Biegung und Normalkraft – Allgemeines

Verhalten von Bauteilen unter Biegung und Normalkraft

- Biegemomente in Kombination mit Normalkräften treten in Stützen, Bogentragwerken, vorgespannten Trägern etc. auf
- Normalkräfte beeinflussen den Biegewiderstand, die Biegesteifigkeit und das Verformungsvermögen, d.h. das gesamte Momenten-Krümmungs-Diagramm
- Diagramm: Einfluss einer Druckkraft N = const. < 0 auf das typische Verhalten kreisrunder Stützen oder Pfähle:
 - → Rissmoment wird erhöht
 - \rightarrow Nichtlineares Verhalten schon vor Fliessbeginn der Bewehrung
 - → Verformungsvermögen wird reduziert
- Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens allgemein: siehe Biegung
- In der Praxis mit Hilfe von Computerprogrammen, Plausibilitätskontrolle von Hand durch Anwender!



Biegung und Normalkraft

Allgemeines

- Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ermöglicht die Ermittlung des Tragverhaltens von Stäben bei gegebenem Baustoffverhalten (Spannungs-Dehnungs-Diagramme)
- Schnittgrössen (N, M_y , M_z) folgen aus den Verformungsgrössen (ε_0 , χ_y , χ_z) einfach durch Integration, umgekehrt ist im allgemeinen eine Iteration erforderlich:

$$\begin{cases} \varepsilon_{0} \\ \chi_{y} \\ \chi_{z} \end{cases} \xrightarrow{\text{Integration}} \begin{cases} N = \int_{A} \sigma_{x} dA \\ M_{y} = \int_{A} \sigma_{x} z dA \\ M_{z} = \int_{A} \sigma_{x} y dA \end{cases}$$

Statische Berechnung: (N, M_y, M_z) meist auf Hauptachsen Beton-QS bezogen, bei Berücksichtigung ideeller Querschnittswerte beachten!



Momenten-Krümmungs-Diagramme: ungerissen-elastischer Zustand



- Schnittgrössen werden in der Regel auf den reinen Betonquerschnitt bezogen
- Spannungen werden am ideellen Querschnitt ermittelt
- Spannungen im Querschnitt:

$$\mathbf{5} = n \cdot \left(\frac{N}{A_i} + \frac{M_{yi}}{I_{yi}} \cdot z_i\right)$$

• Moment bezüglich ideellem Schwerpunkt:

$$M_{yi} = M_y - N \cdot \left(\zeta_i - \frac{h}{2}\right)$$



Momenten-Krümmungs-Diagramme: gerissen-elastischer Zustand

Momenten-Krümmungs-Diagramme: gerissen-elastischer Zustand

- Das M-χ-Diagramm ergibt sich f
 ür eine gegebene Normalkraft aus der Wahl von x und L
 ösen der zwei Gleichungen nach χ und M_y.
- Die Dehnungsebene findet sich bei bekannten Schnittgrössen N und M_{ν} im Allgemeinen iterativ aus den zwei Gleichungen.
- Wird für den Beton (und allenfalls auch für die Bewehrung) ein nichtlineares Verhalten vorausgesetzt, kann im Prinzip gleich vorgegangen werden.
- Die Dehnungsebene ist durch die zwei Grössen x und χ eindeutig definiert.

Beispiel ([1], 3.15f), *m*-χ-Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Stahlbetonplatte, h = 240 mm
- Beton C25/30, Betonstahl B500B

- Ideelle Querschnittswerte ([1], 2.13f):

$$a_i = 247'819 \text{ mm}^2/\text{m}$$

 $i_{yi} = 1.216 \cdot 10^9 \text{ mm}^4/\text{m}$
 $Ei_{yi} = 36.5 \text{ MNm}^2/\text{m}$
 $\zeta_i = 122.9 \text{ mm}$

$$\text{noment:} \qquad \sigma_{c,inf} = n_c \cdot \left(\frac{n}{a_i} + \frac{m_{r,i}}{i_{y,i}} \cdot z_i\right) = 1 \cdot \left(-\frac{1 \cdot 10^6}{247'819} + \frac{m_{r,i}}{1.216 \cdot 10^9} \cdot (240 - 122.9)\right) = f_{ctm} = 2.6 \text{ MPa} \qquad \rightarrow m_{r,i} = 68.9 \text{ kNm/m}$$

Bezogen auf die Hauptachsen des Betonquerschnitts resultiert:

$$m_{r,y} = m_{r,i} + n_x \cdot \left(\zeta_i - \frac{h}{2}\right) = 68.9 - 1 \cdot (122.9 - 120) = 66 \text{ kNm/m}$$

Beispiel ([1], 3.15f), *m*-χ-Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)

