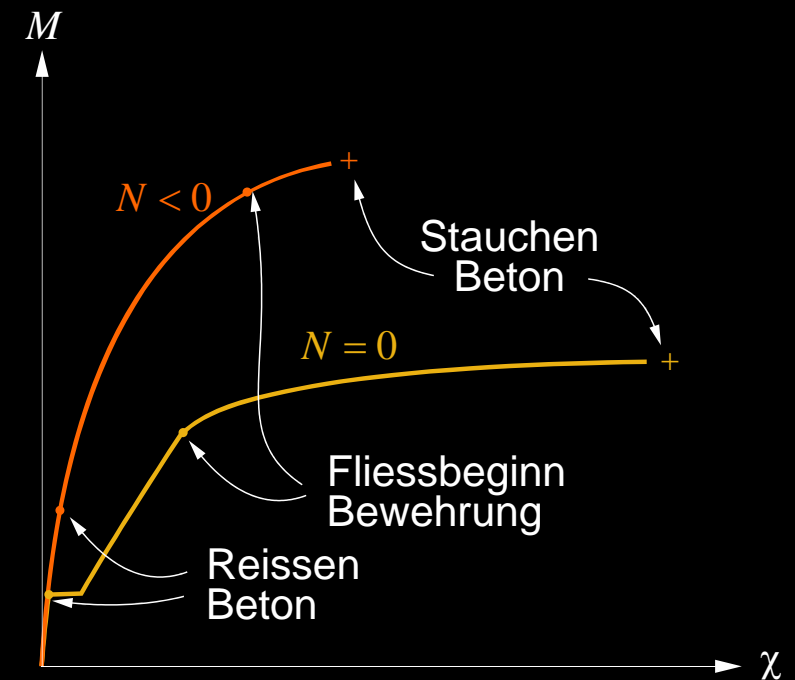


3.3 Biegung und Normalkraft / Druckglieder

Biegung und Normalkraft – Allgemeines

Verhalten von Bauteilen unter Biegung und Normalkraft

- Biegemomente in Kombination mit Normalkräften treten in Stützen, Bogentragwerken, vorgespannten Trägern etc. auf
- Normalkräfte beeinflussen den Biege- und Torsionswiderstand, die Biegesteifigkeit und das Verformungsvermögen, d.h. das gesamte Momenten-Krümmungs-Diagramm
- Diagramm: Einfluss einer Druckkraft $N = \text{const.} < 0$ auf das typische Verhalten kreisrunder Stützen oder Pfähle:
 - Rissmoment wird erhöht
 - Nichtlineares Verhalten schon vor Fließbeginn der Bewehrung
 - Verformungsvermögen wird reduziert
- Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens allgemein: siehe Biegung
- In der Praxis mit Hilfe von Computerprogrammen, Plausibilitätskontrolle von Hand durch Anwender!



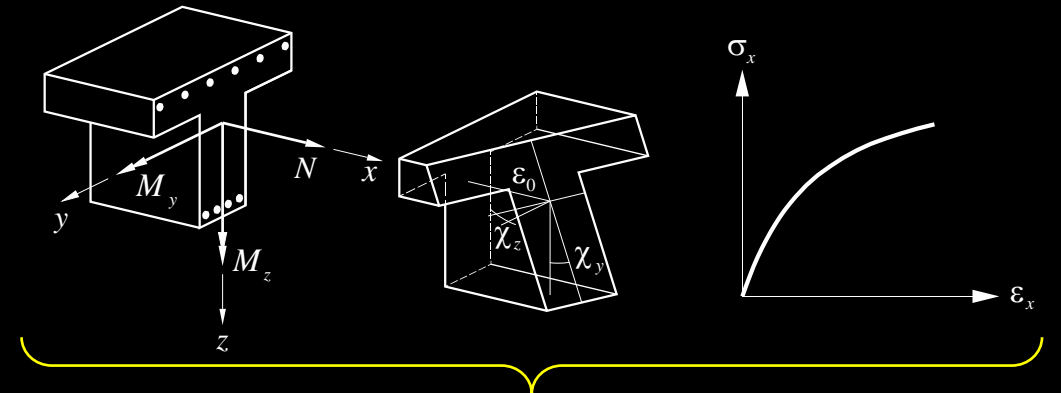
Biegung und Normalkraft

Allgemeines

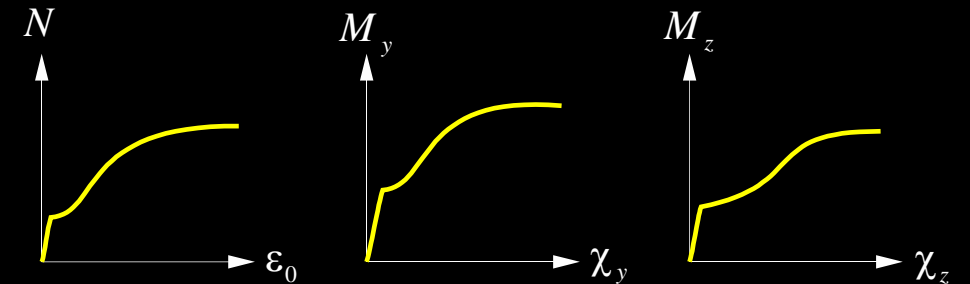
- Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ermöglicht die Ermittlung des Tragverhaltens von Stäben bei gegebenem Baustoffverhalten (Spannungs-Dehnungs-Diagramme)
- Schnittgrößen (N , M_y , M_z) folgen aus den Verformungsgrößen (ε_0 , χ_y , χ_z) einfach durch Integration, umgekehrt ist im allgemeinen eine Iteration erforderlich:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Integration}} \\ \xleftarrow{\text{Iteration}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right.$$

Statische Berechnung: (N , M_y , M_z) meist auf Hauptachsen Beton-QS bezogen, bei Berücksichtigung ideeller Querschnittswerte beachten!



Ermittlung des Tragverhaltens für beliebige Querschnittsgeometrie / Baustoffe möglich:

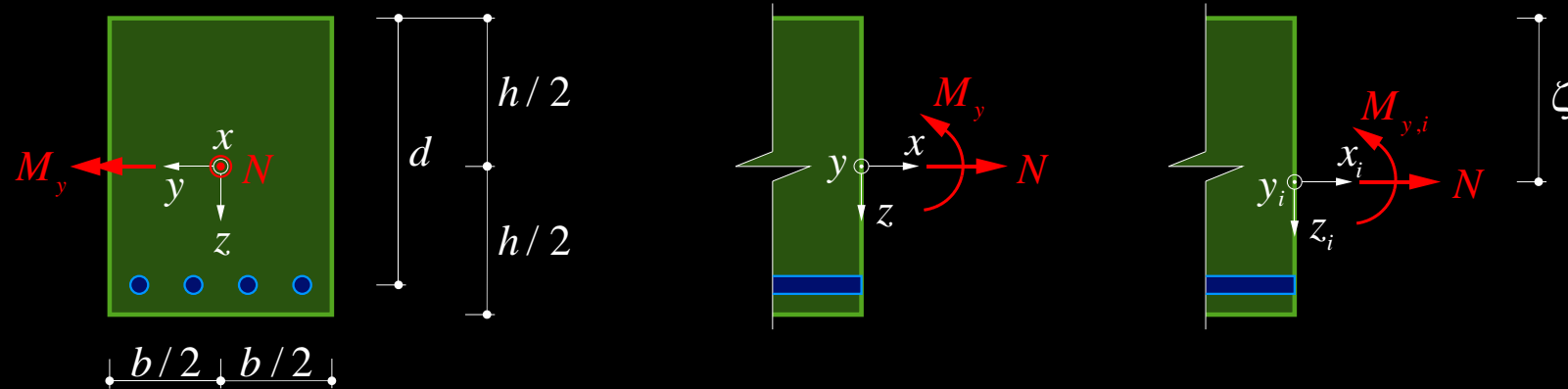


Normalkraft-Verlängerung Momenten-Krümmung y Momenten-Krümmung z

NB: Allgemein ist $\chi_y(N, M_z) \neq 0$, $\chi_z(N, M_y) \neq 0$ und $\varepsilon_0(M_y, M_z) \neq 0$ (auch für symmetrische QS)

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Momenten-Krümmungs-Diagramme: ungerissen-elastischer Zustand



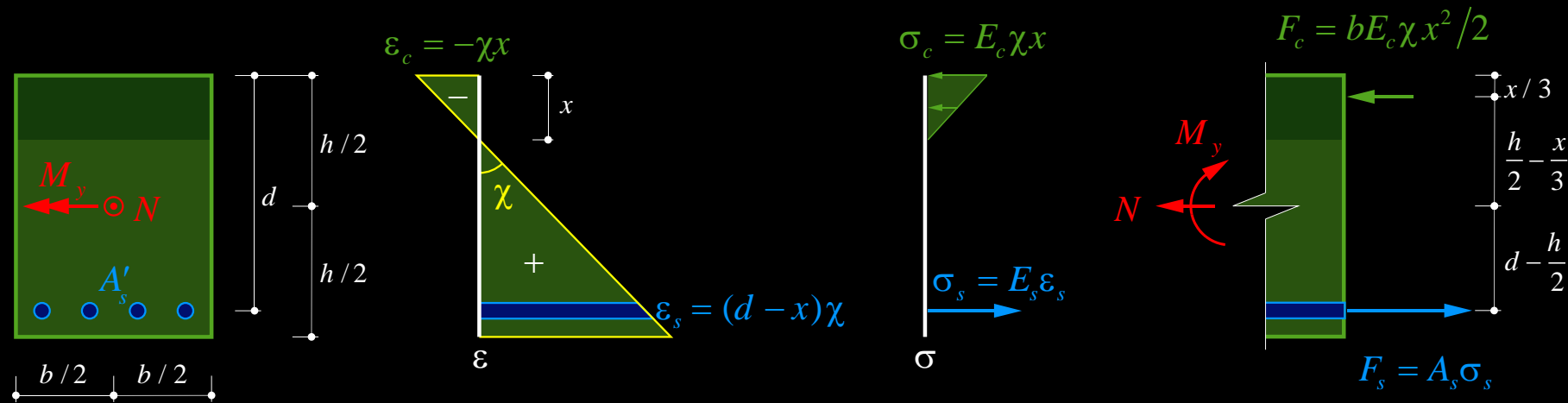
- Schnittgrößen werden in der Regel auf den reinen Betonquerschnitt bezogen
- Spannungen werden am ideellen Querschnitt ermittelt

- Spannungen im Querschnitt:
$$\sigma = n \cdot \left(\frac{N}{A_i} + \frac{M_{y,i}}{I_{y,i}} \cdot z_i \right)$$

- Moment bezüglich ideellem Schwerpunkt:
$$M_{y,i} = M_y - N \cdot \left(\zeta_i - \frac{h}{2} \right)$$

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Momenten-Krümmungs-Diagramme: gerissen-elastischer Zustand



$$\Sigma H = 0 \rightarrow N = A'_s E_s (d-x)\chi - \frac{b E_c \chi x^2}{2}$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow M_y = A'_s E_s (d-x) \left(d - \frac{h}{2} \right) \chi + \frac{b E_c \chi x^2}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right)$$

Ermittlung von (N, M_y)
aus (x, χ) direkt

Bestimmung von (x, χ)
aus (N, M_y) allgemein
durch Lösen der beiden
Gleichungen (Iteration)

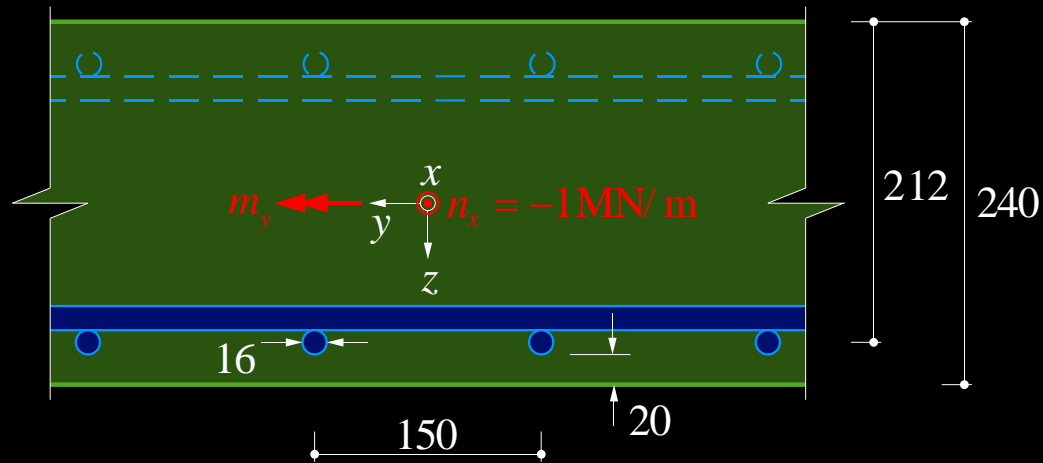
Biegung und Normalkraft – Verhalten

Momenten-Krümmungs-Diagramme: gerissen-elastischer Zustand

- Das $M-\chi$ -Diagramm ergibt sich für eine gegebene Normalkraft aus der Wahl von x und Lösen der zwei Gleichungen nach χ und M_y .
- Die Dehnungsebene findet sich bei bekannten Schnittgrößen N und M_y im Allgemeinen iterativ aus den zwei Gleichungen.
- Wird für den Beton (und allenfalls auch für die Bewehrung) ein nichtlineares Verhalten vorausgesetzt, kann im Prinzip gleich vorgegangen werden.
- Die Dehnungsebene ist durch die zwei Größen x und χ eindeutig definiert.

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.15f), m - χ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Stahlbetonplatte, $h = 240$ mm
- Beton C25/30, Betonstahl B500B
- Ideale Querschnittswerte ([1], 2.13f):
 - $a_i = 247'819$ mm²/m
 - $i_{yi} = 1.216 \cdot 10^9$ mm⁴/m
 - $Ei_{yi} = 36.5$ MNm²/m
 - $\zeta_j = 122.9$ mm

Rissmoment:
$$\sigma_{c,inf} = n_c \cdot \left(\frac{n}{a_i} + \frac{m_{r,i}}{i_{y,i}} \cdot z_i \right) = 1 \cdot \left(-\frac{1 \cdot 10^6}{247'819} + \frac{m_{r,i}}{1.216 \cdot 10^9} \cdot (240 - 122.9) \right) = f_{ctm} = 2.6 \text{ MPa} \quad \rightarrow m_{r,i} = 68.9 \text{ kNm/m}$$

Bezogen auf die Hauptachsen des Betonquerschnitts resultiert:

$$m_{r,y} = m_{r,i} + n_x \cdot \left(\zeta_i - \frac{h}{2} \right) = 68.9 - 1 \cdot (122.9 - 120) = 66 \text{ kNm/m}$$

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.15f), m - χ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)

Dekompressionsmoment: Wird die Randspannung am unteren Querschnittsrand gleich null gesetzt, erhält man das sogenannte Dekompressionsmoment:

$$\sigma_{c,inf} = 1 \cdot \left(-\frac{1 \cdot 10^6}{247'819} + \frac{m_{dec,i}}{1.216 \cdot 10^9} \cdot (240 - 122.9) \right) = 0 \rightarrow m_{dec,i} = 41.9 \text{ kNm/m}$$
$$\rightarrow m_{dec,y} = 39 \text{ kNm/m}$$

Für den gerissenen Zustand können für angenommene Werte x die zugehörigen Krümmungen χ und Momente m_y ermittelt werden:

1. x wählen

$$2. \chi = \frac{n_x}{a_s E_s (d - x) - \frac{E_c x^2}{2}} \text{ aus } \Sigma H = 0 \rightarrow n_x = a_s E_s (d - x) \chi - \frac{E_c \chi x^2}{2}$$

$$3. m_y = a_s E_s (d - x) \left(d - \frac{h}{2} \right) \chi + \frac{E_c \chi x^2}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right)$$

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.15f), m - χ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)

x [mm]	χ [mrad/m]	m_y [kNm/m]
240	1.147	38.8
212	1.483	49.3
150	3.120	78.6
120	5.243	102.8
100	8.388	132.8
90	11.367	159.4

Dekompression ($x = h$)

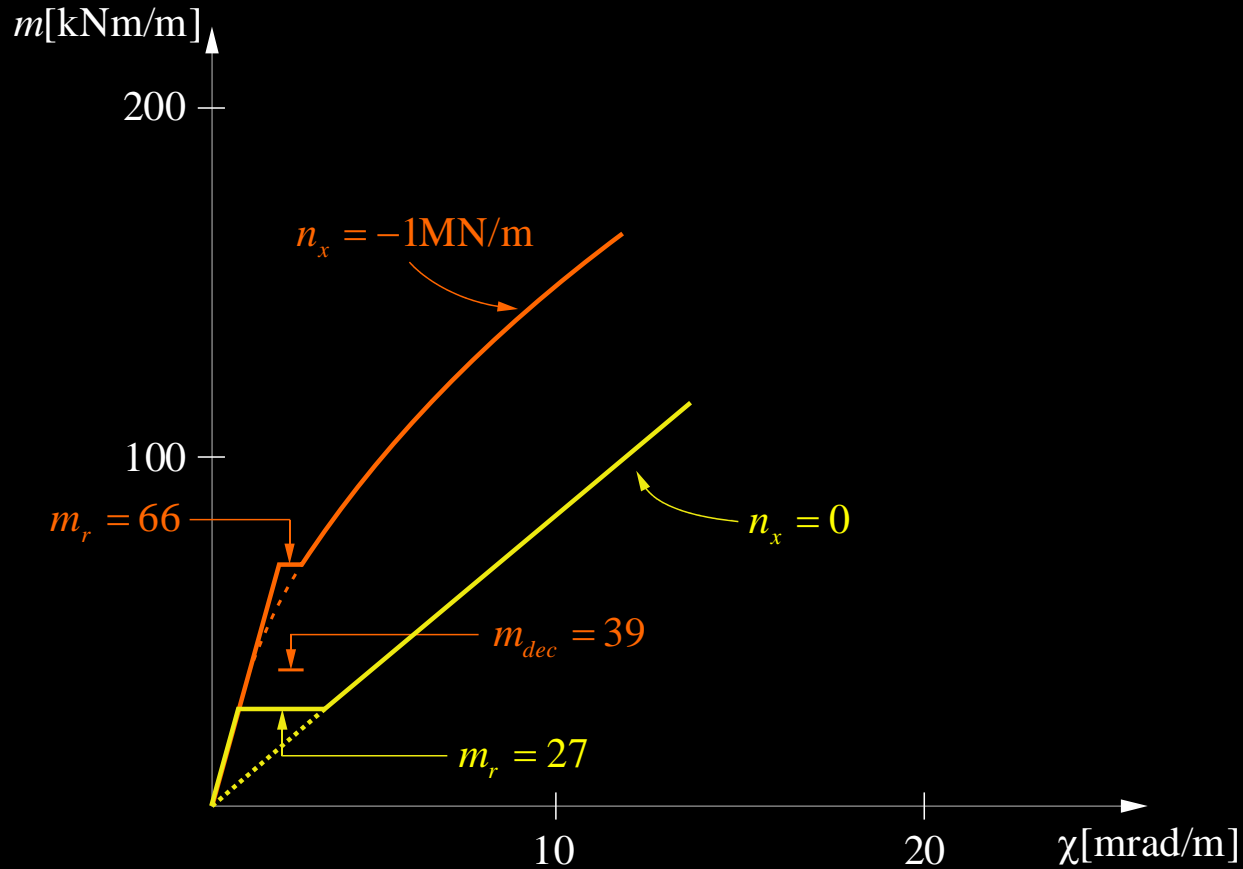
$$x = d$$

 x gewählt

N.B.:
 $a_s = 1'340.4 \text{ mm}^2/\text{m}$
 $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$
 $E_c = 30 \text{ kN/mm}^2$
 $d = 212 \text{ mm}$
 $h = 240 \text{ mm}$

