

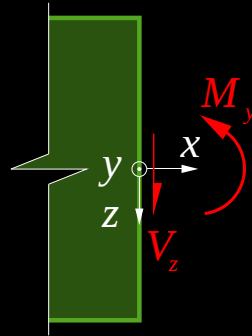
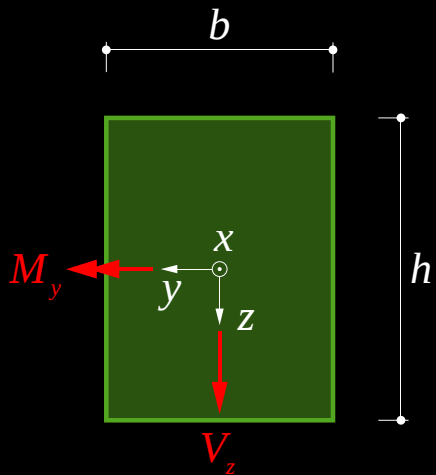
3.4 Querkraft

Querkraft – Einleitung

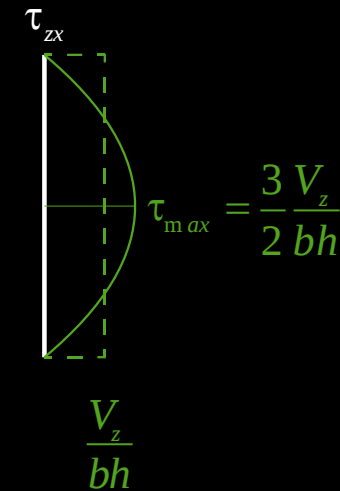
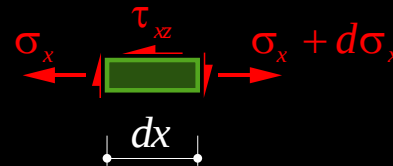
Klassische Balkentheorie – Einfluss der Querkraft

Klassische Balkentheorie:

- Querschnitte senkrecht zur Stabachse bleiben unverformt und senkrecht zur verformten Stabachse
- Schubverzerrungen vernachlässigt, aber Schubspannungen für Gleichgewicht benötigt
- Ermittlung durch Betrachtung zugeordneter Schubspannungen (Baustatik):



$$\tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y(z)}{b \cdot I_y}$$



- Diese Betrachtung ist für Stahlbetonträger im gerissenen Zustand nur bedingt geeignet

Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

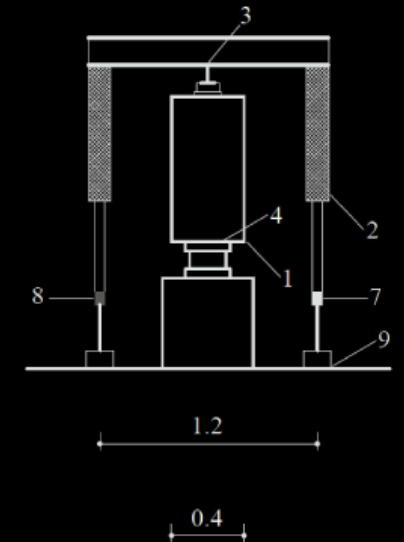
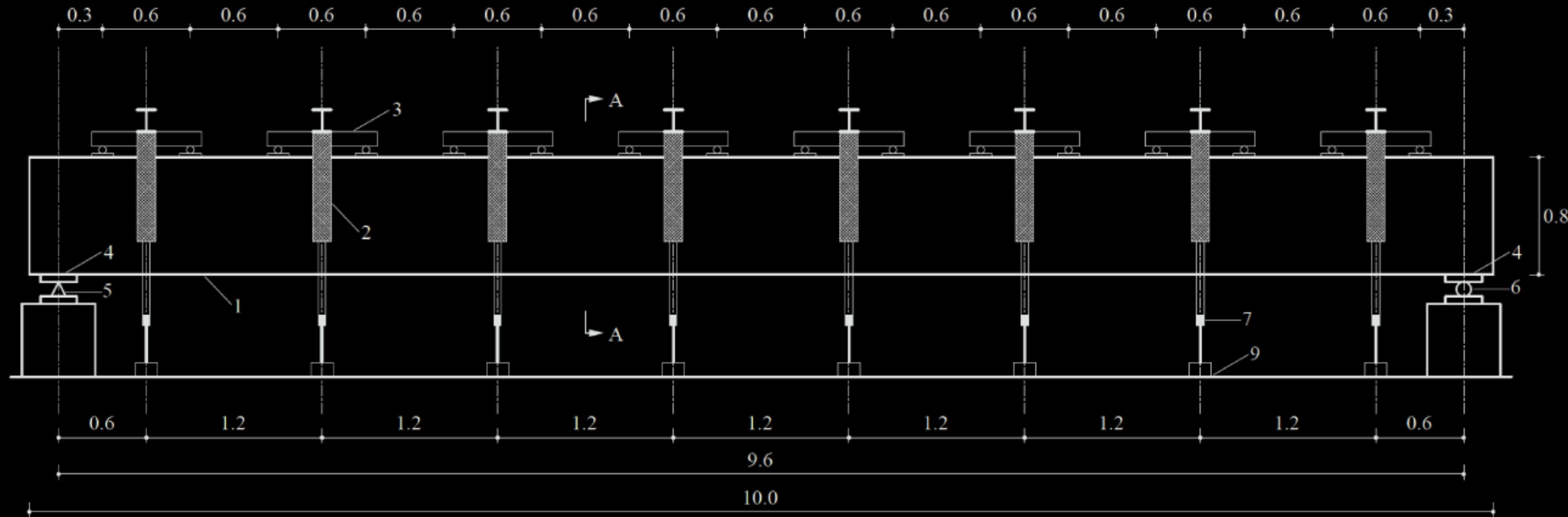
- Seit 1960 intensive Forschung insbesondere auch an der ETH Zürich.
- Diverse Grossversuche, zum Beispiel Marti/Beck/Konradi (2016), siehe Abbildungen
- 2 Versuchskörper ohne Querkraftbewehrung
- Plötzliches, schlagartiges Versagen



Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

- Versuchsanordnung: einfacher Balken unter gleichmässig verteilter Last

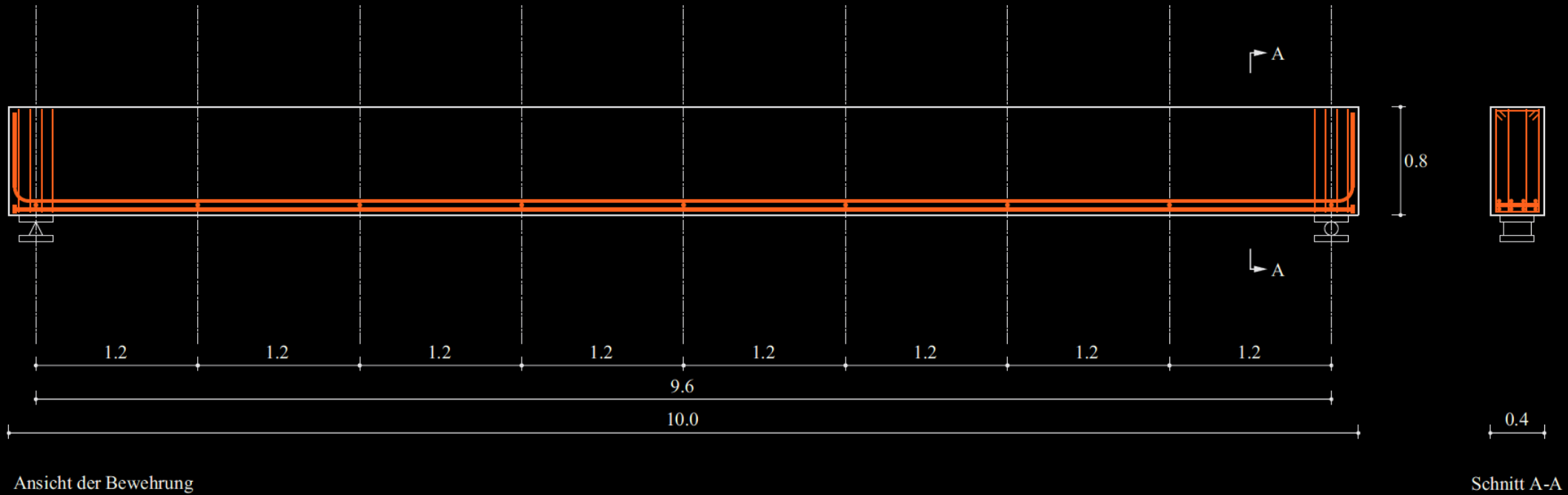


[Konradi, 2016]

Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

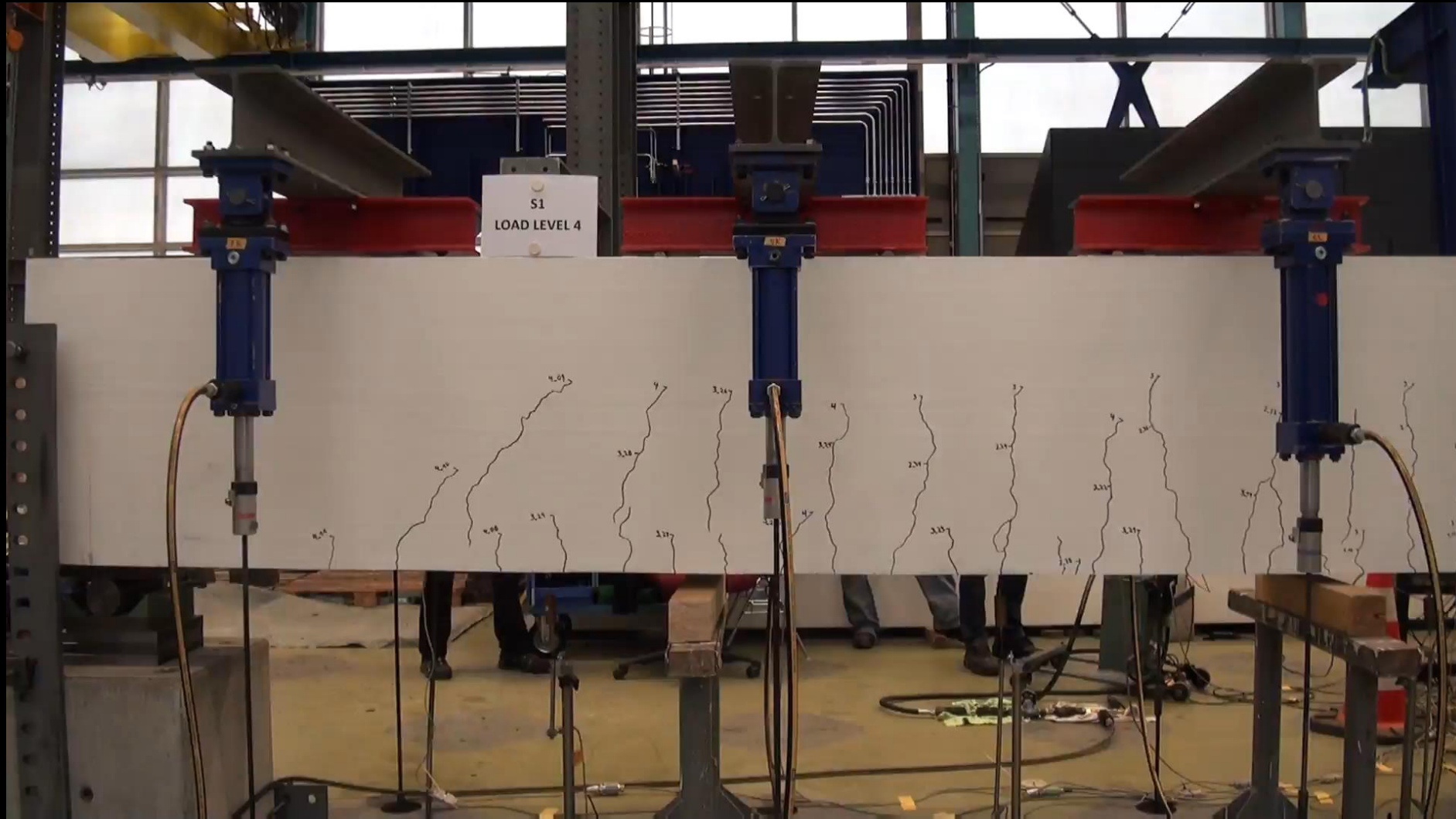
- nur Längsbewehrung auf Biegezugseite, keine Bügelbewehrung (ausser bei Auflager zur Lasteinleitung)



[Konradi, 2016]

Querkraft – Einleitung

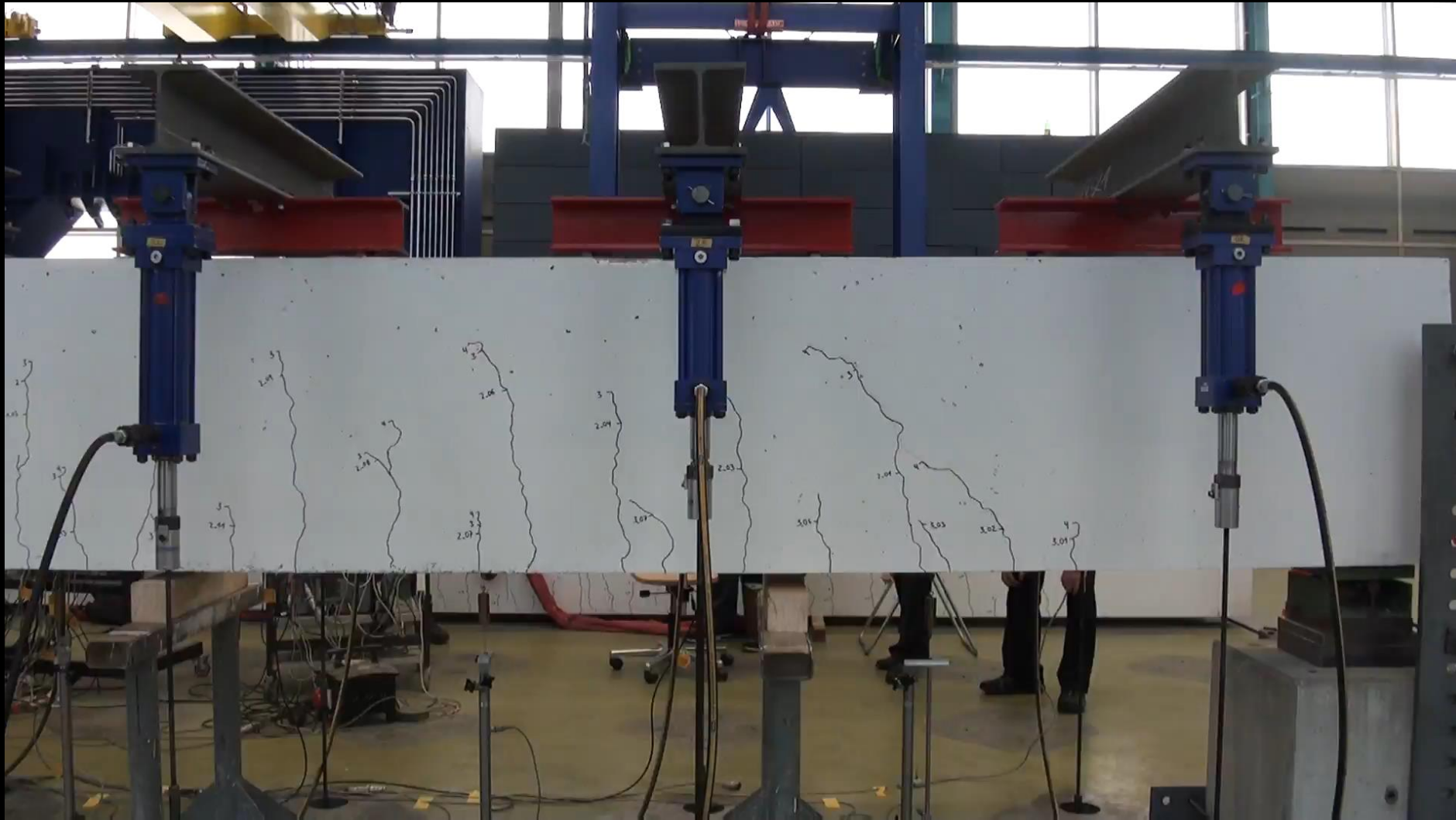
Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft – Versuchskörper S1



[Konradi, 2016]

Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft – Versuchskörper S2

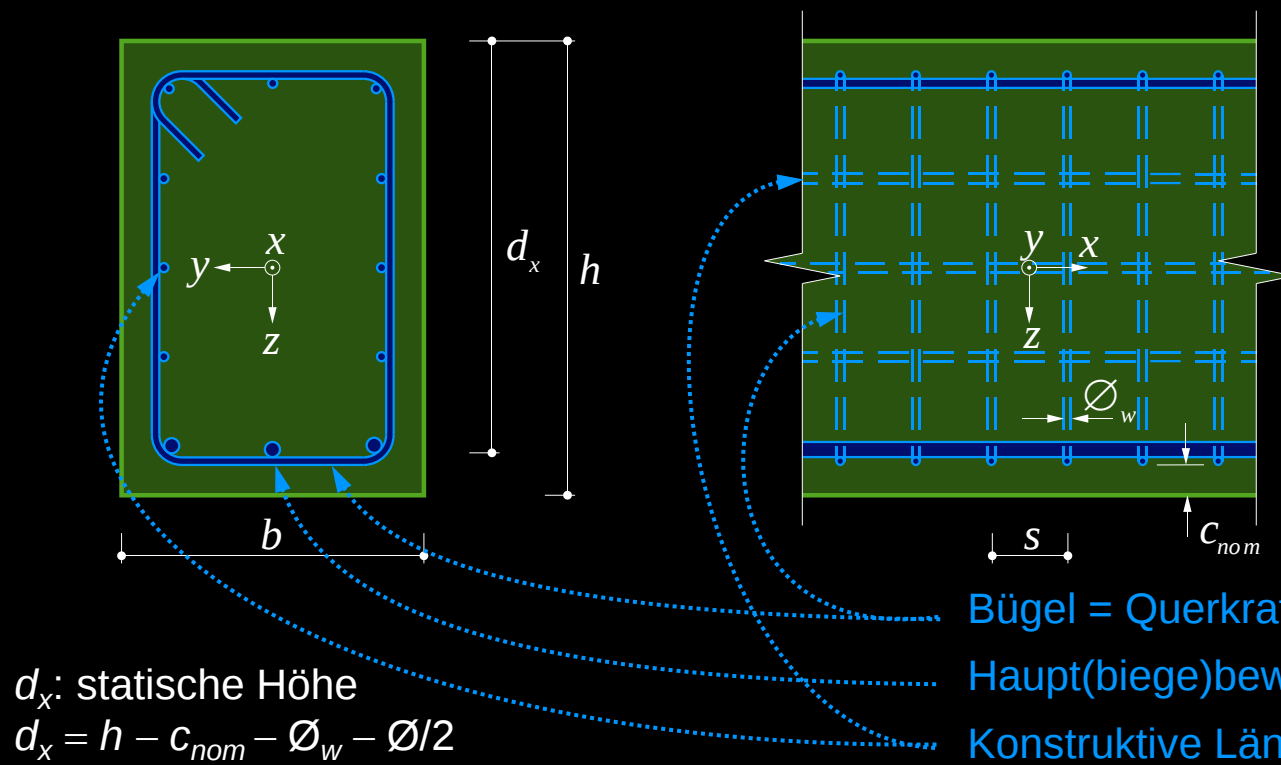


[Konradi, 2016]

Querkraft – Einleitung

Querkraftbewehrung zur Vermeidung spröder Querkraftversagen

- In Balken ist zwingend eine Querkraftbewehrung anzuordnen
- Bügel (Abstand $s < 25\varnothing$) müssen die Längszugbewehrung umfassen.
- Stösse (Bügel und Längsbewehrung): Stosslänge (ca. $50\varnothing$, siehe SIA 262, 5.2.5).



Bügelbewehrungsgehalt ρ_w minimal ca. 0.2%
 → zweischnittige Bügel:

$$\rho_w = \frac{\pi \cdot \varnothing^2}{2 \cdot b \cdot s} \geq 0.2\%$$

NB: nach SIA 262 (2013) sind Querkraftbewehrungsgehalte von ca. 0.1% ausreichend:

$$\rho_w \geq 0.1\% \sqrt{\frac{f_{ck}}{30}} \frac{500}{f_{sk}}$$

→ bei Neubauten eher 0.2% sinnvoll (Robustheit)

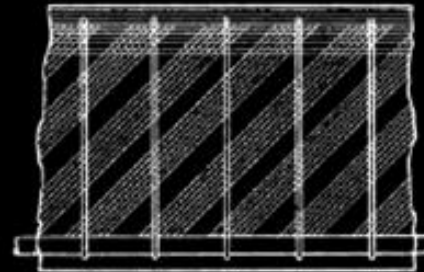
Querkraft – Einleitung

Verhalten von Stahlbetonträgern unter Querkraft

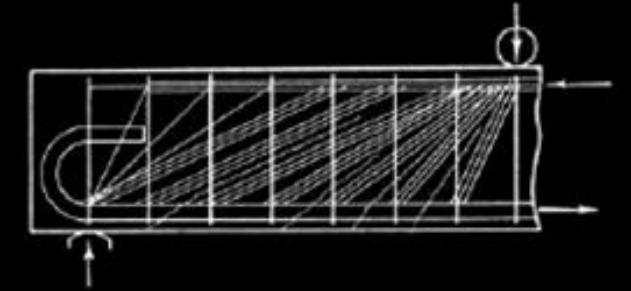
Frühe Fachwerkmodelle: Erklärung des Tragverhaltens (nicht für Bemessung verwendet)



K. W. Ritter, «Die Bauweise Hennebique» (1899)

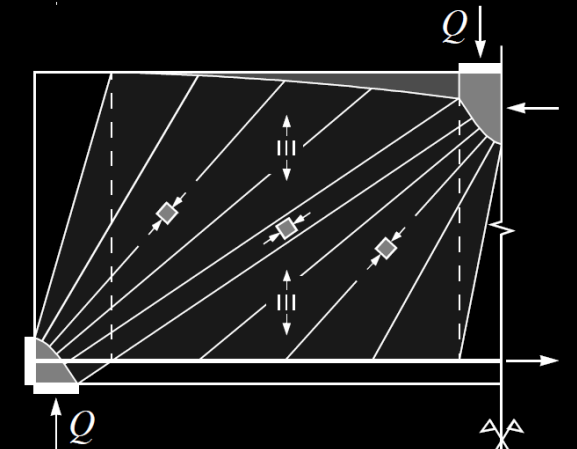
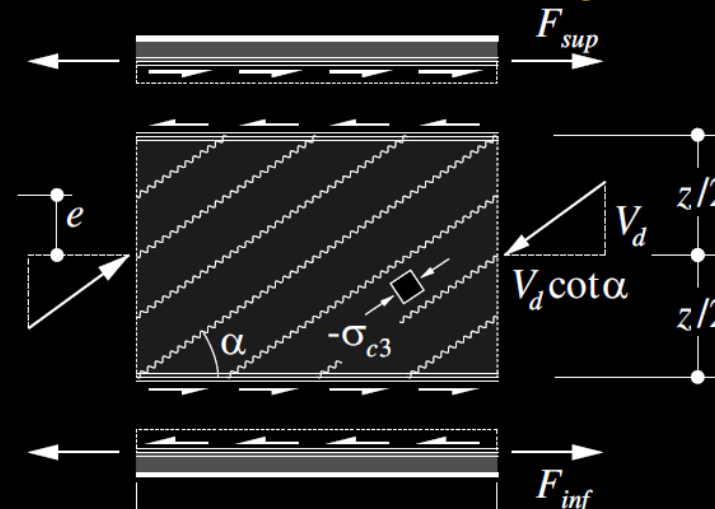
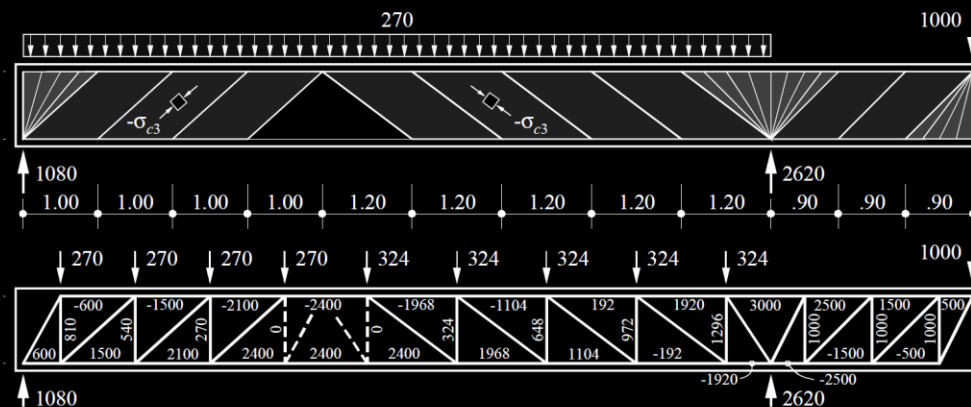


E. Mörsch, «Der Eisenbetonbau» (1908)



E. Mörsch, «Der Eisenbetonbau» (1922)

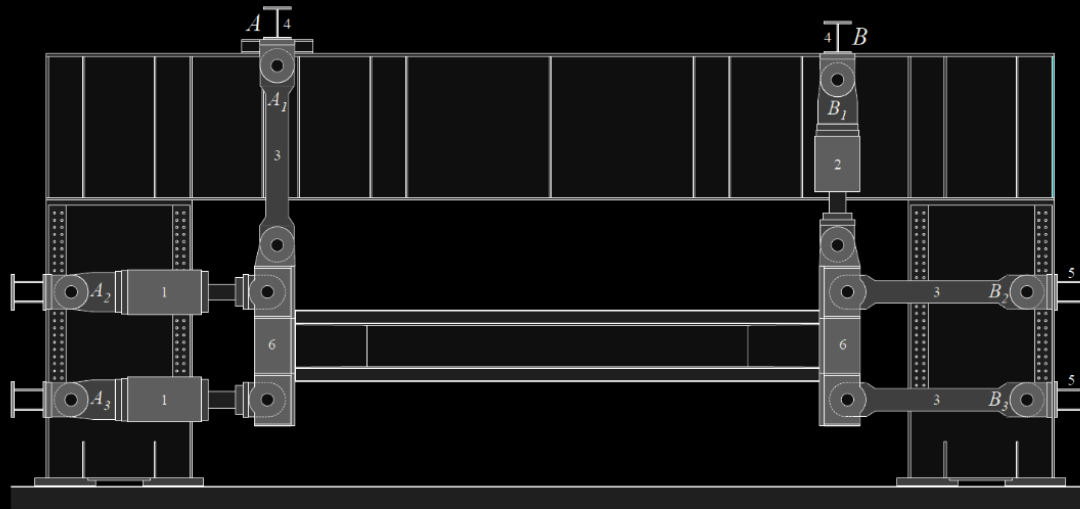
Heutige Fachwerkmodelle / Spannungsfelder: **Plastizitätstheorie = konsistente Grundlage für die Bemessung**



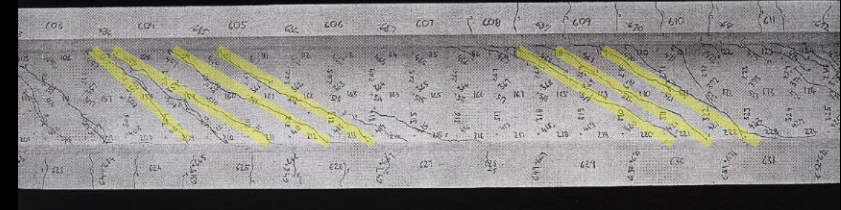
Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen unter Querkraft

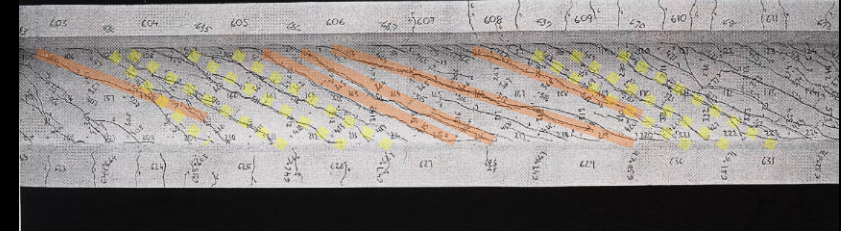
- Seit 1960 intensive Forschung insbesondere auch an der ETH Zürich.
- Zahlreiche Grossversuche, zum Beispiel Kaufmann (1995/96), siehe Abbildungen, bestätigen das Verhalten (Fachwerke / Spannungsfelder) bei Trägern mit Schubbewehrung.
- Rissneigung wird mit zunehmender Belastung immer flacher bis zum Stegdruckbruch.



