

3.2 Biegung

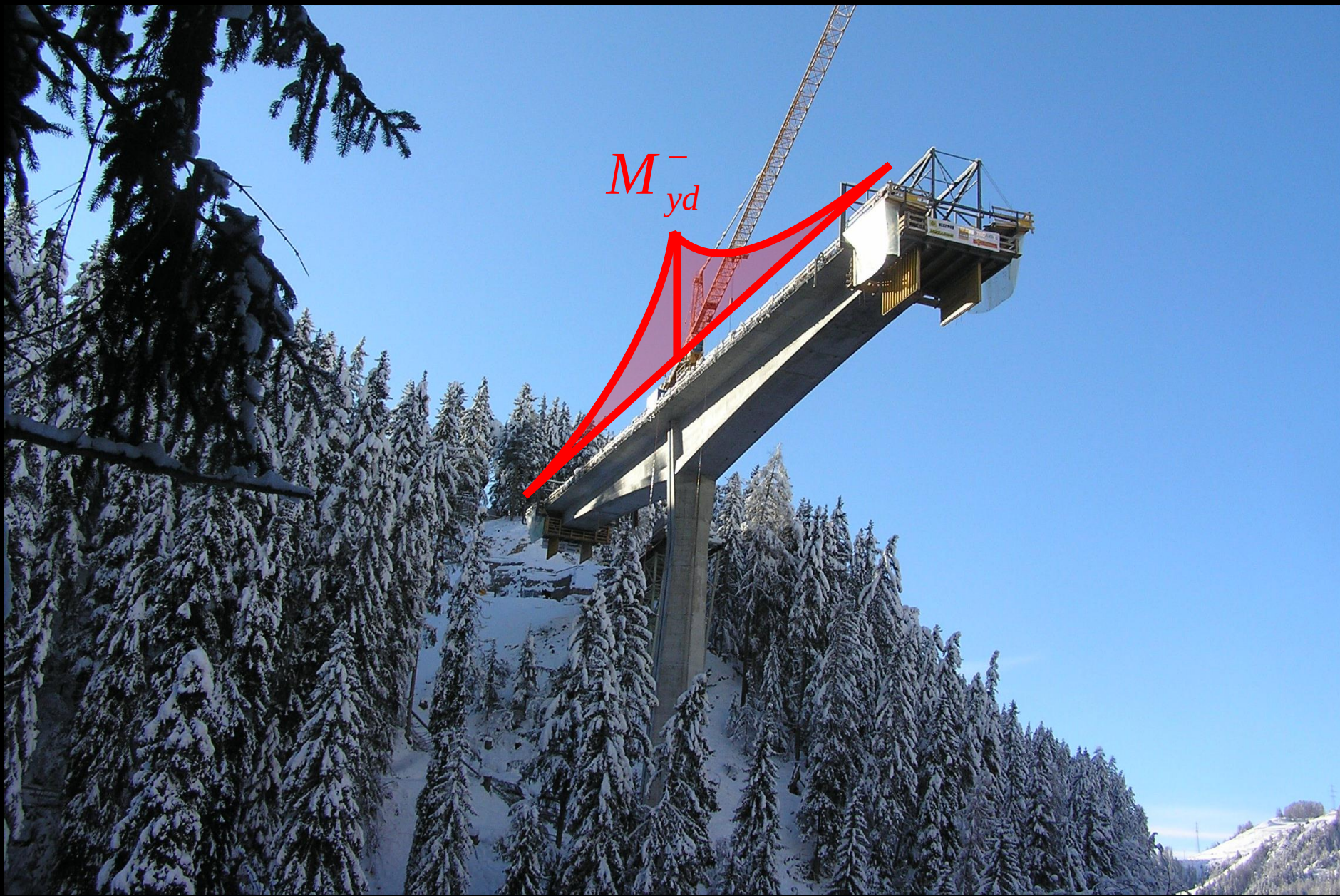
Einfeldträger (positive Biegung / «sagging»)



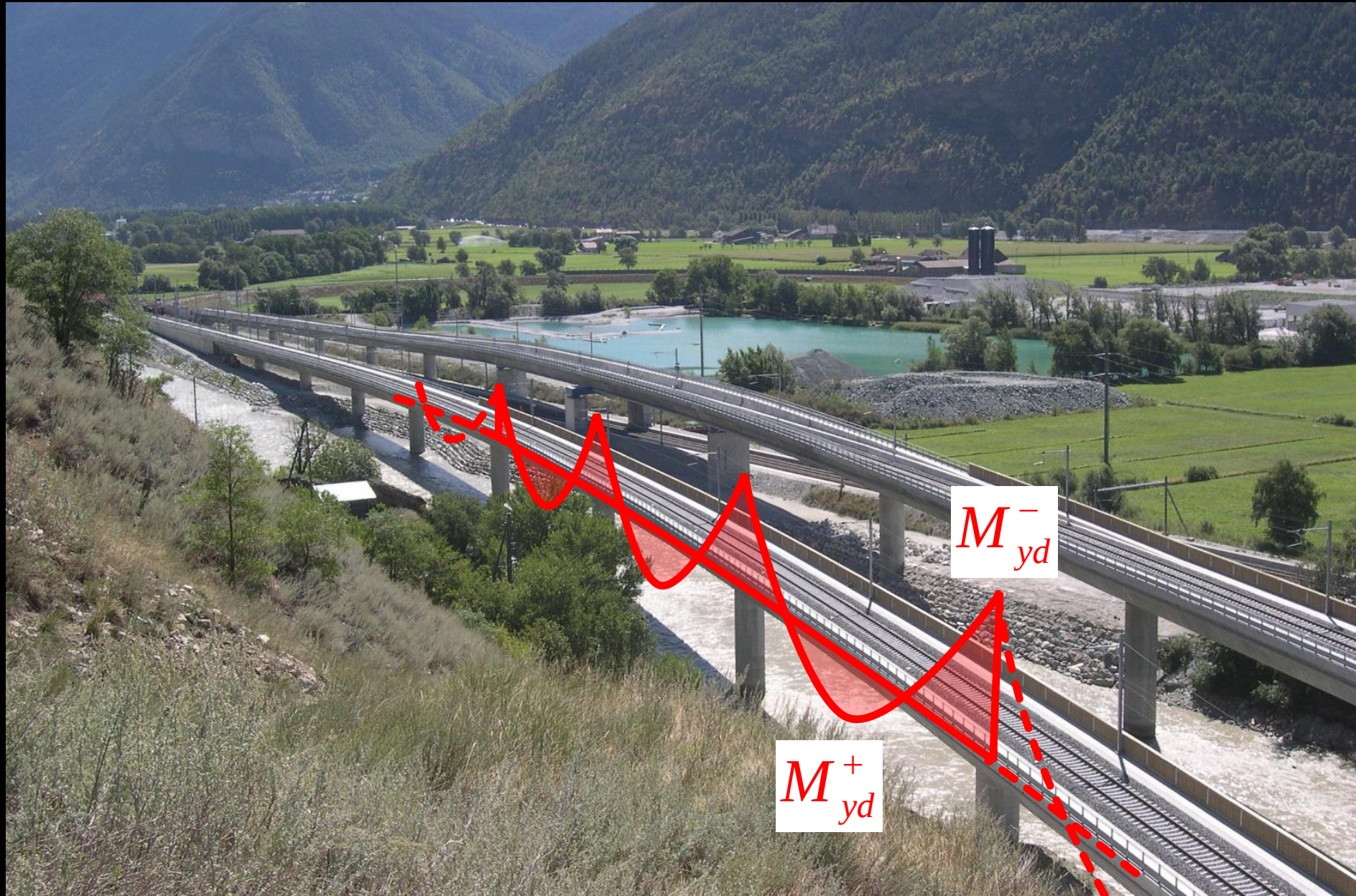
Einfeldträger (positive Biegung / «sagging»)