Biegung und Normalkraft – Verhalten

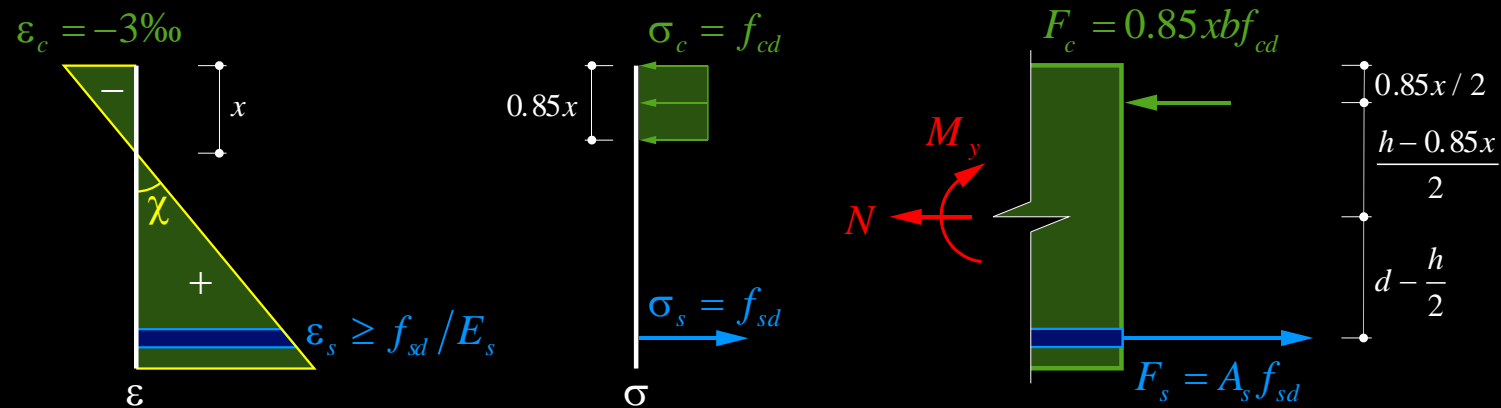
Beispiel ([1], 3.15f), m - χ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Im gerissenen Zustand ergibt sich wegen $n_x < 0$ trotz der angenommenen linearen Elastizität von Beton und Bewehrung ein nichtlineares Verhalten.
- Das Rissmoment wird durch die Druckkraft erhöht.
- Beim Dekompressionsmoment ist die Kennlinie des gerissenen Zustands zu jener des ungerissenen tangential.

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Biege- und Normalkraftverhalten



$$\Sigma H = 0 \rightarrow N + F_c - F_s = 0 \quad \rightarrow 0.85x = \frac{A_s f_{sd} - N}{b f_{cd}}$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow M_y - F_c \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.425x \right) - F_s \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) = 0 \quad \rightarrow M_{y,Rd} = A_s f_{sd} \left(d - \frac{h}{2} \right) + 0.85x b f_{cd} \left(\frac{h - 0.85x}{2} \right)$$

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.20), Biege­widerstand unter einer Normalkraft (ohne Berücksichtigung von A'_s)

- Stahlbetonplatte, $h = 240$ mm, $a_s = 1'340$ mm²/m, $d = 212$ mm
- Beton C25/30: $f_{cd} = 16.5$ MPa, Betonstahl B500B: $f_{sd} = 435$ MPa

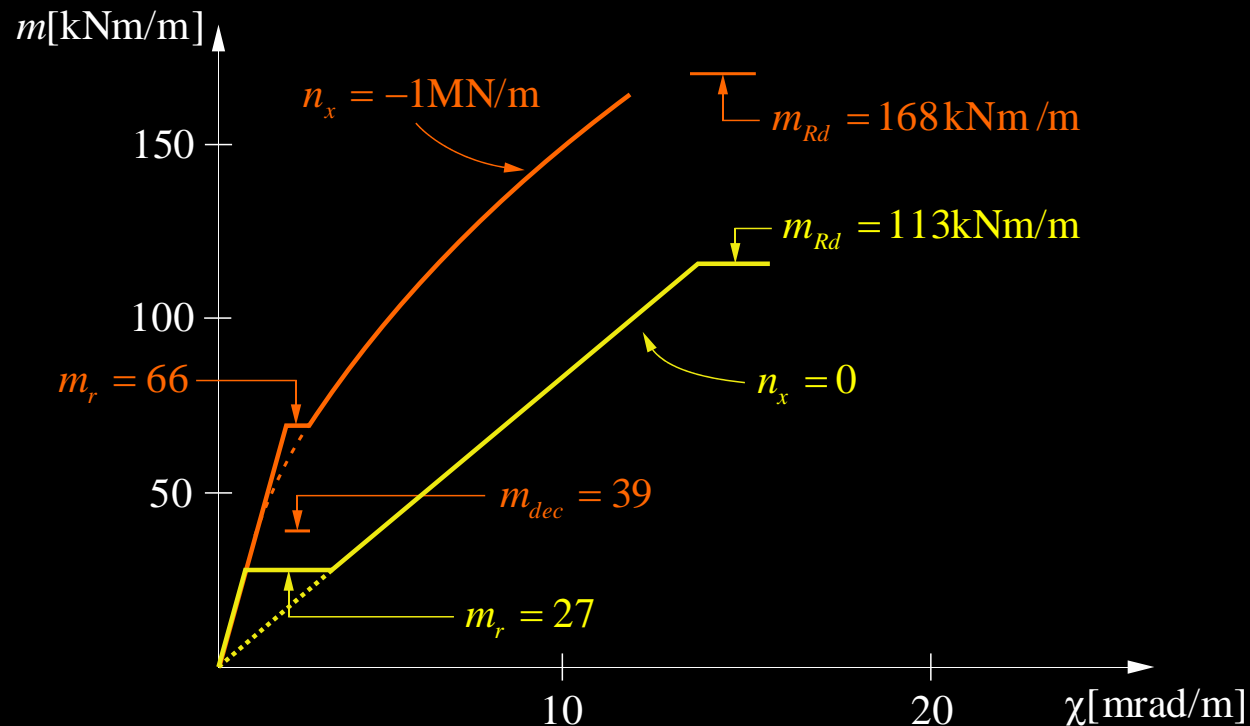
$$0.85x = \frac{1'340 \cdot 435 + 1 \cdot 10^6}{1'000 \cdot 16.5} = 95.9 \text{ mm} \quad \rightarrow x = \frac{95.9}{0.85} = 112.9 \text{ mm}$$

Kontrolle der Stahldehnungen: $\frac{3\text{‰}}{x} \cdot (d - x) = \frac{3}{112.9} \cdot (212 - 112.9) = 2.63\text{‰} > 2.12\text{‰}$ i.O.

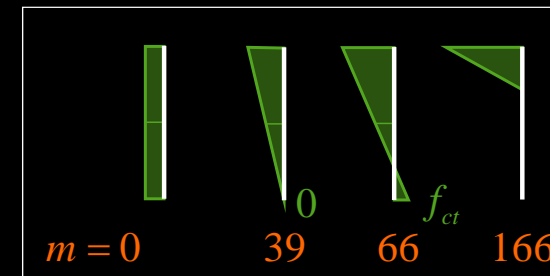
$$m_{y,Rd} = 1'340 \cdot 435 \cdot (212 - 120) + 95.9 \cdot 1'000 \cdot 16.5 \cdot \left(\frac{240 - 95.9}{2} \right) = 167.7 \text{ kNm/m}$$

Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.15f), m - χ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Der Biege­wider­stand wird durch die Druckkraft erhöht.
- Das Verformungsvermögen nimmt ab
- Kennlinie zu steif (hoch), da Beton bis zum Bruch linear elastisch angenommen wurde.

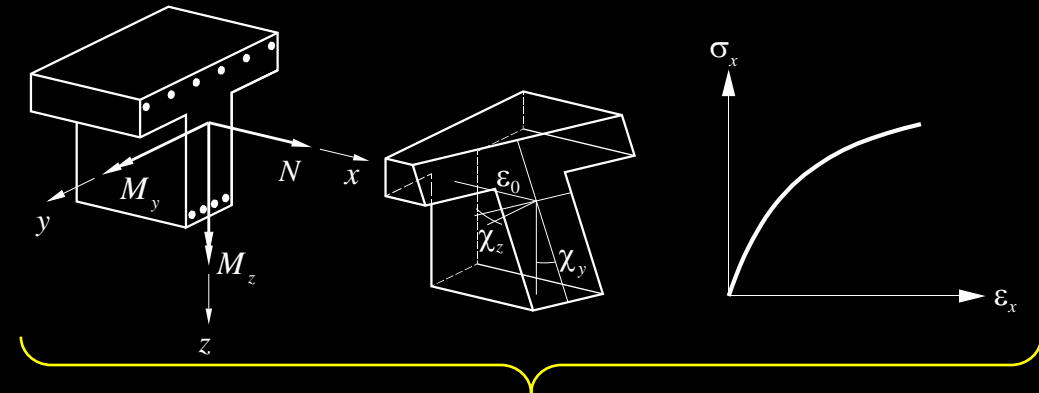


Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Allgemeines

- Bemessung resp. Nachweis des Querschnittswiderstands für kombinierte Beanspruchung erfolgt mit Interaktionsdiagrammen
- Vorgehen 1 (starr-ideal plastisch): Ermittlung aus den Fließfiguren von Beton und Bewehrung durch (geometrische) Linearkombination
- Vorgehen 2 (SIA 262): Annahme von Dehnungsebenen ($\epsilon_0, \chi_y, \chi_z$), Kombinationen $(N, M_y, M_z)_{Rd}$ folgen durch Integration:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Integration!}} \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right\}$$

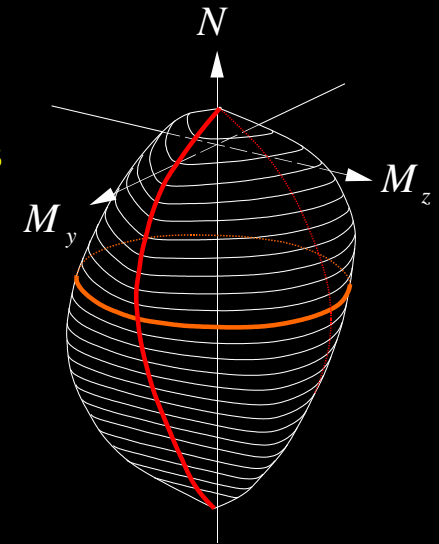


(N, M_y, M_z) für Dehnungsebenen, die dem Erreichen des Querschnittswiderstands entsprechen

→ Interaktionsdiagramme (ideal plastisch = Fließfigur)

Flächen $(N, M_y, M_z)_{Rd}$ oder (in Praxis üblich) 2D-Kurven:

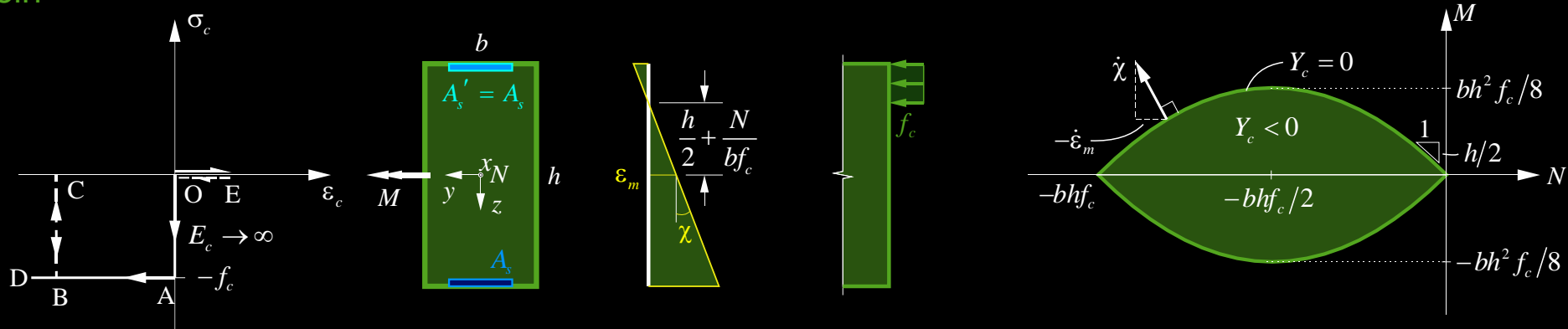
$(N, M_y)_{Rd}$ für $M_z = 0$
 $(M_y, M_z)_{Rd}$ für $N = \text{konst.}$
 etc.



Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung

(1) Beton allein



Druckzone oben: $N_c = -\left(\frac{h}{2} - \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right)$

Druckzone unten: $N_c = -\left(\frac{h}{2} + \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad -M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right)$

Fließfunktion: $Y_c = \pm M_{yc} + N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right) = 0$

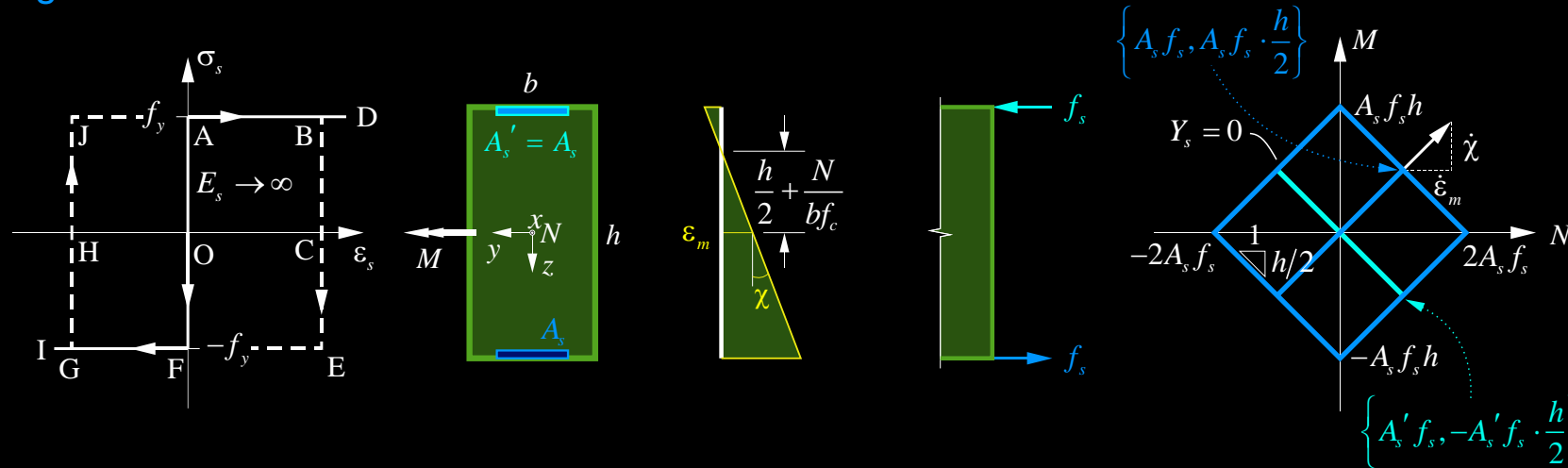
Fließgesetz: $\pm \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}} = \frac{h}{2} + \frac{N_c}{b f_c} = \frac{\partial Y_c / \partial N_c}{\partial Y_c / \partial M_{yc}}$

- **Aplastischer** Bereich $Y_c < 0$, begrenzt durch **Fließgrenze** $Y_c = 0$ (besteht aus **zwei Parabeln**)
- **Plastische Verzerrungszinkremente** sind **orthogonal zur Fließgrenze**, nach aussen gerichtet (Fließgesetz, allgemein $\dot{\epsilon} = \kappa \cdot \text{grad} Y$)

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung, $A_s = A'_s$

(2) Bewehrung allein



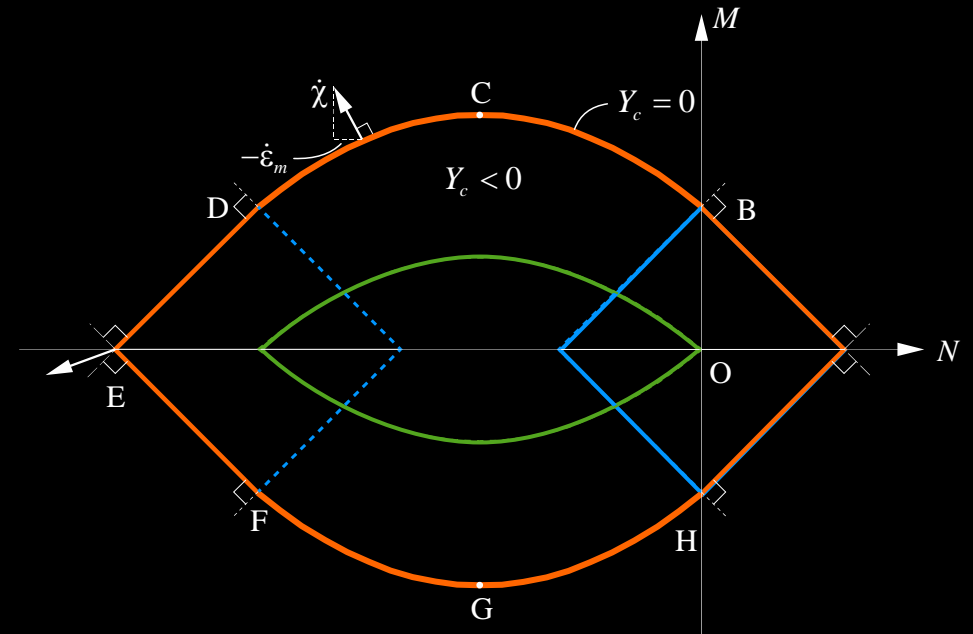
- **Aplastischer** Bereich $Y_s < 0$ ist bei zwei Bewehrungslagen ein Parallelogramm (bei symmetrischer Bewehrung $A_s = A'_s$ Rhombus), das durch die den beiden Bewehrungslagen entsprechenden Vektoren aufgespannt wird
- Kombination der beiden Bewehrungslagen grafisch durch geometrische Linearkombination (siehe Kombination von Beton und Bewehrung)
- Eckpunkte: beide Bewehrungen fließen, Seiten: eine Bewehrung fließt
- Plastische Verzerrungsincremente sind orthogonal zur Fließgrenze $Y_s = 0$, nach aussen gerichtet (Fließgesetz)