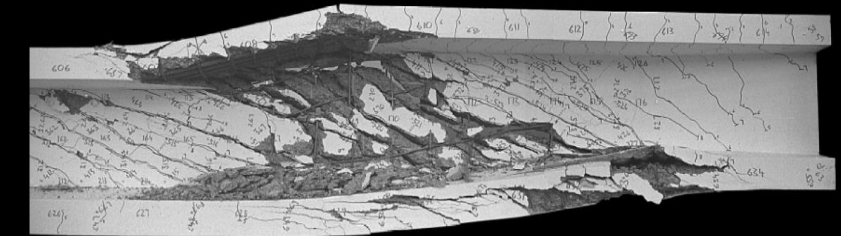
$$V = 360 \text{ kN}, \alpha_r \approx 30^\circ$$



$$V = 545 \text{ kN}, \alpha_r \approx 17...25^\circ$$

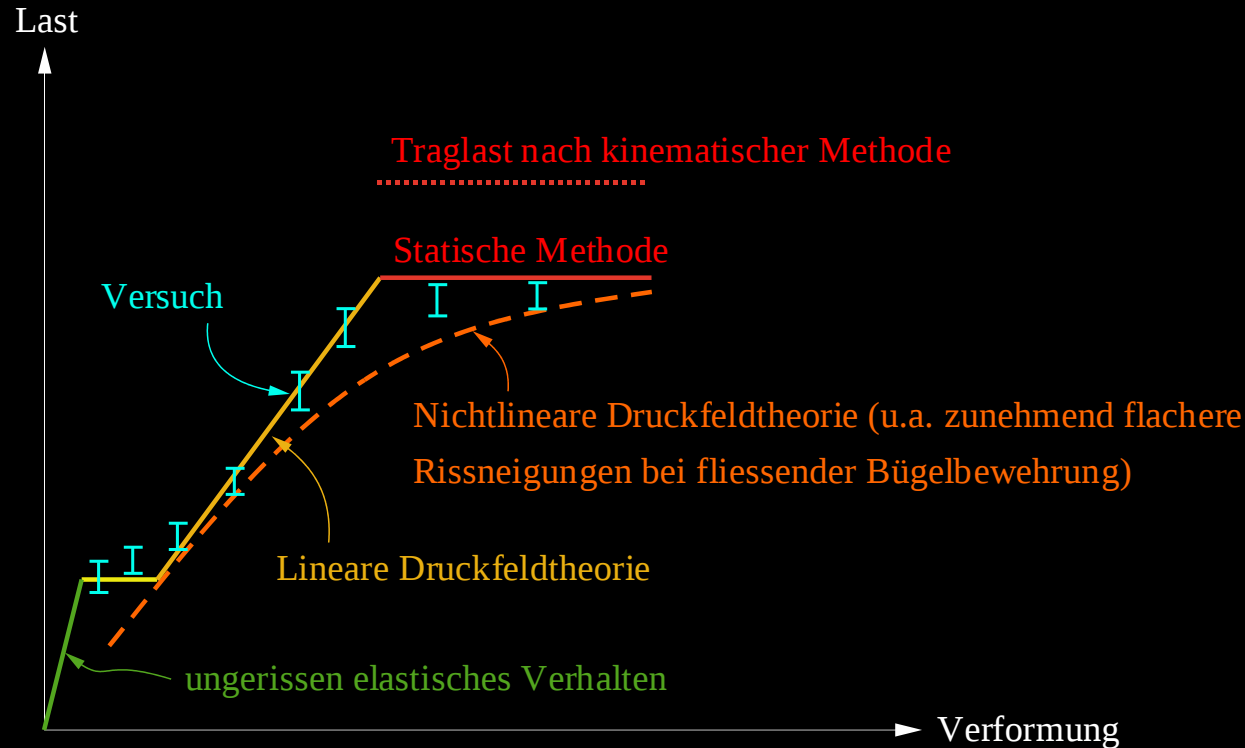


(Bruch)



Querkraft – Einleitung

Querkraft – Typisches Last-Verformungs-Diagramm

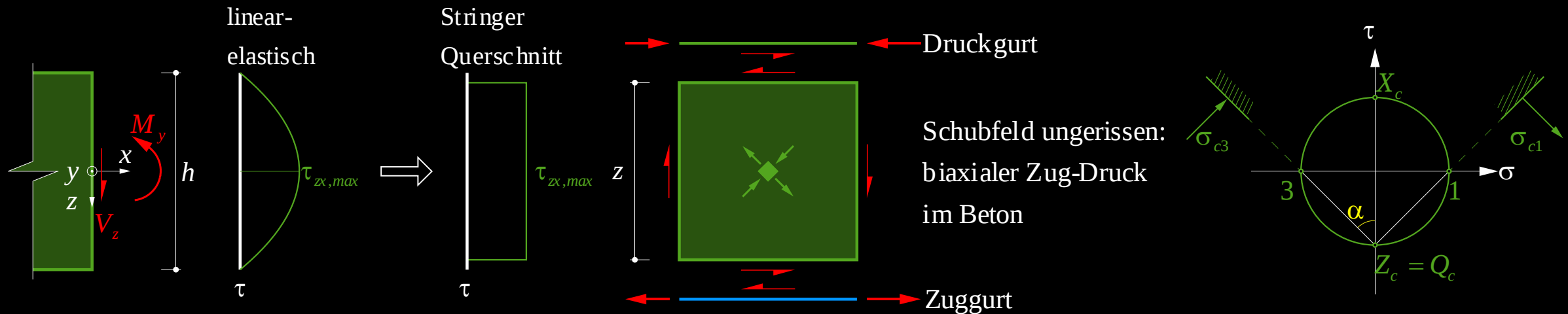


- Das typische Last-Verformungs-Diagramm eines Stahlbetonelements unter reiner Schubbeanspruchung zeichnet sich, wie bei Biege- und Normalkraftbeanspruchung, durch die drei Bereiche «**ungerissen elastisches Verhalten**» (Zustand I), «**gerissen elastisches Verhalten**» (Zustand II) und «**Traglast**» (Zustand III) aus.
- Das in Versuchen beobachtete Verhalten kann mit verschiedenen Modellvorstellungen erfasst werden.

Querkraft – Ungerissenes ↔ gerissenes Verhalten

Ungerissenes Verhalten und Rissbildung

- Parabolische Schubspannungsverteilung (für linear elastisches Verhalten des Betons)
- Rissbildung, wenn Hauptspannung σ_{c1} im Beton die Zugfestigkeit erreicht → Umlagerung auf Bewehrung (nächste Folie)
- Bei fehlender oder zu schwacher Querkraftbewehrung sehr sprödes Zugversagen bei Rissbildung



$$\tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y(z)}{b \cdot I_y} \rightarrow \tau_{zx,max} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{bh} \Rightarrow \tau_{zx} = \frac{V_z}{b \cdot z}$$

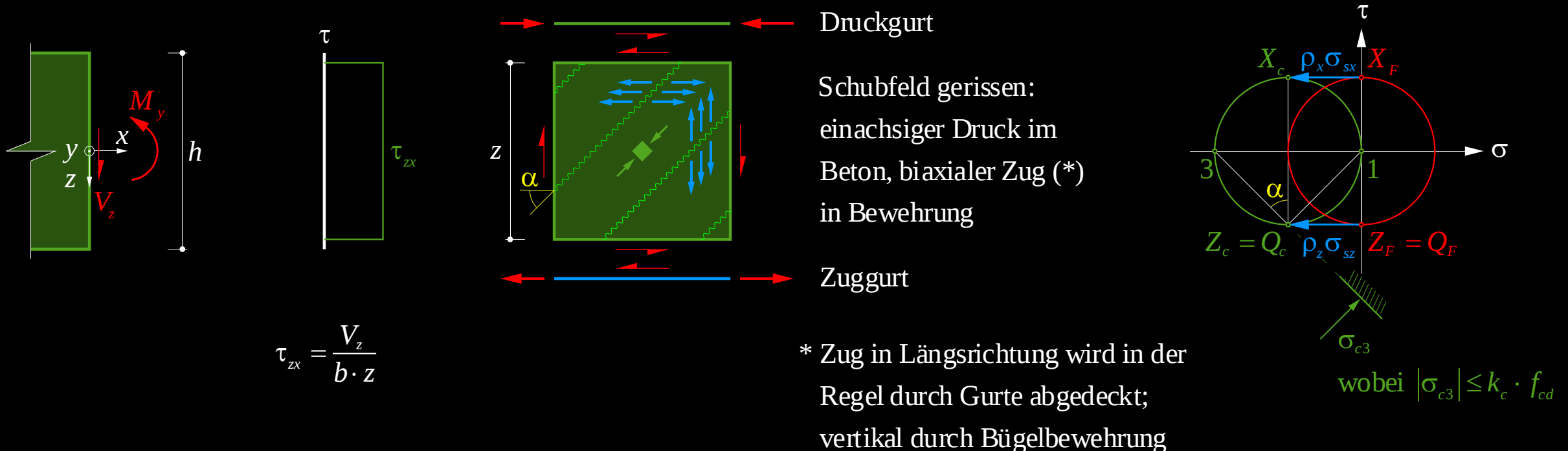
$$\text{mit } S_{y,max}(0) = \frac{bh^2}{8} \text{ und } I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$\sigma_{c1} = \tau_{zx,max} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{bh} \approx \frac{V_z}{bz} \leq f_{ctd}$$

Querkraft – Ungerissenes ↔ gerissenes Verhalten

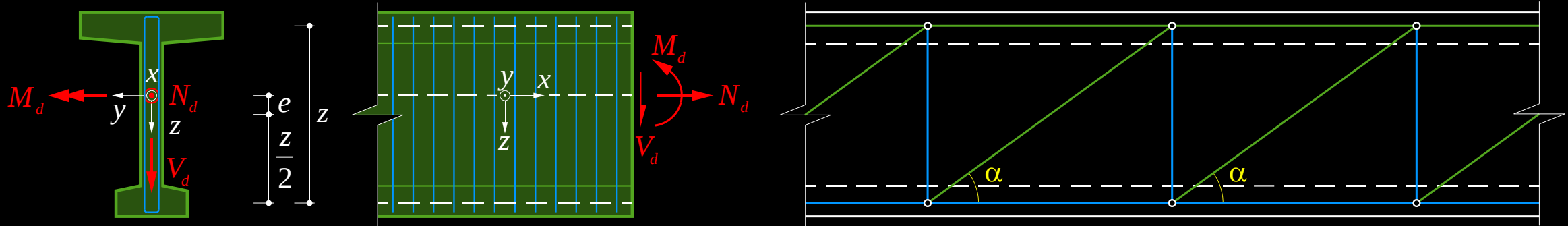
Gerissenes Verhalten

- Annahme: Schubspannungen und Hauptspannungsrichtung über Steghöhe konstant → homogene Stegbeanspruchung
- Überlagerung Längsdruckspannungen im Steg → einachsiges Druckfeld σ_{c3} im Stegbeton (unter 45°: $\sigma_{c3} = -2 \tau_{xz}$)
- Versagen durch Fließen von Längs- und Bügelbewehrung oder Bruch des Stegbetons (Stegdruckbruch) (Druckfestigkeit des Stegbetons muss infolge Querkzug abgemindert werden, Faktor $k_c \approx 0.55$)



Querkraft – «Querschnittsnachweis»

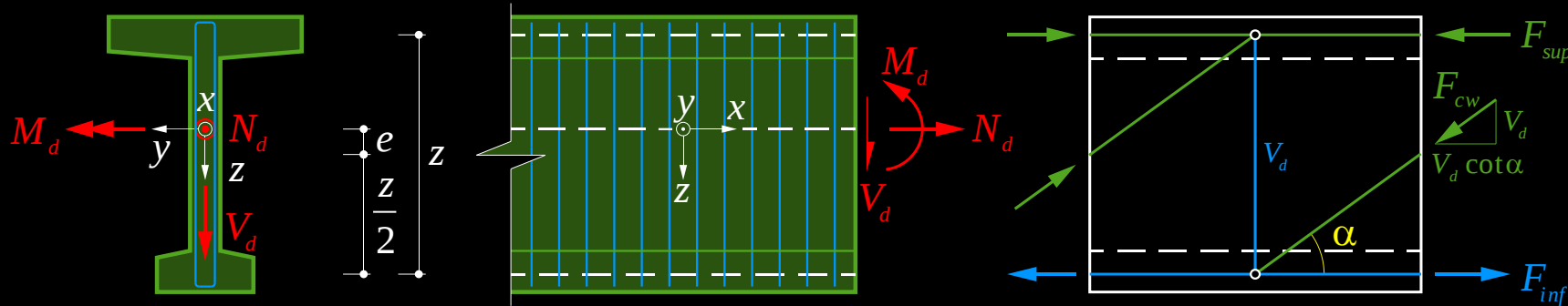
Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung



- Der Kraftfluss in einem parallelgurtigen Träger kann mit Fachwerkmodellen visualisiert werden.
- Das Fachwerk besteht aus Druck- und Zuggurt, **Druckdiagonalen** und vertikalen **Fachwerkpfosten** (resp. -ständern).
- Die Kräfte der Druckdiagonalen werden durch den **Stegbeton** aufgenommen; für die Aufnahme der Kräfte der Fachwerkpfosten ist eine **Bügelbewehrung** erforderlich.
- Die **Neigung α** der Druckdiagonalen kann (in gewissen Grenzen) frei gewählt werden.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

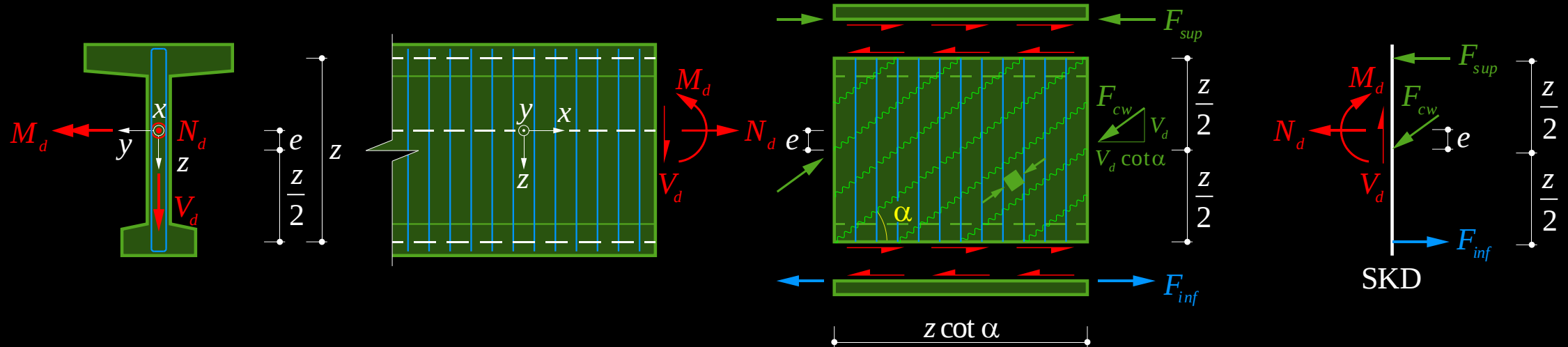
Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung



- Legt man einen Schnitt in der Mitte zwischen zwei Fachwerkpfosten, können die Kräfte in den Gurten, den Betondruckdiagonalen und den Fachwerkpfosten aus den Schnittkräften (M, V, N) einfach ermittelt werden.
- Das Fachwerkmodell abstrahiert das tatsächliche Tragverhalten stark. Eine wirklichkeitsnähere Idealisierung erhält man, indem man die **Druckdiagonalen als Resultierende eines parallelen Druckspannungsfelds** im Steg, und die **Fachwerkpfosten als Resultierende der Bügelkräfte über die Länge einer Fachwerkmasche** ($z \cdot \cot \alpha$) auffasst.
- Diese verfeinerte Idealisierung als Spannungsfeld (nächste Folie) liegt der **Bemessung nach SIA 262, 4.3.3.4** zugrunde. Dafür hat sich vereinfachend ebenfalls der Begriff «Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung» etabliert.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung



- Der Hebelarm der inneren Kräfte z folgt aus der Biegebeanspruchung und kann näherungsweise als $z = 0.9d$ angenommen werden.
- Die Abtragung der Querkraft im diagonalen Druckfeld verursacht eine **Längszugkraft $F_t(V_d)$** , die hälftig vom Zug- und Druckgurt aufgenommen wird.

$$\sum M_{(z/2)^+} = 0: \quad M_d - F_{sup} \cdot z - N_d \cdot \left(\frac{z}{2} + e \right) - V_d \cot \alpha \cdot \frac{z}{2} = 0$$

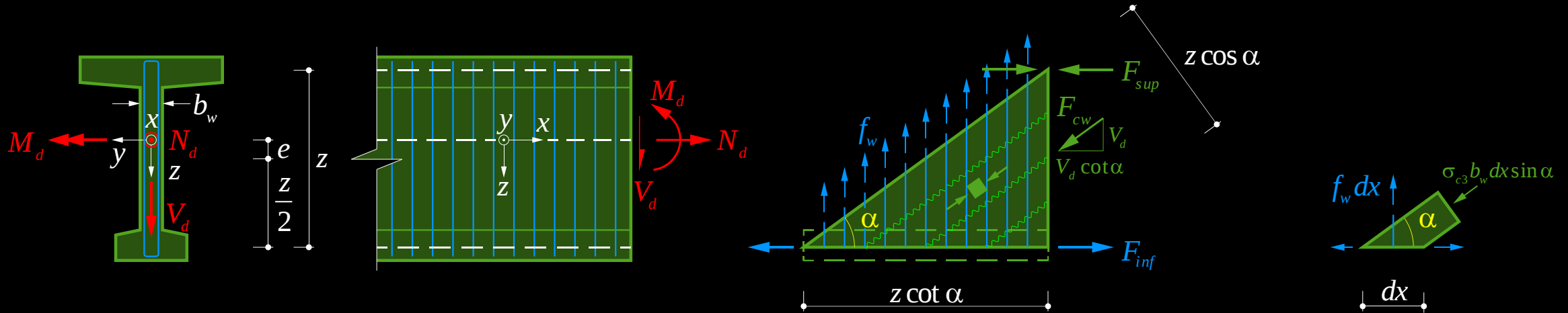
$$F_{sup} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} - \frac{N_d}{2} - \frac{V_d \cdot \cot \alpha}{2}$$

$$\sum M_{(z/2)^-} = 0: \quad M_d - F_{inf} \cdot z + N_d \cdot \left(\frac{z}{2} - e \right) + V_d \cot \alpha \cdot \frac{z}{2} = 0$$

$$F_{inf} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot \cot \alpha}{2}$$

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung



- Gleichgewicht am Schnittkörperdiagramm
3. Abb. von links → Kraft in der Bewehrung [kN/m]:

$$f_w = \frac{V_d}{z \cot \alpha}$$

$$\text{resp. mit: } f_w \leq \frac{A_{sw}}{s} f_{sd}$$

$$\rightarrow V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha$$

- Gleichgewicht am differentiellen Element in
Abb. rechts → Betondruckspannung im Steg [N/mm²]:

$$\sigma_{c3} b_w dx \sin^2 \alpha = f_w dx \quad \text{mit: } f_w = \frac{V_d}{z \cot \alpha}$$

$$\rightarrow \sigma_{c3} = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\text{resp. mit: } \sigma_{c3} \leq k_c f_{cd}$$

$$\rightarrow V_{Rd,c} = b_w k_c f_{cd} z \sin \alpha \cos \alpha$$

oder aus SKD in 3. Abb. von links:
(gleiches Ergebnis)

$$F_{cw} = \frac{V_d}{\sin \alpha}, \quad \sigma_3 = \frac{F_{cw}}{b_w z \cos \alpha}$$

$$\rightarrow \sigma_{c3} = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha}$$

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

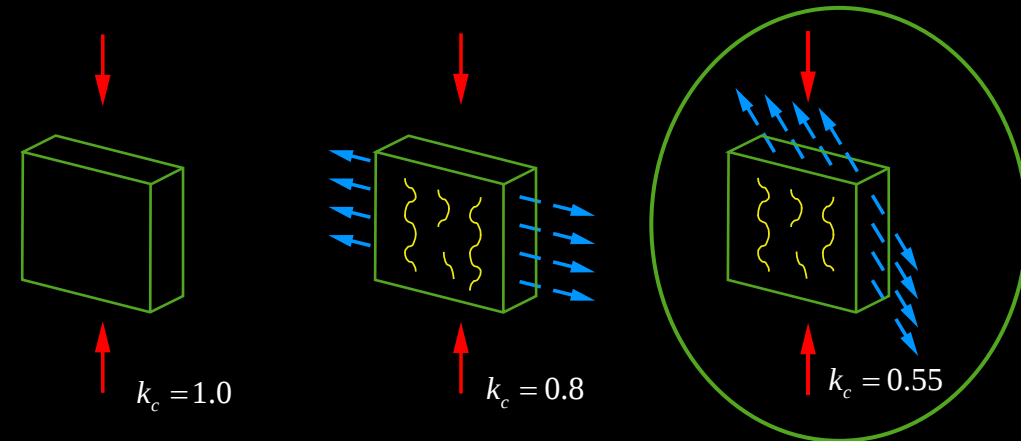
Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung

- Modellvorstellung: Einachsiges Druckfeld im Stegbeton, mit variabler Neigung $\alpha = 30 \dots 45^\circ$, das in Kombination mit einem den Bügelkräften entsprechenden vertikalen Zugfeld den Kraftfluss gewährleistet («Fachwerkwirkung»)
- Der Querkraftwiderstand wird einerseits durch den **Widerstand der vertikalen Bewehrung (Bügel)** $V_{Rd,s}$ und andererseits durch den **Widerstand des Betons** $V_{Rd,c}$ begrenzt (Widerstand = kleinerer Wert von $V_{Rd,s}$ und $V_{Rd,c}$, **nicht** Summe!)
- Zusätzlich ist die Längszugkraft F_{tVd} je hälftig vom Druck- und vom Zuggurt aufzunehmen.
- Bei Auflagern ist die Querkraft in einem Schnitt im Abstand $z \cdot \cot \alpha$ vom Auflager rand für die Bemessung massgebend

$$\begin{aligned} V_{Rd,s} &= \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{sd} \cdot z \cot \alpha \\ V_{Rd,c} &= b_w z \cdot k_c f_{cd} \cdot \sin \alpha \cos \alpha \\ F_t(V_d) &= V_d \cdot \cot \alpha \end{aligned} \quad \rightarrow V_{Rd} = \min \begin{pmatrix} V_{Rd,s} \\ V_{Rd,c} \end{pmatrix}$$

- Formeln gültig für vertikale Bügel (geneigte Bügel → hinten)

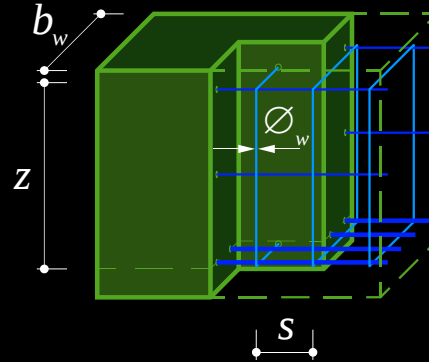
Abminderung der Betondruckfestigkeit infolge Schädigung durch Querkzug (Faktor $k_c \approx 0.55$):



Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Beispiel: Querkraftwiderstand in Funktion der Druckfeldneigung / optimale Druckfeldneigung

Beton C30/37 $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$
 Betonstahl B500B $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$
 Querschnitt $b_w = 300 \text{ mm}$
 $z = 500 \text{ mm}$
 Bewehrung $\varnothing = 14 \text{ mm}, s = 200 \text{ mm}$
 $n_{\text{Schnitte}} = 2$



$$a_{sw} = \frac{n \cdot \pi \cdot \varnothing^2}{4 \cdot s} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 14^2}{4 \cdot 200} = 1'539 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Bewehrungsgehalt $\rho_w = \frac{a_{sw}}{b_w} = 0.513\%, \omega_w = \rho_w \frac{f_{sd}}{f_{cd}} = 0.112$

Längsdehnung $\varepsilon_{x,sup} = -0.5\text{‰}$

aus QS-Analyse $\varepsilon_{x,inf} = 2.0\text{‰}$

(Annahme
typischer Werte) $\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{x,sup} + \varepsilon_{x,inf}}{2} = 0.75\text{‰}$

Querkraftwiderstand (kleinerer der beiden Werte):

Widerstand der vertikalen Bewehrung

$$V_{Rd,s}(\alpha) = a_{sw} f_{sd} z \cot \alpha$$

Widerstand der geneigten Betondruckdiagonalen

$$V_{Rd,c}(\alpha) = b_w z k_c f_{cd} \sin \alpha \cos \alpha \text{ für } \alpha \geq \alpha_{min}$$

mit: Minimale Druckfeldneigung α_{min}

Reduktionsbeiwert k_c

Optimale Druckfeldneigung α_{opt} , d.h. maximales V_{Rd} :

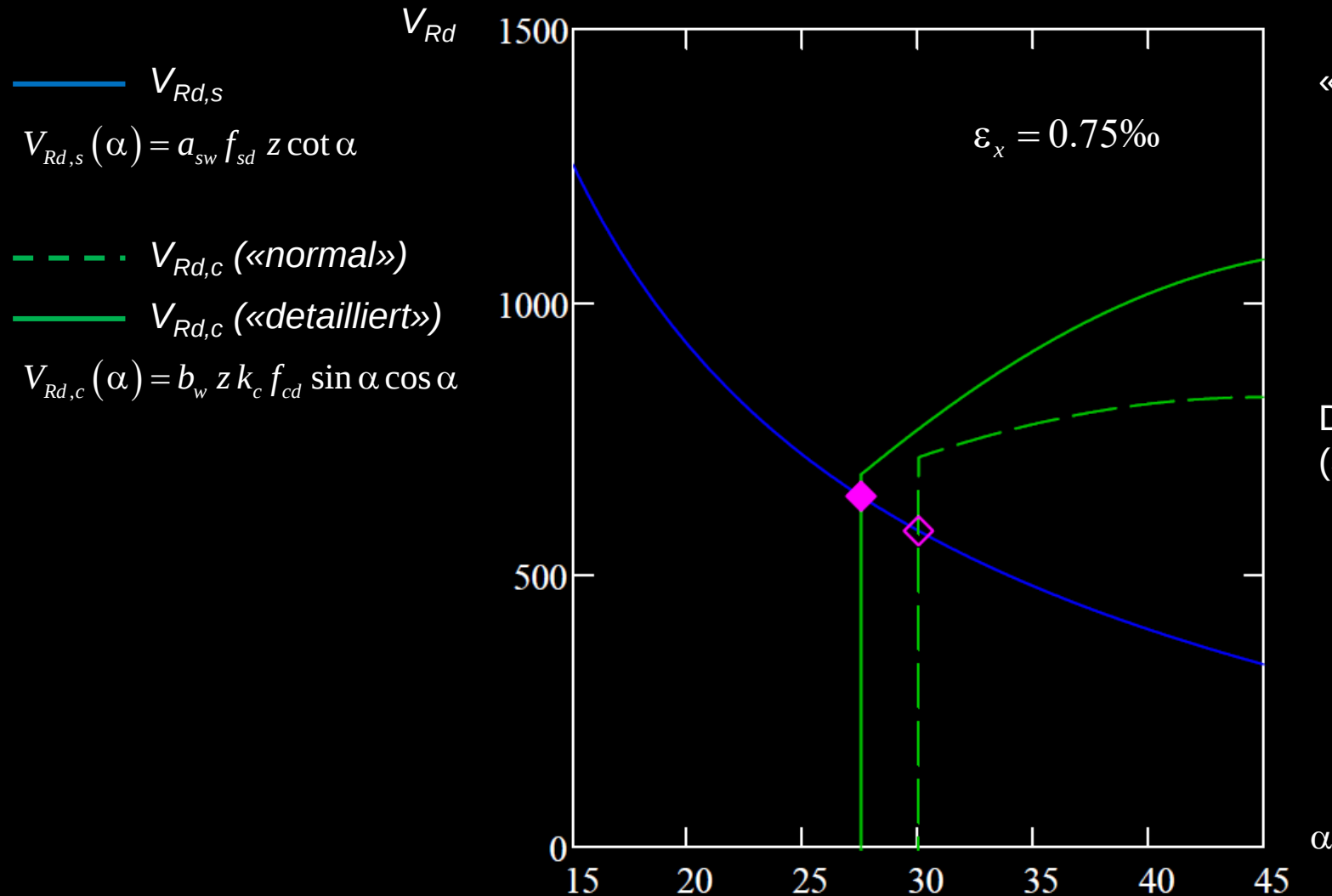
$$V_{Rd,s}(\alpha_{opt}) = V_{Rd,c}(\alpha_{opt})$$

$$a_{sw} f_{sd} z \cot \alpha = b_w z k_c f_{cd} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\rightarrow \sin \alpha_{opt} = \sqrt{\frac{a_{sw} f_{sd}}{b_w k_c f_{cd}}} = \sqrt{\frac{\omega_w}{k_c}}$$

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Beispiel: Querkraftwiderstand in Funktion der Druckfeldneigung / optimale Druckfeldneigung



«Normalfall» (SIA 262 4.3.3.3.2):

$$V_{Rd}(\alpha_{opt}) = 580 \text{ kN} \quad \blacklozenge$$

$$\alpha_{min,v} = 30^\circ$$

$$k_{c,v} = 0.55$$

Detaillierte Untersuchung:
(SIA 262 4.3.3.3.3)

$$V_{Rd}(\alpha_{opt}) = 643 \text{ kN} \quad \blacklozenge$$

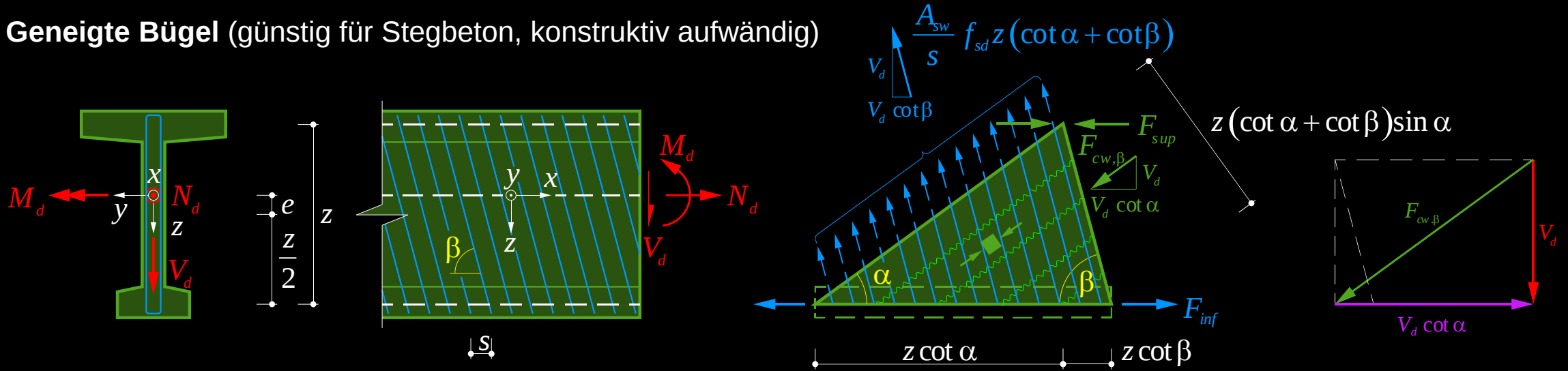
$$\alpha_{min} = (20 + 10000 \cdot \epsilon_x) = 27.5^\circ$$

$$k_c(\alpha, \epsilon_x) = \frac{1}{1.2 + 55 \cdot [\epsilon_x + (\epsilon_x + 0.002) \cdot \cot^2 \alpha]}$$

$$= 0.65$$

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Geneigte Bügel (günstig für Stegbeton, konstruktiv aufwändig)



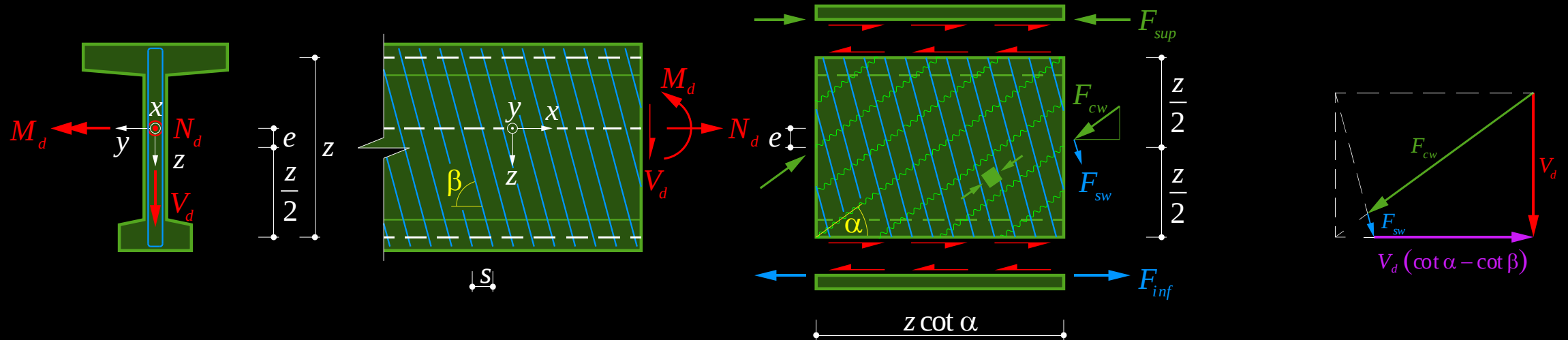
- Widerstand der Bügelbewehrung $V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z (\cot \alpha + \cot \beta) \sin \beta \quad \left(= \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha \right)$
- Widerstand des Betondruckfelds $V_{Rd,c} = b_w k_c f_{cd} z (\cot \alpha + \cot \beta) \sin^2 \alpha \quad (= b_w k_c f_{cd} z \sin \alpha \cos \alpha)$
 $= b_w k_c f_{cd} z \cos \alpha \sin \alpha (1 + \cot \beta \tan \alpha)$

Vertikale Bügel: $\beta = \frac{\pi}{2}$

NB: $V_{Rd,c}$ ist für $\beta < 90^\circ$ stets grösser als bei $\beta = 90^\circ$; $V_{Rd,s}$ ist ebenfalls grösser (ausser für sehr flache α).