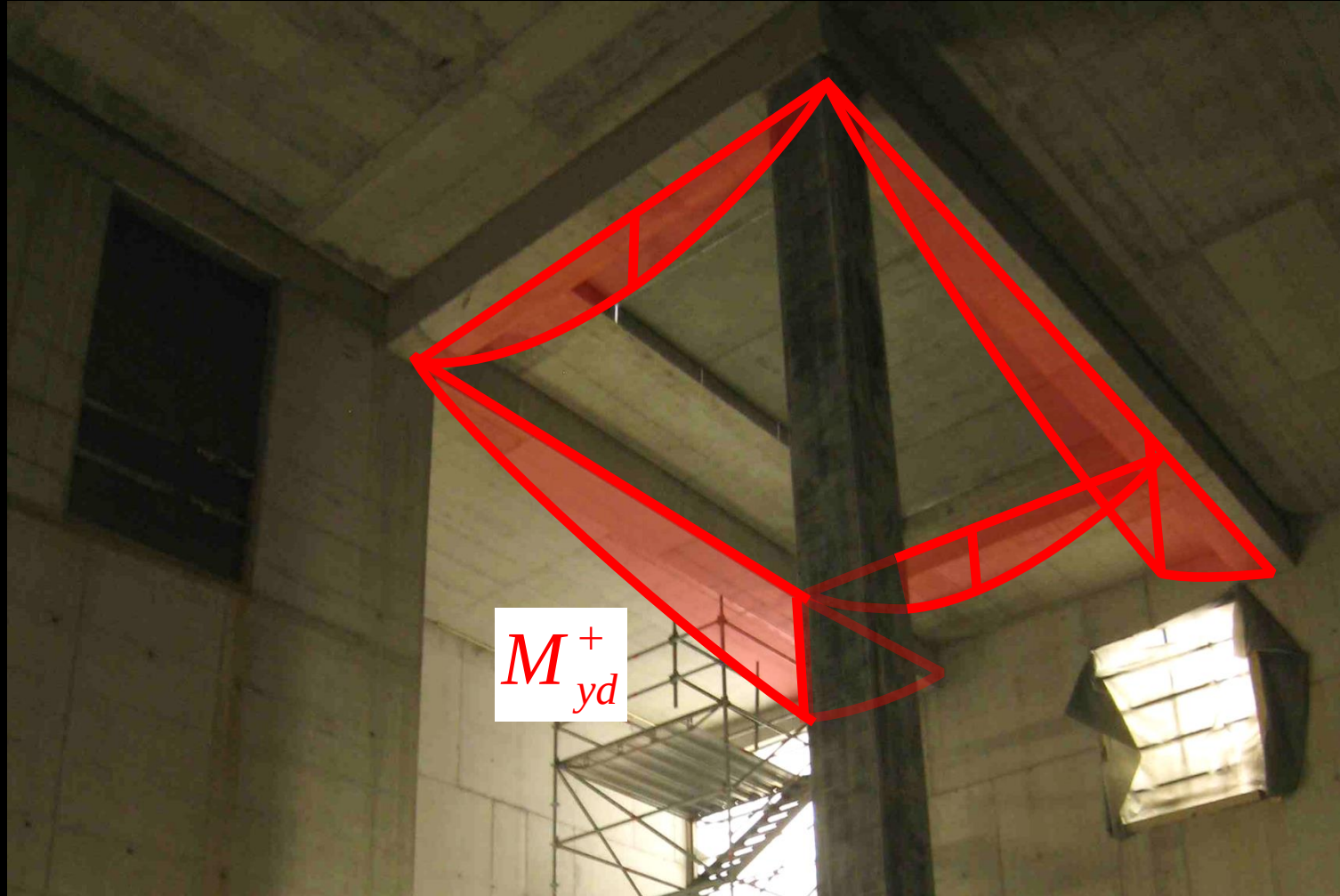
Kragarm (negative Biegung / «hogging»)



Durchlaufträger (positive und negative Biegung)