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung, $A_s = A'_s$

(3) Stahlbeton = Beton + Bewehrung

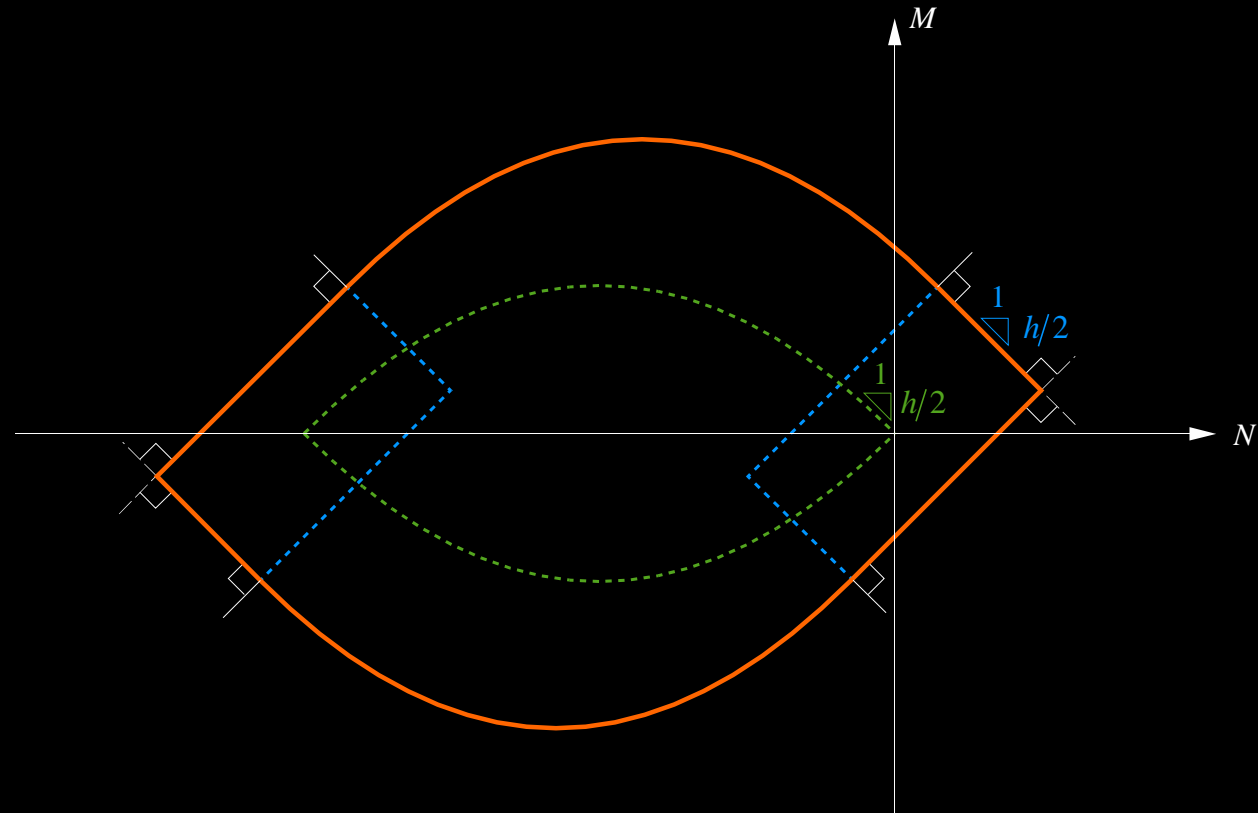
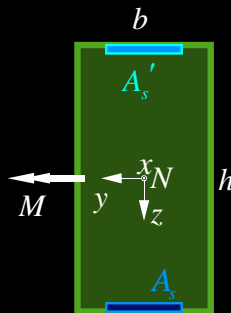
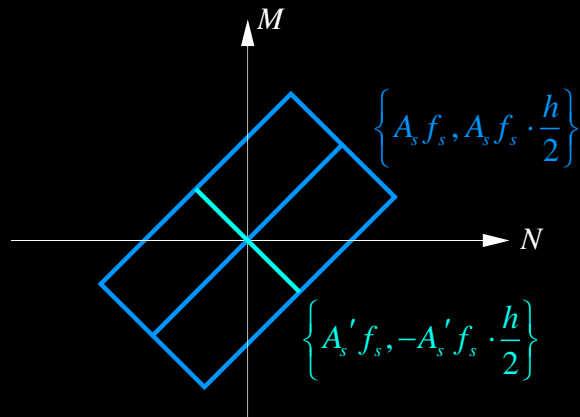
- **Fließfigur des Stahlbetons** durch geometrische Linearkombination der Fließgrenzen $Y_c = 0$ und $Y_s = 0$
- **Vorgehen:** Fließgrenze ($Y_c = 0$) rein translatorisch mit ihrem Ursprung entlang Fließgrenze ($Y_s = 0$) bewegen (oder umgekehrt $Y_s = 0$ entlang $Y_c = 0$)
- Resultierender Bereich $Y < 0$ entspricht dem **aplastischen Bereich** des Stahlbetonquerschnitts, mindestens schwach konvex, Fließgesetz (Orthogonalität der plastischen Verzerrungsinkremente bezüglich Fließgrenze) gilt weiterhin
- Entlang gerader Stücke der Fließgrenze bleibt eine Bewehrung elastisch (starr)
- Vorgehen auf beliebige Bauteile und Beanspruchungen übertragbar



Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch

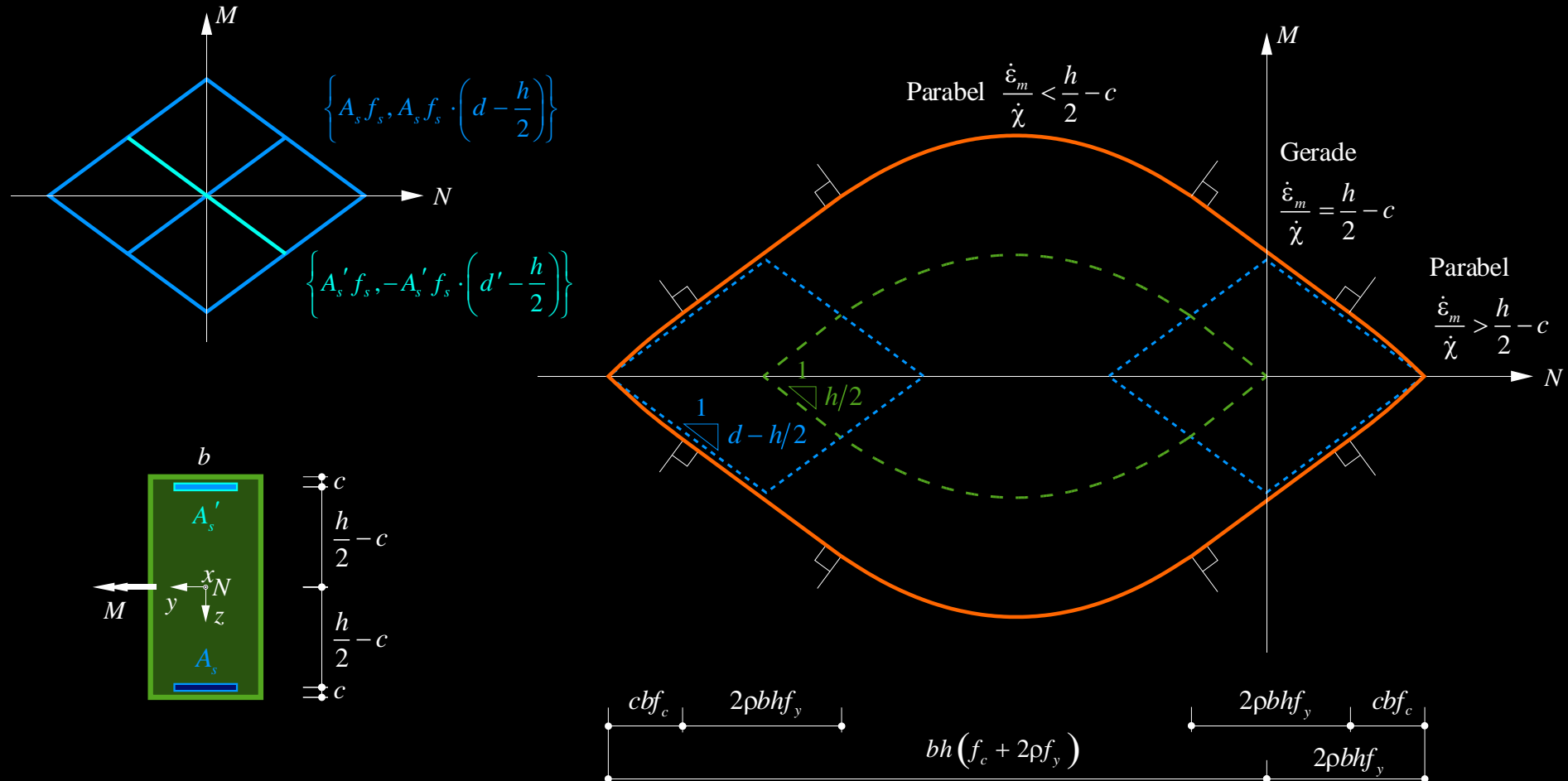
Einfluss unsymmetrische Bewehrung, $A_s \neq A'_s$



Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch

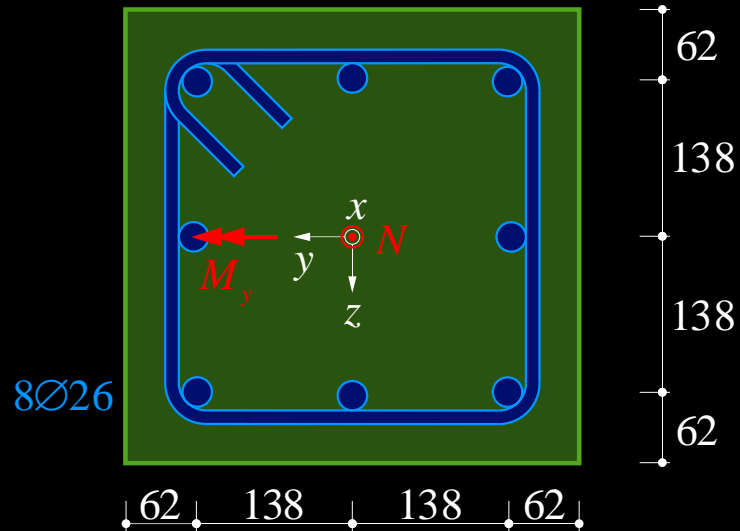
Einfluss Überdeckung



Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – Interaktionsdiagramm für starr-ideal plastisches Verhalten

[1], Seite 3.19, Beispiel 3.8



Bügelbewehrung Ø12

$c_{nom} = 35 \text{ mm}$

Längsbewehrung 8Ø26

- Beton C30/37:
 $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$
 $f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$
 $E_{cm} = 33.6 \text{ GPa}$
- Betonstahl B500B:
 $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$
 $E_s = 205 \text{ GPa}$

Vereinfachungen / Annahmen:

- Berechnung mit Bruttoquerschnitt des Betons (inklusive an der Stelle der Längsbewehrung nicht vorhandener Beton)
- Mittlerer Randabstand der drei äusseren Stäbe Ø26: $d' = 62 \text{ mm}$ (Bügel mit $d_3 = 4\emptyset$ abgebogen)

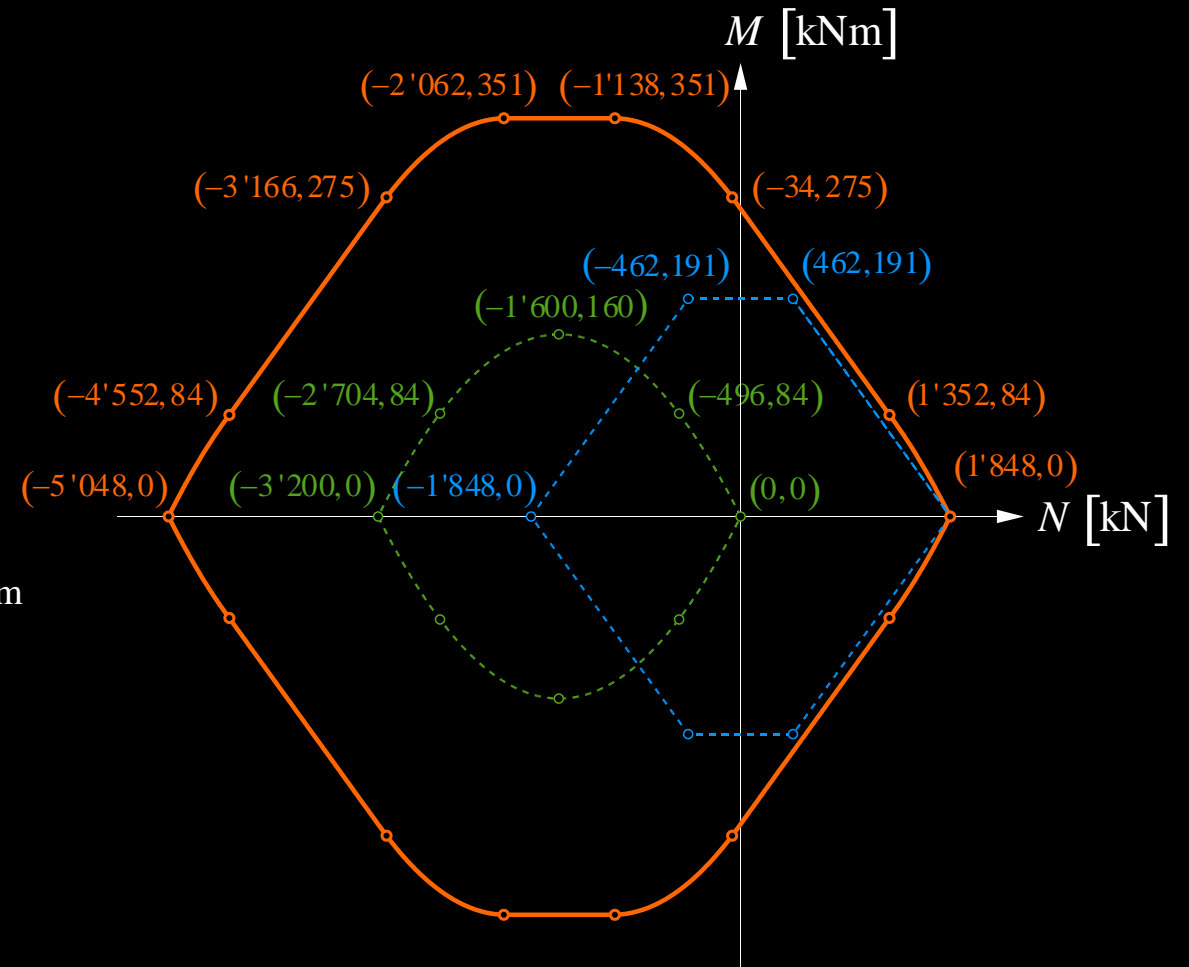
Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch ([1], Beispiel 3.8)

Beton reine Stauchung:
 $N_c = -(400\text{mm})^2 \cdot 20\text{MPa} = -3'200\text{ kN}$
 Druckzone $x = h/2$:
 $M_{yc} = 20\text{MPa} \cdot 400\text{mm} \cdot 200\text{mm} \cdot 100\text{mm} = 160\text{ kNm}$
 neutrale Achse = äuss. Bew:
 $N_c = -20\text{MPa} \cdot 400\text{mm} \cdot 62\text{mm} = -496\text{ kN}$
 $M_{yc} = 496\text{kN} \cdot (200\text{mm} - \frac{62\text{mm}}{2}) = 84\text{ kNm}$

Bewehrung reiner Zug resp. Druck:
 $N_s = 8 \cdot (13\text{mm})^2 \cdot \pi \cdot (-435\text{MPa} \dots 435\text{MPa}) = -1'848 \dots 1'848\text{ kN}$
 neutrale Achse bei $x = h/2$:
 $N_s = 2 \cdot (13\text{mm})^2 \cdot \pi \cdot (-435\text{MPa} \dots 435\text{MPa}) = -462 \dots 462\text{ kN}$
 $M_{ys} = 2 \cdot 3 \cdot (13\text{mm})^2 \cdot \pi \cdot \pm 435\text{MPa} \cdot (200\text{mm} - 62\text{mm}) = \pm 191\text{ kNm}$

Punkte
 $1'848\text{kN} - 496\text{kN} = 1'352\text{ kN}$
 $1'352\text{kN} - (1'848\text{kN} - 462\text{kN}) = -34\text{ kN}$
 $191\text{kNm} + 84\text{kNm} = 275\text{ kNm}$
 $-1600\text{kN} + 462\text{kN} = -1'138\text{ kN}$
 $160\text{kN} + 191\text{kN} = 351\text{ kN}$
 $-1'600\text{kN} - 462\text{kN} = -2'062\text{ kN}$
 $160\text{kN} + 191\text{kN} = 351\text{ kN}$
 etc.



Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

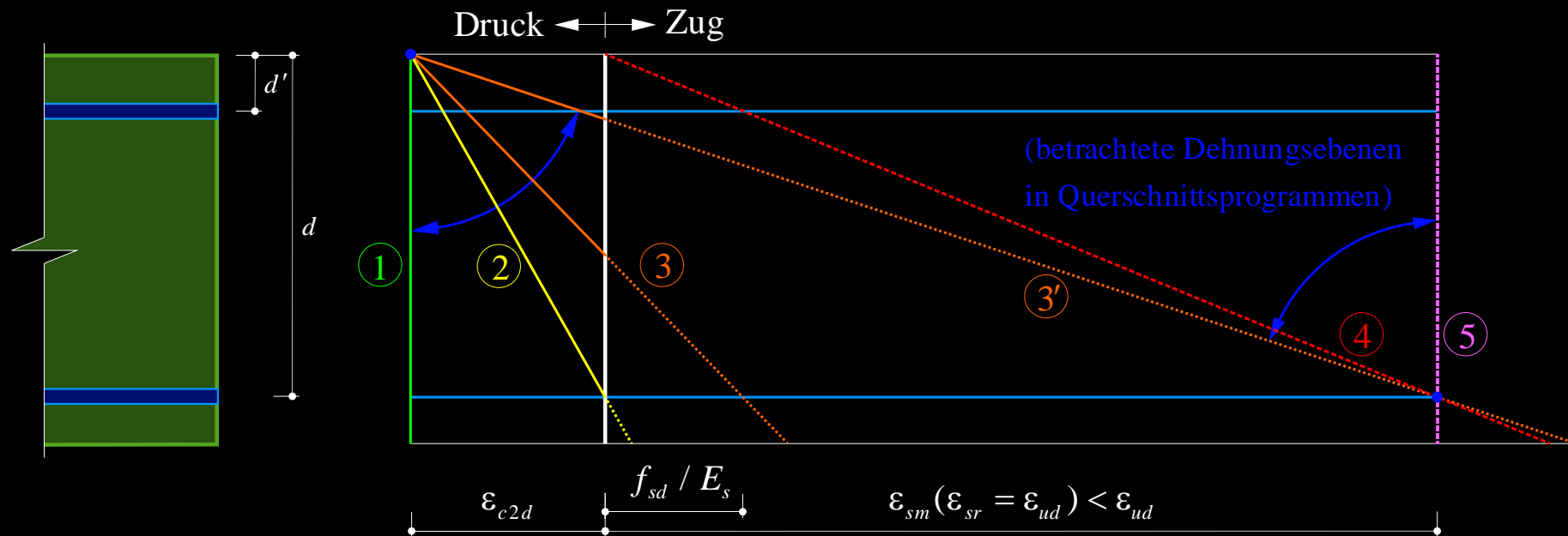
Interaktionsdiagramme mit Dehnungsbegrenzungen (nach SIA 262)

- Interaktionsdiagramme für starr-plastisches Verhalten von Beton und Bewehrung eignen sich gut für Handrechnungen und die Kontrolle von Computerberechnungen. Sie überschätzen den Bruchwiderstand, da weder Bewehrung noch Beton ideal plastisch sind.
- Nach SIA 262 sind Dehnungsbegrenzungen für Beton (Bruchstauchung) und Bewehrung (generell Bruchdehnung, bei Druckgliedern Fließdehnung) zu berücksichtigen.
- Interaktionsdiagramme mit Dehnungsbegrenzungen werden ermittelt, indem Dehnungsebenen ($\varepsilon_0, \chi_y, \chi_z$) angenommen und die zugehörigen Schnittgrößen $(N, M_y, M_z)_{Rd}$ durch Integration über die Querschnittsfläche ermittelt werden.
- Pro Dehnungsebene resultiert ein Punkt des Interaktionsdiagramms. In Handrechnungen werden wenige typische Dehnungsebenen angenommen, welche eine gute Näherung des Interaktionsdiagramms ermöglichen.
- Mit Computerprogrammen können die Interaktionsdiagramme durch Untersuchung einer Vielzahl von Dehnungsebenen genauer ermittelt werden.
- Aufgrund der Dehnungsbegrenzungen können lokal konkave Interaktionsdiagramme resultieren.

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

Fall i: Biegung dominant (geringer Einfluss 2. Ordnung)



$$|\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{c2d} = 3\text{‰}$$

$$\varepsilon_{sm} \leq 0.5 \cdot \varepsilon_{ud}$$

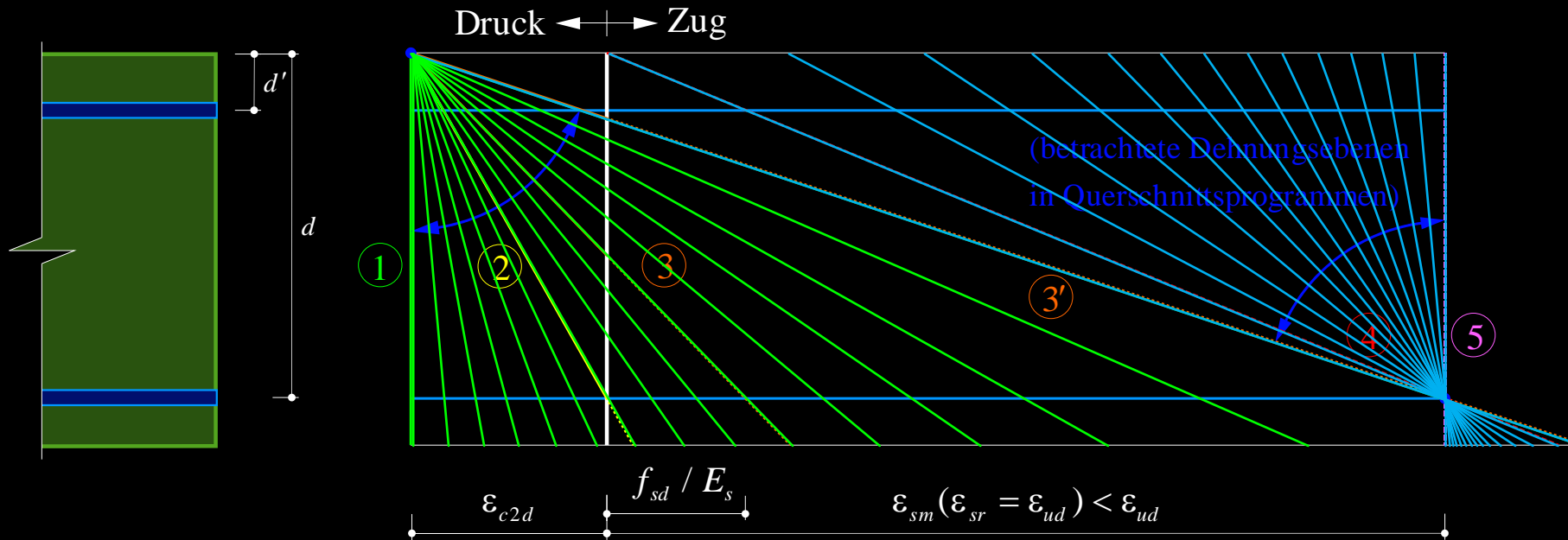
NB: Einfluss des Verbundverhaltens

- mittlere Dehnung ε_{sm} , bei welcher im Riss die Bruchdehnung $\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}$ erreicht wird, kann mit dem Zuggurtmodell ermittelt werden. Abschätzung $\approx 0.4 \dots 0.5 \varepsilon_{ud}$ in der Regel ausreichend (Einfluss auf Bruchwiderstand gering). Für B500B ($\varepsilon_{ud} = 45\text{‰}$) z. Bsp. $\varepsilon_{sm}(\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}) \approx 22.5\text{‰}$.
- bei $\varepsilon_{sm} = f_{sd} / E_s$ ist $\varepsilon_{sr} > f_{sd} / E_s$ (d.h. Betonstahl fließt eigentlich schon etwas vorher), Einfluss auf Tragwiderstand gering (sichere Seite für Effekte 2. Ordnung, da von einer grösseren rechnerischen Krümmung ausgegangen wird)

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

Fall i: Biegung dominant (geringer Einfluss 2. Ordnung)



$$|\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{c2d} = 3\text{‰}$$

$$\varepsilon_{sm} \leq 0.5 \cdot \varepsilon_{ud}$$

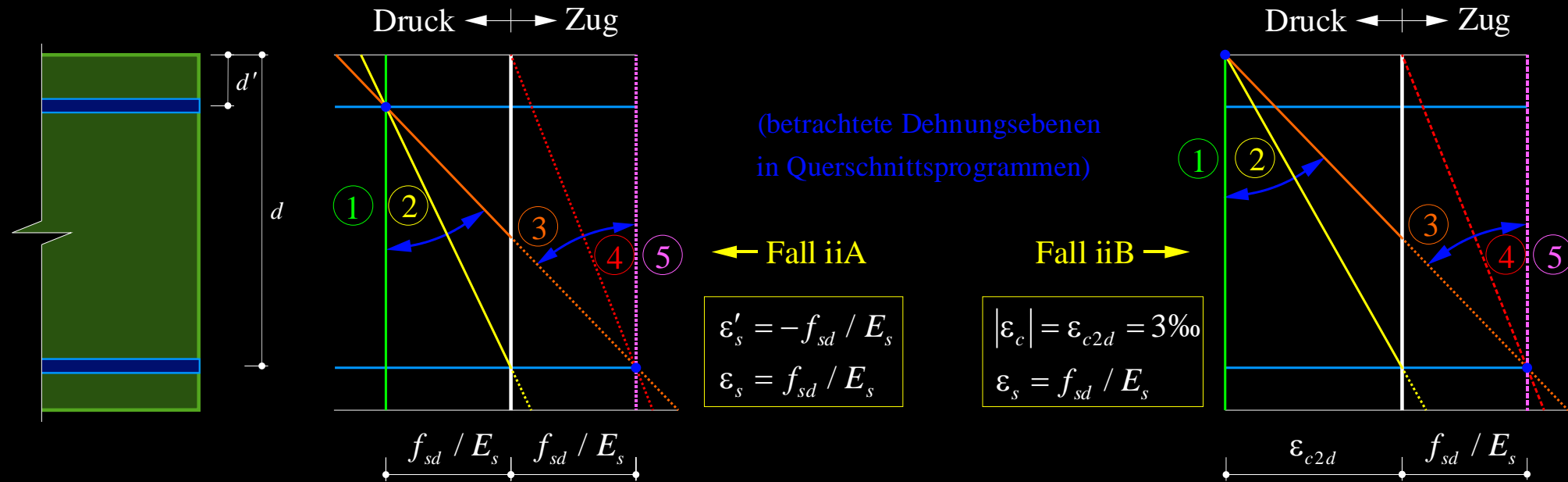
NB: Einfluss des Verbundverhaltens

- mittlere Dehnung ε_{sm} , bei welcher im Riss die Bruchdehnung $\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}$ erreicht wird, kann mit dem Zuggurtmodell ermittelt werden. Abschätzung $\approx 0.4 \dots 0.5 \varepsilon_{ud}$ in der Regel ausreichend (Einfluss auf Bruchwiderstand gering). Für B500B ($\varepsilon_{ud} = 45\text{‰}$) z. Bsp. $\varepsilon_{sm}(\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}) \approx 22.5\text{‰}$.
- bei $\varepsilon_{sm} = f_{sd} / E_s$ ist $\varepsilon_{sr} > f_{sd} / E_s$ (d.h. Betonstahl fließt eigentlich schon etwas vorher), Einfluss auf Tragwiderstand gering (sichere Seite für Effekte 2. Ordnung, da von einer grösseren rechnerischen Krümmung ausgegangen wird)

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

Fall ii: Normalkraft dominant (Druckglieder), übliche Annahmen:



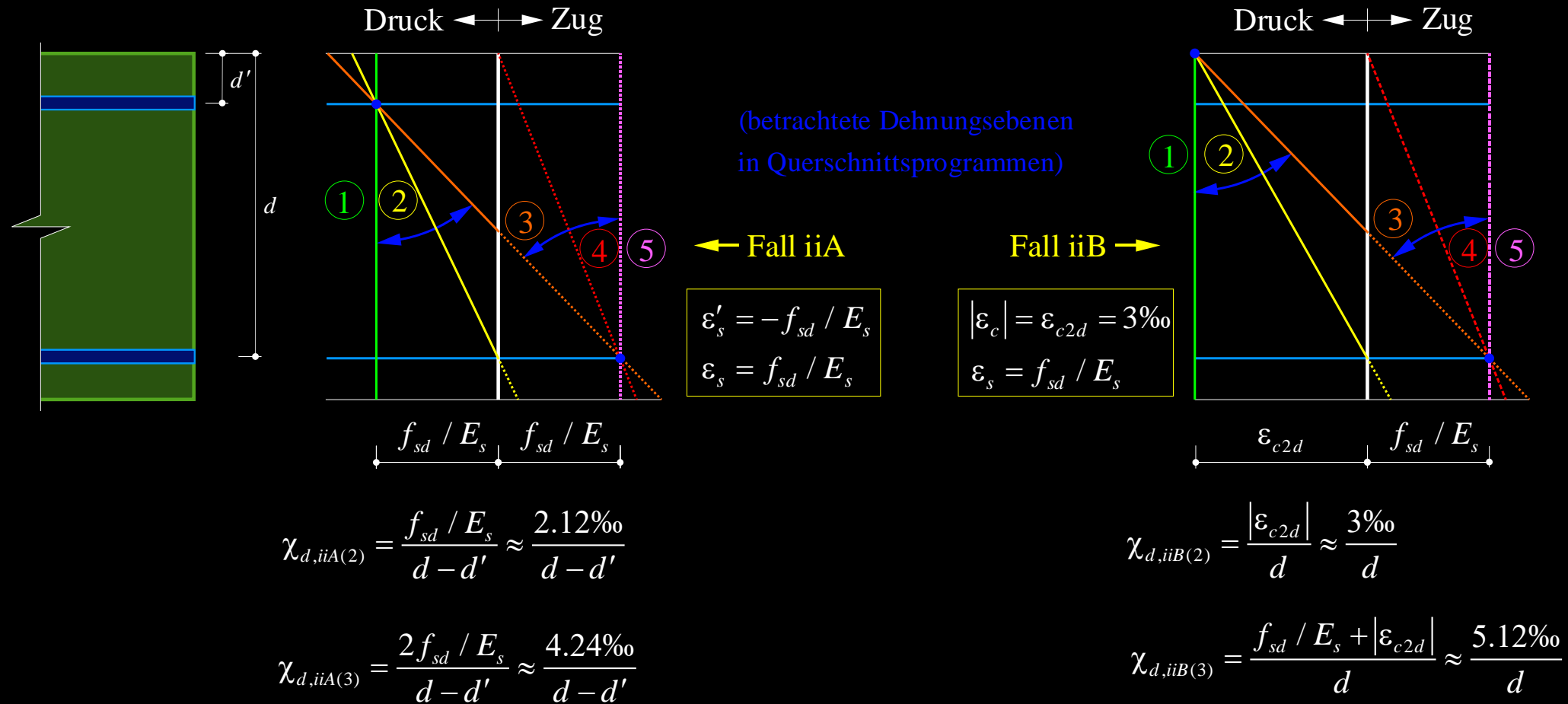
NB. Druckglieder: Querschnittswiderstand ↔ Biegesteifigkeit (siehe SIA 262 4.3.7.9)

- Mit den dargestellten Dehnungsbegrenzungen für Druckglieder (Fall iiA/B) resultiert bei einzelnen Dehnungsebenen ein etwas kleinerer Querschnittswiderstand als für den Fall mit dominanter Biegung (Fall i)
- Bei Druckgliedern (Einfluss 2. Ordnung) wird in der Regel der kleinere Querschnittswiderstand durch die grössere Biegesteifigkeit im nominellen Bruchzustand mehr als kompensiert (Systemtraglast für Fall iiA/B grösser als Fall i).
- Dehnungsebenen gemäss Fall iiA sind nur zulässig, sofern die Betonrandstauchung ϵ_{c2d} nicht übersteigt. Andernfalls ist Fall iiB anzuwenden (oft bei gedrungenen QS oder grossem d').

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

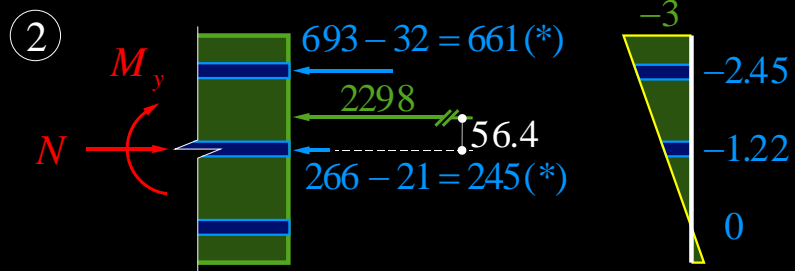
Fall ii: Normalkraft dominant (Druckglieder), übliche Annahmen:



Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

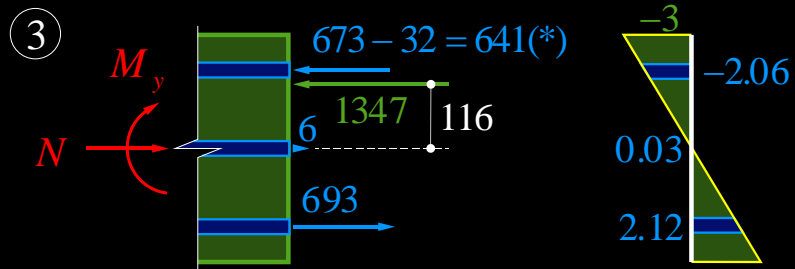
Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])

- Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug ① $N_{Rd} = -4'963$ kN, ⑤ $N_{Rd} = 1'848$ kN
- Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB):



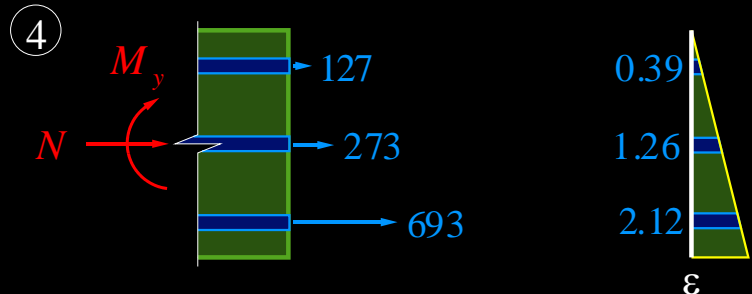
$$N_{Rd}^- = -2'298 - 661 - 245 = -3'204 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = 2'298 \cdot 0.0564 + 661 \cdot 0.138 = 221 \text{ kNm}$$



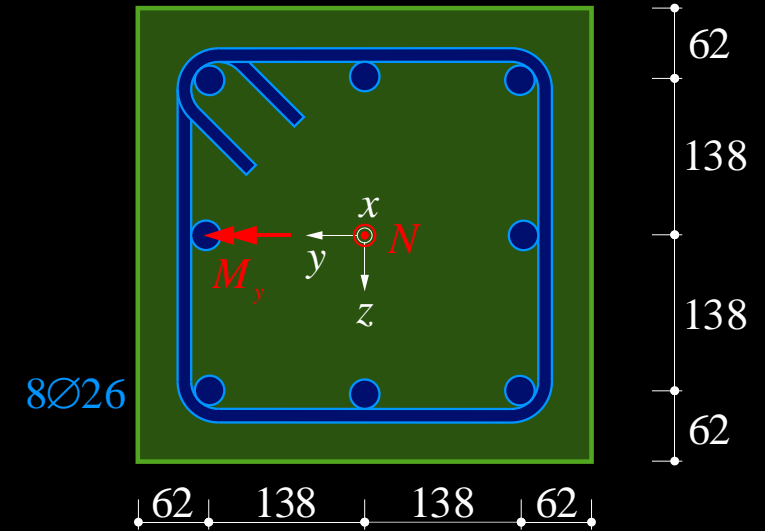
$$N_{Rd}^- = -1'347 - 641 + 693 + 6 = -1'289 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = 1'347 \cdot 0.116 + (641 + 693) \cdot 0.138 = 340 \text{ kNm}$$



$$N_{Rd}^- = 127 + 273 + 693 = 1'093 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = (693 - 127) \cdot 0.138 = 78 \text{ kNm}$$