Dekompressionsmoment: Wird die Randspannung am unteren Querschnittsrand gleich null gesetzt, erhält man das sogenannte Dekompressionsmoment:

$$\sigma_{c,inf} = 1 \cdot \left(-\frac{1 \cdot 10^6}{247'819} + \frac{m_{dec,i}}{1.216 \cdot 10^9} \cdot (240 - 122.9) \right) = 0 \rightarrow m_{dec,i} = 41.9 \,\mathrm{kNm/m}$$
$$\rightarrow m_{dec,y} = 39 \,\mathrm{kNm/m}$$

Für den gerissenen Zustand können für angenommene Werte x die zugehörigen Krümmungen χ und Momente m_y ermittelt werden:

1. *x* wählen

2.
$$\chi = \frac{n_x}{a_s E_s (d-x) - \frac{E_c x^2}{2}}$$
 and $\Sigma H = 0 \rightarrow n_x = a_s E_s (d-x) \chi - \frac{E_c \chi x^2}{2}$
3. $m_y = a_s E_s (d-x) \left(d - \frac{h}{2} \right) \chi + \frac{E_c \chi x^2}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right)$

Beispiel ([1], 3.15f), *m*-χ-Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)

<i>x</i> [mm]	χ [mrad/m]	<i>m_y</i> [kNm/m]
240	1.147	38.8
212	1.483	49.3
150	3.120	78.6
120	5.243	102.8
100	8.388	132.8
90	11.367	159.4

Dekompression (x = h)

$$x = d$$

x gewählt

N.B.: $a_s = 1'340.4 \text{ mm}^2/\text{m}$ $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$ $E_c = 30 \text{ kN/mm}^2$ d = 212 mmh = 240 mm





- Im gerissenen Zustand ergibt sich wegen n_x < 0 trotz der angenommenen linearen Elastizität von Beton und Bewehrung ein nichtlineares Verhalten.
- Das Rissmoment wird durch die Druckkraft erhöht.
- Beim Dekompressionsmoment ist die Kennlinie des gerissenen Zustands zu jener des ungerissenen tangential.

Biegewiderstand unter gleichzeitiger Wirkung einer Normalkraft



Beispiel ([1], 3.20), Biegewiderstand unter einer Normalkraft (ohne Berücksichtigung von A's)

- Stahlbetonplatte, h = 240 mm, $a_s = 1'340$ mm²/m, d = 212 mm
- Beton C25/30: f_{cd} = 16.5 MPa, Betonstahl B500B: f_{sd} = 435 MPa

$$0.85x = \frac{1'340 \cdot 435 + 1 \cdot 10^6}{1'000 \cdot 16.5} = 95.9 \text{ mm} \qquad \rightarrow x = \frac{95.9}{0.85} = 112.9 \text{ mm}$$

Kontrolle der Stahldehnungen:

$$\frac{3\%}{x} \cdot (d-x) = \frac{3}{112.9} \cdot (212 - 112.9) = 2.63\% > 2.12\% \text{ i.O.}$$

$$m_{y,Rd} = 1'340 \cdot 435 \cdot (212 - 120) + 95.9 \cdot 1'000 \cdot 16.5 \cdot \left(\frac{240 - 95.9}{2}\right) = 167.7 \,\mathrm{kNm/m}$$

Beispiel ([1], 3.15f), *m*-χ-Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Der Biegewiderstand wird durch die Druckkraft erhöht.
- Das Verformungsvermögen nimmt ab
- Kennlinie zu steif (hoch), da Beton bis zum Bruch linear elastisch angenommen wurde.



Allgemeines

- Bemessung resp. Nachweis des Querschnittswiderstands f
 ür kombinierte Beanspruchung erfolgt mit Interaktionsdiagrammen
- Vorgehen 1 (starr-ideal plastisch): Ermittlung aus den Fliessfiguren von Beton und Bewehrung durch (geometrische) Linearkombination
- Vorgehen 2 (SIA 262): Annahme von Dehnungsebenen (ε_0 , χ_y , χ_z), Kombinationen

 $(N, M_y, M_z)_{Rd}$ folgen durch Integration:





Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung (1) Beton allein $bh^2 f_c/8$ (-h/2) > N $-bh^2 f_c/8$ Druckzone oben: $N_c = -\left(\frac{h}{2} - \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\gamma}}\right) bf_c$, $M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2bf_c}\right) \rightarrow \frac{Aplastischer Bereich}{begrenzt durch Fliessgrenze}$ begrenzt durch Fliessgrenze $Y_c = 0$ (besteht aus zwei Parabeln) Druckzone unten: $N_c = -\left(\frac{h}{2} + \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\gamma}}\right) bf_c$, $-M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2hf}\right)$ $Y_c = 0$ (besteht aus zwei Parabeln) \rightarrow Plastische Verzerrungsinkremente sind orthogonal zur Fliessgrenze, $Y_{c} = \pm M_{yc} + N_{c} \left(\frac{h}{2} + \frac{N_{c}}{2hf}\right) = 0$ nach aussen gerichtet (Fliessgesetz, Fliessfunktion: allgemein $\dot{\varepsilon} = \kappa \cdot \operatorname{grad} Y$) $\pm \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\gamma}} = \frac{h}{2} + \frac{N_c}{bf_c} = \frac{\partial Y_c / \partial N_c}{\partial Y_c / \partial M_{y_c}}$ Fliessgesetz:

 $\begin{array}{c} & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ &$

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung, $A_s = A'_s$

(2) Bewehrung allein

- \rightarrow Aplastischer Bereich $Y_s < 0$ ist bei zwei Bewehrungslagen ein Parallelogramm (bei symmetrischer Bewehrung $A_s = A'_s$ Rhombus), das durch die den beiden Bewehrungslagen entsprechenden Vektoren aufgespannt wird
- → Kombination der beiden Bewehrungslagen grafisch durch geometrische Linearkombination (siehe Kombination von Beton und Bewehrung)
- → Eckpunkte: beide Bewehrungen fliessen, Seiten: eine Bewehrung fliesst
- \rightarrow Plastische Verzerrungsinkremente sind orthogonal zur Fliessgrenze $Y_s = 0$, nach aussen gerichtet (Fliessgesetz)

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung, $A_s = A'_s$

- (3) Stahlbeton = Beton + Bewehrung
- → Fliessfigur des Stahlbetons durch geometrische Linearkombination der Fliessgrenzen $Y_c = 0$ und $Y_s = 0$
- → Vorgehen: Fliessgrenze ($Y_c = 0$) rein translatorisch mit ihrem Ursprung entlang Fliessgrenze ($Y_s = 0$) bewegen (oder umgekehrt $Y_s = 0$ entlang $Y_c = 0$)
- → Resultierender Bereich Y< 0 entspricht dem aplastischen Bereich des Stahlbetonquerschnitts, mindestens schwach konvex, Fliessgesetz (Orthogonalität der plastischen Verzerrungsinkremente bezüglich Fliessgrenze) gilt weiterhin
- → Entlang gerader Stücke der Fliessgrenze bleibt eine Bewehrung elastisch (starr)
- → Vorgehen auf beliebige Bauteile und Beanspruchungen übertragbar



Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch

Einfluss unsymmetrische Bewehrung, $A_s \neq \overline{A'_s}$



Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch

Einfluss Überdeckung



Rechteckquerschnitt – Interaktionsdiagramm für starr-ideal plastisches Verhalten

[1], Seite 3.19, Beispiel 3.8



- Beton C30/37: $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$ $f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$ $E_{cm} = 33.6 \text{ GPa}$
- Betonstahl B500B: $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$ $E_s = 205 \text{ GPa}$

Vereinfachungen / Annahmen:

- Berechnung mit Bruttoquerschnitt des Betons (inklusive an der Stelle der Längsbewehrung nicht vorhandener Beton)
- Mittlerer Randabstand der drei äusseren Stäbe Ø26: d' = 62 mm (Bügel mit $d_3 = 4\emptyset$ abgebogen)

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch ([1], Beispiel 3.8)



Interaktionsdiagramme mit Dehnungsbegrenzungen (nach SIA 262)

- Interaktionsdiagramme f
 ür starr-plastisches Verhalten von Beton und Bewehrung eignen sich gut f
 ür Handrechnungen und die Kontrolle von Computerberechnungen. Sie
 übersch
 ätzen den Bruchwiderstand, da weder Bewehrung noch Beton ideal plastisch sind.
- Nach SIA 262 sind Dehnungsbegrenzungen f
 ür Beton (Bruchstauchung) und Bewehrung (generell Bruchdehnung, bei Druckgliedern Fliessdehnung) zu ber
 ücksichtigen.
- Interaktionsdiagramme mit Dehnungsbegrenzungen werden ermittelt, indem Dehnungsebenen (ε₀, χ_y, χ_z) angenommen und die zugehörigen Schnittgrössen (N, M_y, M_z)_{Rd} durch Integration über die Querschnittsfläche ermittelt werden.
- Pro Dehnungsebene resultiert ein Punkt des Interaktionsdiagramms. In Handrechnungen werden wenige typische Dehnungsebenen angenommen, welche eine gute Näherung des Interaktionsdiagramms ermöglichen.
- Mit Computerprogrammen können die Interaktionsdiagramme durch Untersuchung einer Vielzahl von Dehnungsebenen genauer ermittelt werden.
- Aufgrund der Dehnungsbegrenzungen können lokal konkave Interaktionsdiagramme resultieren.



