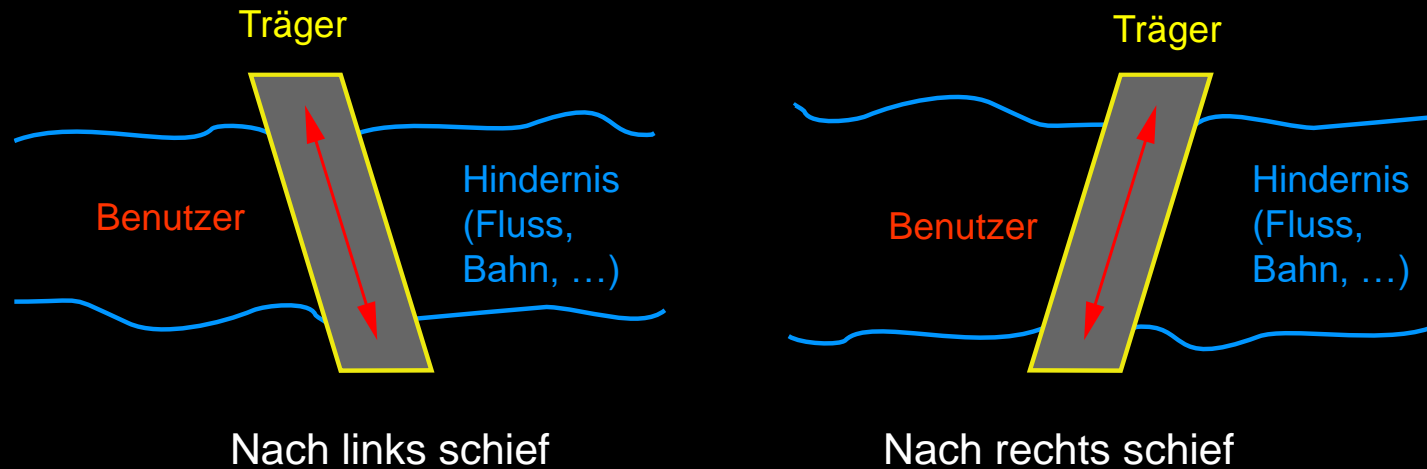
Durch vertikale Lasten resp. Reaktionen erzeugte Torsionsbelastungen werden – auch bei geraden Trägern – analog behandelt. Verteilte Torsionsbelastungen (z.B. infolge verteilter Verkehrslasten) können meist ohne aussteifende Elemente aufgenommen resp. eingeleitet werden.

Bei konzentrierten Lasteinleitungen, insbesondere Auflagern, sind aussteifende Elemente («Stützenquerträger», «Endquerträger») oft unvermeidbar. Werden konzentrierte Torsionsbelastungen (z.B. infolge Achslasten) ohne aussteifende Elemente eingeleitet, ist die Breite, über welche die resultierenden Querbiegemomente verteilt werden, mit Bedacht festzulegen.

*NB:* Querscheiben behindern das Vorschieben der Innenschalung → bei Einsatz von Vorschubgerüsten Feldquerträger nach Möglichkeit vermeiden, Stützenquerträger als Rahmen oder Fachwerk ausbilden.