Betonkräfte (brutto, daher Abzug $A_s \cdot f_{cd}$ bei Bewehrung s. unten):

$$\textcircled{2} \quad 0.85 \cdot (2 \cdot 138 + 62) \cdot 0.40 \cdot 20 = 2'298 \text{ kN}$$

$$\textcircled{3} \quad 0.85 \cdot (198.1) \cdot 0.40 \cdot 20 = 1'347 \text{ kN}$$

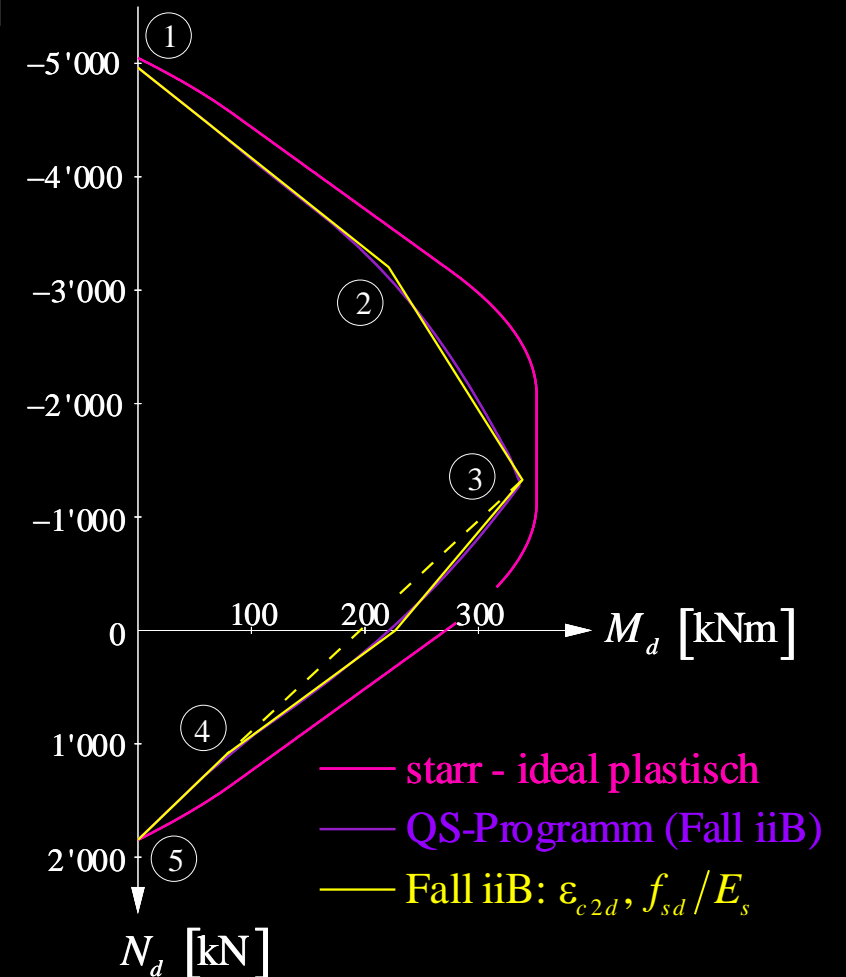
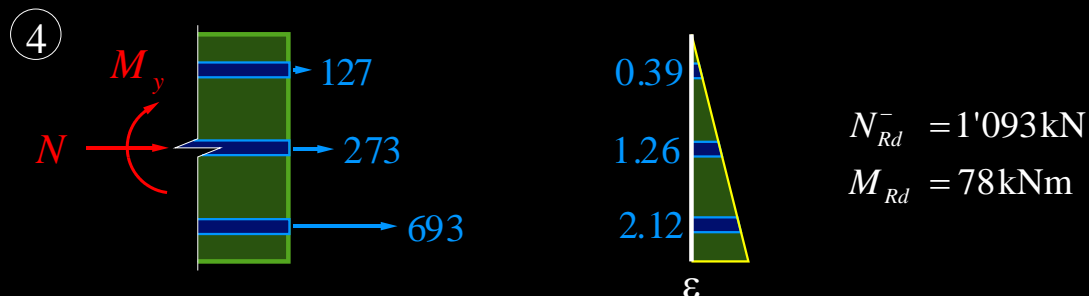
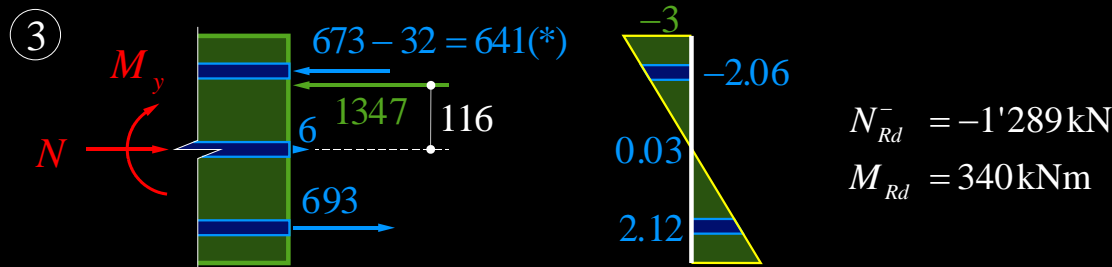
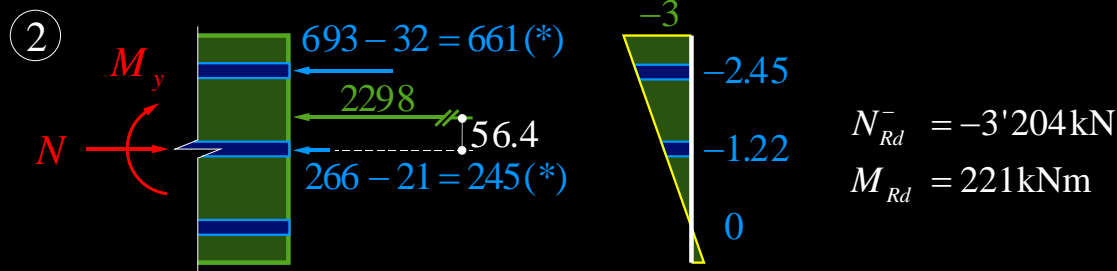
Bewehrungskräfte:

$A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s$, in der Druckzone $-A_s \cdot f_{cd}$ (da Betonkräfte ohne Abzug von A_s gerechnet wurden)

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])

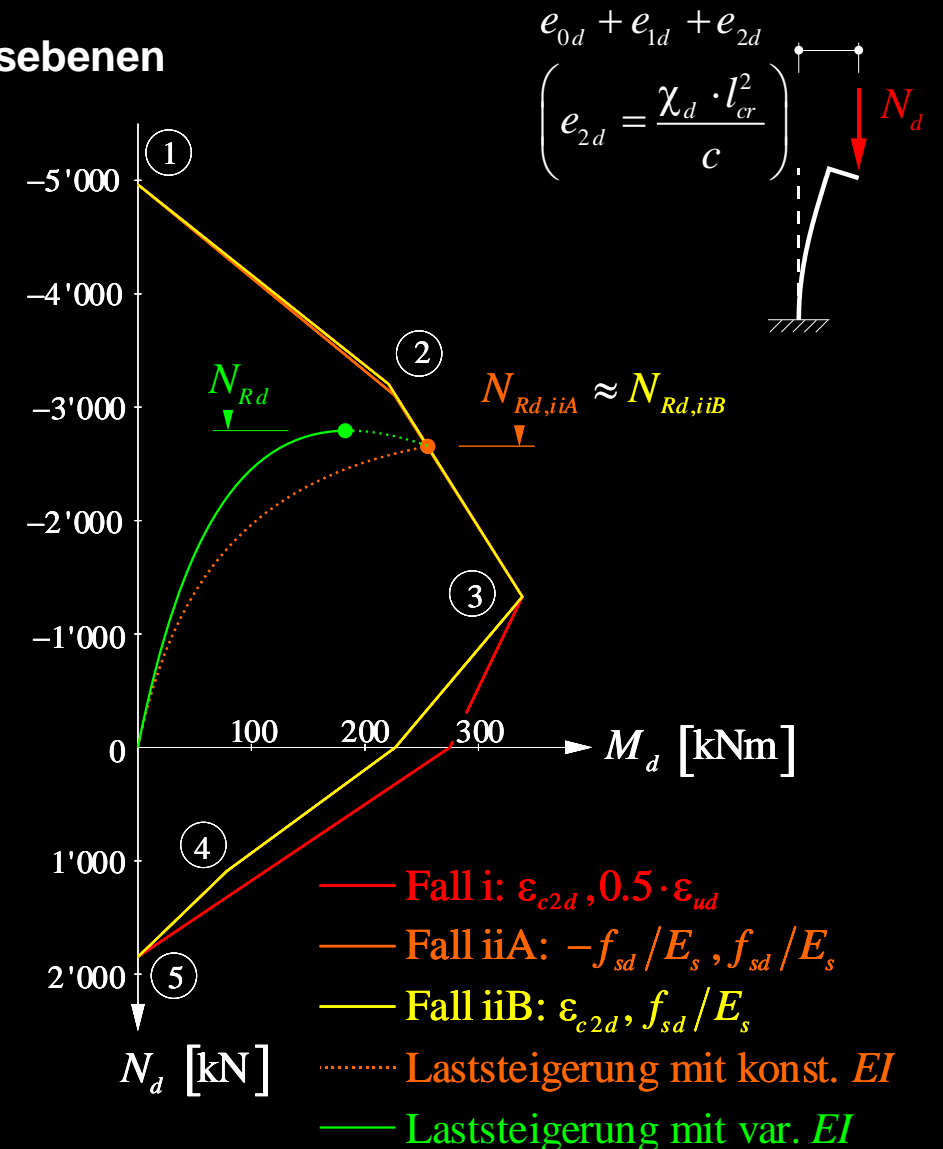
- Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug ① $N_{Rd} = -4'963 \text{ kN}$, ⑤ $N_{Rd} = 1'848 \text{ kN}$
- Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB):



Biegung und Normalkraft – Dehnungsebenen

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen – Wahl der Dehnungsebenen (schematisch, für Querschnitt gemäss [1] Beispiel 3.10)

- Nachweis für gegebenen Wert der Normalkraft N_{Ed} (SIA 262)
 $\rightarrow M_{Ed} = N_{Ed} (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d})$
- Vergrößerung des Biegemoments $N_{Ed} \cdot e_{2d}$ proportional zur Krümmung
- Die Biegesteifigkeit EI von schlanken Druckgliedern wird bei der Berechnung mittels Interaktionsdiagramms unterschätzt. Daraus resultieren grössere rechnerische Effekte zweiter Ordnung, was zu einem kleineren rechnerischen Normalkraftwiderstand führt (siehe Laststeigerungskurven mit konstantem resp. variablem EI ; führt zu unterschiedlicher Bruchkraft N_{Rd} resp. $N_{Rd,iiA}$)
- Da bei schlanken Druckgliedern der kleinere Biegezugwiderstand im Fall iiA/B durch die grössere rechnerische Biegesteifigkeit (\rightarrow kleinere Momente 2. Ordnung) oft mehr als kompensiert wird, erhält man eine bessere Näherung der wirklichen Bruchkraft mit Fall iiA/B als mit Fall i



Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – konstruktive Durchbildung (SIA 262 5.5.4)

- Mindestabmessungen: Stützen ($b/a \leq 4$) $\rightarrow a \geq 200$ mm (Ortbeton) bzw. 150 mm (Fertigteil)
Wände ($b/a > 4$) $\rightarrow a \geq 150$ mm (Ortbeton) bzw. 100 mm (Fertigteil)

- Längsbewehrungsgehalt: $0.6\% \leq \rho \leq 8\%$

Bei grossen Stützenquerschnitten darf $\rho_{x,min} = 0.6\%$ auf eine Mantelfläche von mindestens 200 mm Dicke bezogen werden.

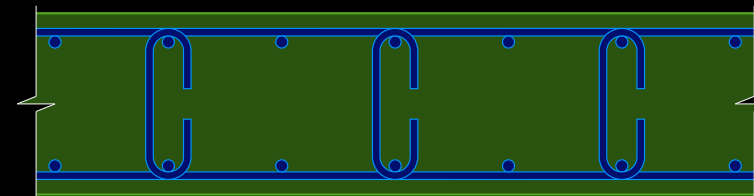
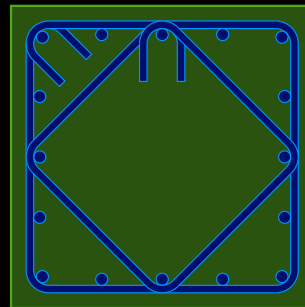
In Wänden bezieht sich $\rho_{x,min} = 0.6\%$ auf den für die Tragsicherheit erforderlichen Betonquerschnitts (Stababstand $s \leq 300$ mm und $s \leq 2a$).

Falls $\rho_x > \rho_{x,max} = 8\%$ verstärkte Verbügelung und spezielle konstruktive und ausführungstechnische Massnahmen erforderlich.

Längsbewehrungsstäbe sind mit Bügeln gegen lokales Ausknicken zu sichern.

- Verbügelung: $s_c \leq 15 \varnothing_{x,min}$ und $s_c \leq a_{min}$ und $s_c \leq 300$ mm

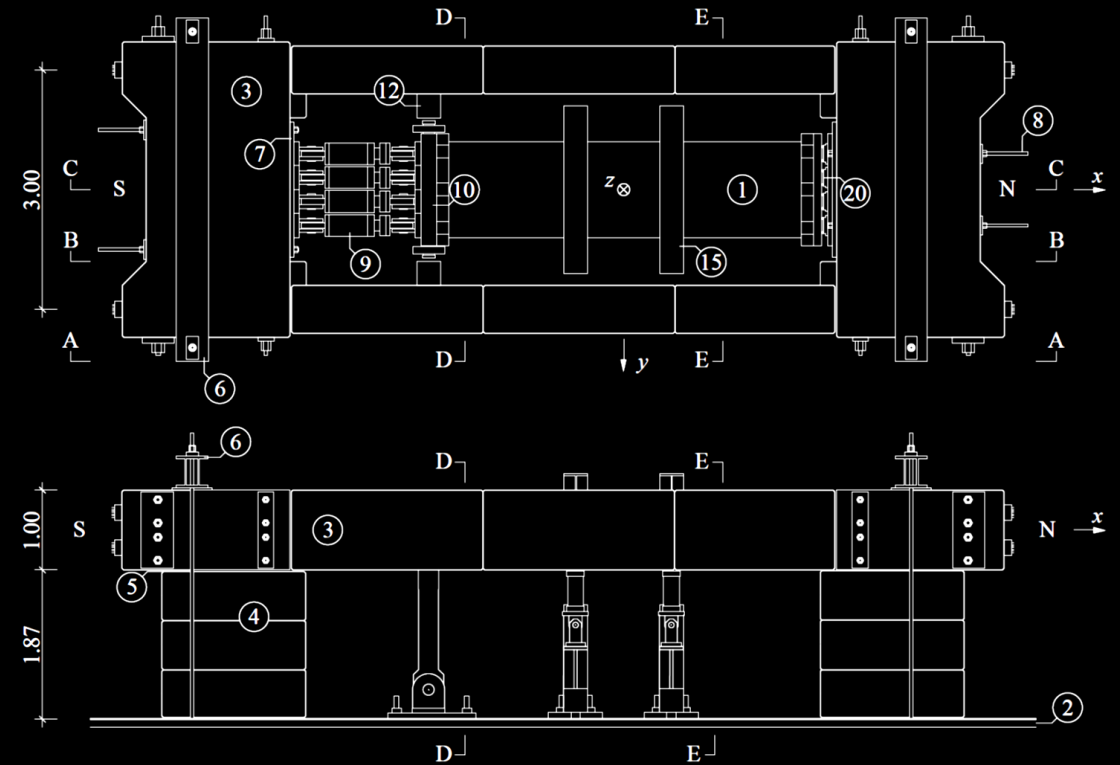
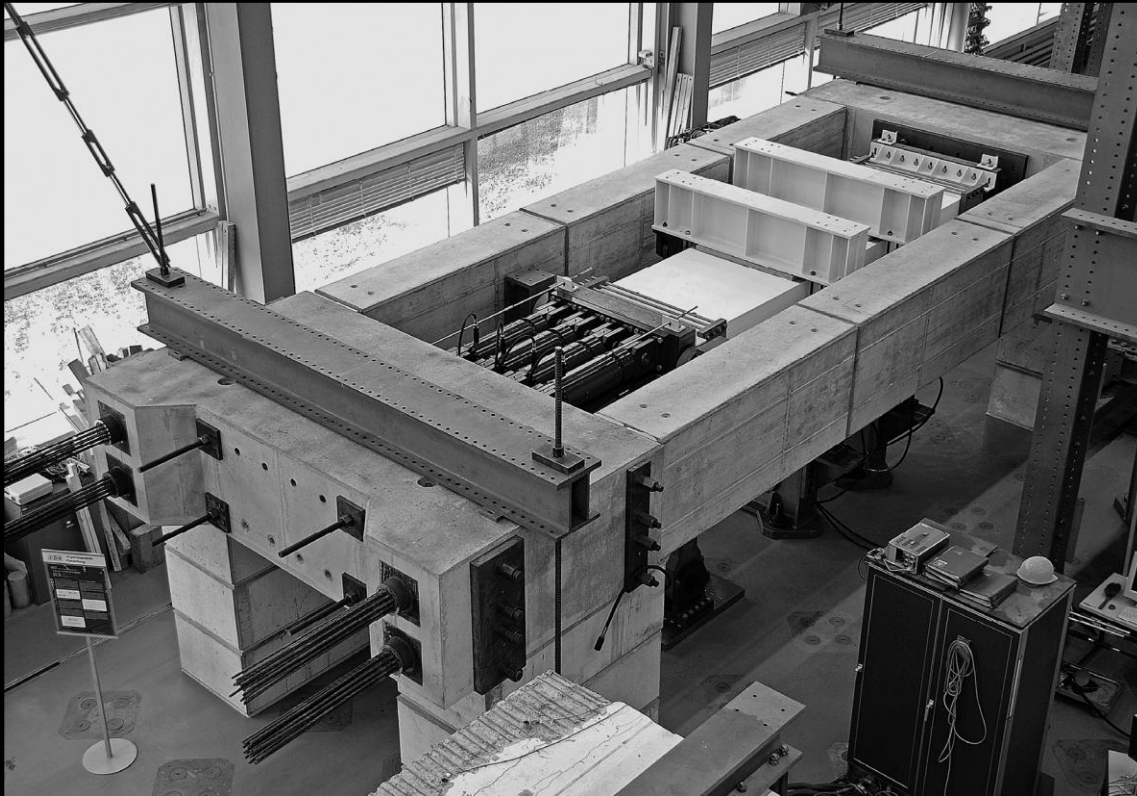
Falls die Druckbewehrung f_{sd} erreicht, ist ausser den Eckstäben auch jeder zweite Längsbewehrungsstab mit Haken oder Bügeln zu umschliessen.