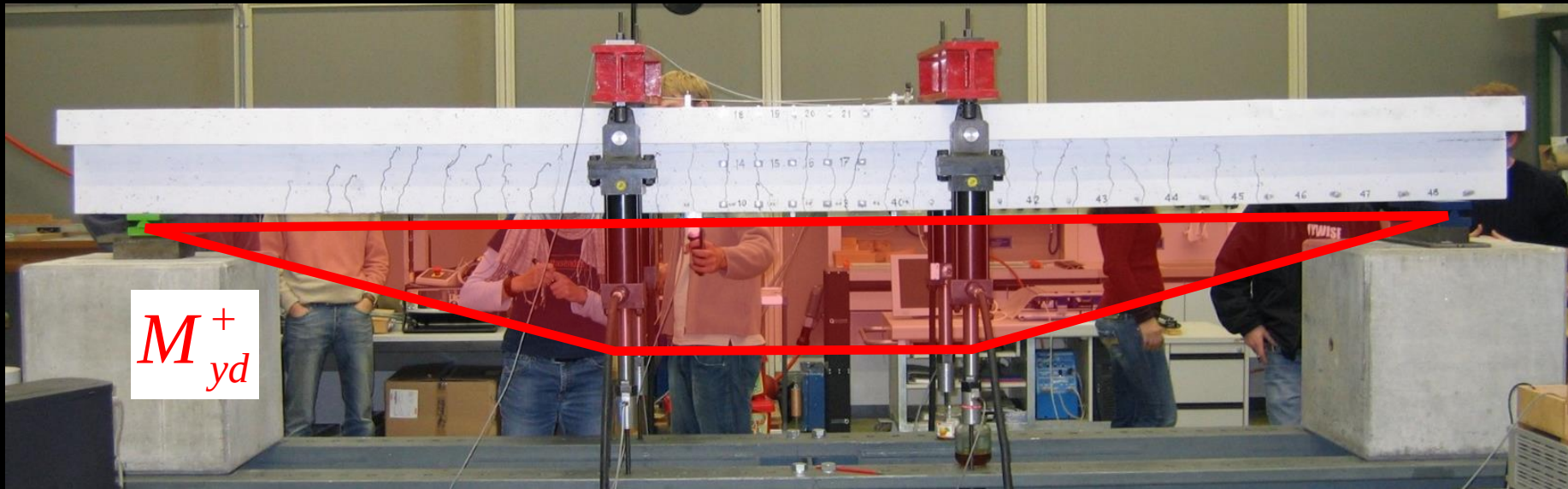


Unterzugssystem bei Hochbaudecke

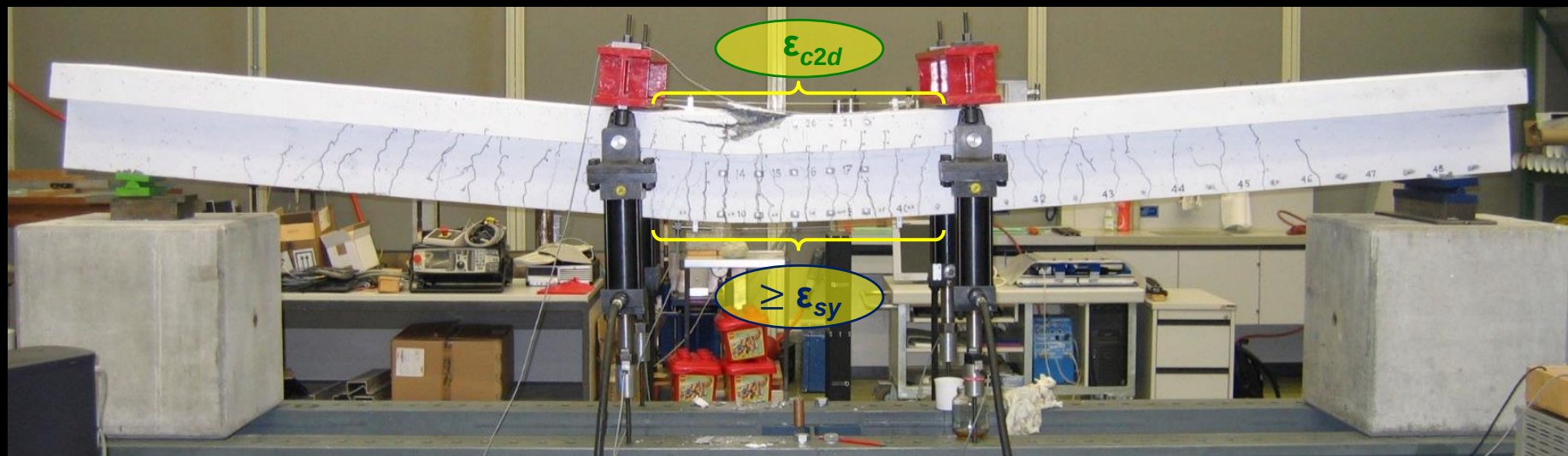


→ System von Einfeldträgern, mittiger Querträger auf zwei Längsträgern gelagert (vereinfacht als einfache Balken modelliert)

Zug- und Druckgurt



Angestrebte Bruchart (duktil): Betonbruch während Stahlfließen:



Biegebeanspruchung – Allgemeines

[1], Seite 2.1

Reine oder vorherrschende Biegung: kommt in der Praxis sehr häufig vor

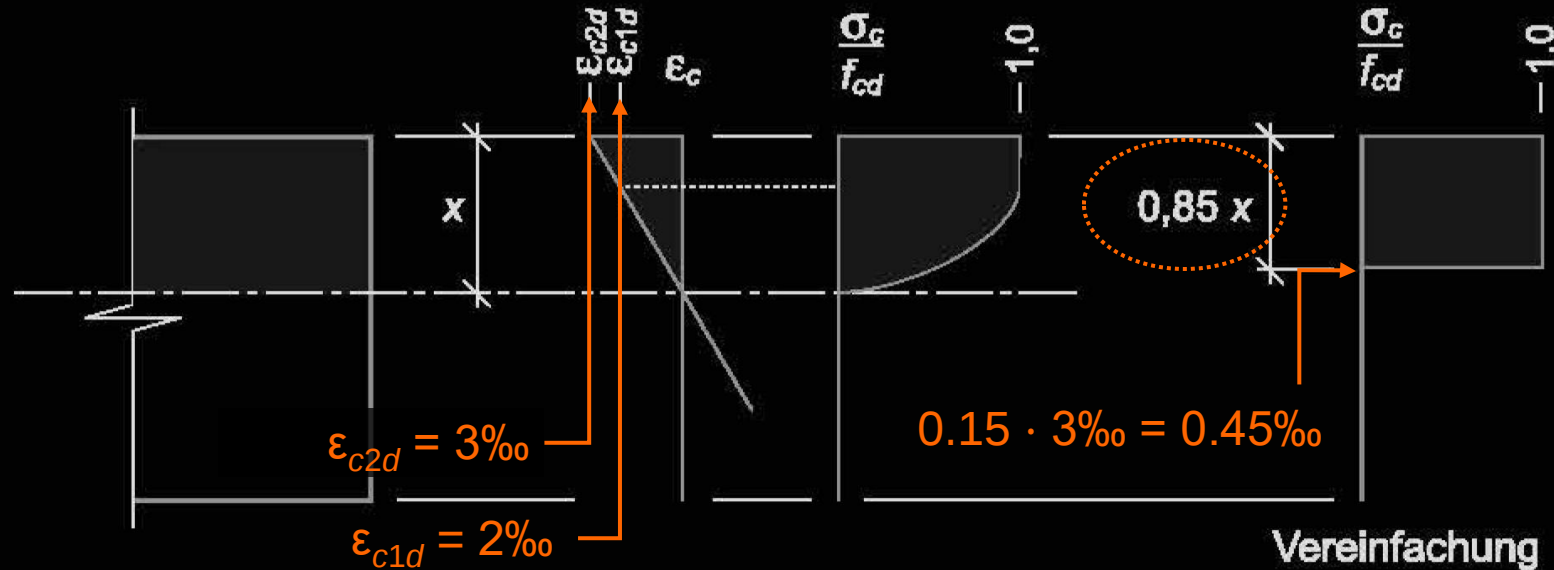
Annahmen bei Querschnittsanalyse für Tragsicherheitsnachweis (SIA 262, 4.3.2.3):

- Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur Stabachse («Bernoulli», «Ebenbleiben des Querschnitts»).
- Bewehrung überträgt nur Zug- und Druckkräfte in ihrer Richtung.
- Zugfestigkeit des Betons wird beim Bruchwiderstand vernachlässigt.
(Zugversteifung im Gebrauchszustand analog Normalkraft)
- σ - ϵ -Diagramme werden gemäss SIA 262, Fig. 12 und Tab. 8 (Beton) sowie Fig. 16 und Tab. 9 (Betonstahl) angenommen.

Biegebeanspruchung – Allgemeines

Beton, σ - ϵ -Diagramm und Bemessungswert der Druckfestigkeit

- SIA 262, Fig. 12 → siehe auch Vorlesung Materialverhalten!