NB: Einfluss des Verbundverhaltens

- mittlere Dehnung ε_{sm}, bei welcher im Riss die Bruchdehnung ε_{sr} = ε_{ud} erreicht wird, kann mit dem Zuggurtmodell ermittelt werden. Abschätzung ≈ 0.4...0.5 ε_{ud} in der Regel ausreichend (Einfluss auf Bruchwiderstand gering). Für B500B (ε_{ud} = 45‰) z. Bsp. ε_{sm}(ε_{sr} = ε_{ud}) ≈ 22.5‰.
- bei ε_{sm} = f_{sd} / E_s ist ε_{sr} > f_{sd} / E_s (d.h. Betonstahl fliesst eigentlich schon etwas vorher), Einfluss auf Tragwiderstand gering (sichere Seite f
 ür Effekte 2. Ordnung, da von einer gr
 össeren rechnerischen Kr
 ümmung ausgegangen wird)

 $\begin{aligned} \left| \varepsilon_c \right| &\leq \varepsilon_{c2d} = 3\% \\ \varepsilon_{sm} &\leq 0.5 \cdot \varepsilon_{ud} \end{aligned}$



NB. Druckglieder: Querschnittswiderstand ↔ Biegesteifigkeit (siehe SIA 262 4.3.7.9)

- Mit den dargestellten Dehnungsbegrenzungen für Druckglieder (Fall iiA/B) resultiert bei einzelnen Dehnungsebenen ein etwas kleinerer Querschnittswiderstand als für den Fall mit dominanter Biegung (Fall i)
- Bei Druckgliedern (Einfluss 2. Ordnung) wird in der Regel der kleinere Querschnittswiderstand durch die grössere Biegesteifigkeit im nominellen Bruchzustand mehr als kompensiert (Systemtraglast für Fall iiA/B grösser als Fall i).
- Dehnungsebenen gemäss Fall iiA sind nur zulässig, sofern die Betonrandstauchung ε_{c2d} nicht übersteigt. Andernfalls ist Fall iiB anzuwenden (oft bei gedrungenen QS oder grossem d').



Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])

- Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug \bigcirc N_{Rd} = -4'963 kN, \bigcirc N_{Rd} = 1'848 kN
- Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB):





Betonkräfte (brutto, daher Abzug $A_s \cdot f_{cd}$ bei Bewehrung s. unten): ② 0.85 · (2 · 138 + 62) · 0.40 · 20 = 2'298 kN ③ 0.85 · (198.1) · 0.40 · 20 = 1'347 kN Bewehrungskräfte: $A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s$, in der Druckzone - $A_s \cdot f_{cd}$

(da Betonkräfte ohne Abzug von A_s gerechnet wurden)



Biegung und Normalkraft – Dehnungsebenen

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen – Wahl der Dehnungsebenen (schematisch, für Querschnitt gemäss [1] Beispiel 3.10)

- Nachweis für gegebenen Wert der Normalkraft N_{Ed} (SIA 262) $\rightarrow M_{Ed} = N_{Ed}(e_{0d} + e_{1d} + e_{2d})$
- Vergrösserung des Biegemoments N_{Ed}·e_{2d} proportional zur Krümmung
- Die Biegesteifigkeit *El* von schlanken Druckgliedern wird bei der Berechnung mittels Interaktionsdiagramms unterschätzt. Daraus resultieren grössere rechnerische Effekte zweiter Ordnung, was zu einem kleineren rechnerischen Normalkraftwiderstand führt (siehe Laststeigerungskurven mit konstantem resp. variablem *El*; führt zu unterschiedlicher Bruchkraft N_{Rd} resp. N_{Rd,iiA})
- Da bei schlanken Druckgliedern der kleinere Biegewiderstand im Fall iiA/B durch die grössere rechnerische Biegesteifigkeit (→ kleinere Momente 2. Ordnung) oft mehr als kompensiert wird, erhält man eine bessere Näherung der wirklichen Bruchkraft mit Fall iiA/B als mit Fall i



Druckglieder – konstruktive Durchbildung (SIA 262 5.5.4)

• Mindestabmessungen: Stützen $(b/a \le 4) \rightarrow a \ge 200$ mm (Ortbeton) bzw. 150 mm (Fertigteil)

Wände $(b/a > 4) \rightarrow a \ge 150$ mm (Ortbeton) bzw. 100 mm (Fertigteil)

• Längsbewehrungsgehalt: $0.6\% \le \rho \le 8\%$

Bei grossen Stützenquerschnitten darf $\rho_{x,min} = 0.6\%$ auf eine Mantelfläche von mindestens 200 mm Dicke bezogen werden.