Biegung und Normalkraft - Druckglieder

Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

[Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012]

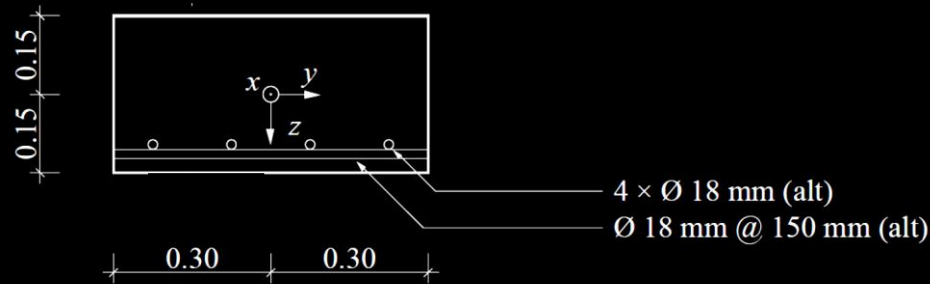


Biegung und Normalkraft - Druckglieder

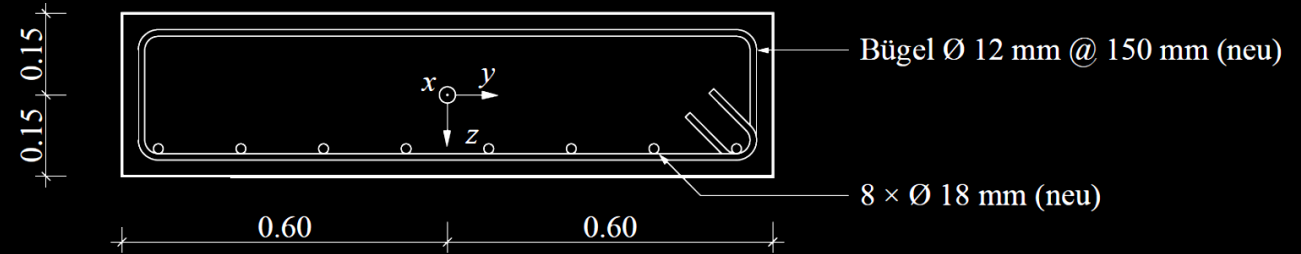
Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

[Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012.]

Versuchskörper A – Querschnittsgeometrie



Versuchskörper N – Querschnittsgeometrie



Baustoff			A	N
Beton	Zylinderdruckfestigkeit f_{cc}	[N/mm ²]	75.6	45.2
	Elastizitätsmodul E_c	[N/mm ²]	44.5	35.7
Längsbewehrung	Dynamische Fließgrenze $f_{sy,dyn}$	[N/mm ²]	534	510
	Dynamische Zugfestigkeit $f_{su,dyn}$	[N/mm ²]	739	601

Biegung und Normalkraft - Druckglieder

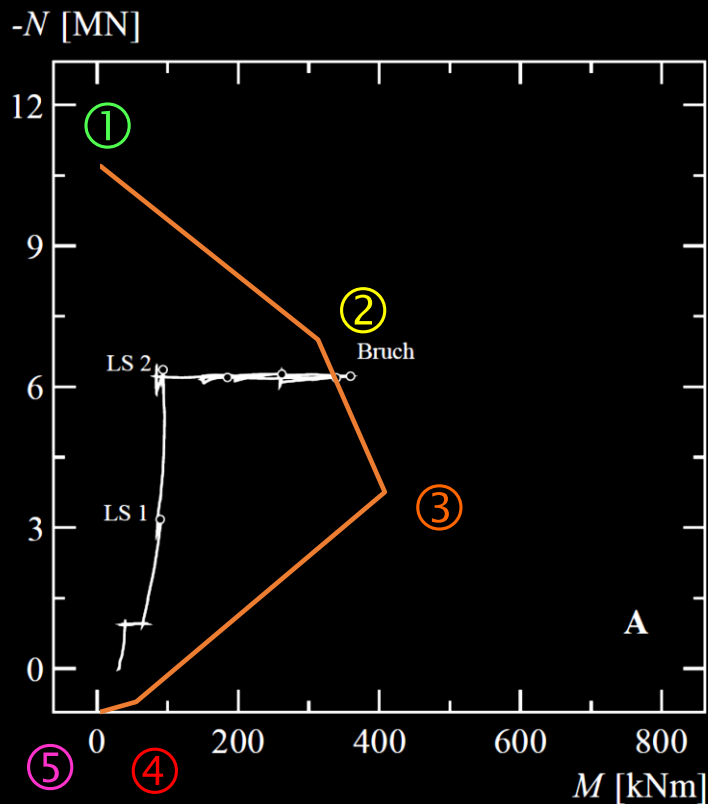
Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

(Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012.)

N – M_y – Interaktionsdiagramme:

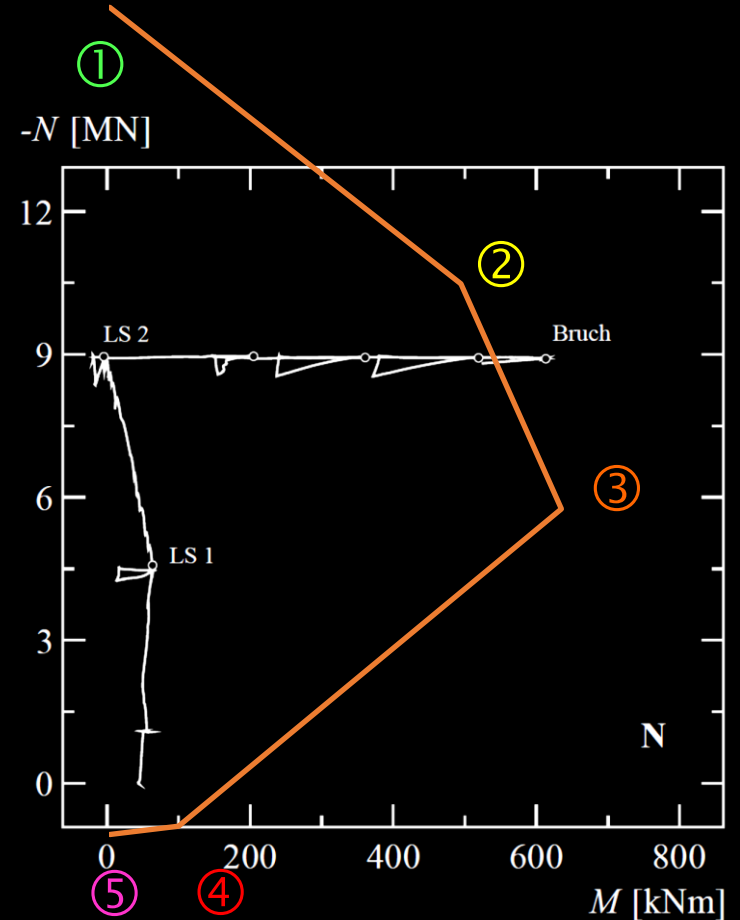
Versuch A

$$\eta_{fc} = 0.74$$



Versuch N

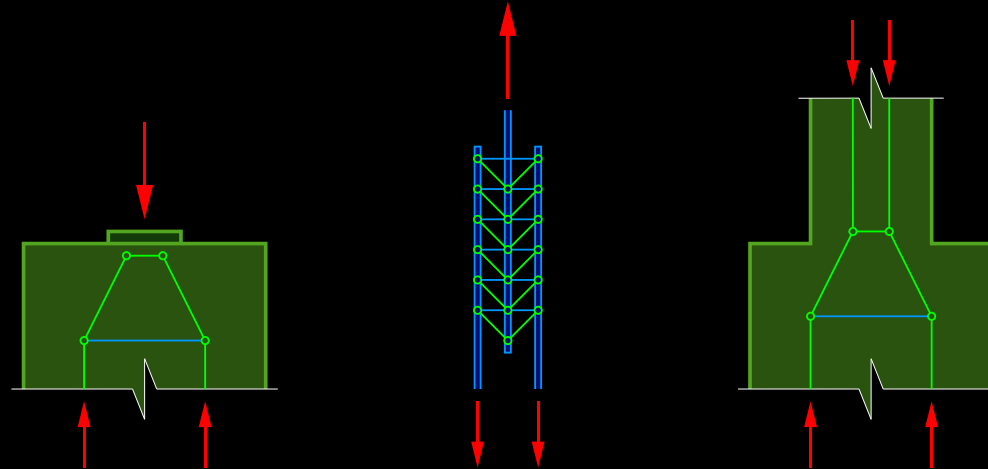
$$\eta_{fc} = 0.94$$



Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – konstruktive Durchbildung (SIA 262 5.5.4)

- Verbügelung: In Kräfteinleitungszonen, Stossverbindungen und Querschnittsänderungen müssen zusätzlich Bügel zur Aufnahme von Querkraften eingebaut werden.



- Verbügelung in plastischen Bereichen bei Erdbebenbemessung:

... $s_c \leq 6 \cdot \varnothing_x$ und $s_c \leq 150 \text{ mm}$

$$\dots \rho_t \geq \max \left\{ \frac{0.08 \cdot f_{cd}}{f_{sd}}; \frac{-N_d - 0.08 \cdot a \cdot b \cdot f_{cd}}{4 \cdot a_c \cdot b_c \cdot f_{sd}} \right\}$$

... Umschnürungsbügel mit 135°-Endhaken mit Länge $\geq 10 \varnothing_c$

... keine Übergreifungsstöße der Längsbewehrung (konventioneller Stoss an OK Fundament unzulässig!);
mechanische Stabverbindungen nur bei nachgewiesener ausreichender Duktilität

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Allgemein kann der Nachweis der Tragsicherheit für exzentrisch beanspruchte Druckglieder mit nichtlinearen Berechnungsverfahren geführt werden.

Dabei ist grundsätzlich ein inkrementelles, iteratives Vorgehen erforderlich. Das Druckglied wird in eine geeignete Anzahl Elemente diskretisiert, und die Berechnung erfolgt auf der Basis der Momenten-Krümmungsbeziehungen der Stabelemente; diese sind nichtlinear und von der Normalkraft abhängig.

Solche allgemeinen Berechnungen sind auch mit heutigen Computerprogrammen relativ aufwändig, und die Resultate bedürfen in Anbetracht der diversen Annahmen, welche getroffen werden müssen, einer kritischen Interpretation. Sie lohnen sich in der Regel nur bei schlanken, hoch beanspruchten Stützen oder bei der Beurteilung bestehender Bauwerke.

Nachfolgend wird das für Handrechnungen gut geeignete Näherungsverfahren gemäss der Norm SIA 262 beschrieben, welches auf der Annahme einer konstanten Steifigkeit beruht. Diese entspricht der Sekantensteifigkeit im höchstbeanspruchten (massgebenden) Querschnitt und wird aus dem Momenten-Krümmungs-Diagramm bestimmt.

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

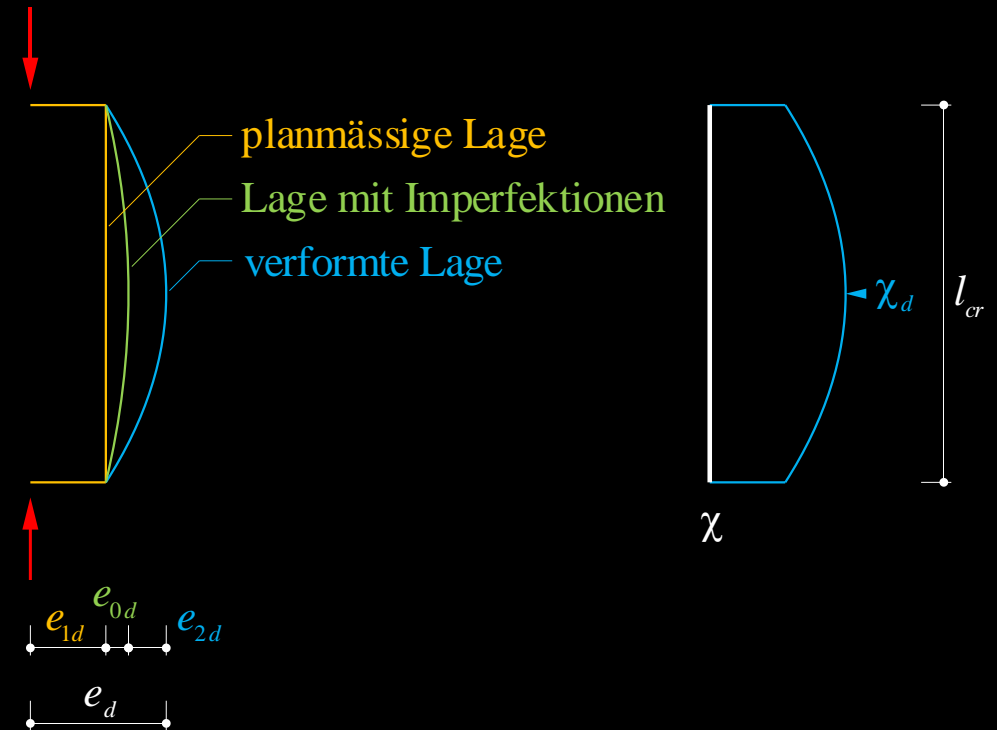
Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Der Nachweis der Tragsicherheit berücksichtigt folgende drei Einflüsse:

- Geometrische Imperfektionen e_{0d}
- Schnittgrößen erster Ordnung e_{1d}
- Verformungen des Druckglieds e_{2d}

Die maximale Exzentrizität e_d beträgt:

$$e_d = e_{0d} + e_{1d} + e_{2d} \left\{ \begin{array}{l} e_{0d} = \text{Max} \left\{ \alpha_i \frac{l_{cr}}{2}; \frac{d}{30} \right\} \\ \text{mit } \frac{1}{200} \geq \alpha_i = \frac{0.01}{\sqrt{l}} \geq \frac{1}{300} \quad (l \text{ in m}) \\ e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d} \\ e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c} \end{array} \right.$$



Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Geometrische Imperfektionen (für $l = l_{cr}$)

$$e_{0d} = \frac{l_{cr}}{400} \quad l_{cr} \leq 4 \text{ m}$$

$$e_{0d} = \frac{\sqrt{l_{cr}}}{200} \quad 4 \text{ m} < l_{cr} < 9 \text{ m} \quad \text{jedoch: } e_{0d} \geq \frac{d}{30}$$

$$e_{0d} = \frac{l_{cr}}{600} \quad l_{cr} \geq 9 \text{ m}$$

Planmässige Lage (M_{1d} : Moment erster Ordnung)

$$e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d}$$

Verformungen des Druckglieds

$$e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$$

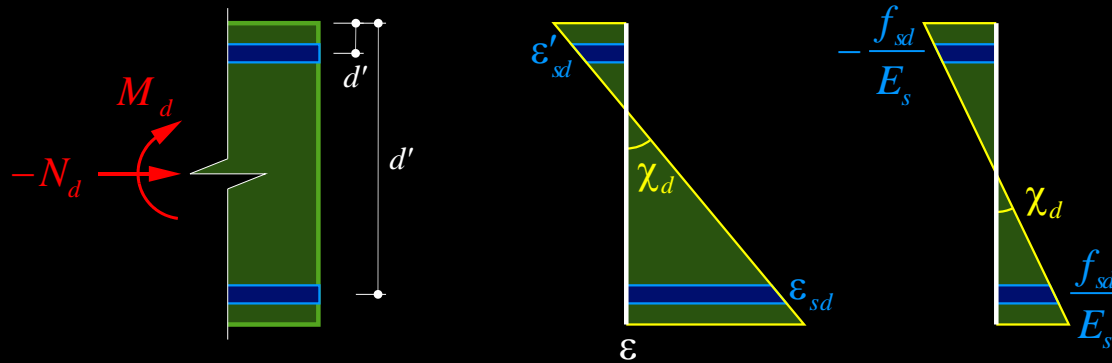
$$\begin{aligned} M_d &= -N_d (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d}) \\ &= M_{1d} - N_d (e_{0d} + e_{2d}) \end{aligned}$$

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung $e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$

Die Krümmung beträgt allgemein $\chi_d = \frac{\varepsilon_{sd} - \varepsilon'_{sd}}{d - d'}$



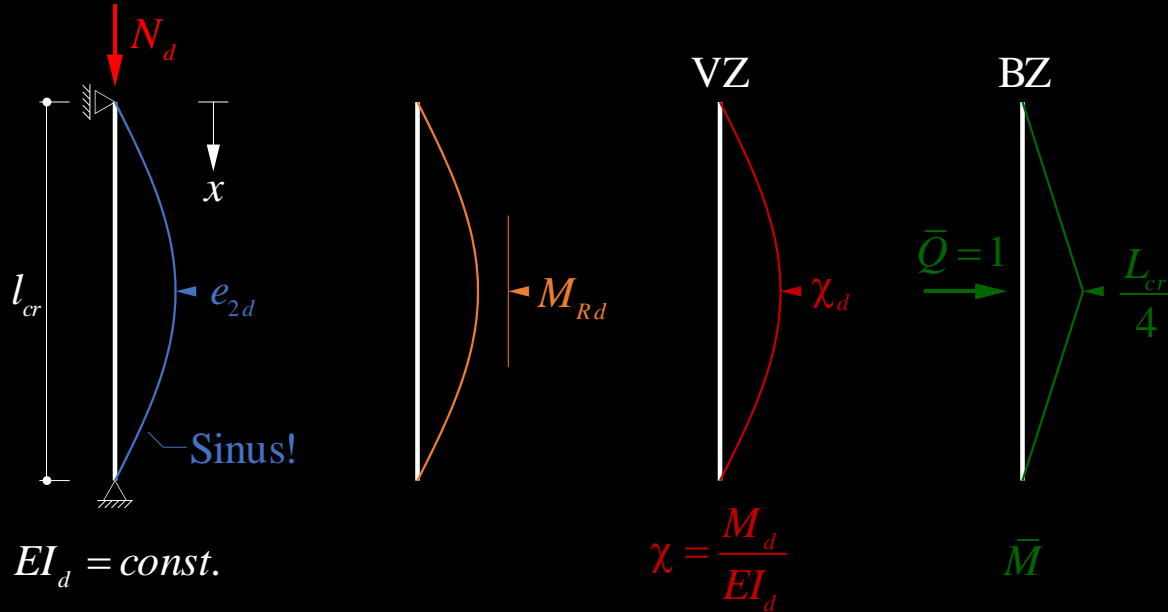
Auf der sicheren Seite liegend darf vereinfachend mit $\varepsilon_{sd} = -\varepsilon'_{sd} = f_{sd} / E_s$ gerechnet werden. Für genauere Berechnungen kann die Krümmung entsprechend der Bruchkrümmung im massgebenden Querschnitt abgemindert werden (Iteration).