- SIA 262, 2.3.2.3 → Bemessungswert der Betondruckfestigkeit

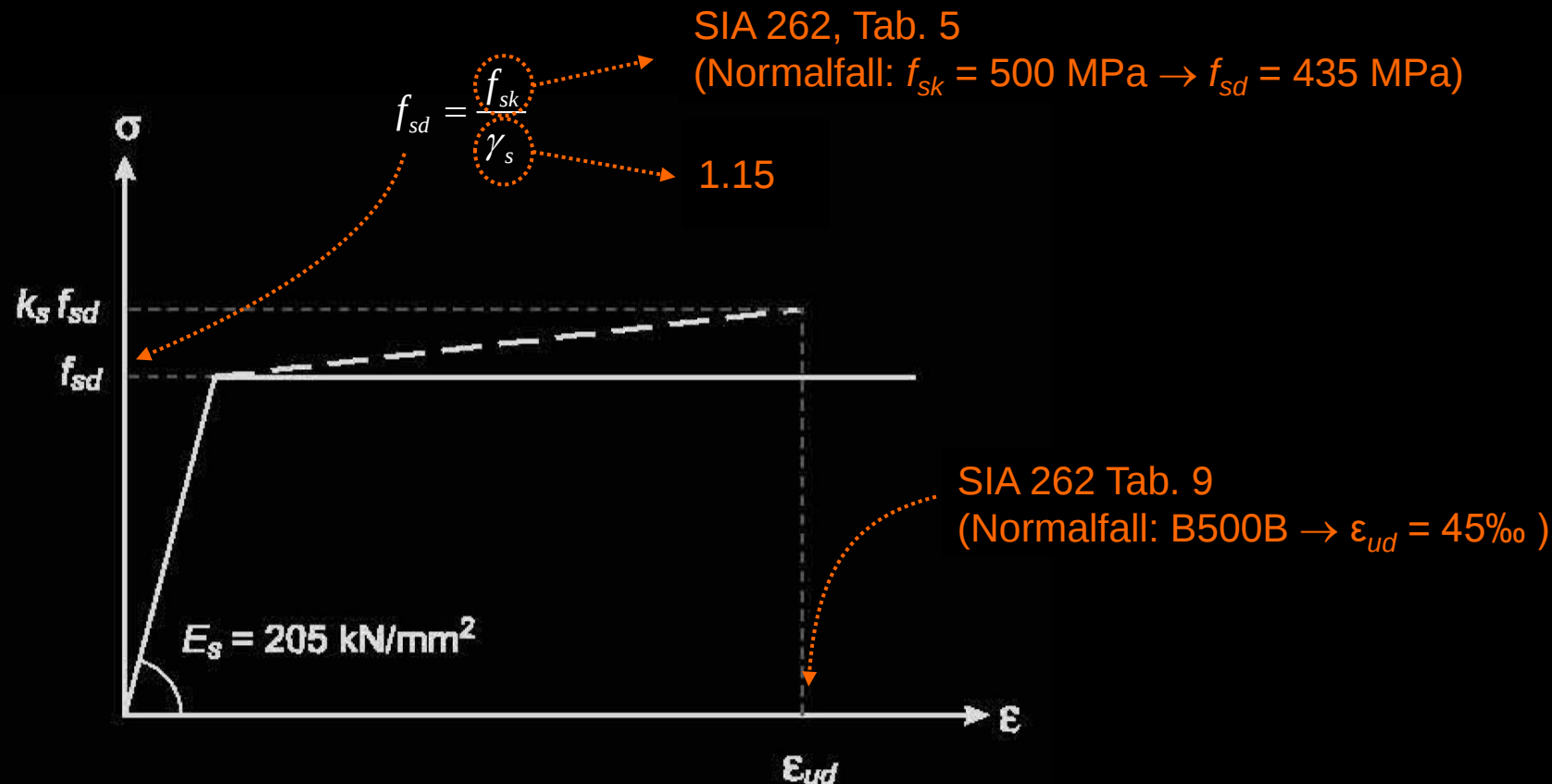
$$f_{cd} = \frac{\eta_{fc} \cdot \eta_t \cdot f_{ck}}{\gamma_c}$$

$\eta_{fc} \cdot \eta_t$ → SIA 262, 4.2.1.2/4.2.1.3 → Normalfall $\eta_{fc} = \eta_t = 1.0$
 γ_c → 1.5 → SIA 262, Tab. 3

Biegebeanspruchung – Allgemeines

Betonstahl, σ - ϵ -Diagramm und Bemessungswert der Fließgrenze

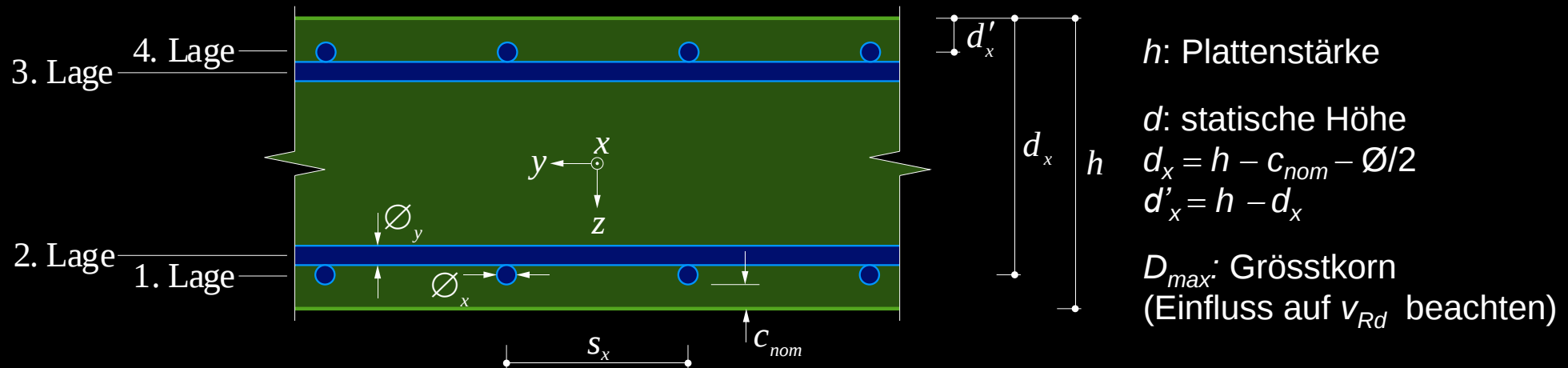
- SIA 262, Fig. 16 → siehe auch Vorlesung Materialverhalten!
- SIA 262, 2.3.2.5 → Bemessungswert der Fließgrenze von Betonstahl



Rechteckquerschnitte - Konstruktive Durchbildung

[1], Seite 2.2ff, SIA 262, Ziff. 5; **Platten Ziff. 5.5.3 (z.B. Decken...)**

- Platten üblicherweise orthogonal bewehrt in 4 Lagen, Haupttragrichtung = 1./4. Lage (→ maximaler Hebelarm; nicht immer eindeutig). Dicke Platten ($h > 400$ mm) verbügeln.
- Stablänge $< 1'000 \cdot \emptyset$ (Handling); bei Grossprojekten u.U. Abklärung Lagerlängen grosser $\emptyset$
- Stösse in Zonen geringer Beanspruchung, Stosslänge ca. $50\emptyset$ (SIA 262, 5.2.5/5.2.6)