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Geneigte Bügel (günstig für Stegbeton, konstruktiv aufwändig)



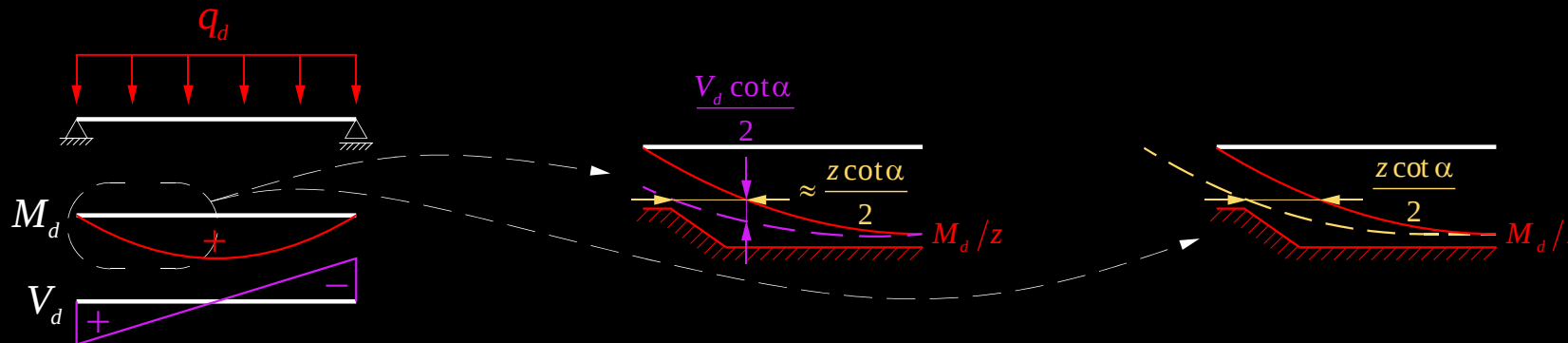
$$F_{sup} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} - \frac{N_d}{2} - \frac{V_d \cdot (\cot \alpha - \cot \beta)}{2}$$

$$F_{inf} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot (\cot \alpha - \cot \beta)}{2}$$

Querkraft – Versatzmass

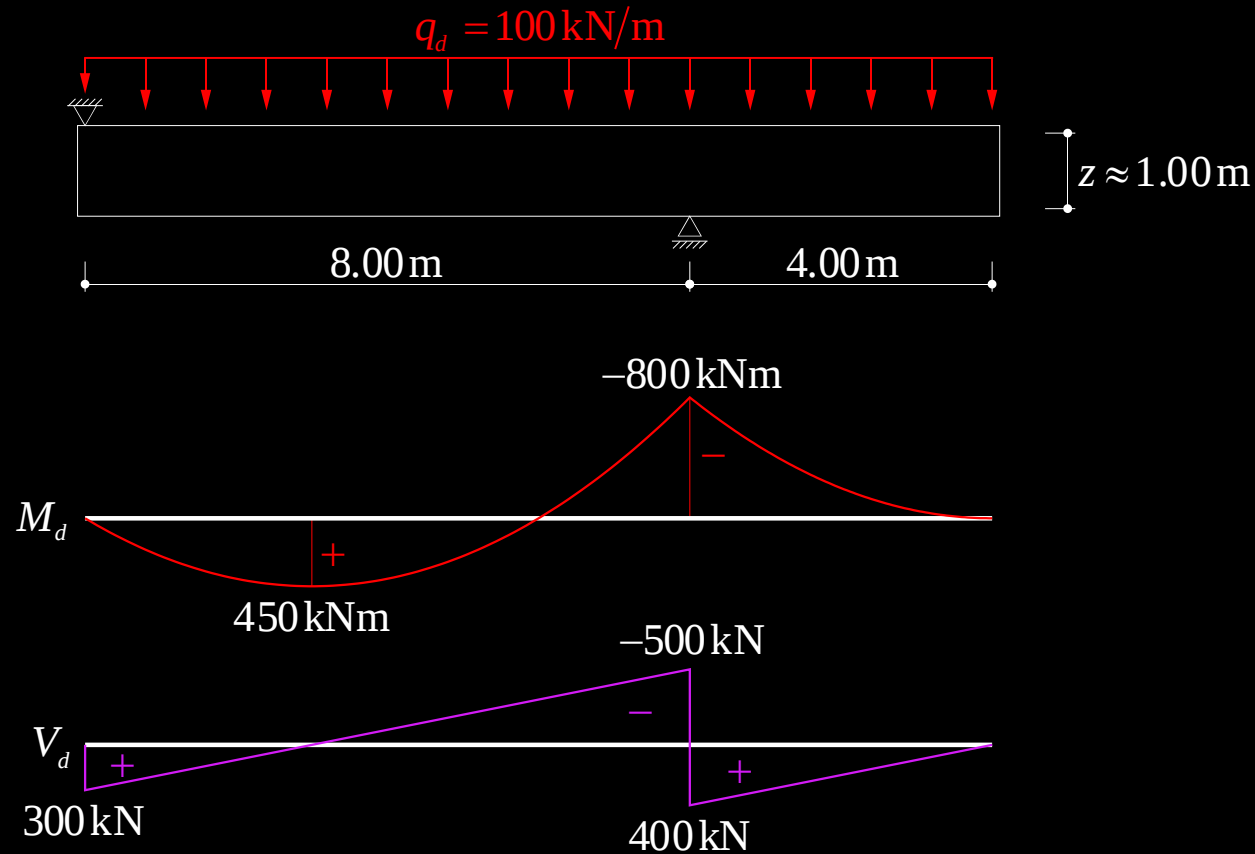
Aufnahme der Längszugkraft $F_{tVd} \rightarrow$ Versatzmass

- Die Kraft im Zuggurt F_t wird durch die Fachwerkwirkung um den Betrag $V_d \cdot \cot(\alpha) / 2$ vergrössert $\rightarrow F_t = \frac{M_d}{z} + \frac{V_d \cot \alpha}{2}$
- Graphisch kann die um den Betrag $V_d \cdot \cot(\alpha) / 2$ vergrössert M_d/z -Linie durch eine horizontale Verschiebung der M_d/z -Linie um $z \cdot \cot(\alpha) / 2$ angenähert werden. (Die beiden Ansätze werden im nachfolgenden Rechenbeispiel verglichen.)
- Die Steigung der M_d/z -Linie beträgt $\frac{d}{dx} \left(\frac{M_d}{z} \right) = \frac{1}{z} \cdot \frac{dM_d}{dx} = \frac{V_d}{z}$
 $\rightarrow$ Die vertikale Verschiebung um $V_d \cdot \cot(\alpha) / 2$ kann **linear approximiert** werden durch eine horizontale Verschiebung um:
 $\frac{V_d \cot \alpha}{2} \bigg/ \frac{V_d}{z} = \frac{z \cot \alpha}{2}$
- Ein ausreichender Zuggurtwiderstand ist vorhanden, wenn die Zugkraftdeckung der Bewehrung gegenüber der verschobenen M_d/z -Linie nachgewiesen werden kann (Widerstand an jeder Stelle $\geq$ Gurtkraft).
- Die horizontale Verschiebung wird als **Versatzmass** bezeichnet. Sie erfolgt bei positiven Momenten in Richtung des Schubflusses und bei negativen Momenten dem Schubfluss entgegen und beeinflusst die Abstufung der Längsbewehrung.



Querkraft – Versatzmass

Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung – Versatzmass



Beton C30/37 $\rightarrow f_{cd} = 20 \text{ MPa}$
Betonstahl B500B $\rightarrow f_{sd} = 435 \text{ MPa}$

Rechteckquerschnitt:

$b_w = 400 \text{ mm}$

$a_{sw} = 1'131 \text{ mm}^2/\text{m}$ ($2\text{Ø}12@200$)

$A_s = 1'257 \text{ mm}^2$ ($4\text{Ø}20$)

$A'_s = 2'124 \text{ mm}^2$ ($4\text{Ø}26$)

Querkraft – Versatzmass

Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung

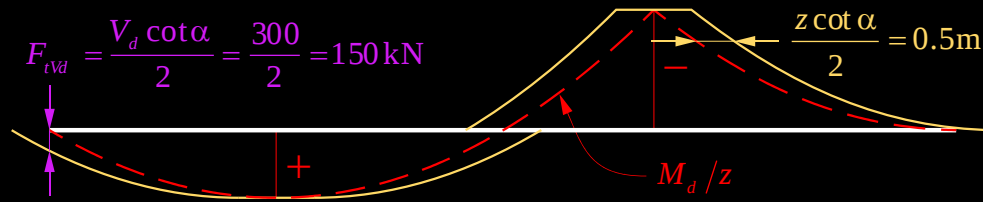
- Biegung über Auflager: $M'_{Rd} = A'_s f_{sd} z = 2'124 \cdot 0.435 \cdot 1.0 = 924 \text{ kNm} \geq M_d = 800 \text{ kNm}$
- Biegung im Feld: $M_{Rd} = A_s f_{sd} z = 1'257 \cdot 0.435 \cdot 1.0 = 547 \text{ kNm} \geq M_d = 450 \text{ kNm}$

- Querkraft:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha = 2 \cdot 565 \cdot 0.435 \cdot 1 \cdot \cot(45^\circ) = 492 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,c} = b_w z k_c f_{cd} \sin \alpha \cos \alpha = 400 \cdot 1'000 \cdot 0.55 \cdot 0.02 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \cos(45^\circ) = 2'200 \text{ kN}$$

- Versatzmass:



Das **Versatzmass** ist bei der Abstufung der Biegebewehrung zu beachten.

Die maximalen Zuggurkräfte werden dadurch aber nicht vergrössert.

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle ↔ Plastizitätstheorie

- Das Fachwerkmodell mit variabler Druckdiagonalenneigung erfüllt die **Gleichgewichtsbedingungen** und die statischen Randbedingungen, und die **Fliessbedingungen** werden nirgends verletzt (*).
- Die resultierende Traglast (Querkraftwiderstand) entspricht somit einer Lösung nach dem **unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie**:

«Jede Belastung, zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fliessbedingung nicht verletzt, liegt nicht höher als die Traglast»

- Die Bemessung mit dem Fachwerkmodell liefert also **auf der sicheren Seite liegende Resultate** (**).

(*) Diese Bedingung wird erfüllt, indem die Gurt- und Bügelbewehrungen für die Aufnahme der resultierenden Zugkräfte dimensioniert werden und die Stegdicke so festgelegt, dass die Druckspannungen vom Beton – mit der um den Beiwert k_c reduzierten Betonfestigkeit – aufgenommen werden können.

(**) Sofern keine vorzeitigen Versagen infolge begrenzter Duktilität auftreten (Annahme der Plastizitätstheorie: ideal plastisches Verhalten mit unbegrenzter Duktilität) → vorsichtiger Wert der Betondruckfestigkeit, Beiwert k_c .

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle ↔ Kraftfluss

- Mit Fachwerkmodellen kann nicht nur der Querkraftwiderstand in einem Querschnitt ermittelt werden. Vielmehr können **Fachwerkmodelle** dazu verwendet werden, um den **Kraftfluss** in ganzen Tragwerken zu visualisieren und, darauf basierend, die Abmessungen festzulegen und die Bewehrung zu **konstruieren**.
- Dabei werden die **Druckkräfte** (Druckstreben resp. Druckfelder) durch den **Beton** aufgenommen; die Abmessungen (in der Fachwerkebene und senkrecht dazu) sind genügend gross zu wählen, um die Kräfte aufnehmen zu können. Für die **Zugkräfte** (Zugstreben) wird eine **Bewehrung** entsprechend der Lage und Grösse der Zugkräfte eingelegt.
- Solche Fachwerkmodelle sind ein **äusserst leistungsfähiges Hilfsmittel für die Tragwerksbemessung**. Die Anwendung kann entweder händisch erfolgen (was insbesondere in Verbindung mit **grafischer Statik** sehr hilfreich für das Verständnis des Kraftflusses ist), oder mittels spezieller Computerprogramme (siehe Notizen).
- Die auf allgemeinen Fachwerkmodellen basierende **Bemessung** liefert – unter den gleichen Voraussetzungen wie für das Fachwerkmodell mit variabler Druckdiagonalenneigung erläutert – **auf der sicheren Seite liegende Resultate**.
- Für jede Problemstellung (Tragwerk mit gegebener Geometrie und Einwirkungen / Lasten) gibt es **mehrere mögliche Lösungen**, d.h. verschiedene Fachwerkmodelle, die den Kraftfluss gewährleisten und untere Grenzwerte der Traglast liefern. Die Ingenieurin / der Ingenieur **konzipiert** das am besten geeignete Fachwerkmodell und **konstruiert** die Bewehrung entsprechend.

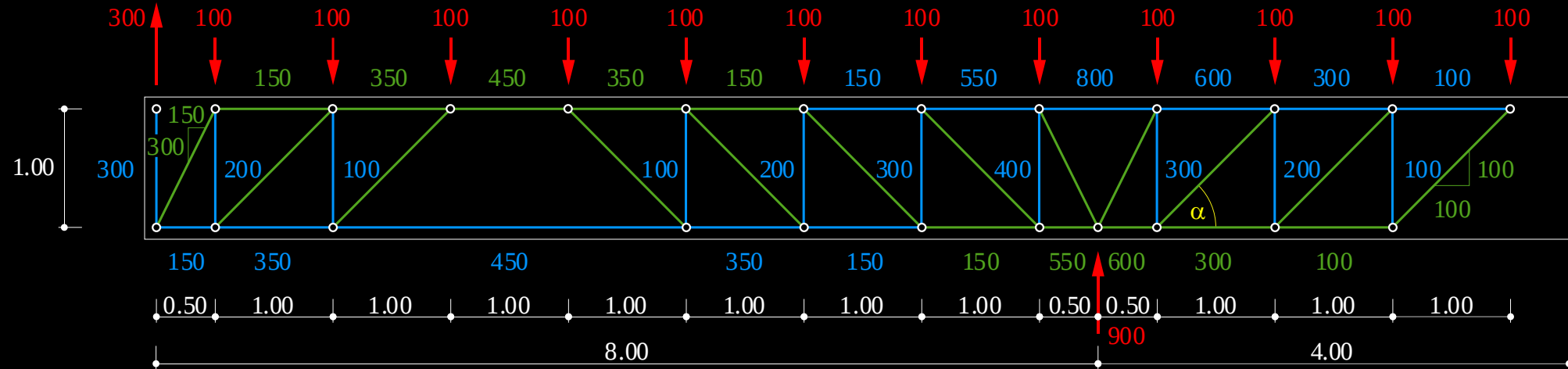
Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Übersicht über den Inhalt der folgenden Folien

- Nachfolgend werden zunächst **Fachwerkmodelle mit konzentrierten Stäben (Wirkungslinien der Kräfte)** für **parallelgurtige Träger** anhand eines Beispiels untersucht. Solche Fachwerke werden auch als Stabwerkmodelle bezeichnet. Mit diesen kann zwar der Kraftfluss einfach visualisiert werden, sie abstrahieren das tatsächliche Verhalten jedoch sehr stark.
- Anschliessend werden diese Fachwerkmodelle im gleichen Beispiel zu **Spannungsfeldern** entwickelt, mit denen verteilte Bewehrungen und die Druckfestigkeit des Betons untersucht werden können.
- Sodann werden die nach diesen Modellen erforderlichen Gurt- und Bügelbewehrungen mit den Resultaten einer «**Querschnittsbemessung**» (Fachwerkmodell mit variabler Druckdiagonalenneigung, Anwendung des Versatzmasses) für parallelgurtige Träger verglichen.
- Schliesslich werden Diskontinuitäten in Spannungsfeldern erläutert und Spannungsfelder und Fachwerkmodelle für einige **typische konstruktive Details und Tragwerkselemente** diskutiert.

Querkraft – Fachwerkmodelle

Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung (linkes Auflager als Aufhängung ausgebildet) [alle Masse in kN, resp. m]



$$\tan \alpha = 1$$

erforderlicher Widerstand der Bügelbewehrung

$$V_{Rd,s} = \frac{400 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 400 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

An den Enden zu verankernde Zugkraft

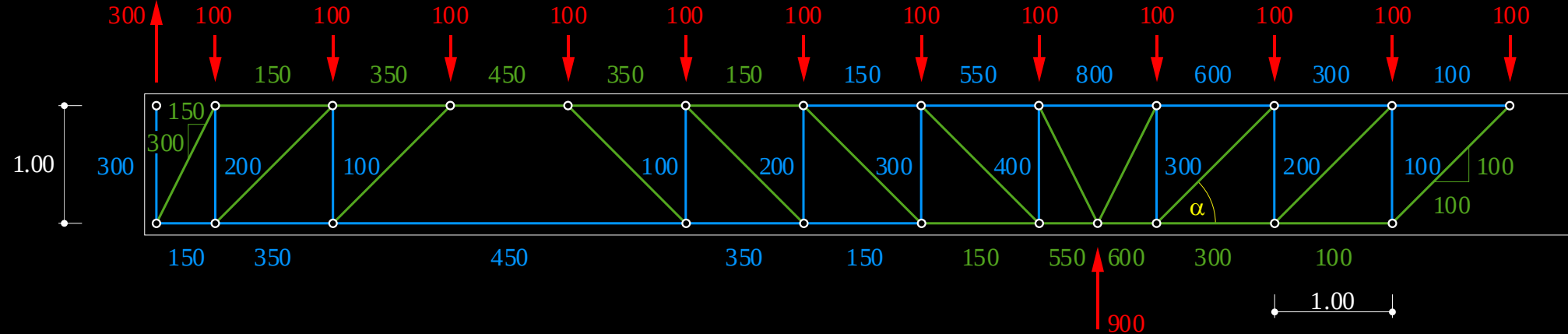
$$F_{tVd,sup} = 100 \text{ kN (Obergurt)}$$

$$F_{tVd,inf} = 150 \text{ kN (Untergurt)}$$

Querkraft – Fachwerkmodelle

Beispiel

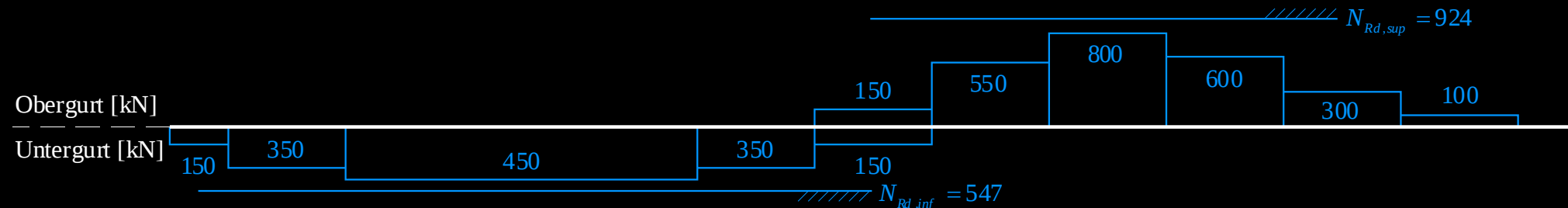
Bemessung der Bewehrung mit Fachwerkmodell $\alpha = 45^\circ$ ($z = 1 \text{ m}$, $\cot \alpha = 1$) [alle Masse in kN, resp. m]



Bügelbewehrung: $a_{s,erf} = \frac{F_{sw}}{z \cdot \cot \alpha \cdot f_{sd}} = \frac{400}{0.435} = 920 \text{ mm}^2/\text{m} \rightarrow 2\text{-schnittige Bügel } \varnothing 10@150, a_s = 1'047 \text{ mm}^2/\text{m}$

Obergurt: $A_{s,erf} = \frac{F_{s,sup}}{f_{sd}} = \frac{800}{0.435} = 1'839 \text{ mm}^2 \rightarrow 4\varnothing 26, A_s = 2'124 \text{ mm}^2 \rightarrow N_{Rd,sup} = A_s \cdot f_{sd} = 924 \text{ kN}$

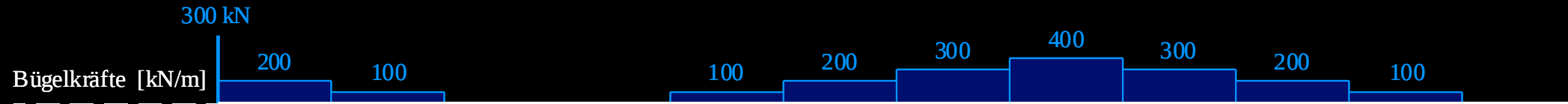
Untergurt: $A_{s,erf} = \frac{F_{s,inf}}{f_{sd}} = \frac{450}{0.435} = 1'034 \text{ mm}^2 \rightarrow 4\varnothing 20, A_s = 1'257 \text{ mm}^2 \rightarrow N_{Rd,inf} = A_s \cdot f_{sd} = 547 \text{ kN}$



Querkraft – Fachwerkmodelle

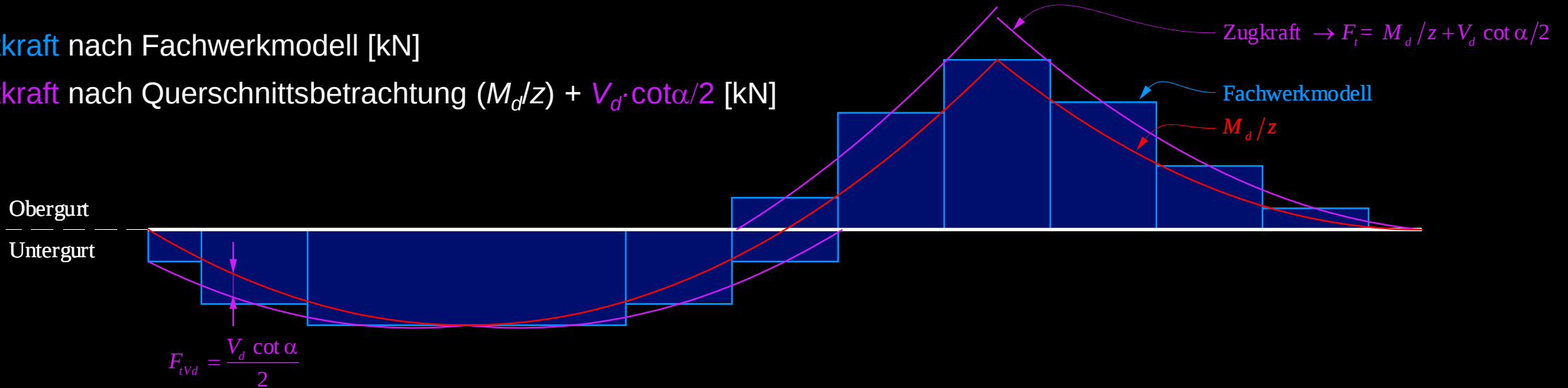
Beispiel

Bügelkräfte [kN/m] und konzentrierte Aufhängebewehrung [kN] beim linken Auflager:



Zuggurtkraft nach Fachwerkmodell [kN]

Zuggurtkraft nach Querschnittsbetrachtung (M_d/z) + $V_d \cdot \cot \alpha / 2$ [kN]



- Die Kraft im Zuggurt wird sowohl mit dem **Fachwerkmodell** als auch mit der **vertikal verschobenen M_d/z -Linie** korrekt erfasst. Die einzige Ausnahme bildet die Krafteinleitung beim Auflager. In diesem Bereich überschätzt die **vertikal verschobenen M_d/z -Linie** die Kraft im Zuggurt.
- In der Mitte zwischen Pfosten (= vertikale Stäbe) des Fachwerks, wo bei nicht konstanter Querkraft die abschnittsweise konstanten Bügelkräfte springen, stimmen **Fachwerkmodell** und **vertikal verschobene M_d/z -Linie** überein.

Querkraft – Fachwerkmodelle

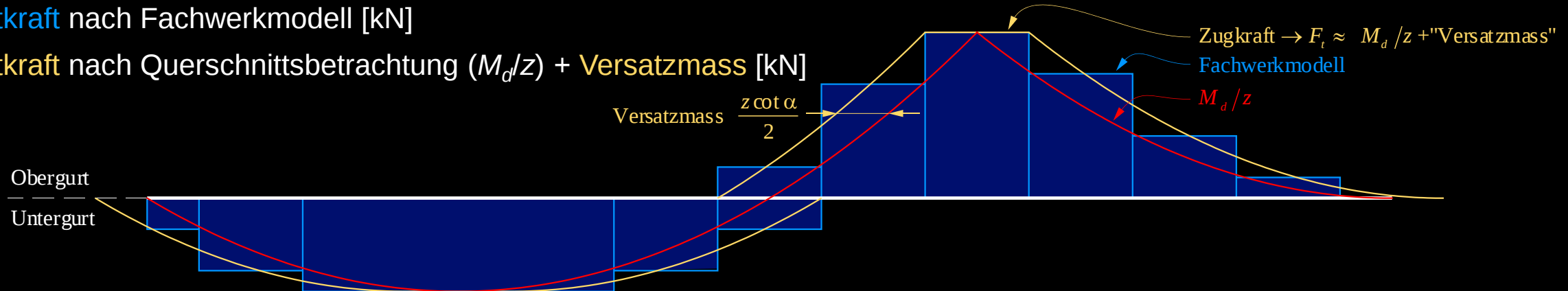
Beispiel

Bügelkräfte [kN/m] und konzentrierte Aufhängebewehrung [kN] beim linken Auflager:



Zuggurtkraft nach Fachwerkmodell [kN]

Zuggurtkraft nach Querschnittsbetrachtung (M_d/z) + Versatzmass [kN]

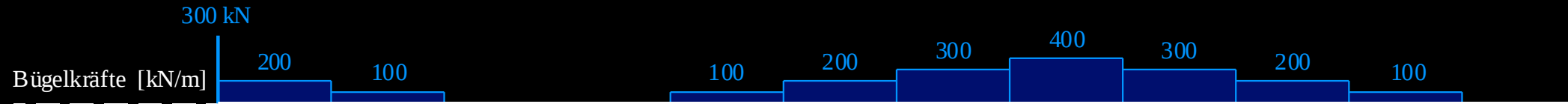


- Die maximale Kraft im Zuggurt und die zu verankernde Kraft über dem Auflager und bei der Krafteinleitungsstelle werden sowohl mit dem **Fachwerkmodell** als auch mit der **horizontal verschobenen M_d/z -Linie** gut erfasst.