Langzeiteffekte können näherungsweise mit einer Vergrößerung der Krümmung um $\chi_{irr,d} = \frac{|\varepsilon_{c\infty}|}{d}$ berücksichtigt werden.

Für die Bemessung werden oft normierte Interaktionsdiagramme verwendet, in denen die Langzeiteffekte mit $\varphi = 2$ bereits enthalten sind.

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Ermittlung der Verformungen 2. Ordnung e_{2d} (Grundfall)



$$EI_d = const.$$

$$M_d = -N_d \cdot e_{2d}(x) \leq M_{Rd}$$

$$\chi = \frac{M_d}{EI_d}$$

Annahme: $EI = const. = EI(M_{Rd}) = EI_d$

$$\rightarrow \chi_d = \frac{M_d(x)}{EI_d}$$

Arbeitsgleichung:

$$e_{2d} = \int_0^{l_{cr}} \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} \cdot dx = \int_0^{l_{cr}} \chi \cdot \bar{M} \cdot dx = \chi_d \cdot \frac{l_{cr}^2}{4} \cdot \frac{4}{\pi^2} = \underline{\underline{\chi_d \cdot \frac{l_{cr}^2}{\pi^2}}}$$

$$\int_0^{\frac{l_{cr}}{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{l_{cr}}\right) \cdot x \, dx = \frac{4}{\pi^2} = 0.405$$

(Näherung mit Parabel:
 $\frac{5}{12} = 0.417$)

NB: analytische Herleitung des Integrationsfaktors

$$x = 0 \dots \frac{l_{cr}}{2}; \quad \chi(x) = \chi_d \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_{cr}}\right); \quad \bar{M}(x) = \frac{x}{2}$$

$$2 \cdot \int_0^{\frac{l_{cr}}{2}} \chi \cdot \bar{M} \cdot dx = 2 \cdot \frac{\chi_d}{2} \cdot \int_0^{\frac{l_{cr}}{2}} x \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l_{cr}}\right) \cdot dx = 2 \cdot \frac{l_{cr}^2}{\pi^2} \cdot \frac{\chi_d}{2} = \chi_d \cdot \frac{l_{cr}^2}{\pi^2}$$

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + N \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$e_{2d}(x) = e_{2d} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l_{cr}}\right)$$

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung $e_{2d} = \int_0^{l_{cr}} \chi \bar{M} dx = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$

Der Integrationsfaktor c ergibt sich für eine allgemeine Belastung (aus mehreren Grundfällen i zusammengesetzt) zu

$$c = \alpha \cdot \pi^2 + (1 - \alpha) \frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} \quad \alpha = \frac{N_d}{N_{cr,d}} \quad N_{cr,d} = \frac{\pi^2 EI_d}{l_{cr}^2}$$

Vereinfachend darf dabei immer $c = \pi^2$ gesetzt werden (SIA 262, 4.3.7.12).

Die Werte c_i der einzelnen Grundfälle folgen in Abhängigkeit des statischen Systems und der Belastung durch Anwenden der Arbeitsgleichung:

$l_{cr} = l$				$l_{cr} = 2l$			
$c_i = \pi^2$	$c_i = 8$	$c_i = 12$	$c_i = 9.6$	$c_i = \pi^2$	$c_i = 8$	$c_i = 12$	$c_i = 16$

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung

Herleitung mit Vergrößerungsfaktor $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{N_d}{N_{cr,d}}}$ (→ Vianello)

$$e_{2d} = \frac{\sum e_{1di}}{1 - \alpha} = \frac{\sum \frac{M_{di} l_{cr}^2}{EI_d c_i}}{1 - \alpha} = \frac{\chi_d l_{cr}^2}{c}$$

$$\chi_d = \frac{-N_d e_{2d} + \sum M_{di}}{EI_d}$$

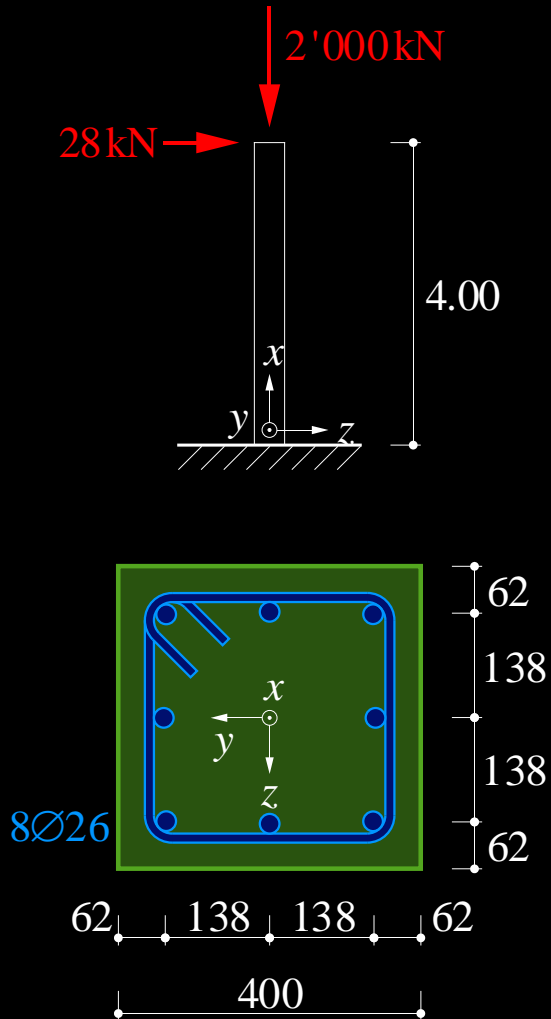
$$N_{cr,d} = -\frac{\pi^2 EI_d}{l_{cr}^2}$$

$\sum M_{di} = M_{d0} + M_{d1} = -N_d \cdot e_{0d} + M_{d1}$
(→ inkl. geometrische Imperfektionen)

$$\rightarrow c = \frac{\chi_d l_{cr}^2}{e_{2d}} = \frac{(1 - \alpha)(-N_d e_{2d} + \sum M_{di})}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} = -\frac{N_d \pi^2 l_{cr}^2}{\pi^2 EI_d} + (1 - \alpha) \frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} = \alpha \cdot \pi^2 + (1 - \alpha) \frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}}$$

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Beispiel ([1], S. 3.29), Kragstütze



- Stahlbetonstütze, $a = b = 400$ mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 8 Längsstäbe $\varnothing = 26$ mm, $A_{s,x} = 8 \cdot 531 = 4248$ mm²
- Bügelbewehrung $\varnothing_c = 12$ mm, $c_{nom} = 35$ mm
- Eigengewicht der Stütze wird vernachlässigt

Näherung SIA 262: $\chi_d = \frac{2f_{sd}}{E_s} = 15.4$ mrad/m

$$e_{0d} = \frac{0.01 l_{cr}}{\sqrt{l}} \frac{1}{2} = 20 \text{ mm } (> d/30)$$

$$e_{1d} = -M_{1d} / N_d = 4 \cdot 28 / 2'000 = 56 \text{ mm}$$

$$e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{\pi^2} = 99.7 \text{ mm}; \quad c = \pi^2$$

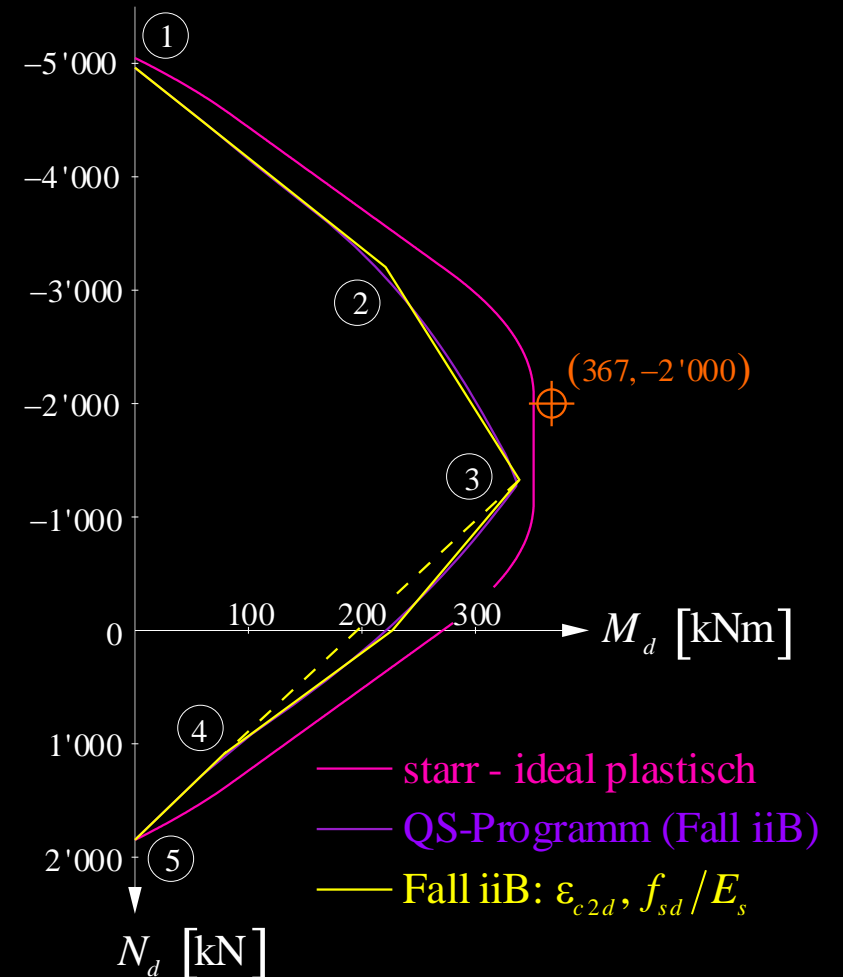
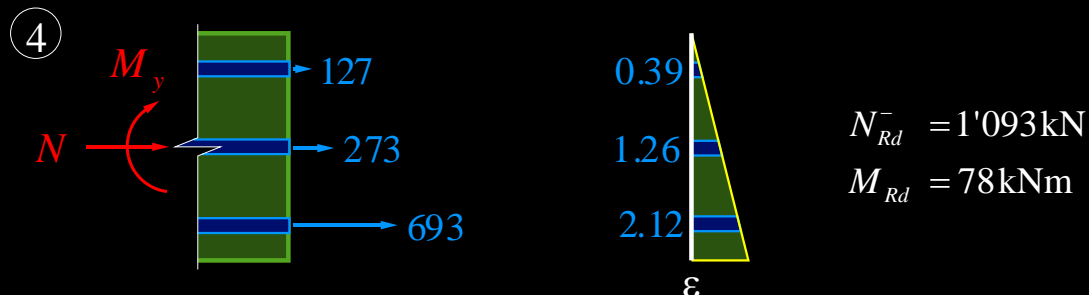
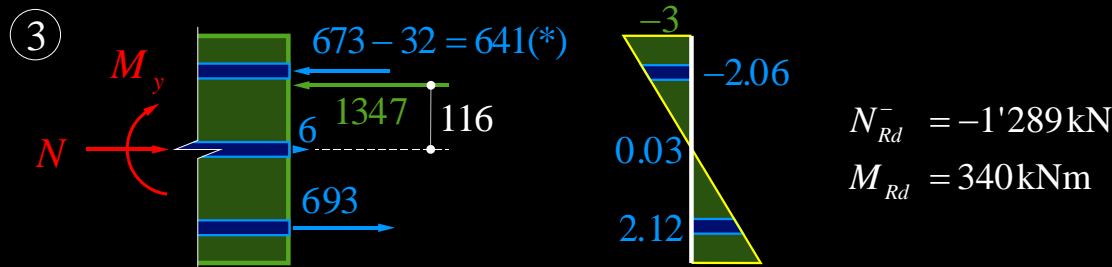
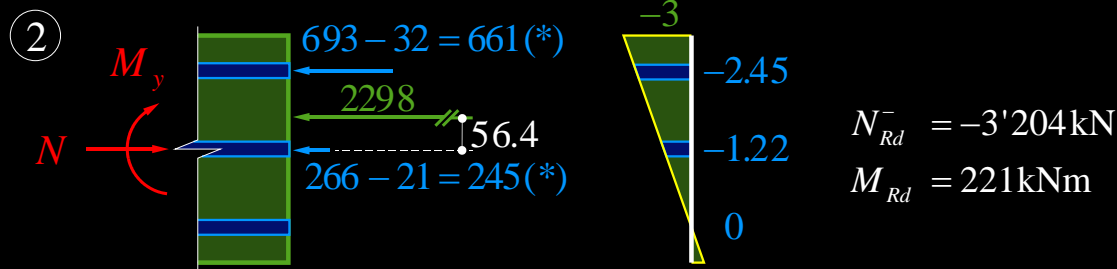
$$M_d = -N_d (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d}) = 367 \text{ kNm}$$

Interaktionsdiagramm mit $(M_d, N_d) = (367 \text{ kNm}, -2'000 \text{ kNm})$
 → nicht ok, Iteration (oder Erhöhung der Bewehrung)!

Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

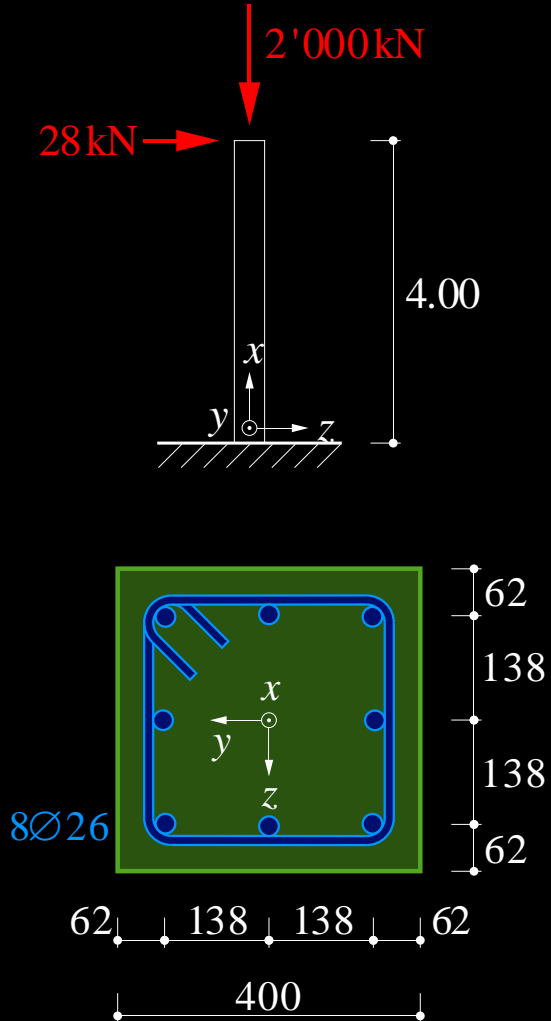
Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])

- Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug ① $N_{Rd} = -4963 \text{ kN}$, ⑤ $N_{Rd} = 1878 \text{ kN}$
- Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB):

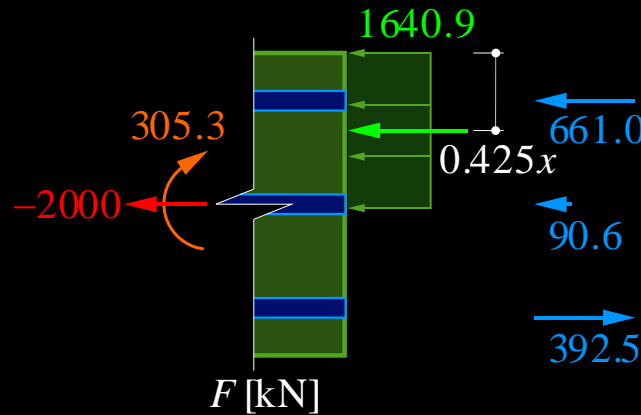


Biegung und Normalkraft – Druckglieder

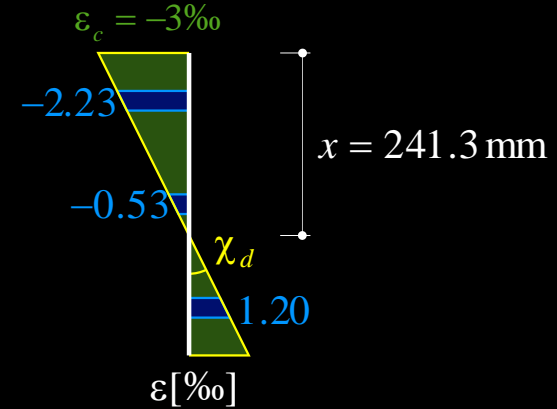
Beispiel ([1], 3.29), Kragstütze



- Gleiches Beispiel wie auf Folie 38/39, aber **genauere Untersuchung** mit Biege- und Normalkraft unter der gegebenen Normalkraft und zugehöriger Dehnungsebene (Dehnungsebene iterativ bestimmt)
- Biege- und Normalkraft grösser als bei Bestimmung aus Sekante zwischen anderen Dehnungsebenen
- Krümmung kleiner als mit Näherung nach SIA 262
- Tragsicherheitsnachweis gerade knapp i.O. (bei Betrachtung als einfache Biegung, $M_z = 0$)



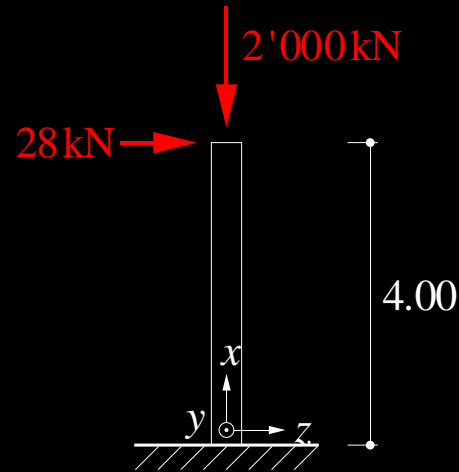
$$M_{Rd} = 305.3 \text{ kNm}$$



$$\chi_d = \frac{3}{241.3} = 12.43 \text{ mrad/m}$$

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Beispiel ([1], 3.29), Kragstütze



Geometrische Imperfektionen

$$l_{cr} = 8 \text{ m} \quad e_{0d} = \frac{\alpha_i l_{cr}}{2} = \frac{0.01 l_{cr}}{\sqrt{l}} \frac{l_{cr}}{2} = \frac{8}{200\sqrt{4}} = 20 \text{ mm} \quad \left(> 11.3 \text{ mm} = \frac{d}{30} \right)$$

Planmässige Lage

$$M_{1d} = 28 \cdot 4 \text{ m} = 112 \text{ kNm} \quad e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d} = \frac{112}{2000} = 56 \text{ mm}$$