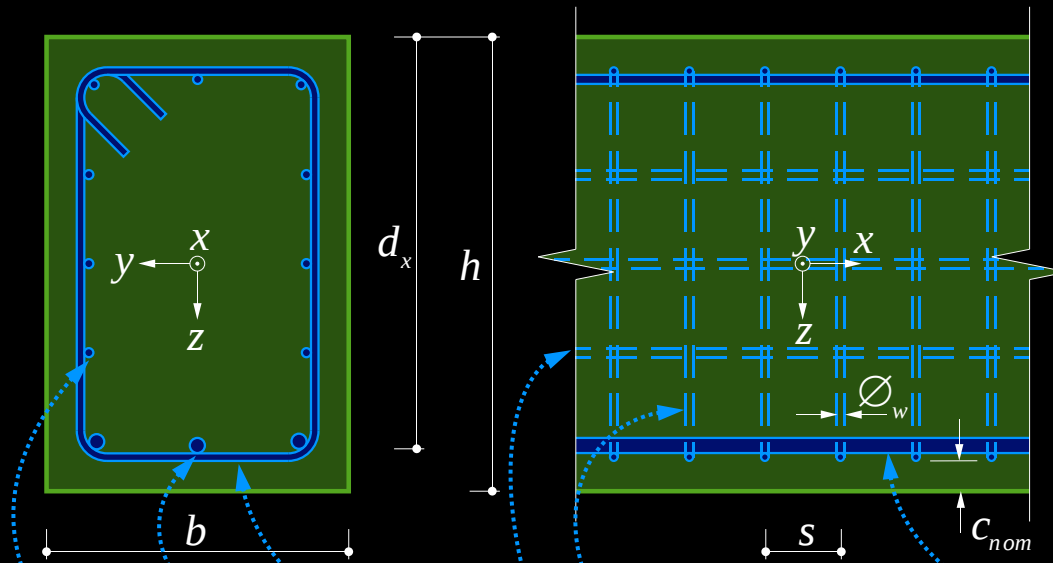


- $\emptyset$ Stabdurchmesser (Querschnittstabelle): (6,8), 10, 12, ..., 20, 22, 26, 30, (34, 40) mm
 s Stababstand (siehe SIA 262, 5.2.3/5.5.3): üblich (75), 100, 125, 150, 200, 250, (300) mm
 c_{nom} Bewehrungsüberdeckung (SIA 262, 5.2.2): ca. 20....60 mm (je nach Expositionsklasse)

Rechteckquerschnitte - Konstruktive Durchbildung

[1], Seite 2.2ff, SIA 262, Ziff. 5; **Balken Ziff. 5.5.3 (z.B. Unterzüge...)**

- Balken sind zu verbügeln. Bügel (Abstand $s < 25\varnothing$) müssen Längszugbewehrung umfassen.
- Stösse (Bügel und Längsbewehrung): Stosslänge (ca. $50\varnothing$, siehe SIA 262, 5.2.5).



Bügelbewehrungsgehalt ρ_w
min. 0.2%, → zweischnittige Bügel:

$$\rho_w = \frac{\pi \cdot \varnothing_w^2}{2 \cdot b \cdot s} \geq 0.2\%$$

NB: nach SIA 262 (2013) sind
Bügelbewehrungsgehalte von ca. 0.1%
ausreichend:

$$\rho_w \geq 0.1\% \sqrt{\frac{f_{ck}}{30}} \frac{500}{f_{sk}}$$

→ bei Neubauten in der Regel nicht
sinnvoll (Robustheit)

d_x : statische Höhe
 $d_x = h - c_{nom} - \varnothing_w - \varnothing/2$

Bügel

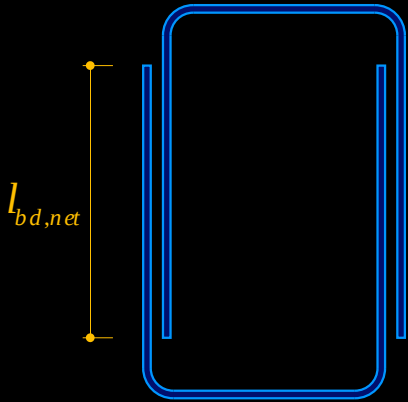
Haupt(biege)bewehrung (Tragsicherheit)

Konstruktive Längsbewehrung

Rechteckquerschnitte - Konstruktive Durchbildung

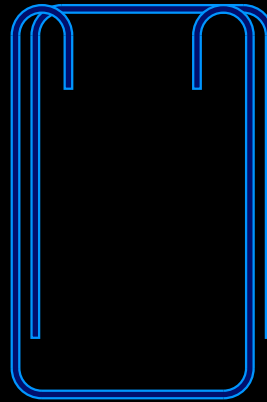
Alternative Bügelformen ([1], Seite 2.4)

(«zweischnittige» Bügel: zwei Bügeläste im Querschnitt)



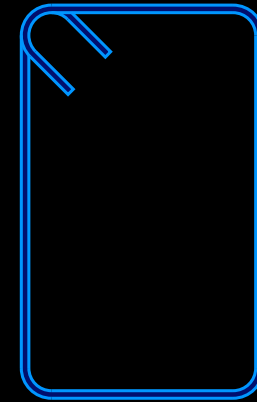
Steckbügelpaar

- + einfache Montage Längsbewehrung, keine Bewehrung im Weg, beide Bügel gleiche Position
- **Stosslänge** nur mit kleinen $\emptyset$ gewährleistet (viele Bügel)
- Arbeitssicherheit (wenn unterer Bügel alleine steht)



U-Bügel mit Endhaken

- + Arbeitssicherheit (wenn unterer Bügel alleine steht)
- $\pm$ gleich wie Steckbügelpaar, aber evtl. Platzprobleme (Haken) bei Stößen / grossen Bewehrungsgehalten

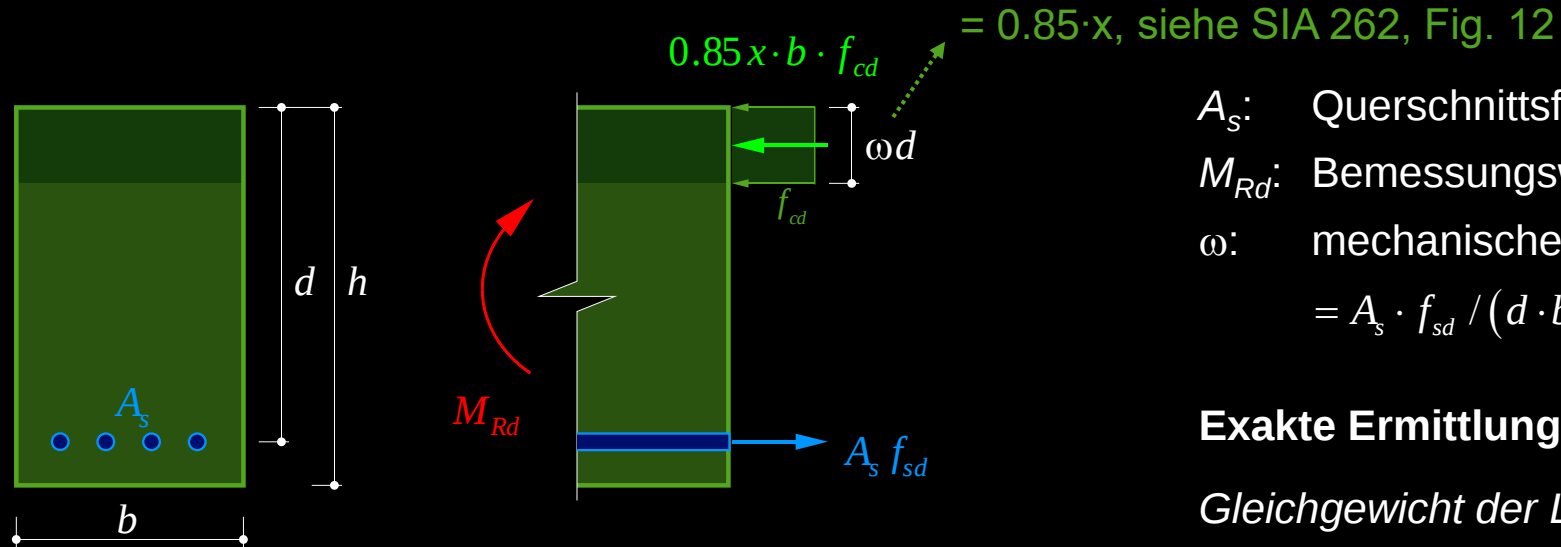


Geschlossene Bügel, mit 135° Endhaken

- + optimale statische Wirkung (Verankerung)
- Längsbewehrung muss eingefädelt werden, bei langen Balken und dicker Bewehrung fast unmöglich
- beschränkt praxistauglich