Querkraft – Fachwerkmodelle

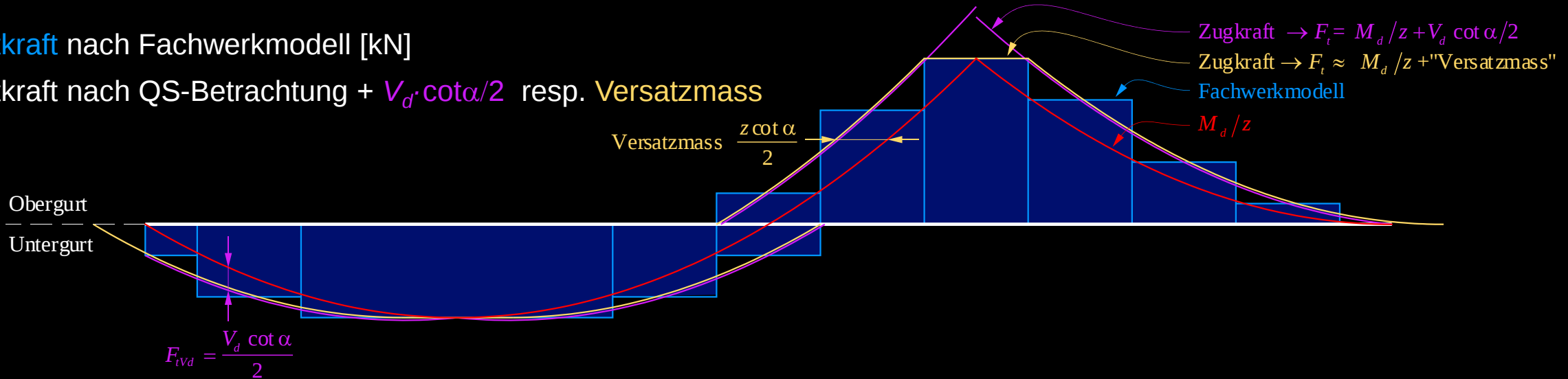
Beispiel

Bügelkräfte [kN/m] und konzentrierte Aufhängebewehrung [kN] beim linken Auflager:



Zuggurtkraft nach Fachwerkmodell [kN]

Zuggurtkraft nach QS-Betrachtung + $V_d \cdot \cot \alpha / 2$ resp. Versatzmass



- Die Kraft im Zuggurt wird sowohl mit dem **Fachwerkmodell** als auch mit der **vertikal verschobenen M_d/z -Linie** korrekt erfasst. Die einzige Ausnahme bildet die Krafteinleitung beim Auflager. In diesem Bereich überschätzt die **vertikal verschobenen M_d/z -Linie** die Kraft im Zuggurt.
- In der Mitte zwischen Pfosten (= vertikale Stäbe) des Fachwerks, wo bei nicht konstanter Querkraft die abschnittsweise konstanten Bügelkräfte springen, stimmen **Fachwerkmodell** und **vertikal verschobene M_d/z -Linie** überein.

Querkraft – Spannungsfelder

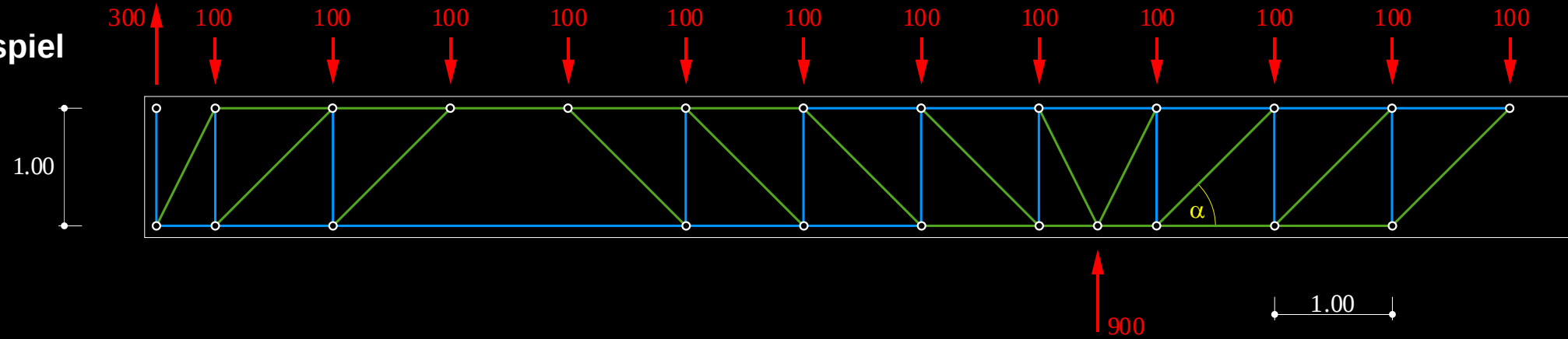
Fachwerkmodelle ↔ Spannungsfelder

- **Fachwerkmodelle mit konzentrierten Stäben (Wirkungslinien der Kräfte)** werden auch als **Stabwerkmodelle** bezeichnet. Mit diesen kann zwar der Kraftfluss einfach visualisiert werden, sie abstrahieren das tatsächliche Verhalten jedoch sehr stark. Solche **Stabwerkmodelle** eignen sich daher nur bedingt zur Überprüfung der Betondruckfestigkeit und zeigen nicht direkt auf, ob eine Bewehrung verteilt werden kann oder konzentriert einzulegen ist.
- Eine wirklichkeitsnähere Idealisierung erhält man, indem man die Stabwerkmodelle zu **Spannungsfeldern** verfeinert. Dabei werden den Fachwerkstäben finite Abmessungen in der Fachwerkebene zugewiesen. Aus den Druckstäben des Fachwerks werden dadurch **parallele Druckfelder** (konstante Breite) oder **Fächer** (variable Breite), und die Zugstäbe können durch eine über eine bestimmte Breite **verteilte Bewehrung** resp. **Zugfelder** aufgenommen werden.
- Solche Spannungsfelder sind **strenge Lösungen nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie** (was bei Stabwerkmodellen nicht generell zutrifft).
- Das Vorgehen beim Übergang von Stabwerkmodell zu Spannungsfeld wird auf den folgenden Folien am Beispiel des Einfeldträgers mit Kragarm illustriert.

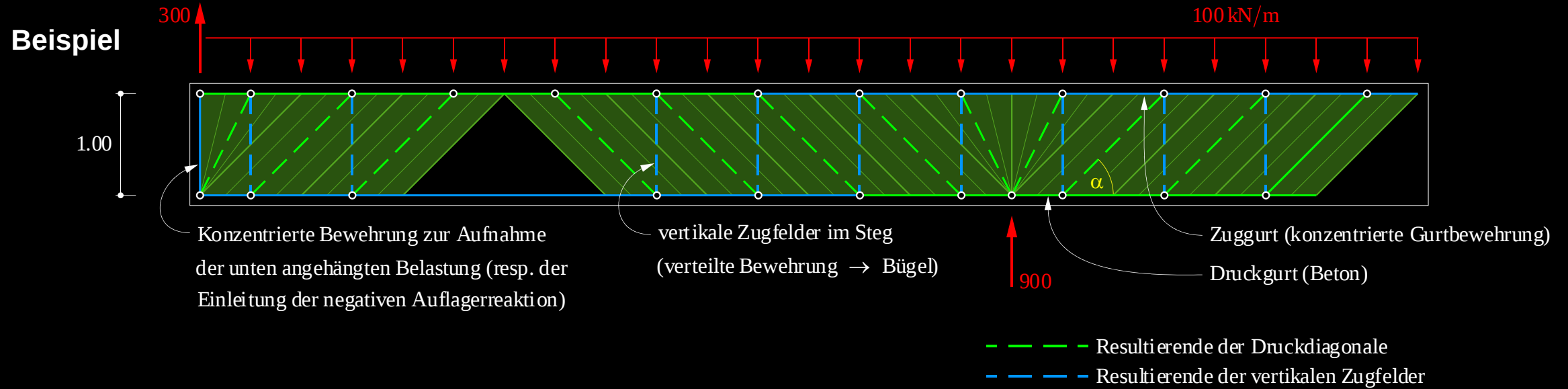
NB: Der Übergang gelingt nur so problemlos wie im Beispiel, wenn im Stabwerkmodell genügend Platz für die Druckstreben vorgesehen wurde; andernfalls muss die Fachwerkgeometrie iterativ angepasst werden.

Querkraft – Spannungsfelder

Beispiel

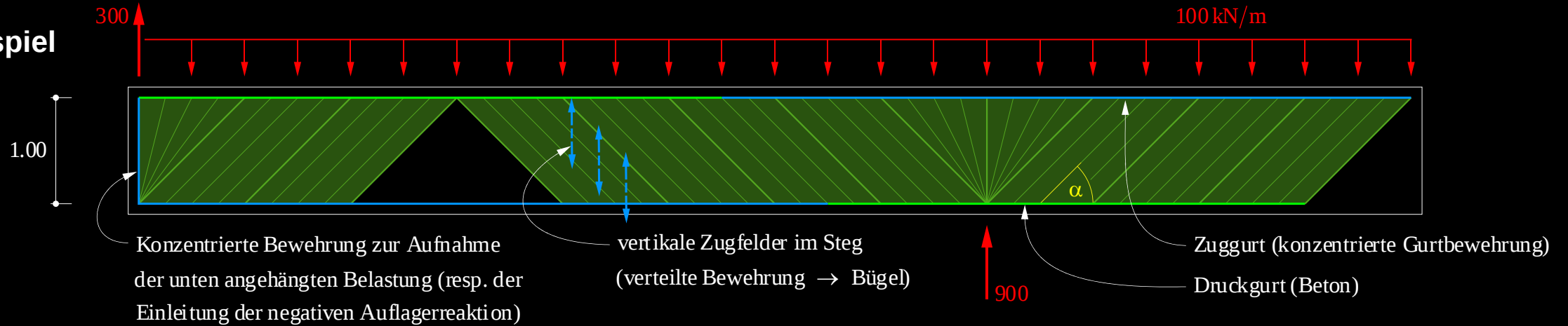


Querkraft – Spannungsfelder

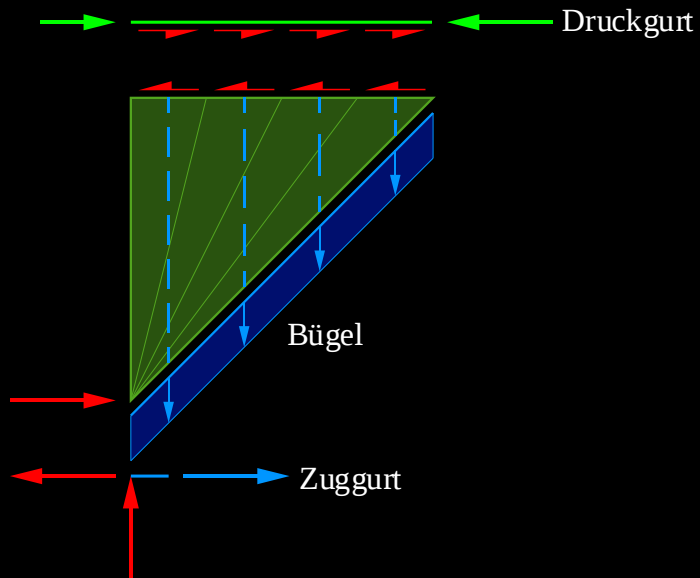


Querkraft – Spannungsfelder

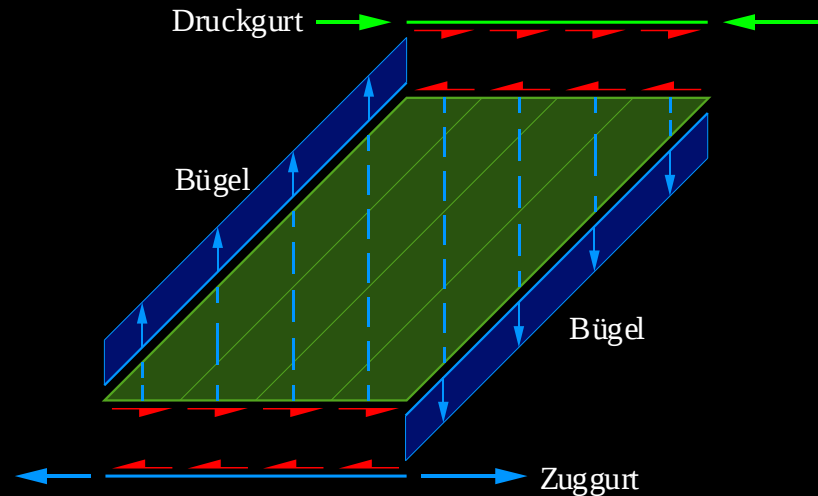
Beispiel



Punktzentrierter Fächer:



Parallele Druckspannungsfelder:



Force equilibrium diagram for a stress field element. The diagram shows a small element of width dx and height $dx \sin \alpha$. The forces acting on the element are:

- Horizontal force on the left: F_{inf}
- Horizontal force on the right: $F_{inf} + dF_{inf}$
- Vertical force on the top: $f_{wd} dx$
- Vertical force on the bottom: $f_{wd} dx$
- Angle of the stress field: α

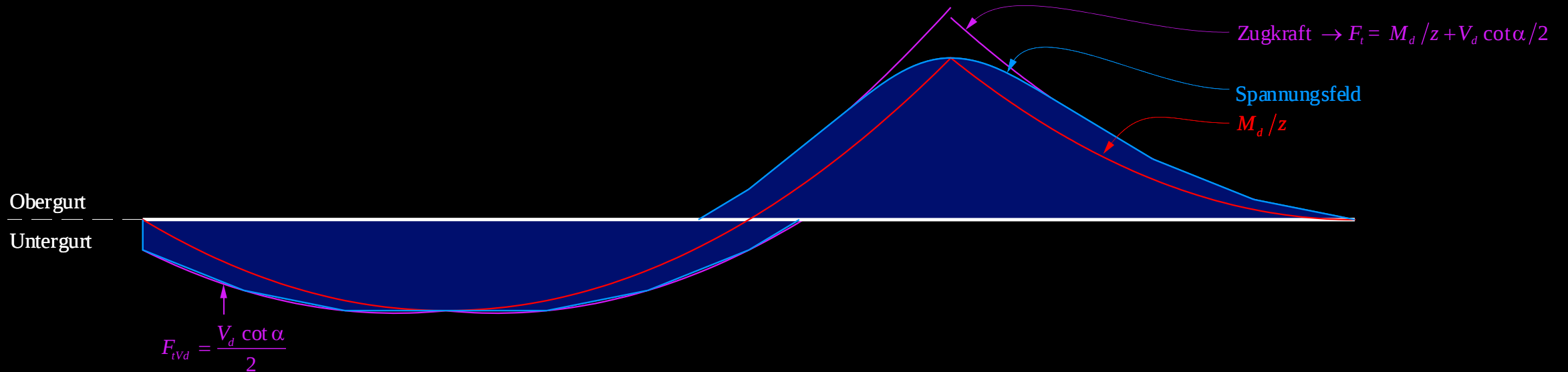
The equilibrium equation is given by:

$$dF_{inf} = f_{wd} dx \cot \alpha$$

or

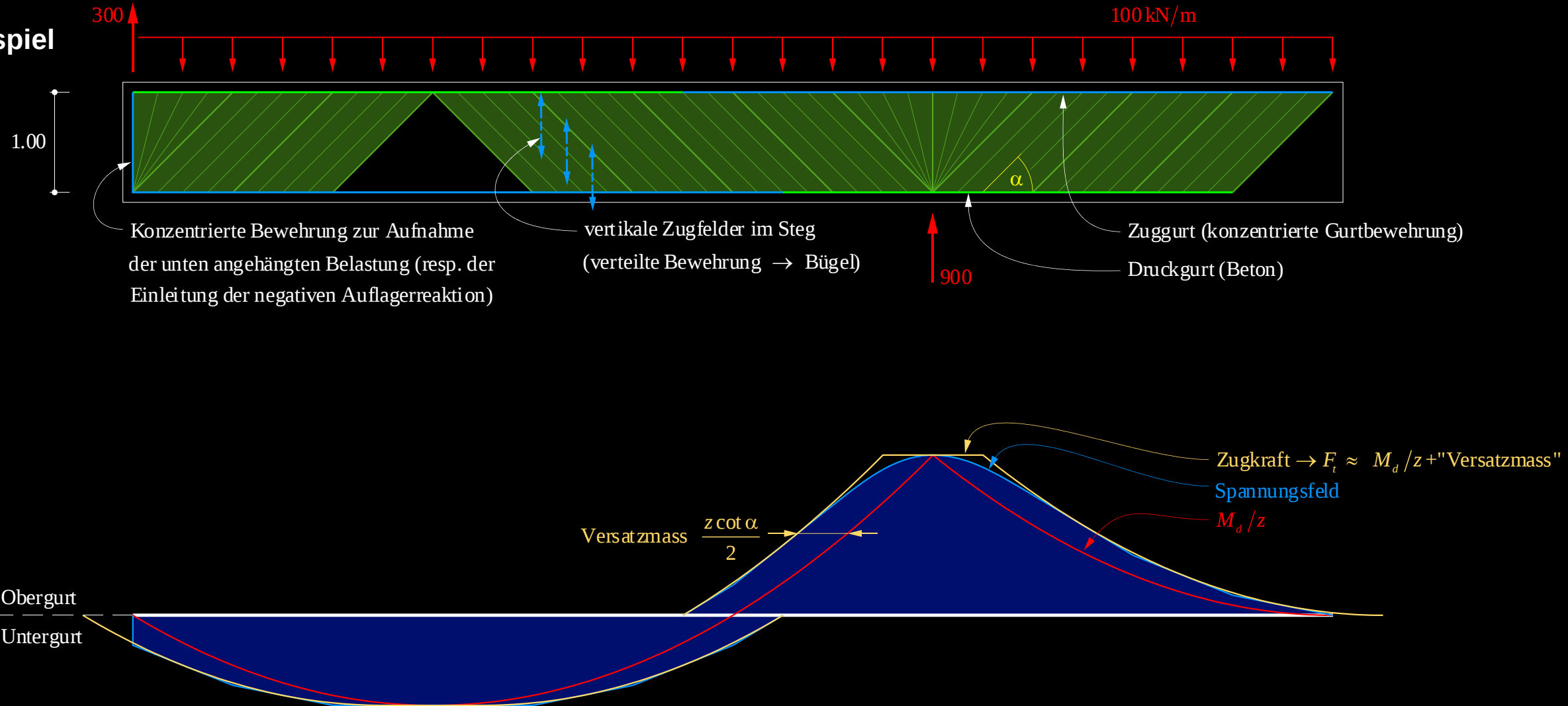
$$\frac{dF_{inf}}{dx} = f_{wd} \cot \alpha$$

Beispiel



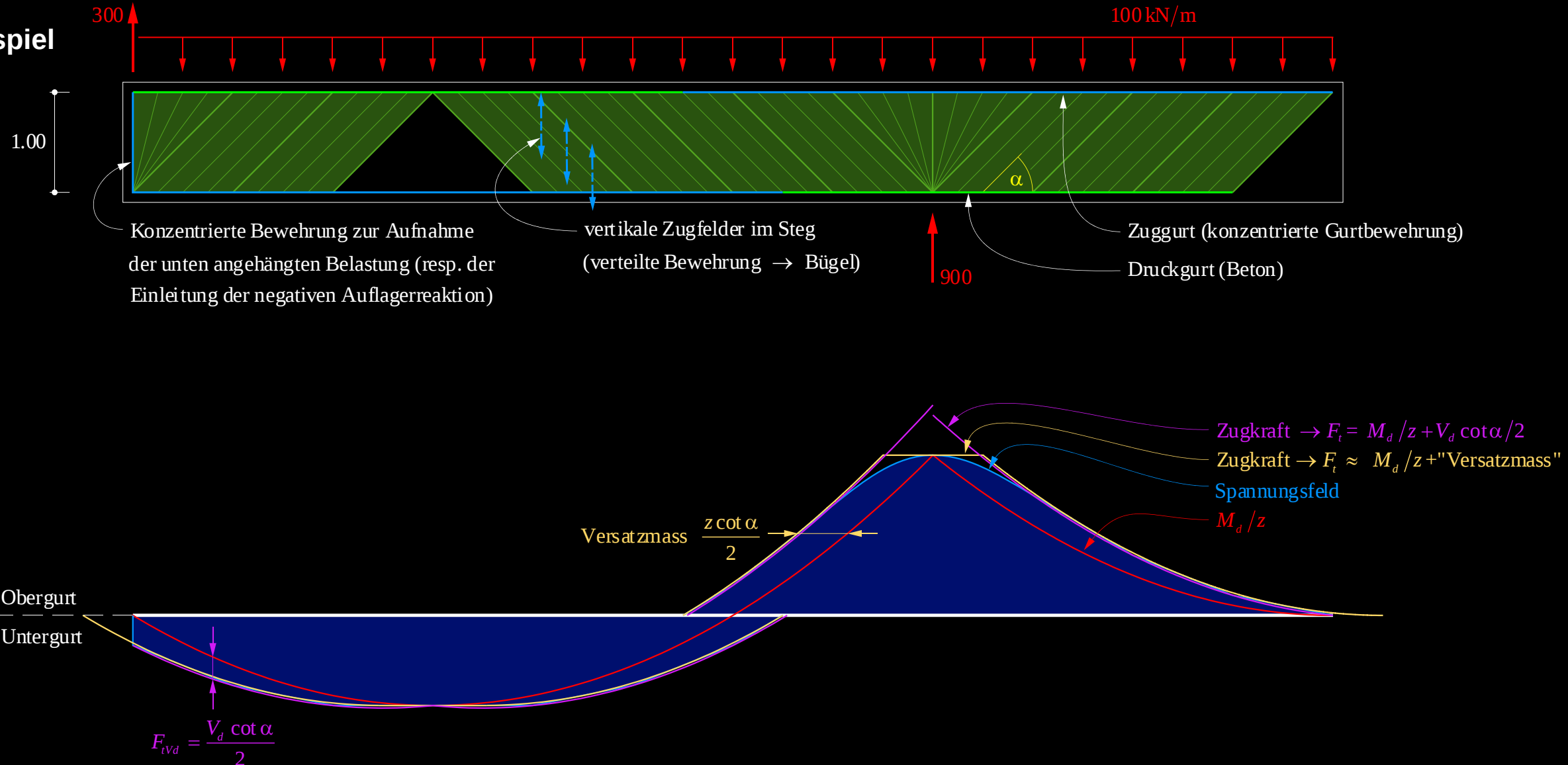
Querkraft – Spannungsfelder

Beispiel



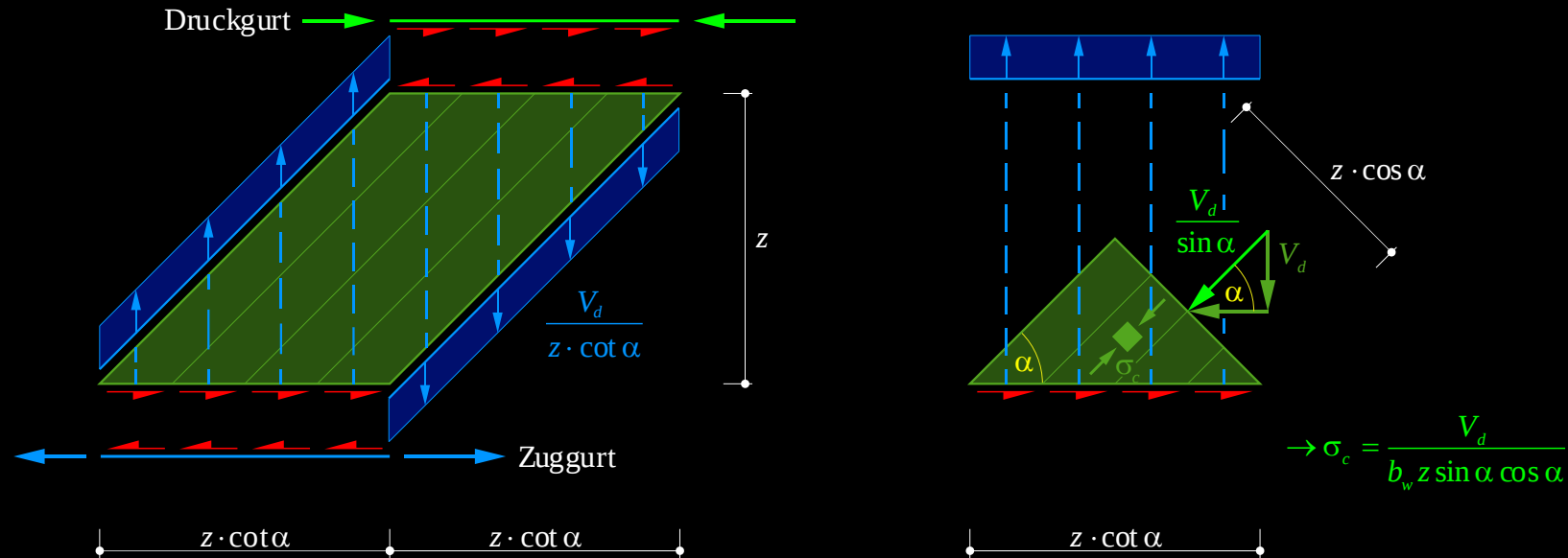
Querkraft – Spannungsfelder

Beispiel



Querkraft – Spannungsfelder

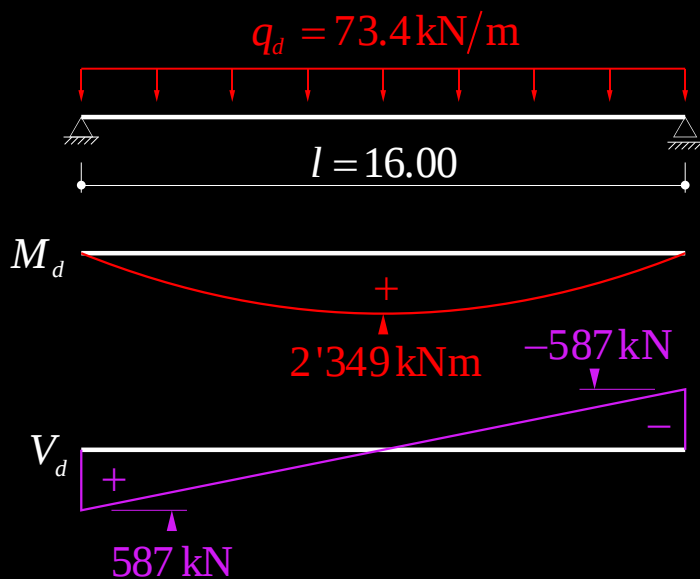
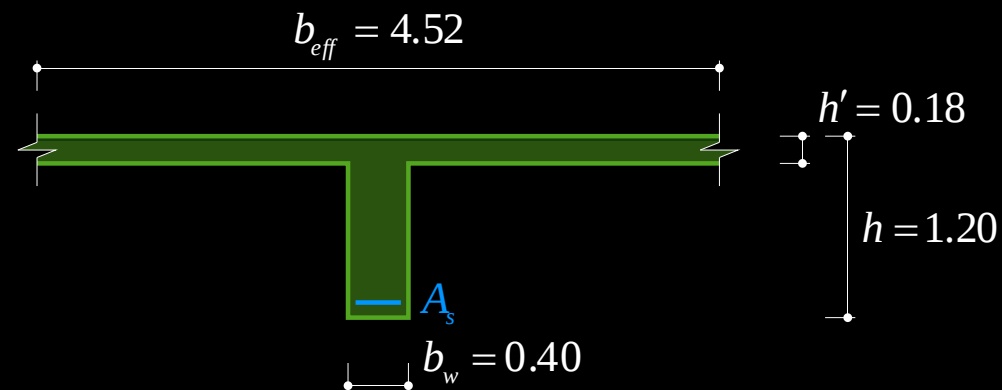
Zusammenhang Spannungsfelder - Querschnittsbetrachtung



- Die «Querschnitts»-Nachweise nach SIA 262 (eigentlich keine reine Querschnittsbetrachtung) folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen am Schnittkörper eines parallelen Druckspannungsfelds.