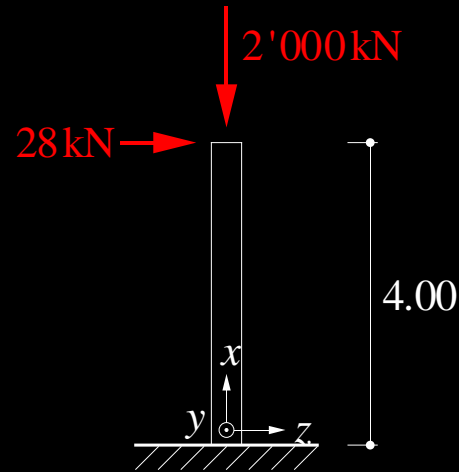
Verformung zweiter Ordnung

$$EI_d = \frac{M_{Rd}}{\chi_d} = \frac{305.3}{0.01243} = 24.56 \text{ MNm}^2$$

$$N_{cr,d} = \frac{\pi^2 EI_d}{l_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 24.56}{8^2} = 3.788 \text{ MN} \quad \rightarrow \alpha = \frac{N_d}{N_{cr,d}} = \frac{2'000}{3'788} = 0.528$$

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Beispiel ([1], 3.29), Kragstütze



$$\Sigma M_{di} = M_{d0} + M_{d1} = -N_d \cdot e_{0d} + M_{d1}$$

$$c = \alpha \cdot \pi^2 + (1 - \alpha) \frac{\Sigma M_{di}}{\Sigma \frac{M_{di}}{c_i}} = 0.528 \cdot \pi^2 + (1 - 0.528) \cdot \frac{40 + 112}{\frac{40}{\pi^2} + \frac{112}{12}} = 10.571 \quad (\text{Vergleich: } \pi^2 = 9.870)$$

$$e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c} = 12.43 \cdot \frac{8^2}{10.571} = 75.3 \text{ mm}$$

$$M_d = -N_d \cdot (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d}) = 2000 \cdot (0.0200 + 0.0560 + 0.0753) = 302.6 \text{ kNm} < M_{Rd} \approx 305.3 \text{ kNm}$$

Momente erster Ordnung (inkl. geometrische Imperfektionen)

$M_{d0} = 2MN \cdot 20mm = 40kNm$	$M_{d1} = 28kN \cdot 4m = 112kNm$
$c_i = \pi^2$	$c_i = 12$

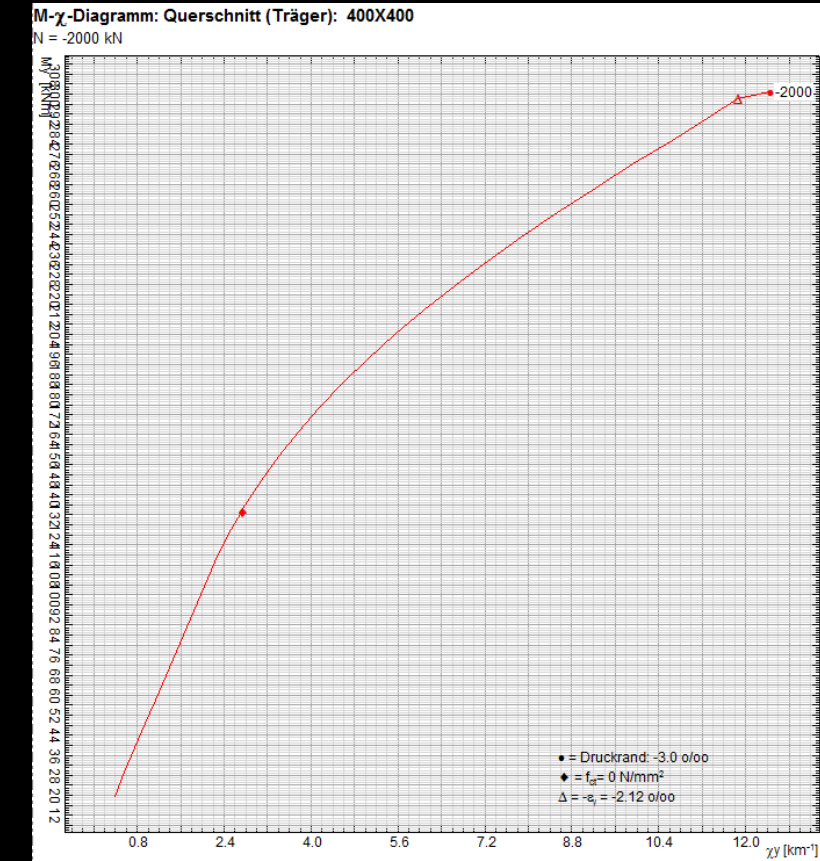
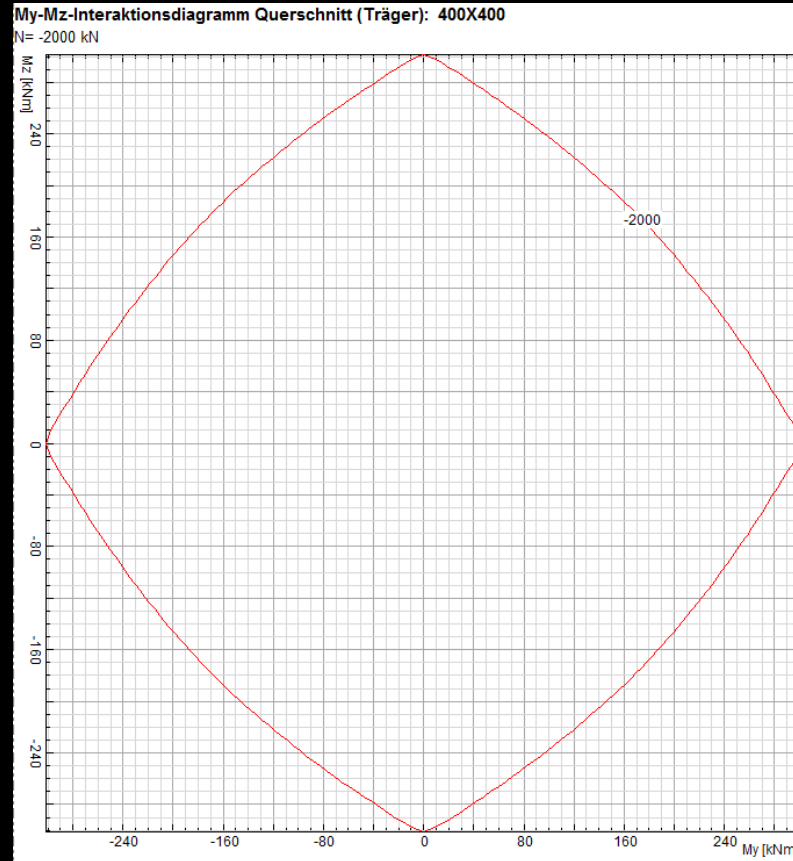
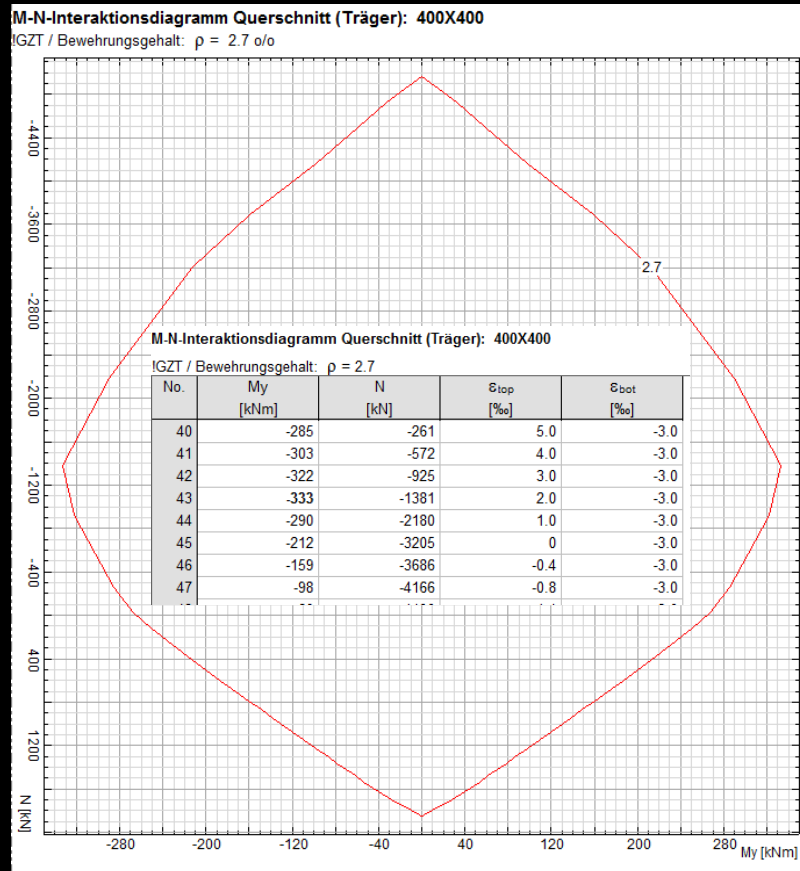
Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Tragsicherheitsnachweis mit Computerprogrammen

Interaktionsdiagramm ($M_{Rdy} - N_{Rd}$)
für $M_z = 0$ (Tabelle: Randdehnungen $\rightarrow \chi_d$)

Interaktionsdiagramm ($M_{Rdy} - M_{Rdz}$)
für $N = N_d = -2'000$ kN

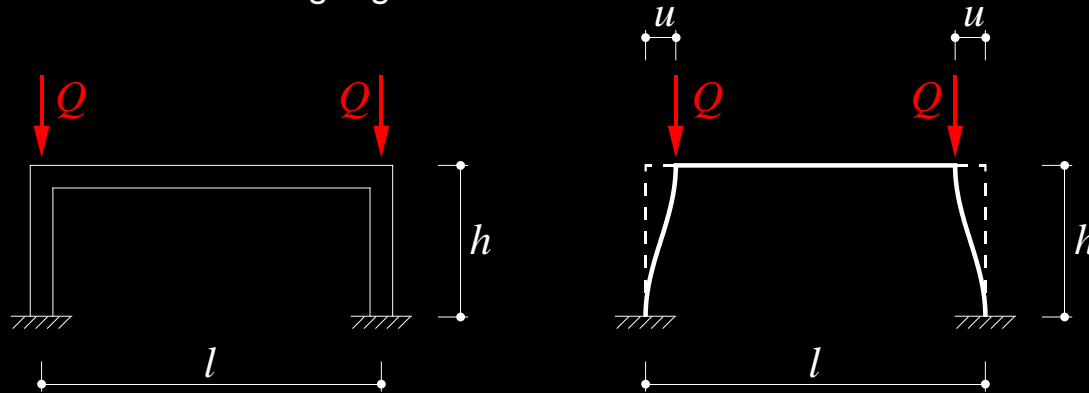
$M_{Rdy} - \chi_y$ -Diagramm für $M_z = 0$ und
 $N = N_d = -2'000$ kN ($\rightarrow \chi_d$)



Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – schlanke Stützen unter Last und Zwang

Infolge Vorspannung, Temperatureinwirkung, Schwinden des Betons, Fundamentverdrehungen, etc. erfahren Stützen ausser Lasten im allgemeinen auch Zwängungen.



Stützenkopfverschiebungen z.B. durch:

- Vorspannung P des Riegels
- Verkürzung $\alpha_T \Delta_T \cdot l$ des Riegels (Temperatur)
- Verkürzung $\varepsilon_{cs} \cdot l$ des Riegels (Schwinden)

Um auf der sicheren Seite zu bleiben, muss für den Tragsicherheitsnachweis mit einem unteren Grenzwert der Steifigkeit gerechnet werden, sonst werden die Effekte 2. Ordnung unterschätzt.

Umgekehrt sind die Effekte von Zwängungen (im Gebrauchszustand) umso grösser, je höher die Steifigkeit ist, d.h. um solche Einflüsse nicht zu unterschätzen, muss von einem oberen Grenzwert der Steifigkeit ausgegangen werden.

Somit sind in solchen Fällen grundsätzlich zwei Nachweise zu führen:

- Tragsicherheitsnachweis für Q_d und zugehörige Zwängung mit EI_{min}
- Spannungsnachweis für u_d und zugehörige Last Q mit EI_{max}

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – Gesamtstabilität von Stützensystemen

Rahmensysteme sind oft längs nicht fixiert, sondern schwimmend gelagert. Die Lage des Bewegungszentrums hängt dann von den Stützensteifigkeiten ab, und neben der Stabilität der einzelnen Stützen ist auch die Gesamtstabilität nachzuweisen.

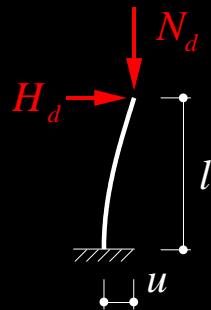
(NB: Bei weichem Baugrund ist die Nachgiebigkeit der Fundationen zu berücksichtigen, d.h. Drehfedern statt starre Einspannung am Stützenfuss oder entsprechende Annahme von l resp. l_{cr})



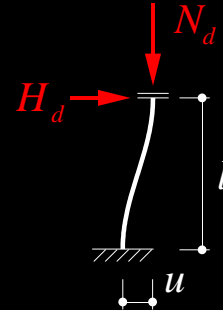
längs fixiert → Gesamtstabilität i.O.
(bei ausreichendem Widerstand des festen Lagers)



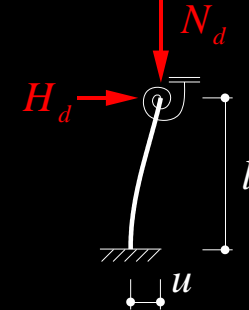
schwimmend gelagert → Gesamtstabilität?



$$u = \frac{H_d l^3}{3EI(1-\alpha)}$$



$$u = \frac{H_d l^3}{12EI(1-\alpha)}$$



$$H_d = -\frac{12u}{\pi^2 l} (N_{cr,d} - N_d)$$

Allgemeiner Fall:

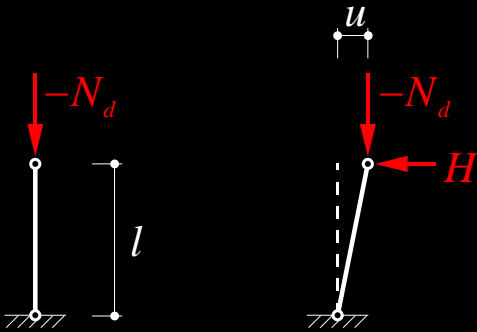
- $k \rightarrow 0$: oben gelenkig
- $k \rightarrow \infty$: oben eingespannt

$$\text{mit } \alpha = \frac{N_d}{N_{cr,d}}; N_{cr,d} = -\frac{\pi^2 EI_d}{l^2 \cdot \left(4 - \frac{3}{1 + \frac{EI_d}{k \cdot l}} \right)}$$

Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Druckglieder – Gesamtstabilität von Stützensystemen

Pendelstützen haben eine treibende Wirkung, d.h. sie verursachen eine destabilisierende Kraft H :



$$H = -\frac{u \cdot N_d}{l}$$

$$H_d + u \cdot \frac{12}{\pi^2} \sum_i \frac{N_{cr,di} - N_{di}}{l_i} - u \cdot \sum_j \frac{N_{dj}}{l_j} = 0$$

Besonders gefährlich sind kurze Pendelstäbe. Sie ergeben eine grosse treibende Wirkung. Darauf ist vor allem im Bauzustand zu achten (Lehrgerüste → SIA 262, 6.1.4: kurze Pendelstäbe vermeiden, sonst treibende Kräfte berechnen und zusätzlich zu den üblichen 3% der Vertikallasten als Horizontallast ansetzen!)

Für den Nachweis der Gesamtstabilität des Stützensystems wird zuerst die Kopfverschiebung aus der horizontalen Gleichgewichtsbedingung ermittelt (Berücksichtigung rückhaltende Stützen nach allgemeinem Fall, siehe vorherige Folie).

Aus der Kopfverschiebung folgt der Horizontalschub der einzelnen Stützen. Damit ist die Beanspruchung der Stützen bekannt (Normalkraft, Horizontalschub, Biegemomente aus Horizontalschub sowie 2. Ordnung infolge Kopfverschiebung u), und die Tragsicherheit der Stützenquerschnitte kann nachgewiesen werden.

$H_{d,j}$: Horizontalkraft aus z.B. Anfahr- oder Bremskräften, Streichwind auf Träger, Längswind auf Stützen, Lagerreibung (rückhaltend), Erdbeben

i : stabilisierende Stützen

j : Pendelstützen (treibende Wirkung)

Achtung: $N_{d,i}$, $N_{cr,di}$ und N_{dj} sind negativ!

Biegung und Normalkraft – Zusammenfassung

- Das Tragverhalten von Stahlbetondruckgliedern unter Biegung und Normalkraft kann aufgrund der Annahme über das **Ebenbleiben der Querschnitte** unter Verwendung beliebiger Spannungs-Dehnungsdiagramme für den Beton und die Bewehrung erfasst werden.
- Schnittgrößen (N , M_y , M_z) können aus gegebenen Verformungsgrößen (ε_0 , χ_y , χ_z) durch **Integration** ermittelt werden. Die umgekehrte Aufgabenstellung im allgemeinen eine **Iteration**.
- **Moderate Druckkräfte** in Druckgliedern führen zu einer **Erhöhung des Rissmoments** (Dekompressionsmoments) **sowie des Biegewiderstands** und zu einer **Reduktion des Verformungsvermögens**.
- Der Biegewiderstand von Druckgliedern wird mit **M - N -Interaktionsdiagrammen** beschrieben.
- Mit einer **Umschnürungsbewehrung** kann die axiale **Druckfestigkeit des Kernbetons** und vor allem die **zugehörige Stauchung wesentlich gesteigert** werden. Werden diese Eigenschaften ausgenutzt, ist mit abgeplatzttem Überdeckungsbeton zu rechnen (siehe Kapitel 3.1).
- Bei der **konstruktiven Durchbildung** von Druckgliedern sind die entsprechenden Regeln für die **Bewehrungsführung** sorgfältig zu beachten.
- Beim Nachweis der Tragsicherheit von **Druckgliedern** sind ausser den Schnittgrößen 1. Ordnung **geometrische Imperfektionen sowie Einflüsse 2. Ordnung** zu berücksichtigen.
- Bei Stützen unter Last- und Zwangsbeanspruchungen sind grundsätzlich ein **Tragsicherheitsnachweis** (mit **unterem** Grenzwert der Biegesteifigkeit) und ein **Spannungsnachweis** (mit **oberem** Grenzwert der Biegesteifigkeit) zu erbringen.
- Bei der Untersuchung der **Gesamtstabilität** von Rahmensystemen sind stabilisierende und treibende Wirkungen zu unterscheiden. Besondere **Vorsicht ist bei kurzen Pendelstützen** angezeigt.