Biege­widerstand – Rechteckquerschnitte

[1], Seite 2.4, **Keine Bewehrung auf Biegedruckseite (Normalfall für den Tragsicherheitsnachweis in der Praxis)**



A_s : Querschnittsfläche Bewehrung
 M_{Rd} : Bemessungswert Biege­widerstand
 ω : mechanischer Bewehrungs­gehalt
 $= A_s \cdot f_{sd} / (d \cdot b \cdot f_{cd})$

Exakte Ermittlung von M_{Rd} resp. ω_{erf} :

Gleichgewicht der Längskräfte:

$$A_s \cdot f_{sd} = \omega \cdot d \cdot b \cdot f_{cd}$$

Hebelarm der inneren Kräfte: $z = d \cdot (1 - \omega/2)$

(«Biege­nachweis»)

$$M_{Rd} = A_s f_{sd} d \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) = f_{cd} b d^2 \omega \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \geq M_d$$

Aufgelöst nach ω :

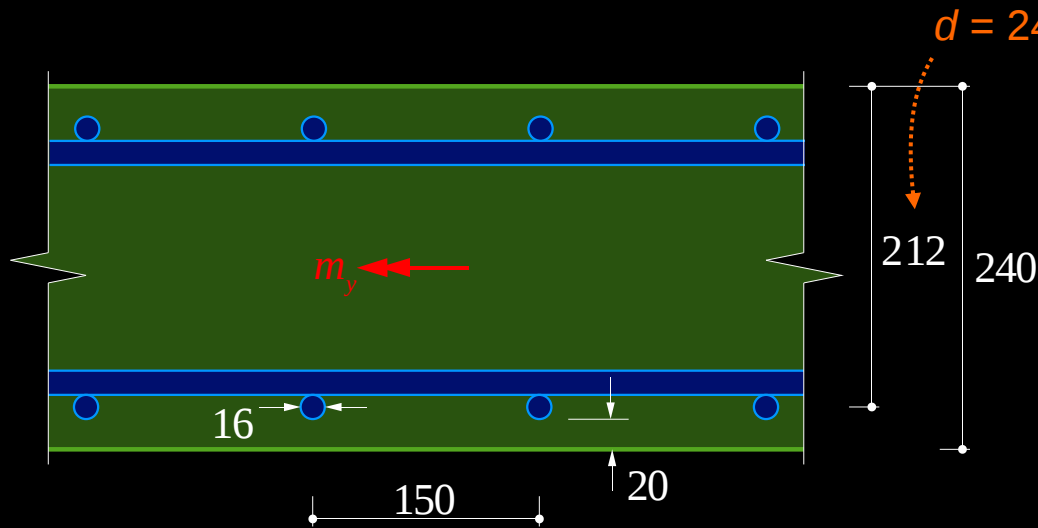
$$\omega_{erf} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}}$$

Iterative Ermittlung der Bewehrung:

1. Annahme z. B. $z_i \approx 0.9d \rightarrow A_{s,erf} \geq \frac{M_d}{0.9 \cdot d \cdot f_{sd}}$
2. Bewehrung $A_{s,eff} > A_{s,erf}$ wählen (Anzahl, $\emptyset$)
3. Kontrolle $z_{eff} = d - \frac{A_{s,eff} f_{sd}}{2 \cdot b \cdot f_{cd}}$, $M_{Rd} = A_{s,eff} f_{sd} \cdot z_{eff}$
 $\rightarrow$ Iteration falls $M_{Rd} < M_d$

Biegewiderstand – Beispiel Stahlbetonplatte

[1], Seite 2.5



- Stahlbetonplatte, $h = 240 \text{ mm}$
- Beton C25/30
→ $f_{cd} = 16.5 \text{ MPa}$
- Betonstahl B500B
→ $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$
- $c_{nom} = 20 \text{ mm}$

Genaue Berechnung des Biegewiderstandes:

$$a_s = \frac{\varnothing^2 \cdot \pi}{4 \cdot s} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} = 1'340 \text{ mm}^2/\text{m}$$

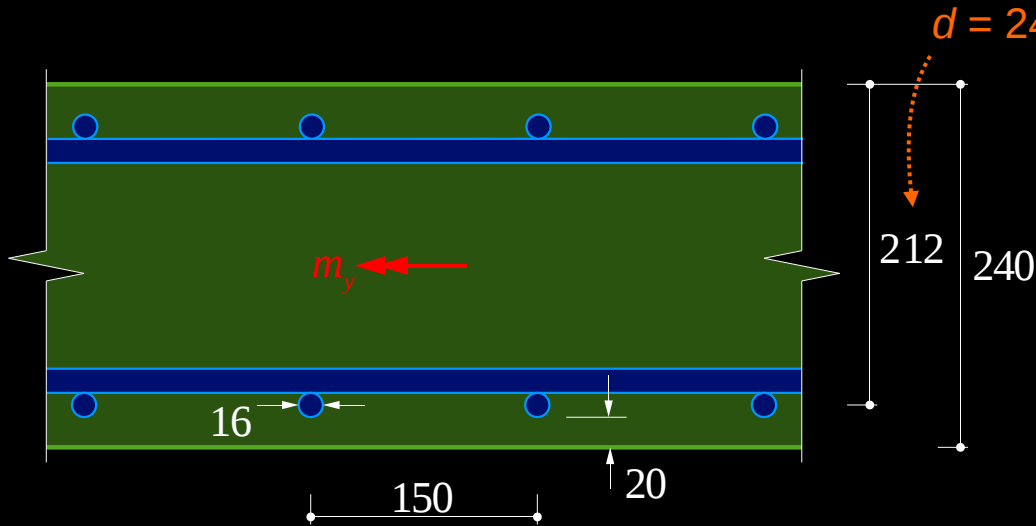
$$\rho = \frac{a_s}{d} = \frac{1'340}{212 \cdot 1'000} = 0.63\%$$

$$\omega = \frac{a_s \cdot f_{sd}}{d \cdot 1'000 \text{ mm/m} \cdot f_{cd}} = \frac{1'340 \cdot 0.435}{212 \cdot 1'000 \cdot 0.0165} = \frac{583 \text{ kN/m}}{3'498 \text{ kN/m}} = 0.167$$

$$m_{Rd} = f_{cd} \cdot d^2 \cdot \omega \cdot (1 - \omega / 2) = 0.0165 \cdot 212^2 \cdot 0.167 \cdot (1 - 0.084) = 113.3 \text{ kNm/m}$$

Biegewiderstand – Beispiel Stahlbetonplatte

[1], Seite 2.5



- Stahlbetonplatte, $h = 240 \text{ mm}$

- Beton C25/30

→ $f_{cd} = 16.5 \text{ MPa}$

- Betonstahl B500B

→ $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$

- $c_{nom} = 20 \text{ mm}$

Annahme Hebelarm der inneren Kräfte $z \approx 0.9 \cdot d$ resp. $1 - \omega/2 \approx 0.9$ (in der Regel konservativ)

Vereinfachte Berechnung des Biegewiderstandes:

$$m_{Rd} \approx a_s \cdot f_{sd} \cdot 0.9 \cdot d = 1'340 \cdot 0.435 \cdot 0.9 \cdot 0.212 = 111.2 \text{ kNm/m}$$