Querkraft – Beispiel

Beanspruchung (Fortsetzung von [1] Beispiel 2.9 / 4.1, Seite 4.7)



Plattenbalken:

$$b_{eff} = 4.52 \text{ m}$$

$$b_w = 0.40 \text{ m}$$

$$h = 1.20 \text{ m}$$

$$h' = 0.18 \text{ m}$$

$$l = 16.00 \text{ m}$$

Gewählte Hauptbiegebewehrung:

$$7\varnothing 30 \rightarrow z = 1.11 \text{ m} \quad (\text{vgl. Biegung Teil 2, Folie 41})$$

Querkraftbewehrung:

$$\rho_{min} = 0.2\%$$

$$a_{s,min} = \rho_{min} \cdot b_w = 0.002 \cdot 400 \text{ mm} \cdot 1'000 \text{ mm/m} = 800 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\rightarrow 2\varnothing 8 @ 125, a_s = 2 \cdot 402 = 804 \text{ mm}^2/\text{m}$$

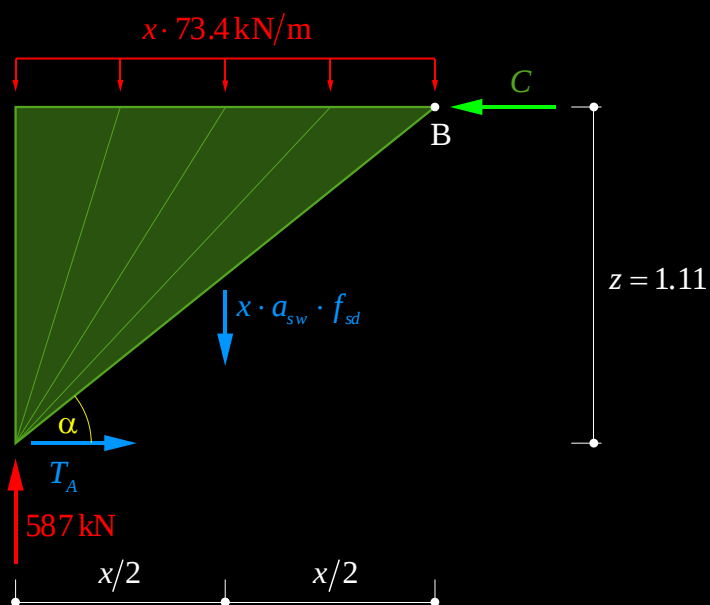
2-schnittige Bügel!

Querkraft – Beispiel

Zentrierter Fächer beim Auflager

Anstelle wie beim Beispiel «einfacher Balken mit Kragarm» die Druckfeldneigung α vorzugeben, kann auch eine andere Wahl getroffen werden.

Beispiel: Gegebene Bügelbewehrung voll ausnützen, Länge x und somit Druckfeldneigung α daraus bestimmen:



$$a_{sw} \cdot f_{sd} = 804 \cdot 0.435 = 349.7 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow 587 - 73.4 \cdot x - 349.7 \cdot x = 0$$

$$\rightarrow x = 1.387 \text{ m}$$

$$\rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1.11}{1.387}\right) = 38.7^\circ \quad (\tan \alpha = 0.8003)$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow T_A \cdot 1.11 + 349.7 \cdot \frac{1.387^2}{2} + 73.4 \cdot \frac{1.387^2}{2} = 587 \cdot 1.387$$

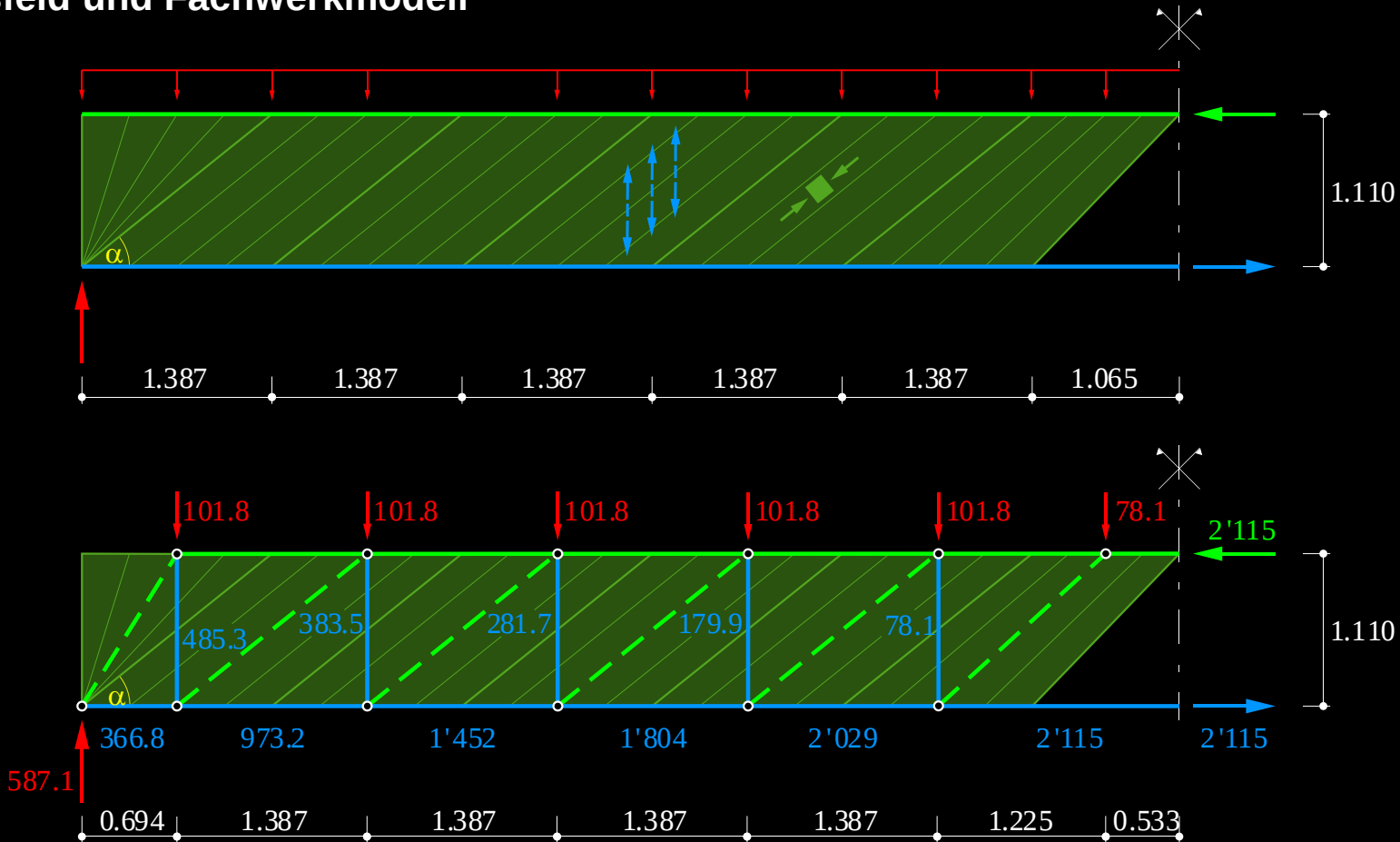
$$\rightarrow T_A = 367 \text{ kN}$$

oder: Gleichgewicht der Horizontalkräfte am Auflagerknoten:

$$\rightarrow T_A = 587 \frac{\cot \alpha}{2} = 367 \text{ kN}$$

Querkraft – Beispiel

Spannungsfeld und Fachwerkmodell



N.B.:

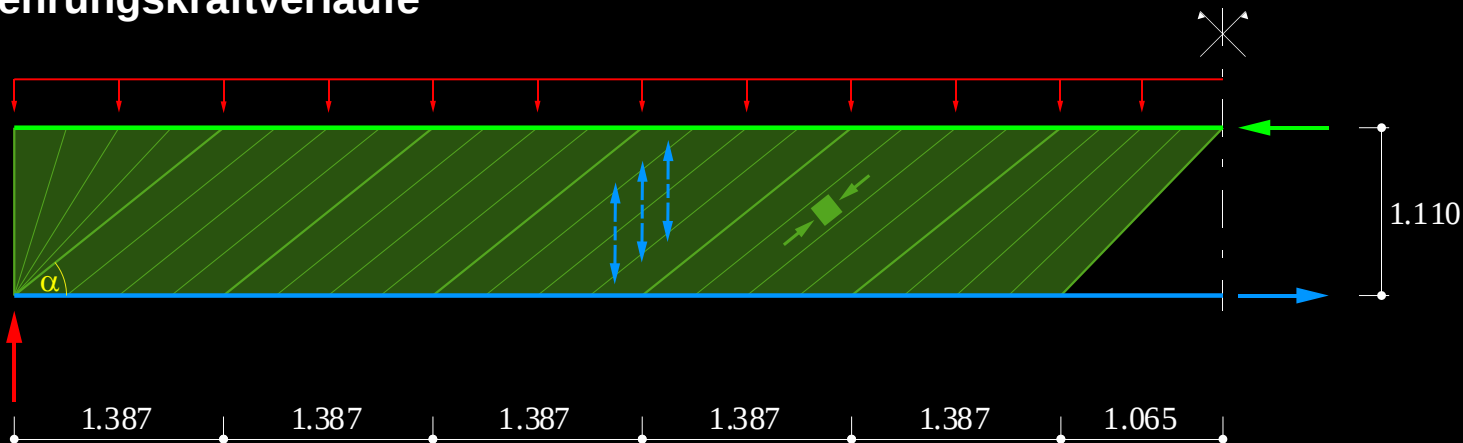
$$1.065 \cdot 73.4 = 78.1 \text{ kN}$$

$$1.387 \cdot 73.4 = 101.8 \text{ kN}$$

$$\frac{587.1}{1.11} \cdot 0.694 = 367 \text{ kN}$$

Querkraft – Beispiel

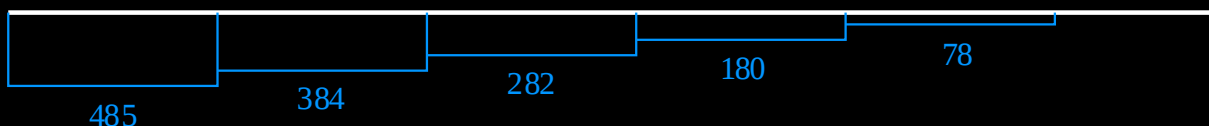
Relevante Bewehrungskraftverläufe



Die grösste Bügelkraft beträgt 485 kN und muss über eine Länge von 1.387 m von der Bewehrung aufgenommen werden:

$$2 \cdot 402 \cdot 0.435 \cdot 1.387 = 485 \text{ kN, i.O.}$$

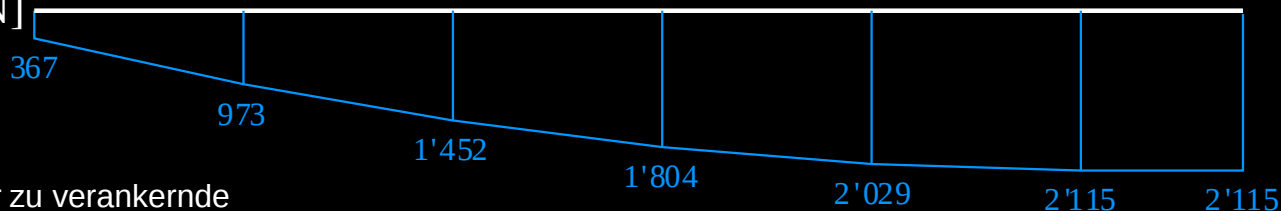
Bügelkräfte [kN]



Die Längsbewehrung muss im Maximum 2'115 kN abdecken ($z = 1.11 \text{ m}$).

$$7 \cdot 707 \cdot 0.435 = 2'153 \text{ kN, i.O.}$$

Untergurt [kN]

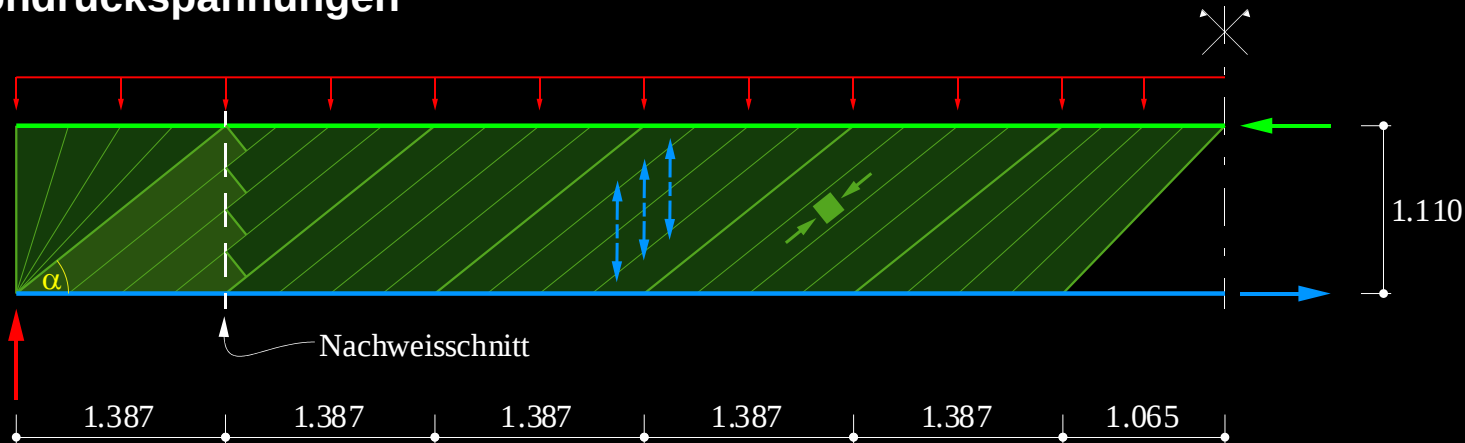


Hinter Auflager zu verankernde Kraft (Horizontalkomponente der Fächerresultierenden)

Die Abstufung kann gemäss Verlauf der Untergurtkraft erfolgen. Hinter dem Auflager ist eine Kraft im Zuggurt von 367 kN zu verankern.

Querkraft – Beispiel

Relevante Betondruckspannungen



N.B.:

Massgebend ist die Querkraft im Abstand $z \cdot \cot \alpha$ vom Auflagerrand (SIA 262, 4.3.3.4.1).

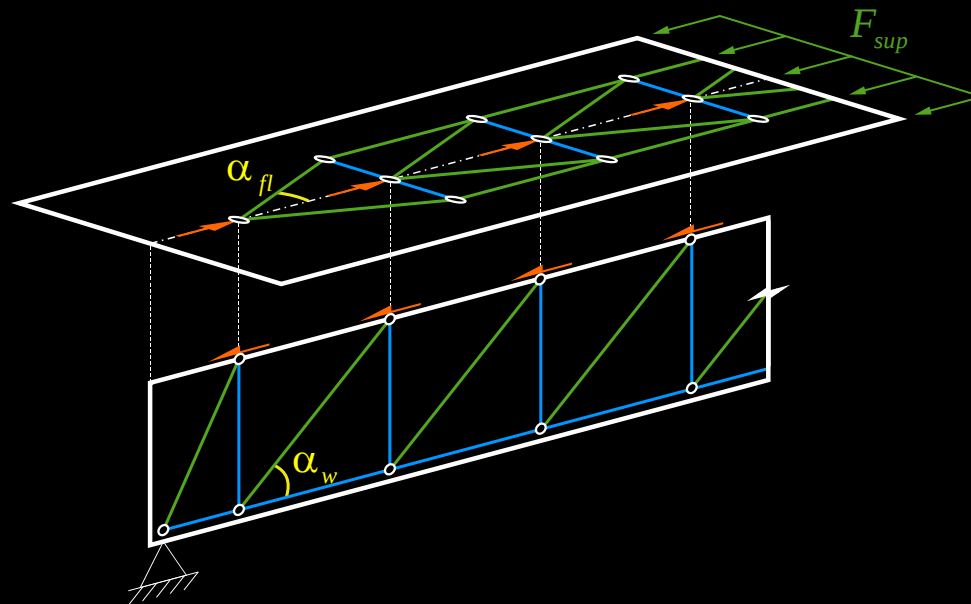
$$\sigma_c = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{587 - 73.4 \cdot 1.387}{400 \cdot 1.11 \cdot \sin(38.6^\circ) \cdot \cos(38.6^\circ)} = 2.24 \text{ N/mm}^2 \leq k_c f_{cd} = 0.55 \cdot 16.5 = 9.1 \text{ N/mm}^2, \text{ i.O.}$$

Es wird damit die Druckstrebe unmittelbar neben dem Fächer nachgewiesen.

Querkraft – Schubanschluss

Anschluss Steg – Flansch

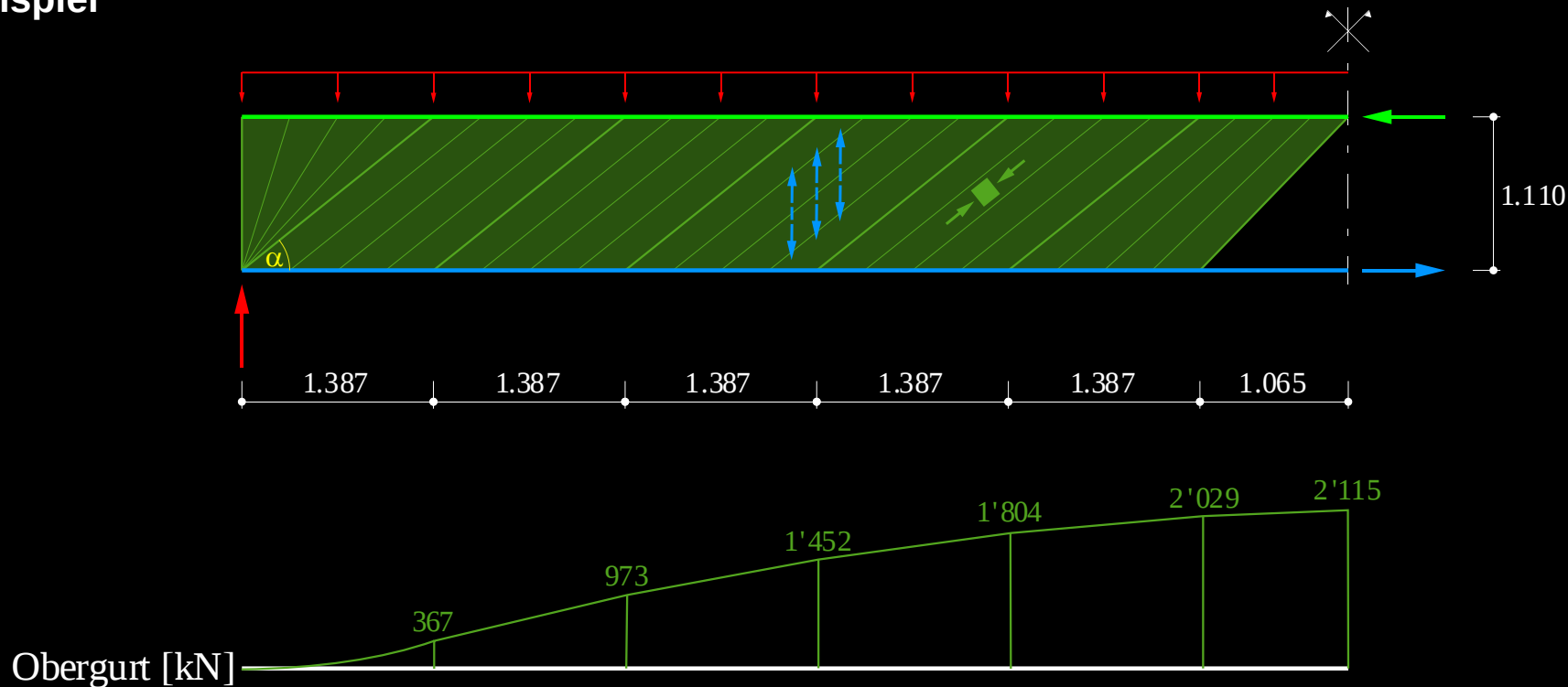
- Im Grenzzustand der Tragsicherheit ist der Schubanschluss der Flanschplatten an den Steg zu berücksichtigen (SIA 262, 4.3.4.1.1).
- Einleitung von Zug-/Druckkräften in die Flansche (Gurte) erzeugt Schubkräfte im Übergang zwischen Steg und Flansch sowie Querkzug- und Druckkräfte in den Flanschen.
- Die Querkzug- und Querkdruckkräfte sind mit den Kräften aus Querbiegung zu superponieren.



Druckflansch:
 $25^\circ < \alpha_{fl} < 45^\circ$

Querkraft – Schubanschluss

Beispiel

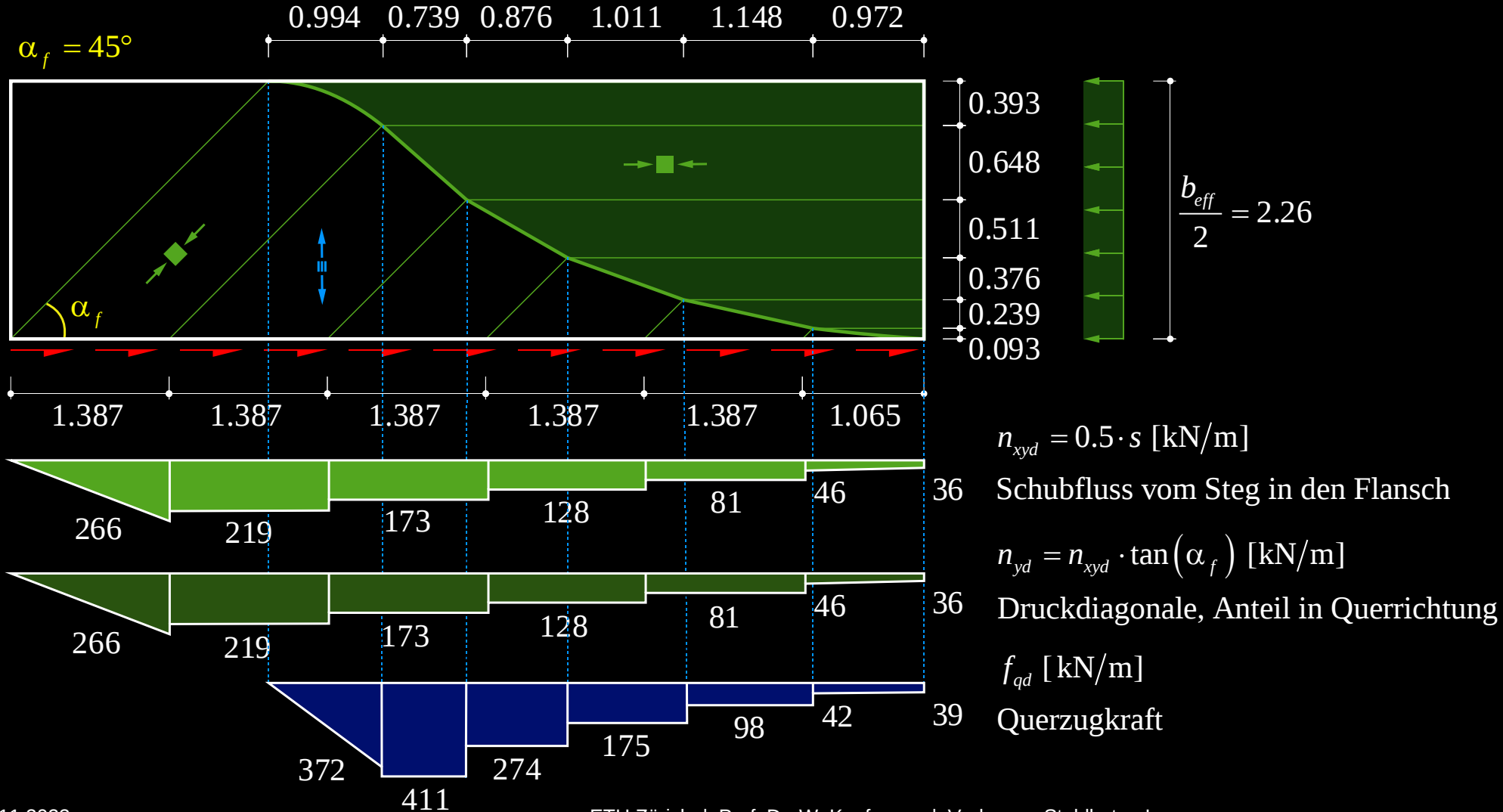


Der maximale Schubfluss zwischen Steg und Flansch tritt bei $x = z \cdot \cot \alpha$ auf (bei der letzten Strebe des Fächers beim Auflager tritt die grösste Änderung der Obergurtkraft pro Länge auf). Er beträgt:

$$s_{\max} = \frac{dF_{\text{sup}}}{dx} = \frac{d(M_d/z)}{dx} = \frac{V_d}{z} = \frac{587}{1.110} = 533 \text{ kN/m}$$

Querkraft – Schubanschluss

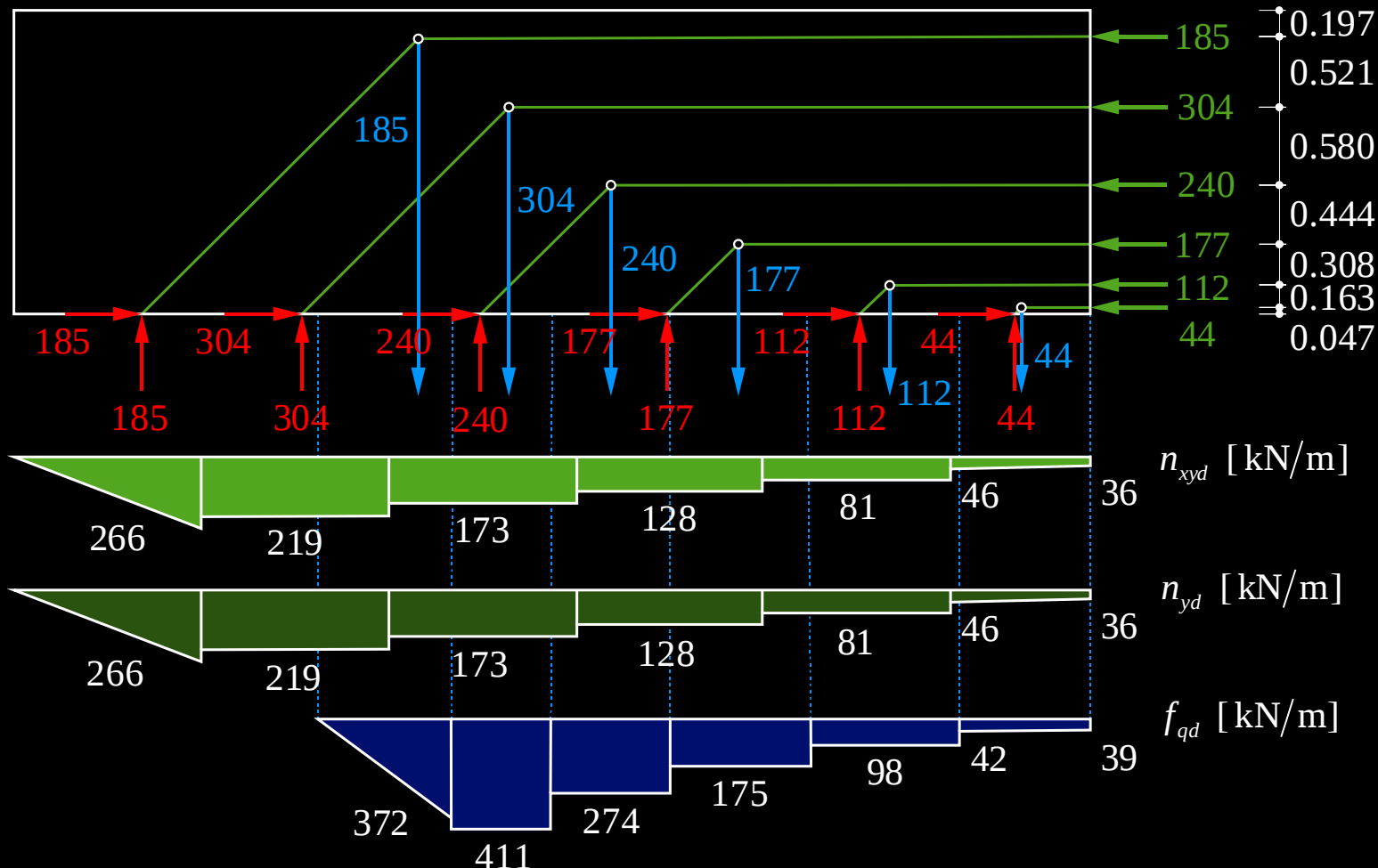
Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens



Querkraft – Schubanschluss

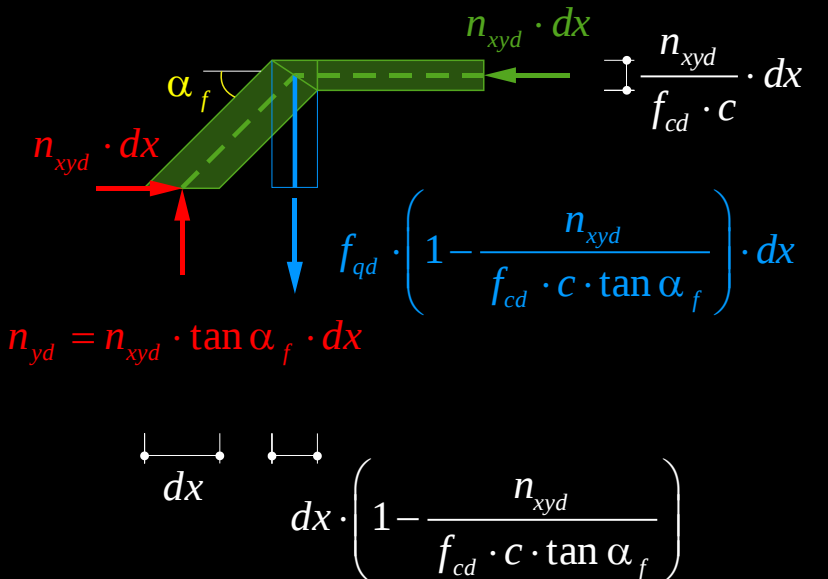
Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens

... zugehöriges Fachwerkmodell



$$f_{qd} = n_{xyd} \cdot \tan \alpha_f \cdot \left(1 - \frac{n_{xyd}}{f_{cd} \cdot c \cdot \tan \alpha_f} \right)^{-1}$$

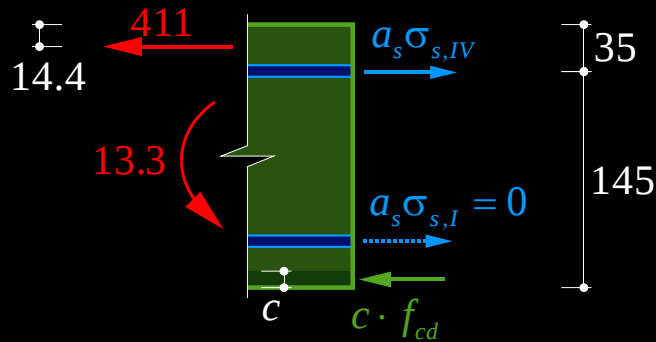
Allgemein:



Querkraft – Schubanschluss

Beispiel

Kräfte im Längsschnitt durch den Flansch des Plattenbalkens (Stegrand):



$$\Sigma M = 0 \rightarrow -13.3 \cdot 10^3 - 411 \cdot (35 - 14.4) + 16.5 \cdot c \cdot \left(145 - \frac{c}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow c = 9.4 \text{ mm} \rightarrow c \cdot f_{cd} = c \cdot 16.5 = 155.1 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma H = 0 \rightarrow 411 + 155.1 - a_s \sigma_{s,IV} = 0$$

$$\rightarrow a_s \sigma_{s,IV} = 566.1 \text{ kN/m}$$

$$\text{gewählt: } a_s \cdot f_{sd} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} \cdot 0.435 = 583 \text{ kN/m} > 566.1 \text{ kN/m, i.O.}$$

- Die Querkzugkraft wirkt im Schwerpunkt der Druckresultierenden, d.h. in der Mitte der Druckzone aus Biegung in Längsrichtung (siehe Biegung, Folie 84)

$$0.425x = \frac{7 \cdot 707 \cdot 435}{2 \cdot 4520 \cdot 16.5} = 14.4 \text{ mm}$$

- Die Querkzugkraft muss mit dem Querbiegemoment superponiert werden (siehe Biegung, Folie 81)

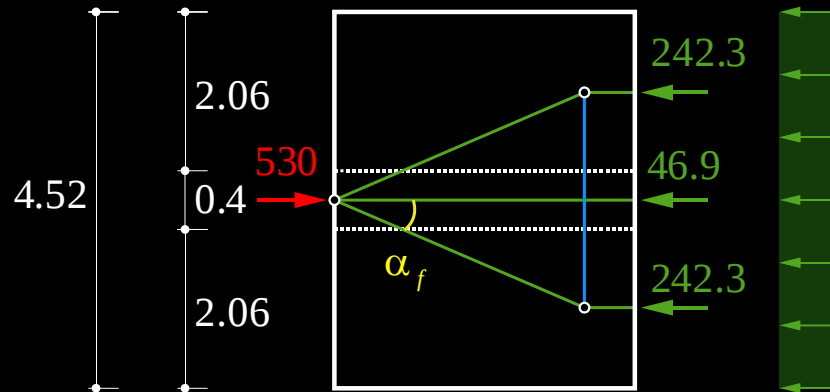
$$m_d = 13.3 \text{ kNm/m}$$

- Die Gleichgewichtsbedingungen am Schnittkörperdiagramm liefern die Druckkraft und die Kraft in der vierten Bewehrungslage (1. Lage vernachlässigt):

Die ursprünglich gewählte Plattenbewehrung von Ø10@200 reicht nicht aus, um die Kräfte aus Querbiegung und Querkzug aufzunehmen. Sie wird auf Ø16@150 ($a_s = 1'340 \text{ mm}^2/\text{m}$) verstärkt.