In Wänden bezieht sich $\rho_{x,min} = 0.6\%$ auf den für die Tragsicherheit erforderlichen Betonquerschnitts (Stababstand $s \le 300$ mm und $s \le 2a$).

Falls $\rho_x > \rho_{x,max} = 8\%$ verstärkte Verbügelung und spezielle konstruktive und ausführungstechnische Massnahmen erforderlich.

Längsbewehrungsstäbe sind mit Bügeln gegen lokales Ausknicken zu sichern.

• Verbügelung:

 $s_c \le 15 \ \mathcal{Q}_{x,min}$ und $s_c \le a_{min}$ und $s_c \le 300 \text{ mm}$

Falls die Druckbewehrung f_{sd} erreicht, ist ausser den Eckstäben auch jeder zweite Längsbewehrungsstab mit Haken oder Bügeln zu umschliessen.





Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

[Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012]



Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

[Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012.]

Versuchskörper A – Querschnittsgeometrie

Versuchskörper N – Querschnittsgeometrie



Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

(Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012.)



Druckglieder – konstruktive Durchbildung (SIA 262 5.5.4)

- Verbügelung:
- In Krafteinleitungszonen, Stossverbindungen und Querschnittsänderungen müssen zusätzlich Bügel zur Aufnahme von Querzugkräften eingebaut werden.



- Verbügelung in plastischen Bereichen bei Erdbebenbemessung:
 - $\dots s_c \le 6 \cdot \emptyset_x$ und $s_c \le 150 \,\mathrm{mm}$

$$\dots \rho_t \ge max \left\{ \frac{0.08 \cdot f_{cd}}{f_{sd}}; \frac{-N_d - 0.08 \cdot a \cdot b \cdot f_{cd}}{4 \cdot a_c \cdot b_c \cdot f_{sd}} \right\}$$

... Umschnürungsbügel mit 135°-Endhaken mit Länge \geq 10 \mathcal{O}_c

... keine Übergreifungsstösse der Längsbewehrung (konventioneller Stoss an OK Fundament unzulässig!); mechanische Stabverbindungen nur bei nachgewiesener ausreichender Duktilität

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Allgemein kann der Nachweis der Tragsicherheit für exzentrisch beanspruchte Druckglieder mit nichtlinearen Berechnungsverfahren geführt werden.

Dabei ist grundsätzlich ein inkrementelles, iteratives Vorgehen erforderlich. Das Druckglied wird in eine geeignete Anzahl Elemente diskretisiert, und die Berechnung erfolgt auf der Basis der Momenten-Krümmungsbeziehungen der Stabelemente; diese sind nichtlinear und von der Normalkraft abhängig.

Solche allgemeinen Berechnungen sind auch mit heutigen Computerprogrammen relativ aufwändig, und die Resultate bedürfen in Anbetracht der diversen Annahmen, welche getroffen werden müssen, einer kritischen Interpretation. Sie Iohnen sich in der Regel nur bei schlanken, hoch beanspruchten Stützen oder bei der Beurteilung bestehender Bauwerke.

Nachfolgend wird das für Handrechnungen gut geeignete Näherungsverfahren gemäss der Norm SIA 262 beschrieben, welches auf der Annahme einer konstanten Steifigkeit beruht. Diese entspricht der Sekantensteifigkeit im höchstbeanspruchten (massgebenden) Querschnitt und wird aus dem Momenten-Krümmungs-Diagramm bestimmt.

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Der Nachweis der Tragsicherheit berücksichtigt folgende drei Einflüsse:

Geometrische Imperfektionen ۲ e_{0d} Schnittgrössen erster Ordnung e_{1d} • Verformungen des Druckglieds planmässige Lage e_{2d} Lage mit Imperfektionen Die maximale Exzentrizität e_d beträgt: verformte Lage $\neg \chi_d$ $e_{0d} = \operatorname{Max}\left\{\alpha_{i} \frac{l_{cr}}{2}; \frac{d}{30}\right\}$ mit $\frac{1}{200} \ge \alpha_i = \frac{0.01}{\sqrt{l}} \ge \frac{1}{300}$ (*l* in m) χ $e_d = \overline{e_{0d}} + \overline{e_{1d}} + \overline{e_{2d}}$ $e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d}$ $e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$

d

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Geometrische Imperfektionen (für
$$l = l_{cr}$$
)
 $e_{0d} = \frac{l_{cr}}{400}$ $l_{cr} \le 4 \text{ m}$
 $e_{0d} = \frac{\sqrt{l_{cr}}}{200}$ $4 \text{ m} < l_{cr} < 9 \text{ m}$ jedoch: $e_{0d} \ge \frac{d}{30}$
 $e_{0d} = \frac{l_{cr}}{600}$ $l_{cr} \ge 9 \text{ m}$