$111.2 / 113.3 = 0.982 \rightarrow$
Fehler $< 2\%$ (sichere Seite)

Kontrolle der Annahme
 $z = 0.9d$

$$\left\{ \begin{aligned} 0.85 \cdot x &= \frac{a_s \cdot f_{sd}}{f_{cd}} = \frac{1'340 \cdot 0.435}{16.5} = \frac{583 \text{ kN/m}}{16.5 \text{ MPa}} = 35.3 \text{ mm} \\ \rightarrow z &= 212 - 35.3 / 2 = 194.4 \text{ mm} > 0.9 \cdot 212 = 190.8 \text{ mm} \rightarrow \text{i.O.} \end{aligned} \right.$$

Zulässige Nutzlast – Beispiel Stahlbetonplatte

Siehe [1], Seite 2.6

- Einfeldrige Stahlbetonplatte, $h = 300$ mm, $l = 7.5$ m
- Beton C25/30 $\rightarrow f_{cd} = 16.5$ MPa
- Betonstahl B500B, $\varnothing 18/150 \rightarrow f_{sd} = 435$ MPa
- $c_{nom} = 30$ mm, $d = h - c_{nom} - \varnothing/2 = 261$ mm
- Gesucht: Zulässige Nutzlast q_{adm}

Lösung:

$$a_s = \frac{\varnothing^2 \cdot \pi}{4 \cdot s} = \frac{18^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} = 1'696 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Querschnittstabelle (Website)

$$a_s f_{sd} = 0.435 \cdot 1'696 = 737.8 \text{ kN/m}$$

$$m_{Rd} \approx a_s \cdot f_{sd} \cdot 0.9 \cdot d = 173.3 \text{ kNm/m}$$

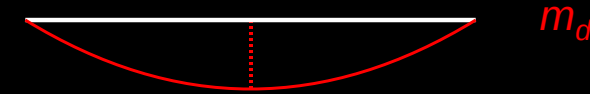
$$\chi = \frac{a_s f_{sd}}{0.85 f_{cd}} = \frac{737.8}{0.85 \cdot 16.5} = 53 \text{ mm}, \quad \omega = \frac{f_{sd} \cdot a_s}{f_{cd} \cdot d} = 0.171$$

$$m_{Rd} = d^2 f_c \cdot \omega \cdot (1 - \omega/2) = 176.1 \text{ kNm/m}$$

$$\text{NB: } \chi/d = 53/261 = 0.2 < 0.35 \rightarrow \text{Duktilität i.O.}$$

$$g_d = 1.35 \cdot 0.3 \cdot 25 = 10.13 \text{ kN/m}^2$$

$$q_d = 1.5 \cdot q_{adm}$$



$$m_{d, \max} = \frac{(q_d + g_d) \cdot l^2}{8} = \frac{(1.5 \cdot q_{adm} + g_d) \cdot l^2}{8}$$

$$m_{d, \max} = m_{Rd} \rightarrow q_{adm} = \left(\frac{8 \cdot m_{Rd}}{l^2} - g_d \right) / 1.5$$

$$\rightarrow q_{adm} = \left(\frac{8 \cdot 173.3}{7.5^2} - 10.13 \right) / 1.5 = 9.7 \text{ kN/m}^2$$

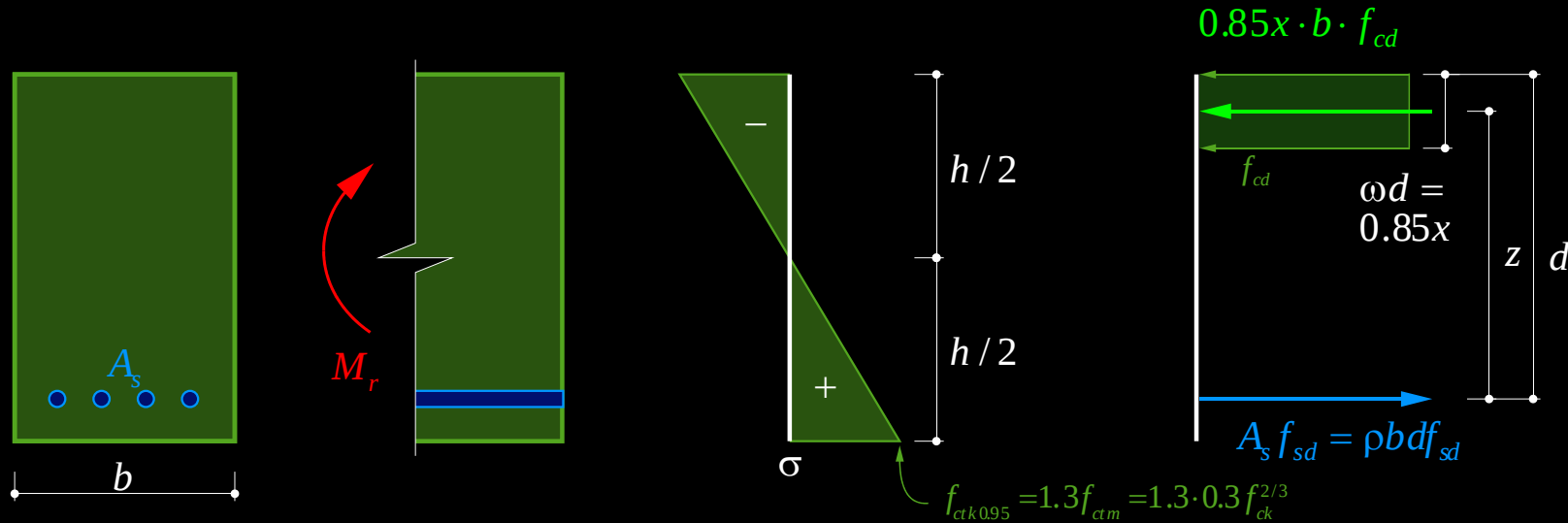
Näherung (konservativ)

$$\rightarrow q_{adm} = \left(\frac{8 \cdot 176.1}{7.5^2} - 10.13 \right) / 1.5 = 9.9 \text{ kN/m}^2$$