Querkraft – Schubanschluss

Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens (vereinfachtes Modell)



Vereinfachend kann die Querkraft anhand der grössten einzuleitenden Gurtkraft (maximale Änderung der Gurtkraft pro Länge) mit einem einfachen Stabwerkmodell ermittelt werden.

- Von der Schubkraft bleibt ein Anteil direkt über dem Steg und muss nicht in die Platte ausgebreitet werden:

$$s_w = s_{\max} \cdot \frac{b_w}{b_{\text{eff}}} = 530 \cdot \frac{0.4}{4.52} = 46.9 \text{ kN/m}$$

- Der Anteil, welcher ausgebreitet werden muss beträgt:

$$s_f = s_{\max} \cdot \frac{b_{\text{eff}} - b_w}{2b_{\text{eff}}} = 530 \cdot \frac{4.52 - 0.4}{2 \cdot 4.52} = 242.3 \text{ kN/m}$$

- Mit $\alpha_f = 25^\circ$ folgt die Querkraft

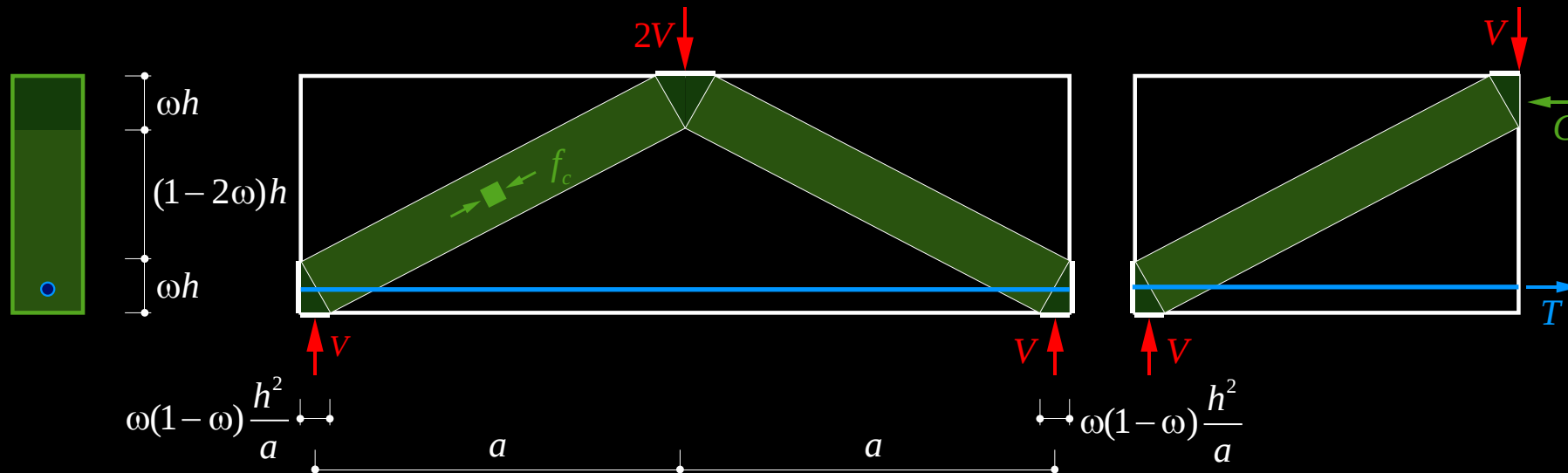
$$t_s = \tan \alpha_f \cdot s_f = \tan 25^\circ \cdot 242.3 = 113.0 \text{ kN/m}$$

Diese Querkraft kann mit der Biegebewehrung (Querbiegung) nach dem gleichen Vorgehen überlagert werden wie bei der Betrachtung mit dem Spannungsfeld.

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

- Fachwerkmodelle und Spannungsfelder sind, wie auf den vorangehenden Folien gezeigt, ein leistungsfähiges Hilfsmittel für die (Querkraft-)bemessung von Trägern.
- Sie eignen sich auch für die Bemessung **scheibenförmiger Bauteile** (Wände, hohe Abfangträger, Querscheiben, ...) und insbesondere für **Diskontinuitätsbereiche**, für welche die Anwendung querschnittsbasierter Bemessungsmethoden nicht möglich ist (Querschnittssprünge, Rahmenecken, hohe Einzellasten, Knotenbereiche, ...).
- Nachfolgend werden exemplarisch einige Fachwerkmodelle und Spannungsfelder für solche Fälle aufgezeigt. Als Einstieg dient der Lastabtrag in einer hohen Scheibe über Strebenwirkung (siehe unten, direkte Abstützung), resp. Fächer- und Bogenwirkung (nächste Folie).



$$C = T = \omega h b f_c$$

$$\omega = \frac{A_s f_{sd}}{b h f_{cd}}$$

$$z = (1 - \omega) h$$

$$M = T \cdot z = C \cdot z$$

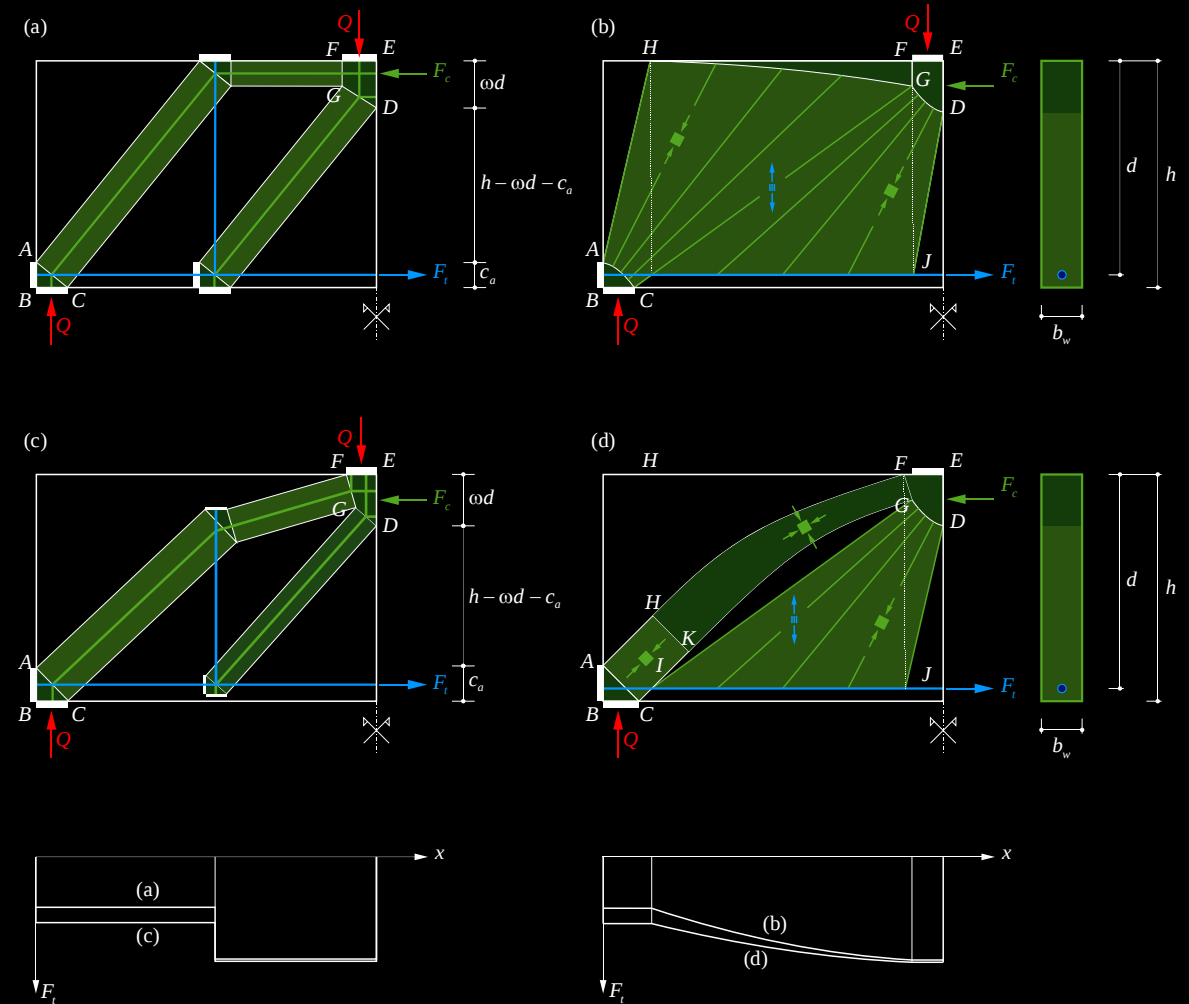
$$= h^2 b f_c \cdot \omega (1 - \omega)$$

$$V = \frac{h^2 b}{a} f_c \cdot \omega (1 - \omega)$$

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

- Während mit der auf der vorhergehenden Folie dargestellten **direkten Abstützung** (Strebenwirkung) keine vertikale Bewehrung benötigt wird, kann mit den auf dieser Folie gezeigten Modellen eine solche Bewehrung (die als Mindestbewehrung ohnehin vorhanden ist) ausgenützt werden.
- Die Abbildungen (a) und (c) zeigen Fachwerkmodelle, deren **Strebenabmessungen** (im Gegensatz zu «Stabwerkmodellen») aufgrund der **Druckfestigkeit des Betons** festgelegt wurden (→ strenge Lösungen nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie).
- Ausgehend von den einfachen Fachwerkmodellen (a) und (c), mit denen der Kraftfluss festgelegt wird, können die Abmessungen der Knotenbereiche abgeschätzt und entsprechende konstruktive Details ausgearbeitet werden. Bei Bedarf können die Spannungsfelder verfeinert werden (siehe (b), (d)).
- Weiterführende Angaben siehe Advanced Structural Concrete.

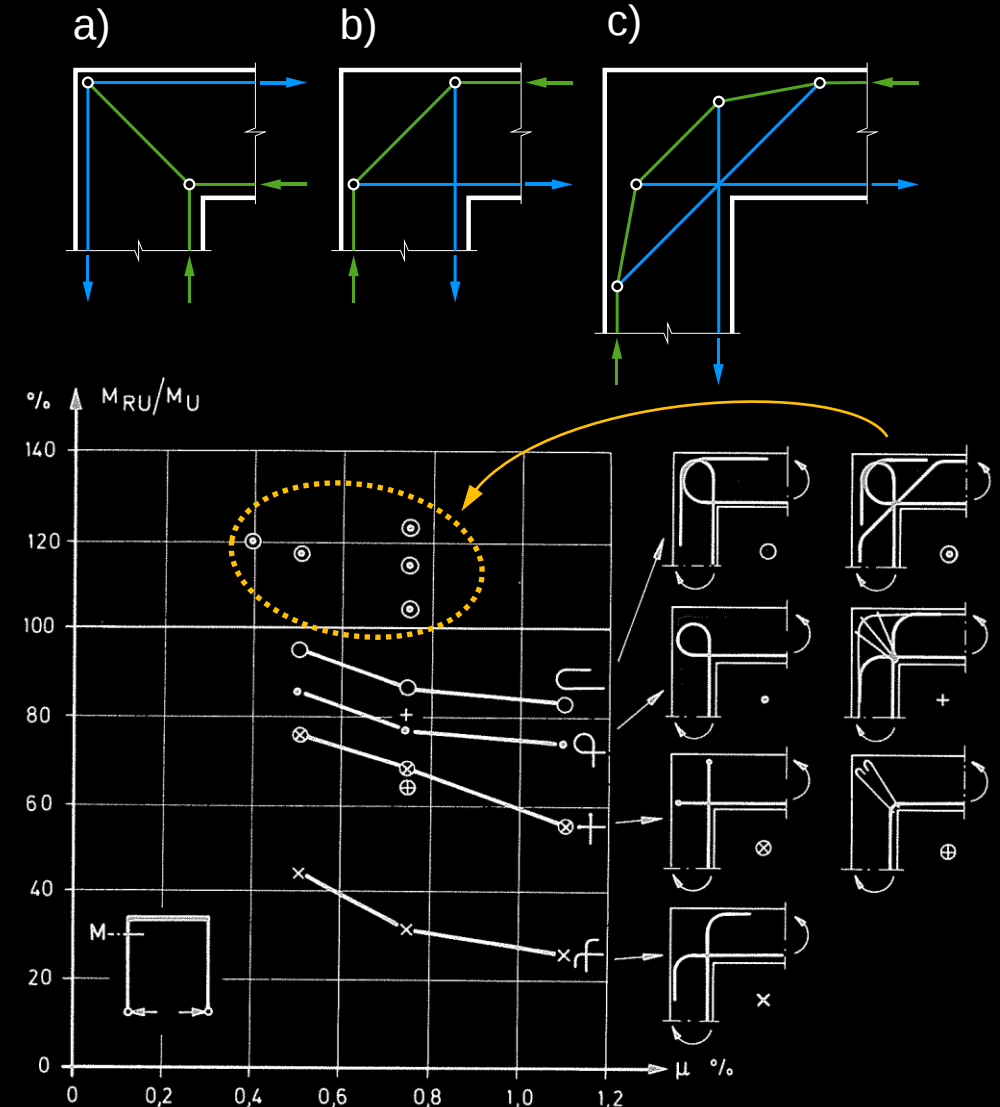


Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Rahmenecken unter reiner Biegung

- (a) schliessendes, (b) öffnendes Moment
- vor allem öffnende Rahmenecken heikel und konstruktiv sehr anspruchsvoll
- **diagonale Bewehrung (c) ist vorteilhaft** für Verankerung der Bewehrungskräfte (aber Kräfte grösser als in (b), Hebelarm!)
- **Biegewiderstand der angeschlossenen Bauteile in Regel trotzdem nicht voll ausnutzbar**, da Verankerung / Umlenkung der Kräfte im Eckbereich Reduktion des Hebelarms im Vergleich mit (a), (b) bewirkt
- Versuche z.B. von Nilsson (1973) bestätigen die gemachten Aussagen
- Bewehrungseisen mit Verankerungsköpfen für Rahmenecken gut geeignet
- Beispiele für Rahmenecken mit verteilter Bewehrung, kombinierter Beanspruchung etc. siehe z.B. [5]



Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Ausgeklinkte Träger (d), (e), (f), (g)

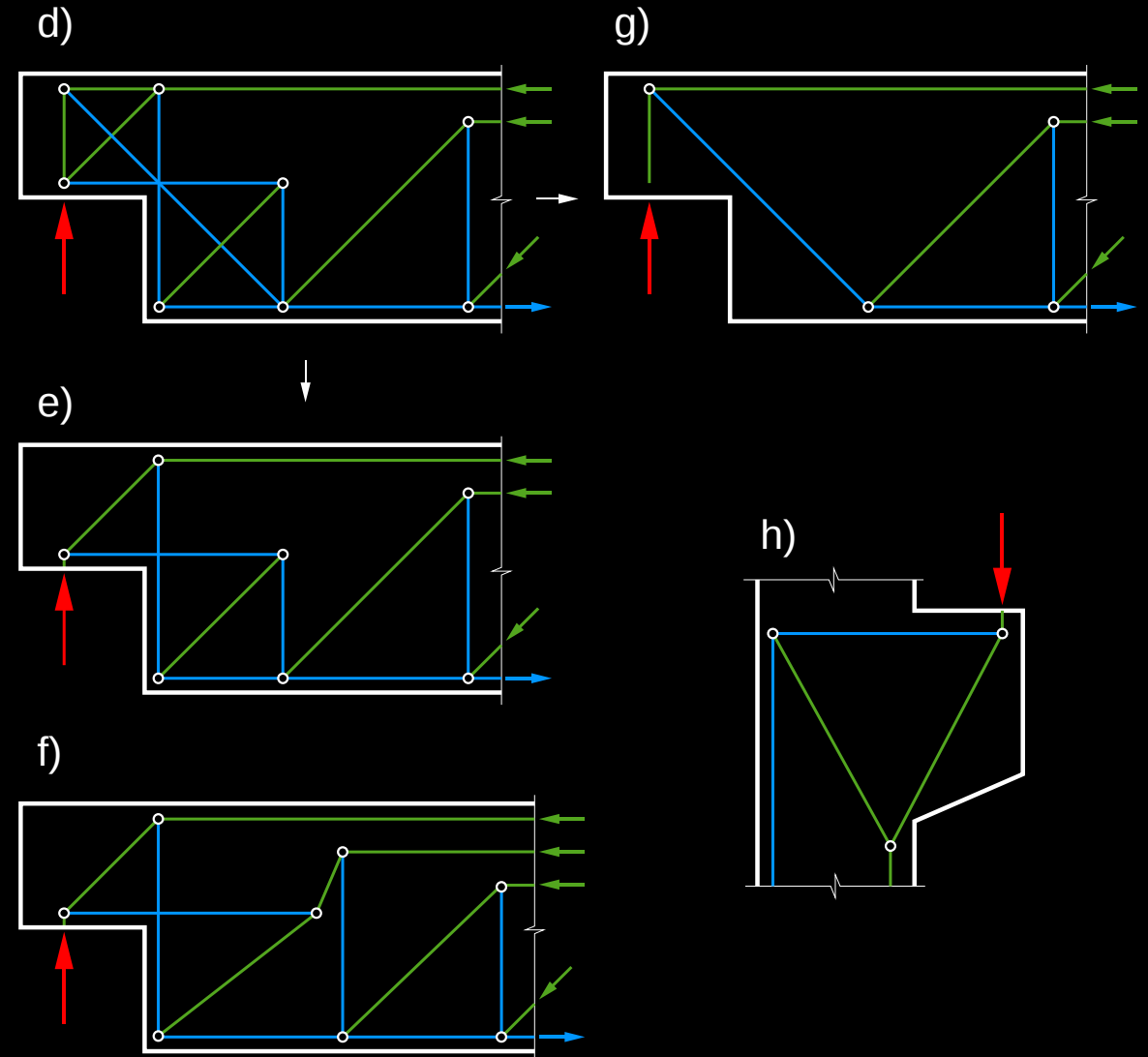
- (d), (e), (f), (g) mögliche Streben-Stab-Modelle
- Diagonalbewehrung analog wie bei den Rahmenecken günstig, Überlagerung der Modelle (Anteil der Last wählbar)

Konsolen (h)

- (h) Grundfall
- Verschiedene andere Modelle möglich, siehe z.B. [5]

Generelle Bemerkungen

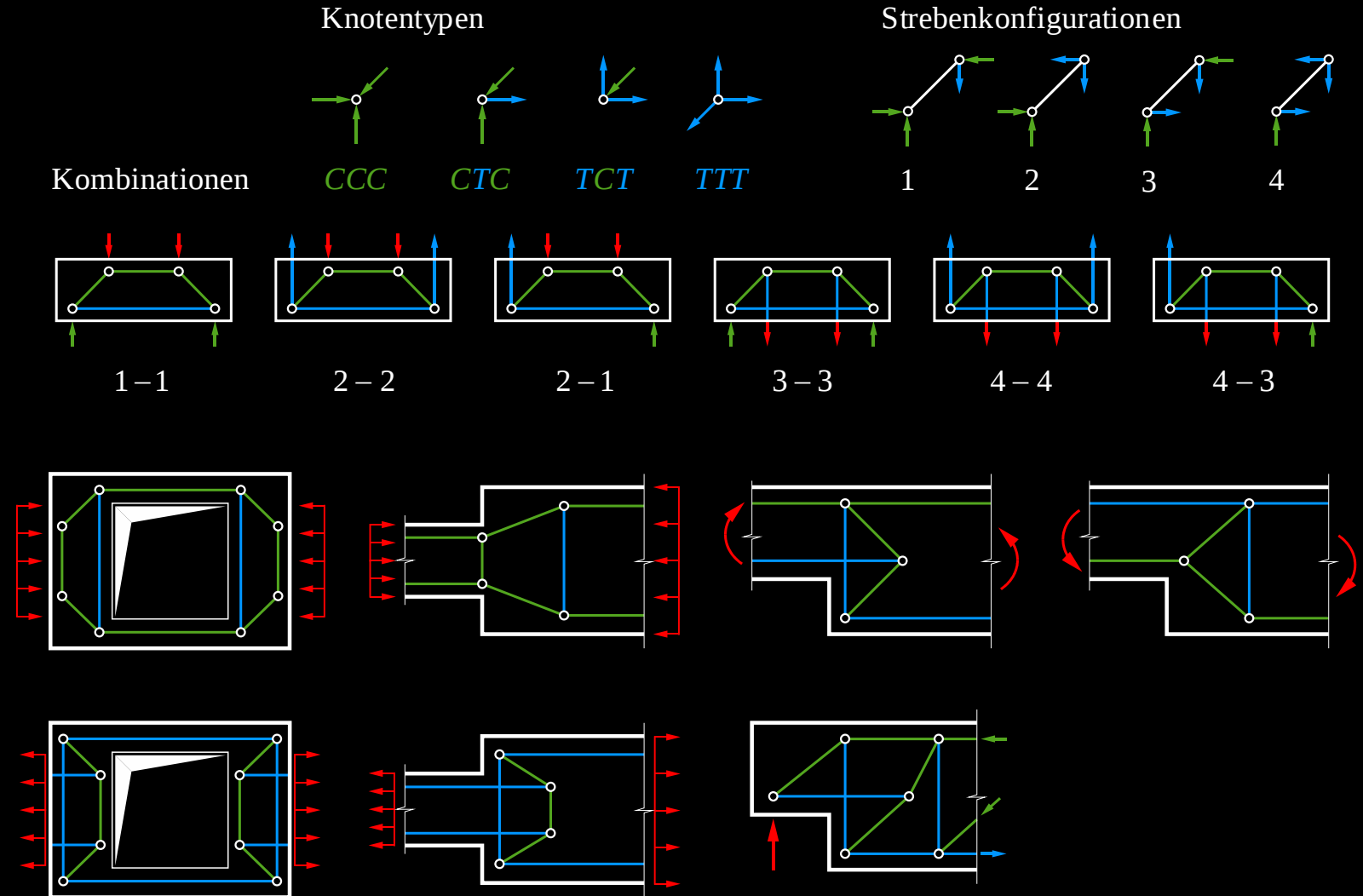
- Spannungsfelder für Tragwerkselemente mit statischen / geometrischen Diskontinuitäten optimal geeignet
- Illustration hier nur an einfachen Streben-Stab-Modellen
- Verfeinerung durch Einführung von Fächern, Bogen, Zug-/Druckbändern etc. ermöglicht Erfassung der flächigen Tragwirkung des Betons und der verteilten Bewehrung



Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Typisierung

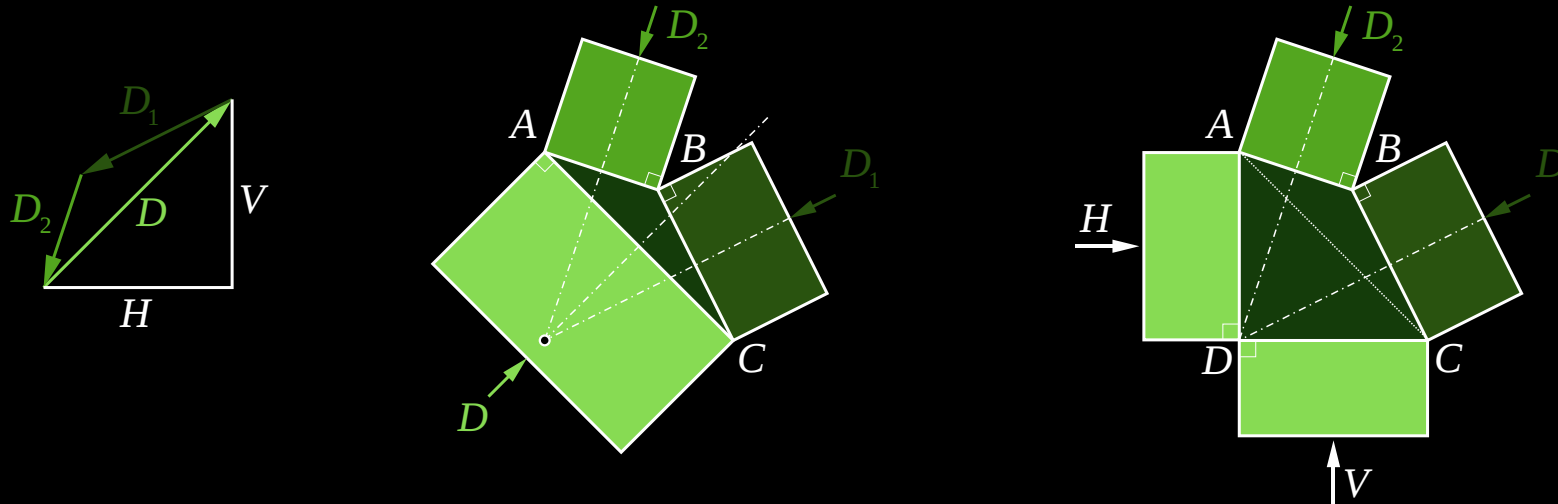
- Fachwerkmodelle und Spannungsfelder können aus wenigen Grundelementen zusammengesetzt werden.
- Die Abbildung zeigt Grundtypen von Strebenkonfigurationen und Knoten, sowie deren mögliche Kombinationen. Damit ist eine Typisierung möglich.
- Ausgehend von den dargestellten Stabwerkmodellen können Fachwerkmodelle entwickelt werden, deren Strebenabmessungen aufgrund der Druckfestigkeit des Betons festgelegt werden (→ strenge Lösungen nach unterem Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie).



Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche

Wegen der endlichen Betonfestigkeit ergeben sich bei Fachwerkmodellen, deren Abmessungen aufgrund der Betondruckfestigkeit festgelegt werden, nicht wie in Stabwerkmodellen punktförmige Knoten, sondern Knotenbereiche:



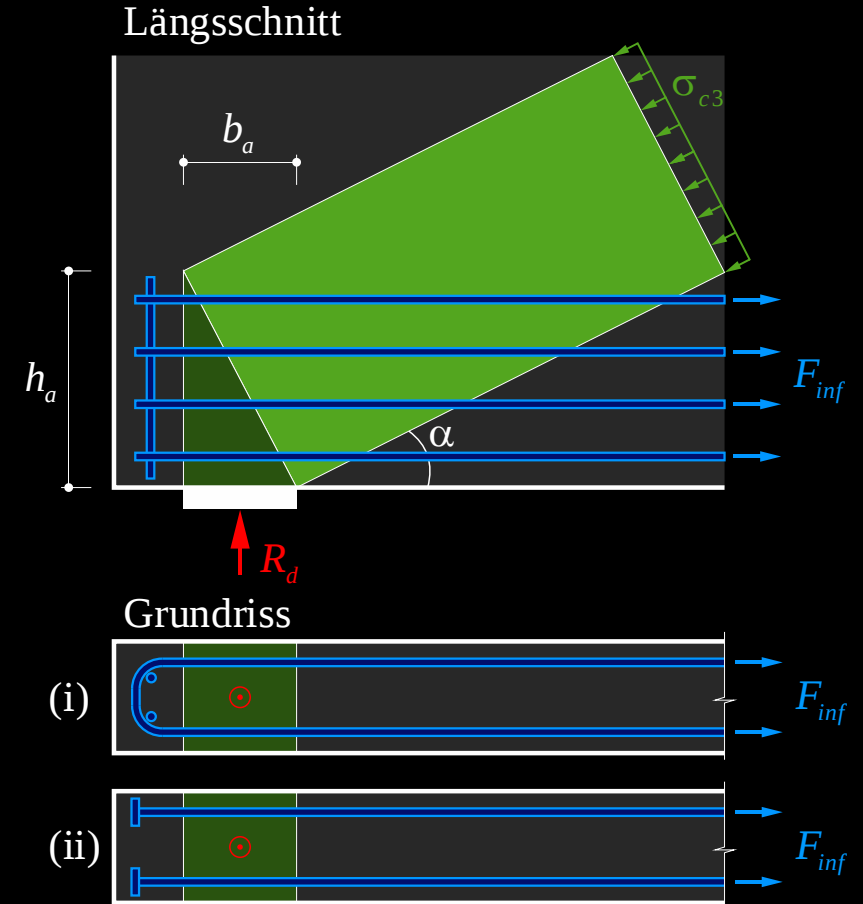
Der Einfachheit halber wird meist für alle Streben die gleiche Druckspannung gewählt. Die Streben schliessen in diesem Fall rechtwinklig an den Fachwerkknoten an, d.h. die Knotengeometrie ist geometrisch ähnlich zum (um 90° gedrehten) Krafteck. Im Knoten herrscht ein zweiachsiger («hydrostatischer») Druckspannungszustand.

Werden für die verschiedenen Streben unterschiedliche Druckspannungen gewählt, sind die Ränder des Knotenbereichs i.a. nicht mehr orthogonal zu den Streben und die maximale Druckspannung im Knoten wird unter Umständen wesentlich grösser als in den angeschlossenen Streben (Untersuchung mit Mohr'schen Kreisen und Diskontinuitätslinien, siehe Advanced Structural Concrete).

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)

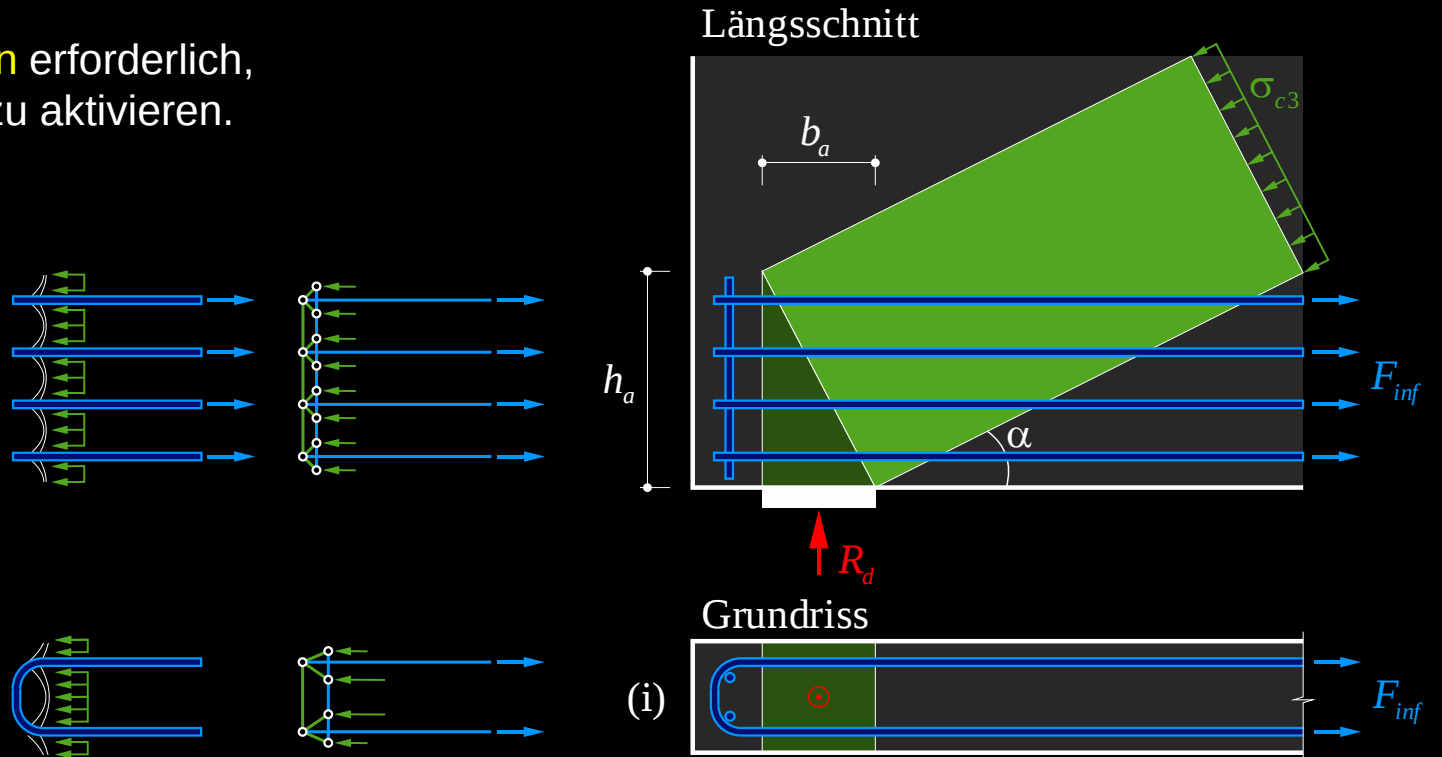
- **Sorgfältige konstruktive Durchbildung wichtig!**
- Einfachste Lösung: Knoten mit $s_h = s_v$ (oft als «**hydrostatisch**» bezeichnet, jedoch ist $s_1 = 0$)
- **Ankerplatten** sind unüblich, zur Verankerung grosser Zugkräfte manchmal aber unabdingbar.
- Alternative (i): **Steckbügel** resp. “Haarnadeln” anzuordnen, siehe Bilder unten. Lokales Spannungsfeld → Überdeckungsбетон nur durch Zugfestigkeit Beton aktivierbar.
- Alternative (ii): **Bewehrungsstäbe mit Verankerungsköpfen** (zum Beispiel «Ancofix»): Tellerdurchmesser $\approx 3\varnothing$, experimentell verifizierte Verankerung auf sehr kurzer Länge ($< 10\varnothing$) → Achtung, Spreizkräfte beachten!



Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)

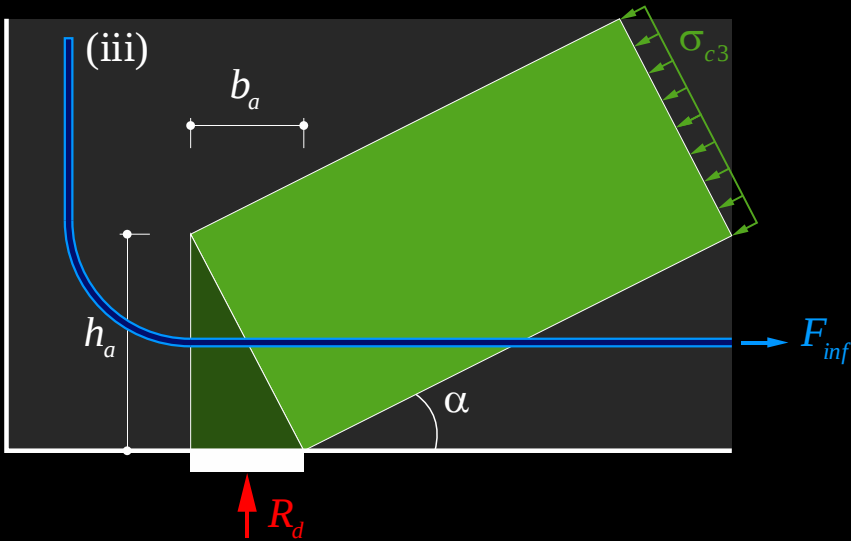
- Streng genommen sind **Betonzugspannungen** erforderlich, beispielsweise um den Überdeckungsbeton zu aktivieren.



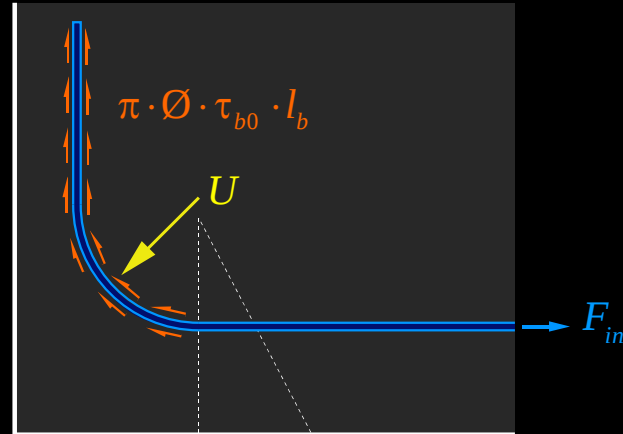
Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)

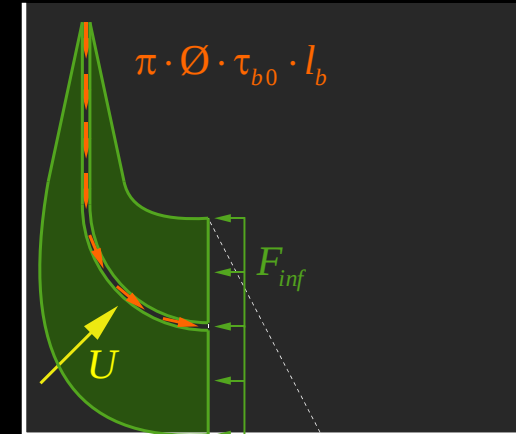
Längsschnitt



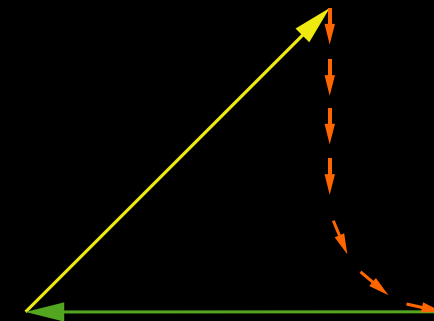
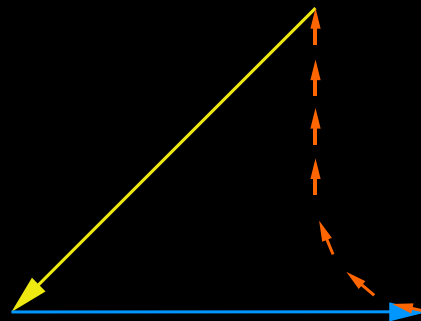
Kräfte auf Bewehrung



Kräfte auf Beton



- Lösung (iii): Aufgebogene Bewehrung kann aktiviert werden, wenn genügend Überstand vorhanden ist, um diese hinter dem Auflager zu verankern («Druckbanane» im Beton mit Ablenkraft U).

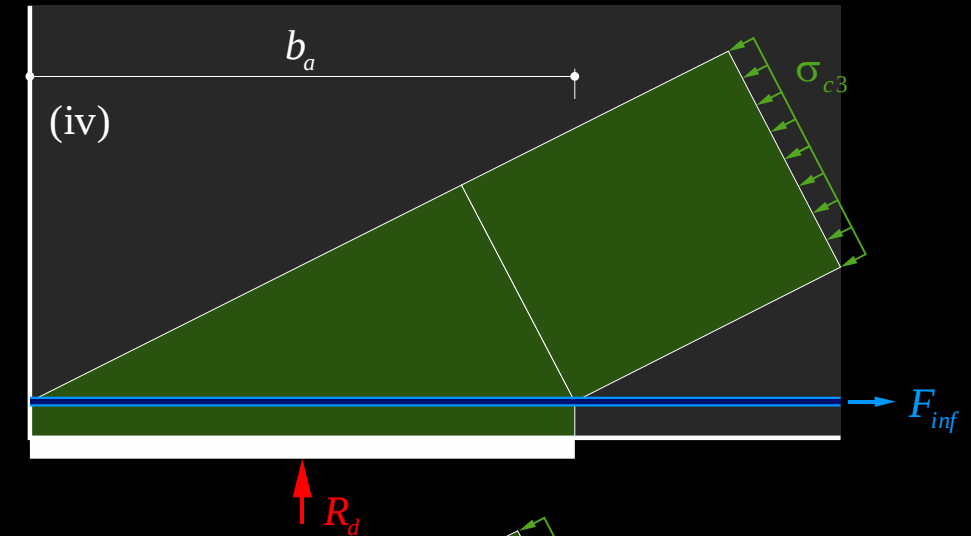


Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

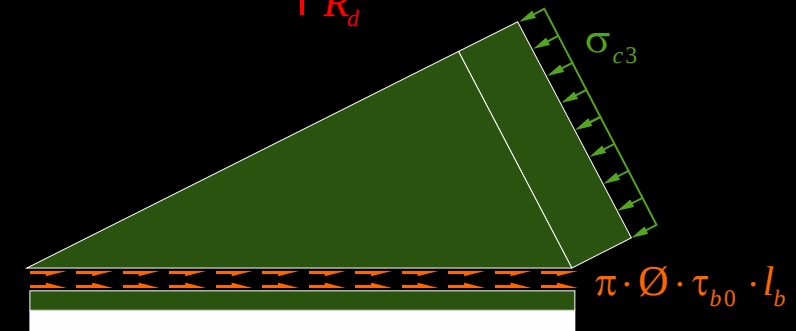
Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)

- Alternative (iv): Spannungsfelder mit **kontinuierlichem Aufbau** der Zugkraft durch Verbundschubspannungen.
- Benötigt grössere Knotenabmessungen (Verankerungslänge = Knotenbreite, trotz günstigem Querdruck lang).
- Weitere Lösungen (mit unterschiedlichen Spannungen der angeschlossenen Streben) sind in manchen Fällen sinnvoll. Details siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete».

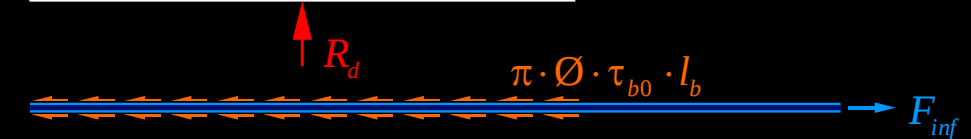
Längsschnitt



Kräfte auf Beton



Kräfte auf Bewehrung



Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Hinweise für die Anwendung

- Die Beachtung folgender Grundsätze führt zu einer wirtschaftlichen Bemessung:
 - **Einfachheit** (statisch bestimmte Fachwerke, keine kreuzenden Stäbe etc.)
 - **Steifigkeit** (kurze Zugstreben) (folgt aus Minimum der Komplementärenergie)
 - **Effizienz** (Mindestbewehrung ausnützen)
- Aus praktischen Gründen sollte in der Regel eine zu **den Rändern parallele Bewehrung** gewählt werden. Somit sind Zugstreben üblicherweise horizontal / vertikal anzuordnen, wogegen Druckstäbe grundsätzlich in jeder Richtung möglich sind.
- Die **effektive Betondruckfestigkeit** ist vorsichtig anzusetzen ($f_c = k_c \cdot f_{cd}$, SIA 262, 4.2.1.7 → Betonabmessungen).
- In jedem Fall sollte eine ausreichende **Mindestbewehrung** angeordnet werden ($\rho = 0.1 \dots 0.3\%$, je nach Anwendung).
- Weist man den einzelnen Streben Steifigkeiten zu, können auch **Verformungen** mit Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern abgeschätzt werden (mit kontinuierlichen Spannungsfeldern sogar wirklichkeitsnah).
- Das Vorgehen bei der Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern ist **iterativ**:
 1. Ermittlung der auf das betrachtete Bauteil wirkenden Kräfte (Reaktionen resp. auf Schnittkörper wirkende Kräfte) und, wo sinnvoll, Unterteilung in Teilsysteme (Querkraftnullpunkte)
 2. Erstes Fachwerk mit grober Geometrie (aufgrund geschätzter Abmessungen der Druckstreben etc.) annehmen
 3. Ungefähre Kräfte bestimmen, darauf basierend Abmessungen (und wo nötig Fachwerkgeometrie) anpassen
 4. Sukzessive verbessern, u.a. durch Verfeinerung mit Spannungsfeldern unter Ausnutzung der Mindestbewehrung

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder – Ergänzungen (I)

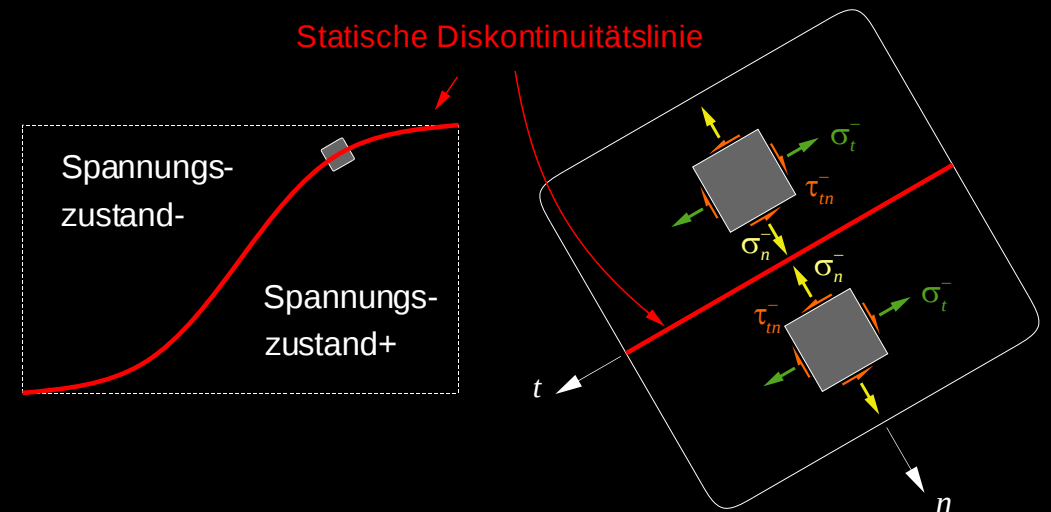
- Bei der Verfeinerung von Fachwerkmodellen zu Spannungsfeldern sind meist **verschiedene Lösungen möglich**. Umgekehrt kann jedem Spannungsfeld genau ein Fachwerkmodell (Stabwerkmodell) zugeordnet werden, dessen Stäbe den Resultierenden der einzelnen Teile des Spannungsfeldes entsprechen.
- Vollständige Spannungsfelder werden selten benötigt. Meist ist es ausreichend, **kritische Bereiche und wichtige Details** eines Tragwerks mit Fachwerkmodellen detailliert zu untersuchen (übrige Bereiche: Querschnittsnachweise oder einfache Stabwerkmodelle).
- Die Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern ist **Erfahrungs- und Übungssache**. Bei fehlender Erfahrung kann man sich an «Musterlösungen» für Standardprobleme (immer wieder ähnlich auftretende Fälle) orientieren, siehe Folien 54 - 58.

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder – Ergänzungen (II)

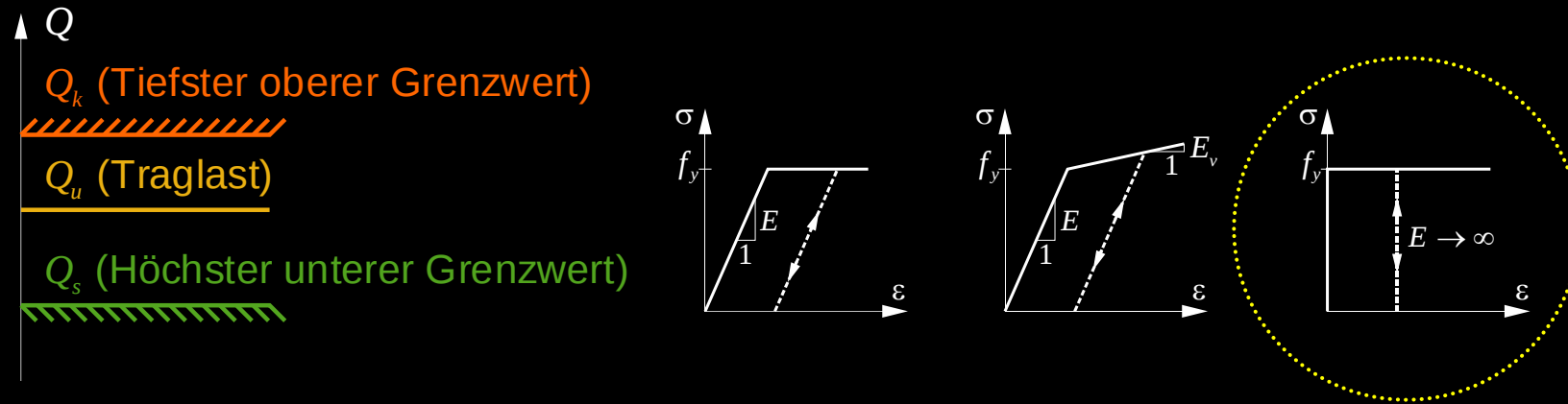
- In klassischen (von Hand entwickelten) Spannungsfeldern sind die **Druckspannungen** im Beton an vielen Stellen **unstetig** (unterschiedlich grosse Druckspannungen in angrenzenden Parallelfeldern, spannungsfreier Beton unmittelbar neben den druckbeanspruchten Elementen des Spannungsfelds, etc.).
- Es handelt sich damit um **diskontinuierliche Spannungsfelder**.
- Damit **Gleichgewicht** erfüllt ist, müssen an einer **statischen Diskontinuitätslinie** (Grenze zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichem Spannungszustand) allgemein folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Normalspannungen parallel zur statischen Diskontinuitätslinie dürfen unstetig sein (**Sprung $\sigma_t^- \neq \sigma_t^+$ ist zulässig**)
- Normalspannungen senkrecht zur statischen Diskontinuitätslinie und Schubspannungen müssen kontinuierlich sein (**$\sigma_n^- = \sigma_n^+$, $\tau_{nt}^- = \tau_{nt}^+$ muss erfüllt sein**)



Querkraft – Bruchmechanismen

Grundlagen



Unterer (statischer) Grenzwertsatz

Jede Belastung Q_s , zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fließbedingungen nirgends verletzt, liegt nicht höher als die Traglast Q_u . (statisch zulässig: Gleichgewichtsbedingungen und stat. Randbedingungen erfüllt)

Oberer (kinematischer) Grenzwertsatz

Jede Belastung Q_k , welche aus der Gleichsetzung der Arbeit der äusseren Kräfte bei einem kinematisch zulässigen Verformungszustand mit der zugehörigen Dissipationsarbeit resultiert, liegt nicht tiefer als die Traglast Q_u . (kinematisch zulässig: kinemat. Relationen und kinemat. Randbedingungen erfüllt)

Verträglichkeitssatz

Jede Belastung Q_u , zu der eine vollständige Lösung angegeben werden kann, ist eine Traglast. (vollständige Lösung: stat. zulässiger Spannungszustand, der die Fließbedingungen nirgends verletzt, und mit diesem nach der Theorie des plastischen Potentials verträglicher, kinematisch zulässiger Verformungszustand)

Querkraft – Bruchmechanismen

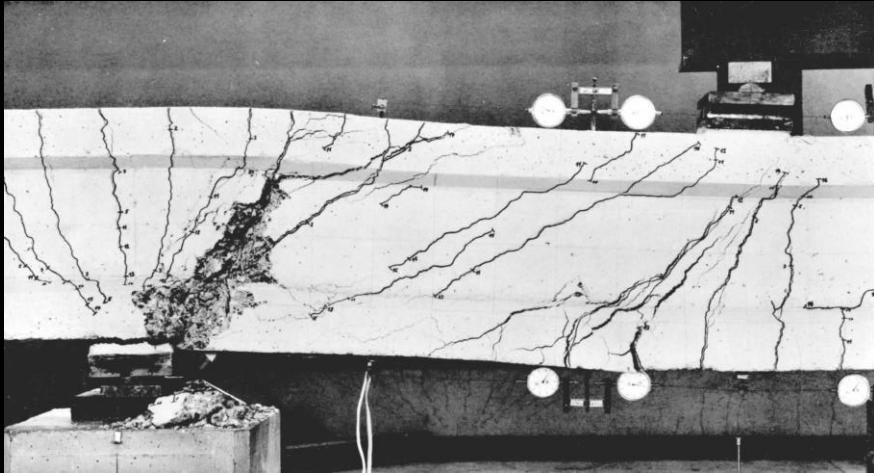
Bruchmechanismen für Scheiben und Träger (oberer Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie)

- Anwendung in der Praxis vor allem für die Beurteilung der Tragsicherheit bestehender Bauwerke und die Überprüfung von (zum Beispiel) mit FE-Berechnungen ermittelten Bewehrungslayouts.
- Die Entwicklung eines statisch zulässigen Spannungszustandes ist in solchen Fällen aufwändig (Fließbedingungen durch bestehende Konstruktion und Bewehrung gegeben). Mit Bruchmechanismen können wichtige Details und Abmessungen dagegen selbst in komplizierten Fällen mit relativ geringem rechnerischem Aufwand überprüft werden.

Vorgehen

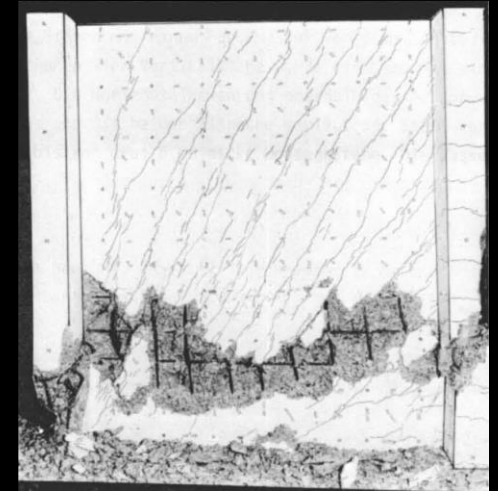
- Annahme kinematisch verträglicher Bruchmechanismen
- Berechnung der zugehörigen Arbeit W der äusseren Kräfte sowie der Dissipationsarbeit D (Dissipation in beim Kollaps fließender Bewehrung und im Beton entlang Diskontinuitäten)
- Ermittlung der Kollapslast aus der Bedingung $W(Q) = D \rightarrow Q_u \leq Q$ für jeden Mechanismus
- Massgebend ist der Mechanismus mit dem tiefsten Verhältnis D/W (= kleinste Kollapslast)
- Dissipation in fließender Bewehrung kann sehr einfach berechnet werden; Dissipation im Beton (Diskontinuitäten) ist etwas aufwendiger zu ermitteln.