# Torsion – schief gelagerte Träger

## Typisierung

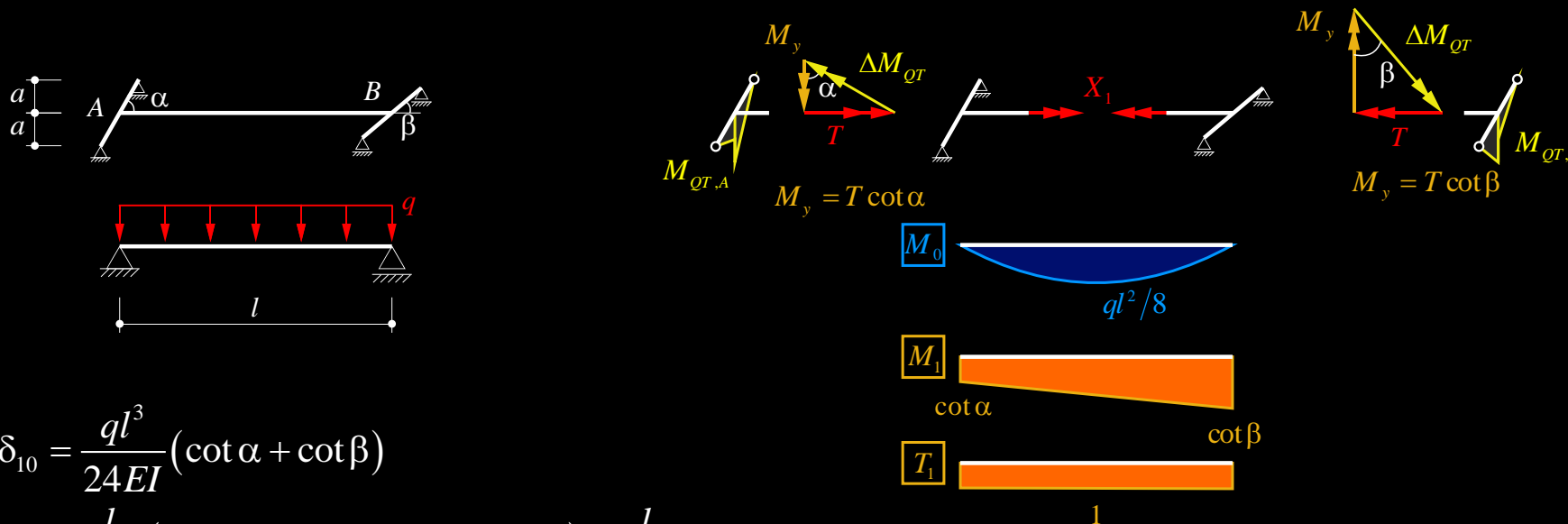


Aus der Sicht des Benutzers können «nach links» und «nach rechts schiefe» Träger unterschieden werden.

# Torsion – schief gelagerte Träger

## Behandlung mit Kraftmethode

Der nach links schiefe Träger AB mit  $EI = \text{const.}$  und  $GK = \text{const.}$  ist über starre, um ihre Achse drehbare, Endquerträger gelagert und durch  $q = \text{const.}$  belastet.



$$\delta_{10} = \frac{ql^3}{24EI} (\cot \alpha + \cot \beta)$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI} (\cot^2 \alpha + \cot \alpha \cot \beta + \cot^2 \beta) + \frac{l}{GK}$$

$$\rightarrow X_1 = T = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}}; \quad M_{y,A} = T \cot \alpha, \quad \Delta M_{y,QT A} = T / \sin \alpha$$

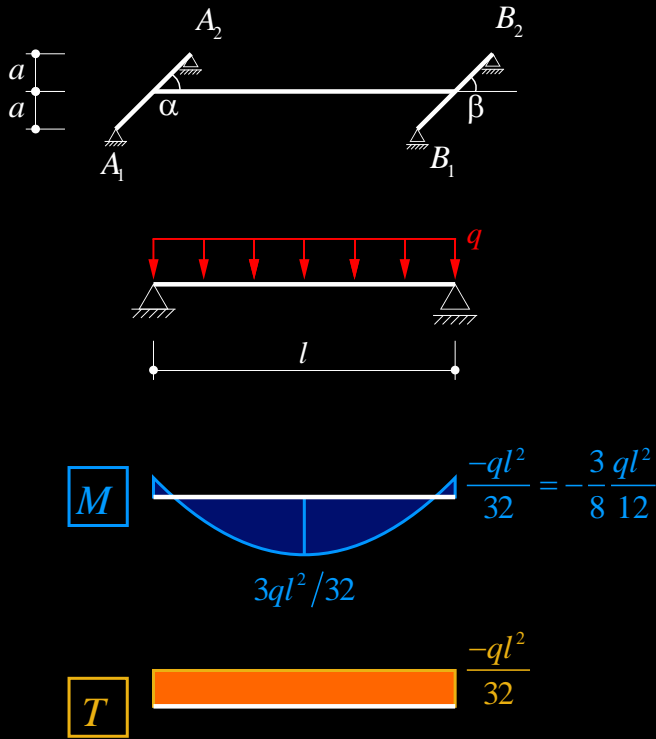
$$M_{y,B} = T \cot \beta, \quad \Delta M_{y,QT B} = T / \sin \beta$$

Schiefe nach links führt zu negativen Torsionsmomenten.  
Schiefe nach rechts ergäbe positive Torsionsmomente.

Lasteinleitung nicht trivial (Endquerträger)  
→ Vorlesung Brückenbau

# Torsion – schief gelagerte Träger

Beispiel:



- Beispiel mit  $\alpha = \beta = 45^\circ$
- $l = 8a$
- $EI / GK = 5/3$

$$\delta_{10} = \frac{ql^3}{12EI} \quad \delta_{11} = \frac{l}{EI} + \frac{l}{GK}$$

$$X_1 = T = M_{y,A} = M_{y,B} = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{-ql^3}{12EI}}{\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK}\right)} = -\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{1 + \frac{EI}{GK}}$$