Planmässige Lage (M_{1d} : Moment erster Ordnung)

$$e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d}$$

Verformungen des Druckglieds

$$e_{2d} = \chi_d \, \frac{{l_{cr}}^2}{c}$$

$$\begin{split} \boldsymbol{M}_{d} &= -N_{d} \left(\boldsymbol{e}_{0d} + \boldsymbol{e}_{1d} + \boldsymbol{e}_{2d} \right) \\ &= \boldsymbol{M}_{1d} - N_{d} \left(\boldsymbol{e}_{0d} + \boldsymbol{e}_{2d} \right) \end{split}$$

Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung $e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$

Die Krümmung beträgt allgemein $\chi_d = \frac{\varepsilon_{sd} - \varepsilon'_{sd}}{d - d'}$



Auf der sicheren Seite liegend darf vereinfachend mit $\varepsilon_{sd} = -\varepsilon'_{sd} = f_{sd} / E_s$ gerechnet werden. Für genauere Berechnungen kann die Krümmung entsprechend der Bruchkrümmung im massgebenden Querschnitt abgemindert werden (Iteration).

Langzeiteffekte können näherungsweise mit einer Vergrösserung der Krümmung um $\chi_{irr,d} = \frac{|\varepsilon_{c\infty}|}{d}$ berücksichtigt werden. Für die Bemessung werden oft normierte Interaktionsdiagramme verwendet, in denen die Langzeiteffekte mit $\varphi = 2$ bereits enthalten sind.



Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung $e_{2d} = \int_{0}^{l_{cr}} \chi \overline{M} \, dx = \chi_d \, \frac{l_{cr}^2}{c}$

Der Integrationsfaktor c ergibt sich für eine allgemeine Belastung (aus mehreren Grundfällen i zusammengesetzt) zu

$$c = \alpha \cdot \pi^{2} + (1 - \alpha) \frac{\Sigma M_{di}}{\Sigma \frac{M_{di}}{c_{i}}} \qquad \alpha = \frac{N_{d}}{N_{cr,d}} \qquad N_{cr,d} = \frac{\pi^{2} E I_{d}}{l_{cr}^{2}}$$

Vereinfachend darf dabei immer $c = \pi^2$ gesetzt werden (SIA 262, 4.3.7.12).

Die Werte *c_i* der einzelnen Grundfälle folgen in Abhängigkeit des statischen Systems und der Belastung durch Anwenden der Arbeitsgleichung:



Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung

Herleitung mit Vergrösserungsfaktor

$$1 + \alpha + \alpha^{2} + \dots = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{N_{d}}{N_{cr,d}}} \quad (\rightarrow \text{Vianello})$$



Beispiel ([1], S. 3.29), Kragstütze





- Stahlbetonstütze, a = b = 400 mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 8 Längsstäbe $Ø = 26 \text{ mm}, A_{s,x} = 8.531 = 4248 \text{ mm}^2$

2f

- Bügelbewehrung $\mathcal{Q}_c = 12 \text{ mm}, c_{nom} = 35 \text{ mm}$
- Eigengewicht der Stütze wird vernachlässigt

Näherung SIA 262:

262:
$$\chi_d = \frac{\frac{-S_{sd}}{E_s}}{0.276} = 15.4 \,\mathrm{mrad/m}$$

 $e_{0d} = \frac{0.01}{\sqrt{l}} \frac{l_{cr}}{2} = 20 \,\mathrm{mm} \, (>d/30)$
 $e_{1d} = -M_{1d} / N_d = 4 \cdot 28 / 2'000 = 56 \,\mathrm{mm}$
 $e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{\pi^2} = 99.7 \,\mathrm{mm}; \ c = \pi^2$
 $M_d = -N_d \left(e_{0d} + e_{1d} + e_{2d} \right) = 367 \,\mathrm{kNm}$

Interaktionsdiagramm mit $(M_d, N_d) = (367 \text{ kNm}, -2'000 \text{ kNm})$ \rightarrow nicht ok, Iteration (oder Erhöhung der Bewehrung)!

• Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug \bigcirc N_{Rd} = -4963 kN, \bigcirc N_{Rd} = 1878 kN • Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB): (2)693 - 32 = 661(*)-2.45 $-1.22 \qquad N_{Rd}^{-} = -3'204 \,\text{kN}$ $M_{Rd} = 221 \,\text{kNm}$ 2298 56.4266 - 21 = 245(*)3 673 - 32 = 641(*)-2.066¹³⁴⁷116 $N_{Rd}^- = -1'289 \,\mathrm{kN}$ $M_{Rd} = 340 \,\mathrm{kNm}$ 0.03693 2.12 (4)0.39 127 $N_{Rd}^{-} = 1'093$ kN 273 1.26 $M_{Rd} = 78 \,\mathrm{kNm}$ 2.12 693 3

Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])



ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I



- Gleiches Beispiel wie auf Folie 38/39, aber genauere Untersuchung mit Biegewiderstand unter der gegebenen Normalkraft und zugehöriger Dehnungsebene (Dehnungsebene iterativ bestimmt)
- → Biegewiderstand grösser als bei Bestimmung aus Sekante zwischen anderen Dehnungsebenen
- \rightarrow Krümmung kleiner als mit Näherung nach SIA 262
- → Tragsicherheitsnachweis gerade knapp i.O. (bei Betrachtung als einfache Biegung, $M_z = 0$)



Beispiel ([1], 3.29), Kragstütze



Geometrische Imperfektionen

$$l_{cr} = 8 \text{ m}$$
 $e_{0d} = \frac{\alpha_i l_{cr}}{2} = \frac{0.01}{\sqrt{l}} \frac{l_{cr}}{2} = \frac{8}{200\sqrt{4}} = 20 \text{ mm}$ (>11.3 mm = $\frac{d}{30}$)

Planmässige Lage

$$M_{1d} = 28 \cdot 4 \text{ m} = 112 \text{ kNm}$$
 $e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d} = \frac{112}{2000} = 56 \text{ mm}$

Verformung zweiter Ordnung

$$EI_{d} = \frac{M_{Rd}}{\chi_{d}} = \frac{305.3}{0.01243} = 24.56 \text{ MNm}^{2}$$
$$N_{cr,d} = \frac{\pi^{2} EI_{d}}{l_{cr}^{2}} = \frac{\pi^{2} \cdot 24.56}{8^{2}} = 3.788 \text{ MN} \quad \rightarrow \alpha = \frac{N_{d}}{N_{cr,d}} = \frac{2'000}{3'788} = 0.528$$



2'000 kN 71717 \overline{M} \overline{M} χ χ $M_{di} = 2 \,\mathrm{MN} \cdot 20 \,\mathrm{mm} = 40 \,\mathrm{kNm}$ $M_{di} = 28 \text{kN} \cdot 4 \text{ m} = 112 \text{ kNm}$

Verformung zweiter Ordnung



$$c = \alpha \cdot \pi^{2} + (1 - \alpha) \frac{\Sigma M_{di}}{\Sigma \frac{M_{di}}{c_{i}}} = 0.528 \cdot \pi^{2} + (1 - 0.528) \cdot \frac{40 + 112}{40} = 10.571 \quad \text{(Vergleich: } \pi^{2} = 9.870\text{)}$$
$$\frac{e_{2d}}{c} = \chi_{d} \frac{l_{cr}^{2}}{c} = 12.43 \cdot \frac{8^{2}}{10.571} = 75.3 \text{ mm}$$

 $M_d = -N_d \cdot (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d}) = 2000 \cdot (0.0200 + 0.0560 + 0.0753) = 302.6 \text{ kNm} < M_{Rd} \approx 305.3 \text{ kNm}$

Tragsicherheitsnachweis mit Computerprogrammen

Interaktionsdiagramm (M_{Rdy} - N_{Rd}) für M_z = 0 (Tabelle: Randdehnungen $\rightarrow \chi_d$)

Interaktionsdiagramm (M_{Rdy} - M_{Rdz}) für $N = N_d = -2'000 \text{ kN}$

$M_{Rdy} - \chi_y$ -Diagramm für $M_z = 0$ und $N = N_d = -2'000 \text{ kN} (\rightarrow \chi_d)$



Druckglieder – schlanke Stützen unter Last und Zwang

Infolge Vorspannung, Temperatureinwirkung, Schwinden des Betons, Fundamentverdrehungen, etc. erfahren Stützen ausser Lasten im allgemeinen auch Zwängungen.



Stützenkopfverschiebungen z.B. durch:

- Vorspannung *P* des Riegels
- Verkürzung $\alpha_T \Delta_T des$ Riegels (Temperatur)
- Verkürzung ε_{cs} ·/des Riegels (Schwinden)

Um auf der sicheren Seite zu bleiben, muss für den Tragsicherheitsnachweis mit einem unteren Grenzwert der Steifigkeit gerechnet werden, sonst werden die Effekte 2. Ordnung unterschätzt.

Umgekehrt sind die Effekte von Zwängungen (im Gebrauchszustand) umso grösser, je höher die Steifigkeit ist, d.h. um solche Einflüsse nicht zu unterschätzen, muss von einem oberen Grenzwert der Steifigkeit ausgegangen werden.