Querkraft – Bruchmechanismen



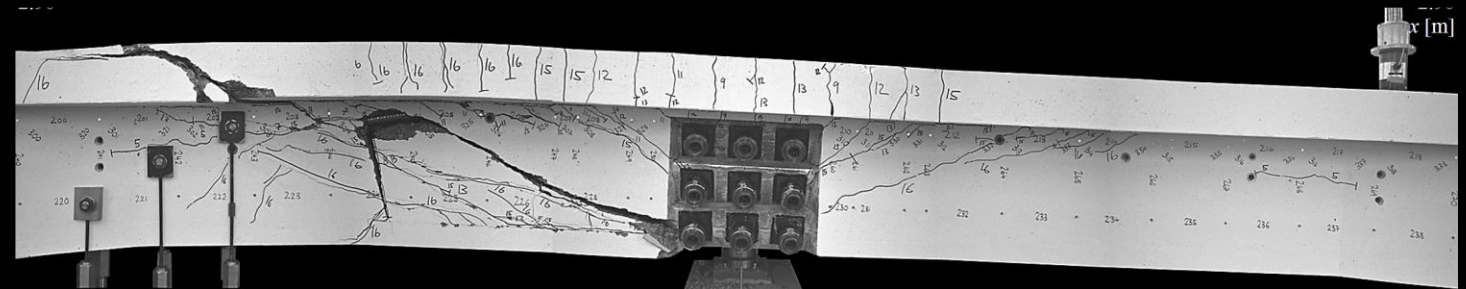
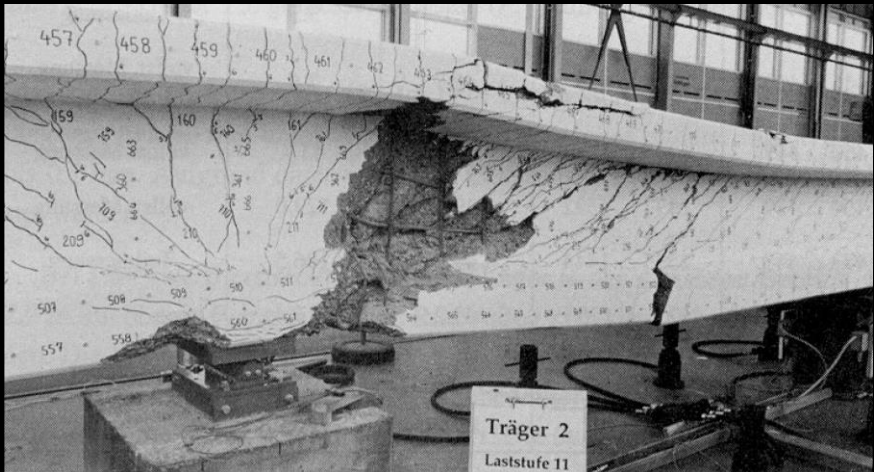
Bachmann / Thürlimann
1965

Maier / Thürlimann
1985

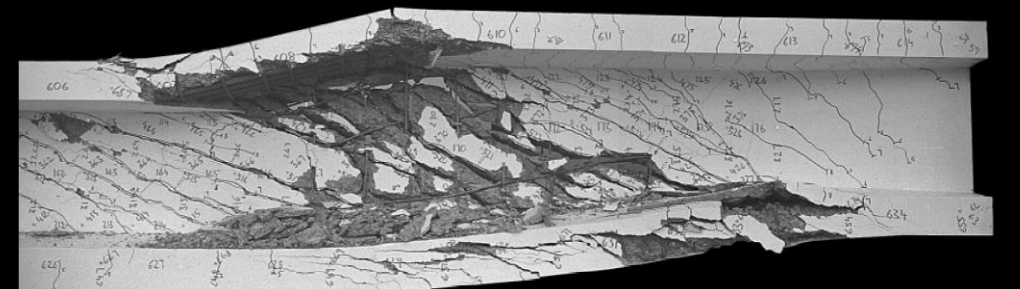


Stoffel / Marti
1995

Sigrist / Marti
1992

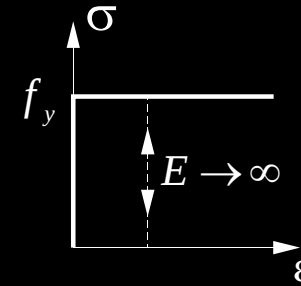
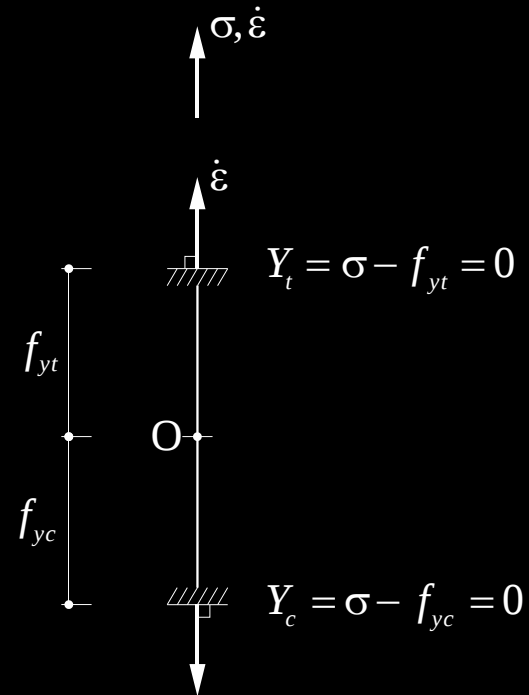
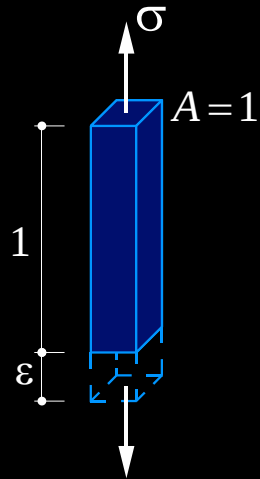


Kaufmann / Marti
1995



Querkraft – Bruchmechanismen

Dissipation im Betonstahl



Allgemeine Dissipation pro Volumeneinheit:

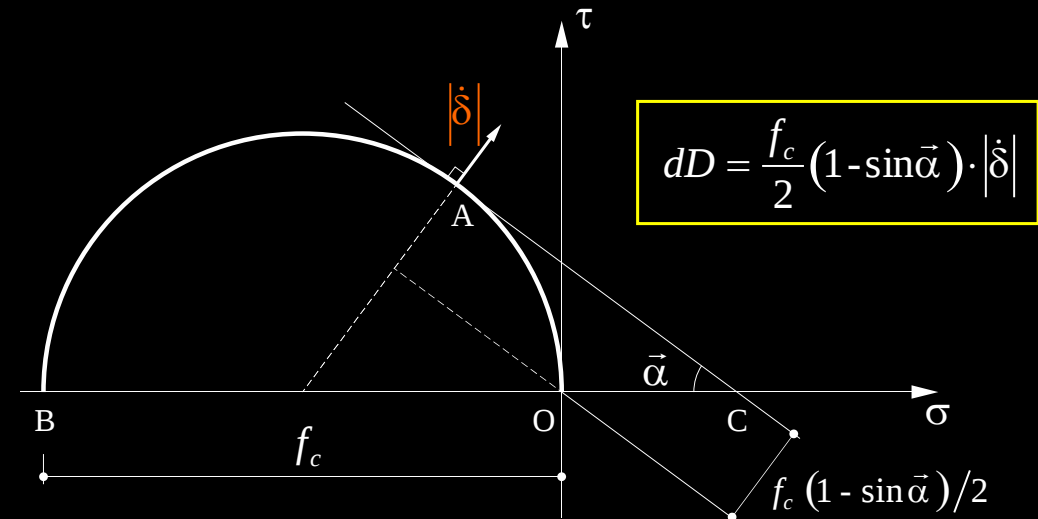
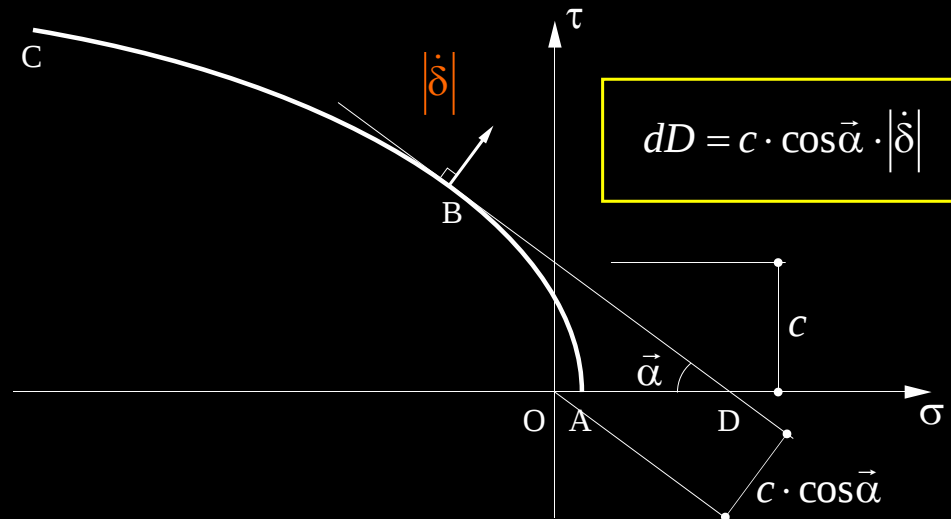
$$dD_s = \sigma_s \cdot \dot{\epsilon}_s$$

d.h. mit starr – ideal plastischem Materialverhalten beträgt die Dissipationsarbeit in einem Stab mit Querschnittfläche A , der sich um δ verlängert:

$$D_s = A_s \cdot f_{sd} \cdot \dot{\delta}$$

Querkraft – Bruchmechanismen

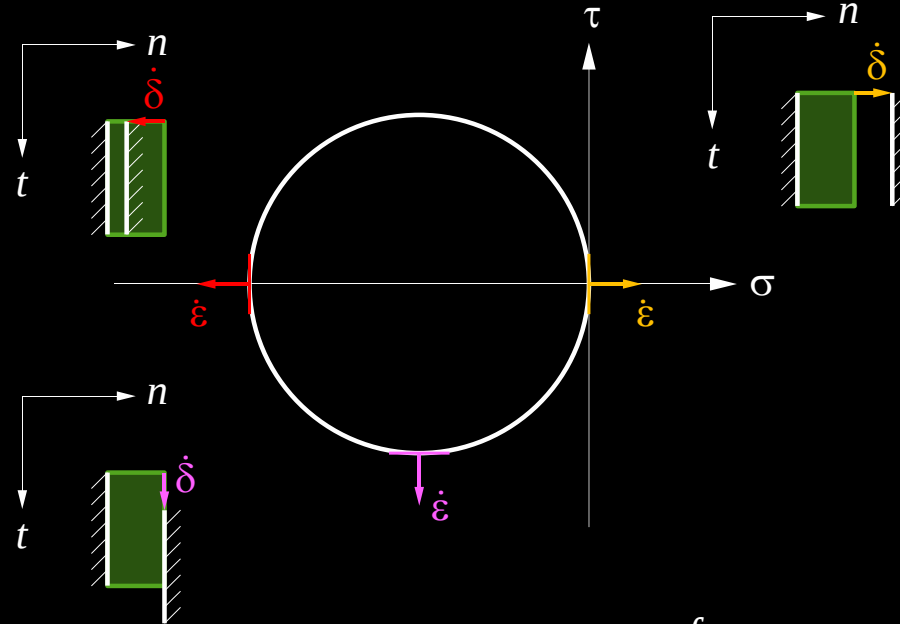
Gleitlinien und Dissipation in Beton



- Für eine allgemeine Mohrsche Hüllkurve beträgt die Dissipation pro Einheitsfläche der Diskontinuität, bezogen auf eine Einheitsverschiebung $dD = c \cdot \cos \vec{\alpha}$
- Für die quadratische Fließbedingung folgt $dD = f_c \cdot (1 - \sin \vec{\alpha})/2$
- Für $\vec{\alpha} = \pi/2$ resultiert keine Dissipation im Beton: sogenannter **Kollapsriss**

Querkraft – Bruchmechanismen

Gleitlinien und Dissipation in Beton



$$dD = \frac{f_c}{2} (1 - \sin \vec{\alpha}) \cdot |\dot{\delta}|$$

$$\vec{\alpha} = 0: \quad dD = \frac{f_c}{2} \quad \text{reine Gleitung}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\pi}{2}: \quad dD = 0 \quad \text{Kollapsriss}$$

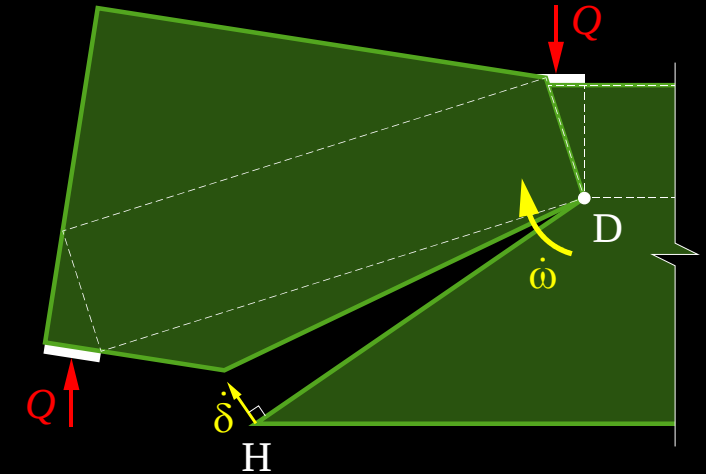
$$\vec{\alpha} = -\frac{\pi}{2}: \quad dD = f_c \quad \text{reine Stauchung}$$

Querkraft – Bruchmechanismen

Scheibe ohne Vertikalbewehrung unter Einzellast

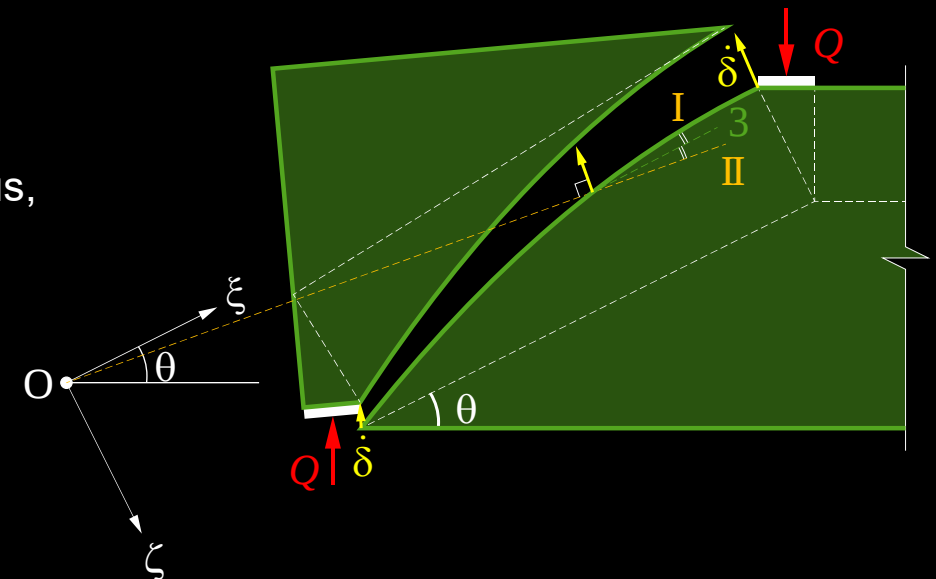
Biegemechanismus

- **Kollapsriss D-H** (Verschiebung senkrecht zur Gleitlinie, $\bar{\alpha} = \pi/2$, keine Dissipation im Beton)
- Traglast ist unabhängig von der Neigung des Kollapsrisses und identisch mit derjenigen des Translationsmechanismus und des Fachwerkmodells (vollständige Lösung)
- Bestätigt, dass Längsbewehrung (ohne Bügel) nicht abgestuft werden kann



Rotationsmechanismus

- **Gleitlinie: Hyperbel** im Koordinatensystem (ξ, ζ)
- Degeneriert für grossen Abstand $O \rightarrow \infty$ zu Translationsmechanismus, gleiche Traglast

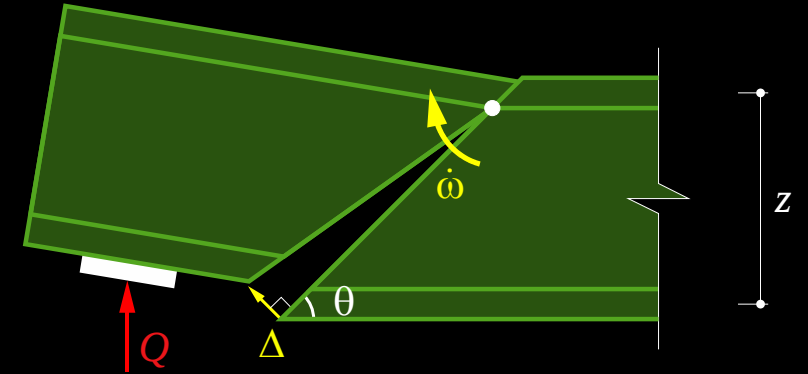


Querkraft – Bruchmechanismen

Kollapsrissmechanismen in Scheiben mit horizontaler und vertikaler Bewehrung

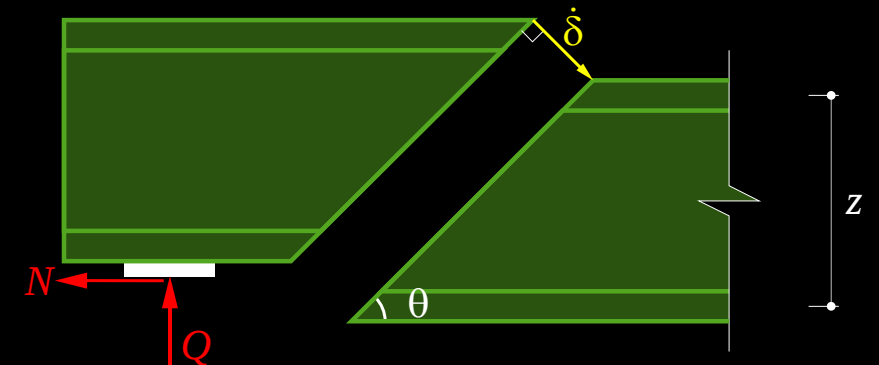
Rotationsmechanismus (Biegeschubbruch)

- **Kollapsriss** (Verschiebung senkrecht zur Gleitlinie, $\vec{\alpha} = \pi/2$, keine Dissipation im Beton)
- **Dissipation in Längsbewehrung und Bügelbewehrung** (Relativverschiebung in Bewehrungsrichtung · Fließzugkraft)
- Vollständige Lösungen: β = Druckfeldneigung
- Massgebende Mechanismen: Kollapsrisse unmittelbar neben Bügeln, Abstufungen der Längsbewehrung oder Querschnittssprüngen
- Senkrechter Kollapsriss: «**Biegemechanismus**»



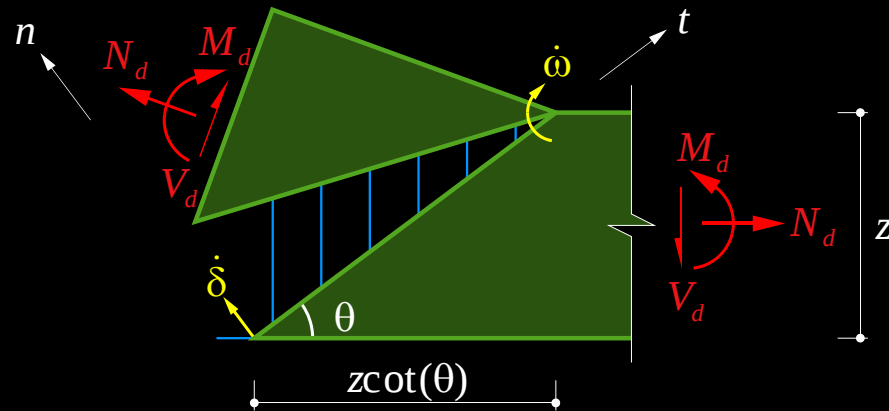
Translationsmechanismus

- Selten massgebend, möglich bei Zugnormalkraft (N leistet Arbeit)



Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Biegeschubbruch



- Längsbewehrung A_s
- Bügelbewehrung a_{sw} (gleichmässig verteilt)
- $\bar{\alpha} = \pi/2$: $D_c = 0$, keine Dissipation im Beton

- Arbeit der Schnittgrössen:

$$W = V \cdot z \cdot \cot \theta \cdot \dot{\omega} + M \cdot \dot{\omega} + N \cdot \frac{z}{2} \cdot \dot{\omega} = \dot{\omega} \cdot \left[M + N \cdot \frac{z}{2} + Vz \cot \theta \right]$$

- Dissipationsarbeit:

$$D = D_s + D_c = A_s \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \dot{\omega} + a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cot \theta \cdot \frac{\dot{\omega} \cdot z \cot \theta}{2} = \dot{\omega} \cdot \left[A_s f_{sd} z + a_{sw} f_{sd} \frac{(z \cot \theta)^2}{2} \right]$$

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Biegeschubbruch

- Gleichsetzen:
$$M = A_s f_{sd} z + a_{sw} f_{sd} z^2 \frac{\cot^2 \theta}{2} - N \frac{z}{2} - Vz \cot \theta$$
$$\frac{dM}{d \cot \theta} = a_{sw} f_{sd} z^2 \cot \theta - Vz \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \boxed{V = a_{sw} f_{sd} z \cot \theta}$$
$$\text{resp. } \cot \theta = \frac{V}{z a_{sw} f_{sd}}$$

- Rückeinsetzen:
$$\frac{M}{z} + \frac{N}{2} + V \cot \theta = A_s f_{sd} + \underbrace{a_{sw} f_{sd} z \frac{\cot^2 \theta}{2}}_{\frac{V}{2} \cot \theta}$$
$$\rightarrow \boxed{A_s f_{sd} = \frac{M}{z} + \frac{N}{2} + \frac{V \cot \theta}{2}}$$

Gleichungen entsprechen den Beziehungen aus dem Spannungsfeld
Unterer und oberer Grenzwert fallen zusammen → vollständige Lösung!

Bruchmechanismen

Stegdruckbruchmechanismen

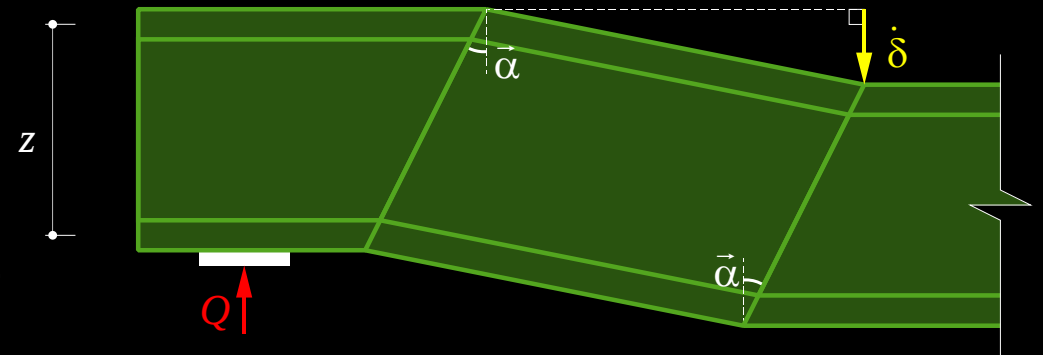
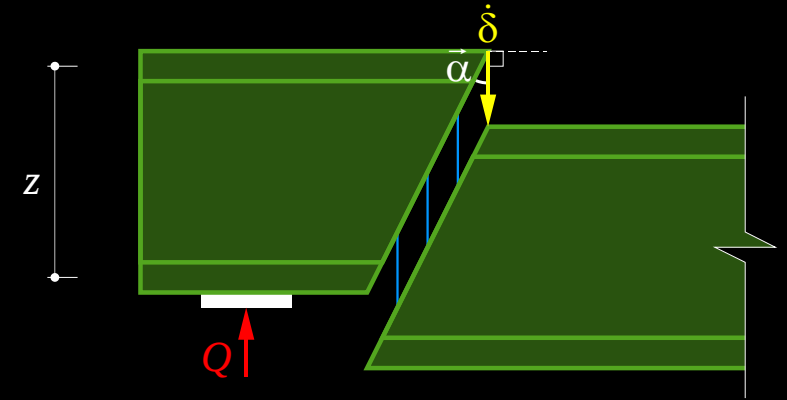
Stegdruckbruch mit diskreter Bruchlinie

- bei **grossen Längsbewehrungsgehalten** massgebend
(Bruchverschiebung vertikal, d.h. **keine Dissipation in Längsbewehrung**)
- **Beton versagt auf Druck**, **Bügelbewehrung fliesst**, Längsbewehrung bleibt elastisch
- Obere Grenzwerte für die Traglast in Abhängigkeit der Neigung $\bar{\alpha}$ der Bruchlinie:
 τ = nominelle Schubspannung
 ω_v = mechanischer Bügelbewehrungsgehalt

$$\omega_v = a_{sw} f_s / (b_w f_c)$$

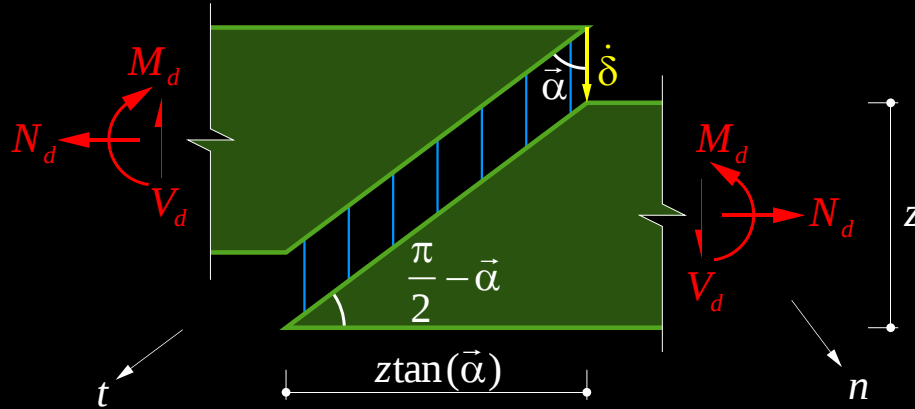
Stegdruckbruch mit Bruchzone

- In Schubversuchen oft beobachtet, kann als Serie von Bruchlinieninterpretiert werden (gleiche Traglast)
- Berücksichtigung der Dissipation in den Flanschen (plast. Gelenke) möglich; bei diskreter Gleitlinie wäre Abscheren nötig.



Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Stegdruckbruch



- Bügelbewehrung a_{sw} (gleichmässig verteilt)
- $\bar{\alpha}$ variabel: Dissipation im Beton von $\bar{\alpha}$ abhängig.

- Arbeit der Schnittgrössen: $W = V \cdot \dot{\delta}$

- Dissipationsarbeit: $D = D_s + D_c = \dot{\delta} \cdot a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \tan \bar{\alpha} + \dot{\delta} \cdot \frac{b_w \cdot z}{\cos \bar{\alpha}} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \cdot (1 - \sin \bar{\alpha})$

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Stegdruckbruch

- Gleichsetzen:

$$V = a_{sw} f_{sd} z \tan \vec{\alpha} + b_w z \frac{f_{cd}}{2} \frac{1 - \sin \vec{\alpha}}{\cos \vec{\alpha}}$$
$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{a_{sw} f_{sd} z}{\cos^2 \vec{\alpha}} - b_w z \frac{f_{cd}}{2} \frac{1}{\sin \vec{\alpha} + 1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \sin \vec{\alpha} = 1 - 2\omega_w \quad \text{mit} \quad \omega_w = \frac{a_{sd} f_{sd}}{b_w f_{cd}}$$

- Rückeinsetzen:

$$V = \omega_w b_w f_{cd} z \tan \vec{\alpha} + b_w f_{cd} z \frac{\omega_w}{\cos \vec{\alpha}} = b_w f_{cd} z \omega_w \underbrace{\left(\tan \vec{\alpha} + \frac{1}{\cos \vec{\alpha}} \right)}_{\frac{1 - \omega_w}{\sqrt{\omega_w - \omega_w^2}}}$$

$$= b_w z f_{cd} \cdot \sqrt{\omega_w - \omega_w^2}$$

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Stegdruckbruch

- Vergleich mit unterem Grenzwertsatz:

$$V_{Rd,s} = a_{sw} f_{sd} z \cot \alpha$$

$$V_{Rd,c} = f_{cd} b_w z \sin \alpha \cos \alpha$$

$$V_{Rd,s} = V_{Rd,c} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{sw} f_{sd}}{b_w f_{cd}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cot \alpha} = \sin^2 \alpha \quad \rightarrow \quad \sin \alpha = \sqrt{\omega_w}$$

$$V_{Rd,s} = V_{Rd,c} = f_{cd} b_w z \cdot \underbrace{\sqrt{\omega_w} \cdot \cos\left(\arcsin\left(\sqrt{\omega_w}\right)\right)}_{\sqrt{1-\omega_w}}$$

$$= b_w z f_{cd} \cdot \sqrt{\omega_w - \omega_w^2}$$

Unterer und oberer Grenzwert fallen zusammen → vollständige Lösung!

Querkraft – Zusammenfassung

1. Das Tragverhalten von Trägern wird meist von den Kräften und Verformungen infolge Biegemomenten dominiert. Bei **gedrungenen** und **stark profilierten** Trägern können die **Querkräfte** und die zugehörigen Verformungen jedoch relativ gross sein.
2. In der Regel ist zur Querkraftabtragung eine zur Trägerachse senkrechte oder geneigte **Bügelbewehrung** sowie eine – im Vergleich zu der zur Aufnahme der Biegemomente und Normalkräfte erforderlichen Bewehrung – **erhöhte Längsbewehrung** anzuordnen.
3. Der Anteil der zur Querkraftabtragung erforderlichen Bewehrung an der gesamten Bewehrung ist relativ klein.
4. Das Tragverhalten von bügelbewehrten Balken und Platten im gerissenen Zustand wird zweckmässigerweise mit **Fachwerkmodellen** und Spannungsfeldern untersucht.
5. Fachwerkmodelle sind **diskretisierte Spannungsfelder**. Bei ihrer iterativen Entwicklung ist das zugeordnete Spannungsfeld (bestehend aus Zuggliedern, Knoten, Druckstreben, Fächern und Druckfeldern) zu berücksichtigen, um strenge Lösungen nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie zu gewährleisten (sichere Bemessung gewährleisten).

Querkraft – Zusammenfassung

6. In einfachen Fällen ist eine auf der Fachwerkmodellvorstellung beruhende **Querschnittsbetrachtung** möglich. Dabei kann die infolge Querkraft erforderliche Verstärkung der Biegebewehrung mit einer Verschiebung der M_d/z -Linie um das sogenannte **Versatzmass $z \cdot \cot \alpha / 2$** ermittelt werden.
7. Mit **geneigten Bügeln** kann die Gefahr eines Stegdruckbruchs in speziellen Fällen deutlich reduziert werden. Allerdings sind die baupraktischen Schwierigkeiten bei der Verwendung geneigter Bügel nicht zu unterschätzen.
8. **Geneigte Zug- bzw. Druckgurte** sowie Spannglieder können einen wesentlichen Anteil der Querkräfte übertragen. Fachwerkmodelle oder Spannungsfelder erlauben eine sichere Erfassung der entsprechenden Tragwirkungen, siehe Vorspannung / Stahlbeton II.
9. Mit der Bemessung für Querkraft sind **duktiler Biegebrüche oder Biegeschubbrüche** sicherzustellen; spröde Stegzugbrüche resp. relativ spröde Stegdruckbrüche sind durch die Anordnung einer vertikalen Mindestbewehrung resp. die vorsichtige Festlegung der Stegdicke (reduzierte Betondruckfestigkeit) zu vermeiden.
10. Verformungen infolge Querkraften können aufbauend auf **Fachwerkmodellvorstellungen** abgeschätzt werden, siehe Scheiben / Advanced Structural Concrete.