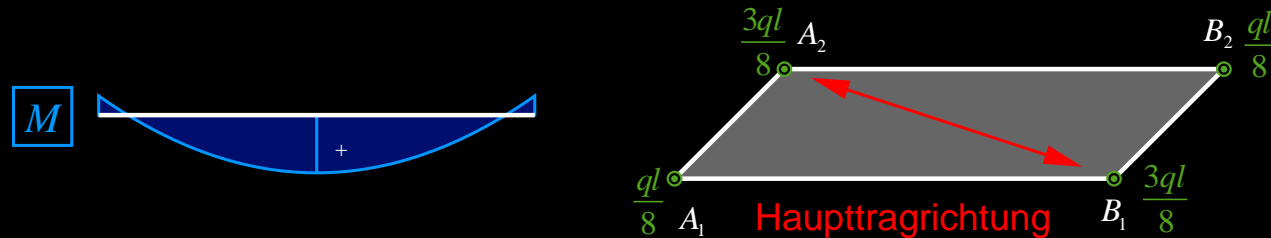
Volle Einspannung  $\rightarrow$  Reduktion da  $GK < \infty$

$$A_{1,2} = \frac{ql}{4} \pm \frac{X_1}{2a} = \frac{ql}{4} \mp \frac{ql^2}{24a \cdot \left(1 + \frac{EI}{GK}\right)}$$

$$\rightarrow A_1 = \frac{ql}{8} \quad A_2 = \frac{3ql}{8}$$

# Torsion – schief gelagerte Träger

Erkenntnis:



- Schiefe Lagerung von Trägern wirkt ähnlich wie eine Einspannung der Trägerenden.
- Die lastnahen Lager  $A_2$  und  $B_1$  erfahren grössere Auflagerkräfte als die lastfernen Lager  $A_1$  und  $B_2$ . Man erkennt, dass derartige Platten über die stumpfen Ecken tragen. Bei grosser Schiefe können die spitzen Ecken abheben d.h. sie müssen nach unten gehalten werden.

# Torsion – Zusammenfassung

1. Grundsätzlich sind Fälle von
  - **Gleichgewichtstorsion** ( $T$  für Gleichgewicht notwendig, unabhängig von  $GK$ ) und
  - **Verträglichkeitstorsion** ( $T$  abhängig von  $GK$ , Gleichgewicht ohne  $T$  möglich) zu unterscheiden.
2. Im Allgemeinen liegt **gemischte Torsion** (Umlauf torsion und Wölb torsion) vor.
3. Torsion tritt in der Regel kombiniert mit anderen Beanspruchungen auf. Die **Schubflüsse aus Torsion** sind jenen aus **Querkraft** zu überlagern.
4. Für den Grenzzustand der Tragsicherheit können **räumliche Fachwerkmodelle** und entsprechende **Spannungsfelder** entwickelt werden.
5. Zur Sicherstellung des **Schubflusses an Querschnittskanten** ist eine entsprechende konstruktive Durchbildung, z.B. mit übergreifenden Bügeln erforderlich.
6. Bei fließender Längs- und Bügelbewehrung ist der Torsionswiderstand wie der Querkraftwiderstand proportional zum geometrischen Mittel der Längs- und Bügelbewehrungsgehalte.
7. Die **Torsionssteifigkeit** nimmt vom ungerissenen zum gerissenen Zustand meist viel ausgeprägter ab als die Biegesteifigkeit. Dies kann man in der statischen Berechnung z.B. dadurch berücksichtigen, dass man **mit  $E^I$  und  $GK^I/3$**  rechnet (Verformungen aber mit  $E^{III}$  und  $GK^{II}$  ermitteln, Kriechen berücksichtigen).

# Torsion – Zusammenfassung

8. Zur **Einleitung konzentrierter Torsionsmomente** in Träger, insbesondere bei End- und Zwischenauflagern, sind im Allgemeinen **Querscheiben** erforderlich (zum Beispiel Umwandlung vertikales Kräftepaar in Umlauf torsion) .
9. **Stabkrümmungen** und verteilte **Torsionsbelastungen** (infolge horizontaler oder vertikaler Lasten) verursachen **Querbiegung der Stabquerschnitte**. Gegebenenfalls sind zur Aufnahme der Querbiegemomente **Aussteifungsrippen oder Querscheiben** bzw. Ausfachungen anzuordnen. Dabei ist zu beachten, dass solche Elemente den Bauablauf (Vorschieben der Innenschalung) behindern.
10. **Schiefe Lagerung** von Trägern wirkt ähnlich wie eine Einspannung der Trägerenden. Die Grösse der Einspannwirkung ist vom **Verhältnis  $GK/EI$**  abhängig.
11. Schief gelagerte Platten tragen über die **stumpfen Ecken**. Gegebenenfalls müssen die spitzen Ecken nach unten verankert werden (**negative Auflagerreaktionen**).