Somit sind in solchen Fällen grundsätzlich zwei Nachweise zu führen:

- Tragsicherheitsnachweis für Q_d und zugehörige Zwängung mit El_{min}
- Spannungsnachweis für u_d und zugehörige Last Q mit EI_{max}

Druckglieder – Gesamtstabilität von Stützensystemen

Rahmensysteme sind oft längs nicht fixiert, sondern schwimmend gelagert. Die Lage des Bewegungszentrums hängt dann von den Stützensteifigkeiten ab, und neben der Stabilität der einzelnen Stützen ist auch die Gesamtstabilität nachzuweisen. (NB: Bei weichem Baugrund ist die Nachgiebigkeit der Fundationen zu berücksichtigen, d.h. Drehfedern statt starre Einspannung am Stützenfuss oder entsprechende Annahme von *I* resp. *I*_{cr})



Druckglieder – Gesamtstabilität von Stützensystemen

Pendelstützen haben eine treibende Wirkung, d.h. sie verursachen eine destabilisierende Kraft H:



Besonders gefährlich sind kurze Pendelstäbe. Sie ergeben eine grosse treibende Wirkung. Darauf ist vor allem im Bauzustand zu achten (Lehrgerüste → SIA 262, 6.1.4: kurze Pendelstäbe vermeiden, sonst treibende Kräfte berechnen und zusätzlich zu den üblichen 3% der Vertikallasten als Horizontallast ansetzen!)

Für den Nachweis der Gesamtstabilität des Stützensystems wird zuerst die Kopfverschiebung aus der horizontalen Gleichgewichtsbedingung ermittelt (Berücksichtigung rückhaltende Stützen nach allgemeinem Fall, siehe vorherige Folie).

Aus der Kopfverschiebung folgt der Horizontalschub der einzelnen Stützen. Damit ist die Beanspruchung der Stützen bekannt (Normalkraft, Horizontalschub, Biegemomente aus Horizontalschub sowie 2. Ordnung infolge Kopfverschiebung *u*), und die Tragsicherheit der Stützenquerschnitte kann nachgewiesen werden. *H_d*: Horizontalkraft aus z.B. Anfahr- oder Bremskräften, Streichwind auf Träger, Längswind auf Stützen, Lagerreibung (rückhaltend), Erdbeben

- *i*: stabilisierende Stützen
- *j*: Pendelstützen (treibende Wirkung)

Achtung: $N_{d,i}$, $N_{cr,di}$ und N_{dj} sind negativ!

Biegung und Normalkraft – Zusammenfassung

- Das Tragverhalten von Stahlbetondruckgliedern unter Biegung und Normalkraft kann aufgrund der Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte unter Verwendung beliebiger Spannungs-Dehnungsdiagramme für den Beton und die Bewehrung erfasst werden.
- Schnittgrössen (N, M_y , M_z) können aus gegebenen Verformungsgrössen (ε_0 , χ_y , χ_z) durch Integration ermittelt werden. Die umgekehrte Aufgabenstellung im allgemeinen eine Iteration.
- Moderate Druckkräfte in Druckgliedern f
 ühren zu einer Erh
 öhung des Rissmoments (Dekompressionsmoments) sowie des Biegewiderstands und zu einer Reduktion des Verformungsverm
 ögens.
- Der Biegewiderstand von Druckgliedern wird mit *M-N*-Interaktionsdiagrammen beschrieben.
- Mit einer Umschnürungsbewehrung kann die axiale Druckfestigkeit des Kernbetons und vor allem die zugehörige Stauchung wesentlich gesteigert werden. Werden diese Eigenschaften ausgenutzt, ist mit abgeplatztem Überdeckungsbeton zu rechnen (siehe Kapitel 3.1).
- Bei der konstruktiven Durchbildung von Druckgliedern sind die entsprechenden Regeln für die Bewehrungsführung sorgfältig zu beachten.
- Beim Nachweis der Tragsicherheit von Druckgliedern sind ausser den Schnittgrössen 1. Ordnung geometrische Imperfektionen sowie Einflüsse 2. Ordnung zu berücksichtigen.
- Bei Stützen unter Last- und Zwangsbeanspruchungen sind grundsätzlich ein Tragsicherheitsnachweis (mit unterem Grenzwert der Biegesteifigkeit) und ein Spannungsnachweis (mit oberem Grenzwert der Biegesteifigkeit) zu erbringen.
- Bei der Untersuchung der Gesamtstabilität von Rahmensystemen sind stabilisierende und treibende Wirkungen zu unterscheiden. Besondere Vorsicht ist bei kurzen Pendelstützen angezeigt.