«exakte» Lösung

Biegung – Mindestbewehrung

[1], Seite 2.10



Mindestbewehrungsgehalt für Biegung allgemein

(Vermeidung eines Sprödbruchs bei Rissbildung): $M_{Rd} \geq M_r$

Analytische Lösung für Rechteckquerschnitte

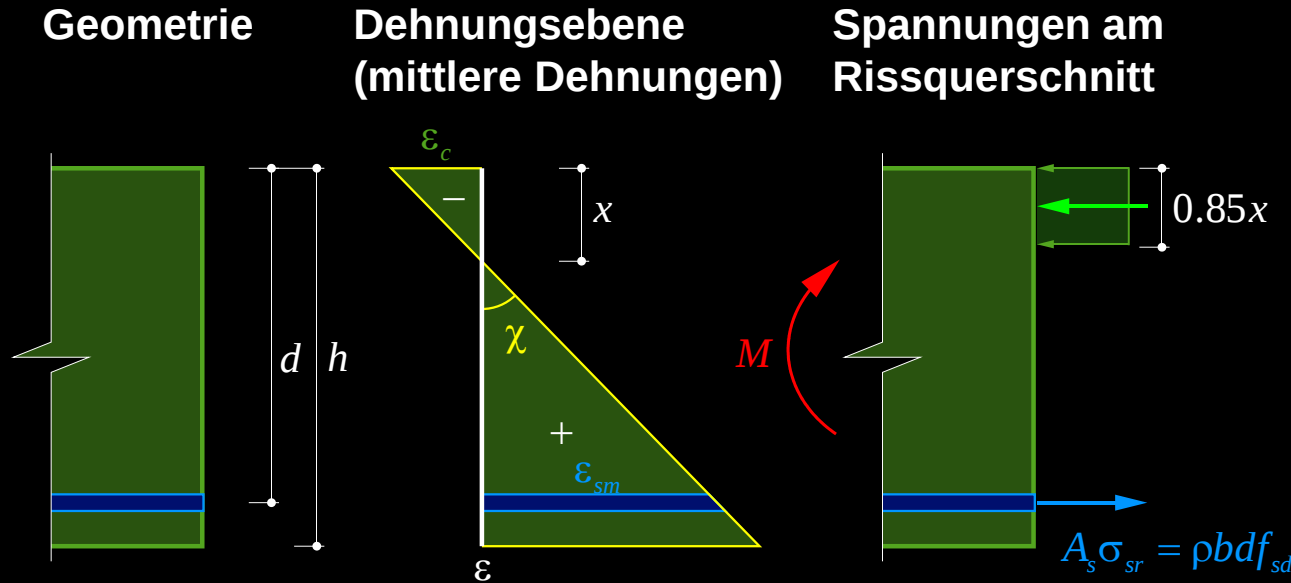
$$M_r = \frac{bh^2}{6} \cdot 1.3 f_{ctm} \rightarrow \omega_{\min} = 1 - \sqrt{1 - \frac{h^2 1.3 f_{ctm}}{3d^2 f_{cd}}}, \rho_{\min} = \omega_{\min} \frac{f_{cd}}{f_{sd}}$$

Näherung für Rechteckquerschnitte mit $z_{eff} \approx 0.9d \approx 0.8h$

$$M_r = \frac{bh^2}{6} \cdot 1.3 f_{ctm}, M_{Rd} = 0.9d A_s f_{sd} = \frac{bh^2}{6} \cdot 1.3 f_{ctm} \rightarrow A_s \geq \frac{1.3 \cdot bh^2 f_{ctm}}{6 \cdot 0.9d f_{sd}}, \rho_{\min} = 0.24 \frac{h^2 f_{ctm}}{d^2 f_{sd}} \approx 0.3 \frac{f_{ctm}}{f_{sd}}, \omega_{\min} \approx \frac{0.135}{f_{ck}^{1/3}}$$

Beton	C20/25	C30/37	C50/60
d = 0.8 h	0.057 0.0017	0.050 0.0023	0.051 0.0039
d = 0.9 h	0.045 0.0014	0.040 0.0018	0.040 0.0031
Näherung	0.050 0.0015	0.043 0.0020	0.037 0.0028

Biegung – Versagensarten



Krümmung bei Bruch
(Mass für Duktilität):

$$\chi = \frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_c}{d} = \frac{\varepsilon_{sm}}{d - x} = \frac{|\varepsilon_c|}{x}$$

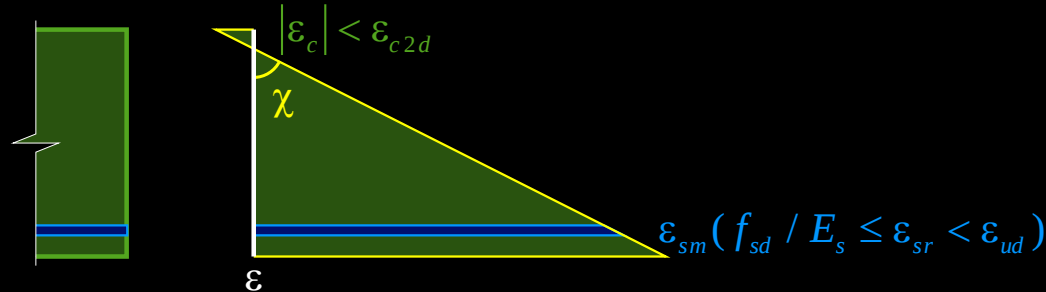
(wegen Verbund ist
 $\varepsilon_{sm} < \sigma_{sr} / E_s$, Ermittlung von
 $\varepsilon_{sm} \rightarrow$ Zuggurtmodell)

Grundsätzlich sind folgende Versagensarten möglich:

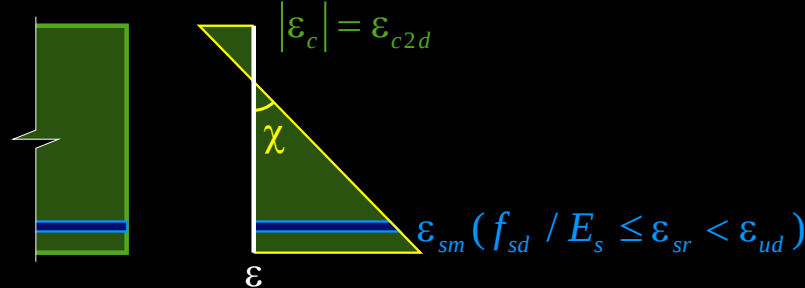
- **Sprödbbruch bei Rissbildung:**
(sehr spröde, keine Vorankündigung) $M_{Rd} < M_r$ unbedingt vermeiden ($\rightarrow$ Mindestbewehrung)
- **Bewehrung reißt, bevor Beton bricht:**
(duktile, Ankündigung durch breite Risse) $\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}$
 $|\varepsilon_c| < \varepsilon_{c2d}$ bei kleinen ρ und $\emptyset$ resp. gutem Verbund, ok
- **Beton bricht, während Bewehrung fließt:**
(duktile, Ankündigung durch Risse) $f_{sd} / E_s \leq \varepsilon_{sr} < \varepsilon_{ud}$
 $|\varepsilon_c| = \varepsilon_{c2d}$ häufigste Bruchart, in der Regel anstreben
- **Beton bricht, bevor Bewehrung fließt:**
(spröde, geringe Ankündigung) $\varepsilon_{sr} < f_{sd} / E_s$
 $|\varepsilon_c| = \varepsilon_{c2d}$ vermeiden (Abmessungen erhöhen, ggf. Umschnürung)

Biegung – Versagensarten

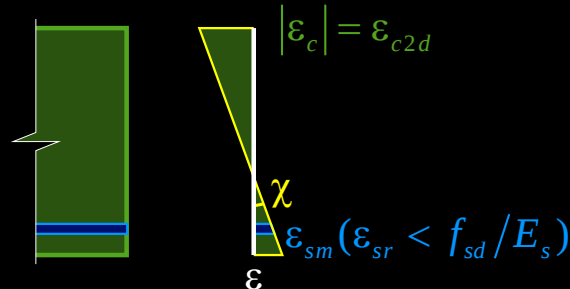
- Bewehrung reisst, bei Rissbildung
- Bewehrung reisst, bevor Beton bricht



- Beton bricht, während Bewehrung fließt



- Beton bricht, bevor Bewehrung fließt



→ SIA 262: Vermeidung von Sprödbrüchen durch Mindestbewehrung (für normale Verhältnisse: $\rho_{min} \approx 0.2 \dots 0.3\%$)

- Bewehrungsgehalt nimmt zu
- Höhe der Druckzone nimmt zu
- Stahldehnung nimmt ab

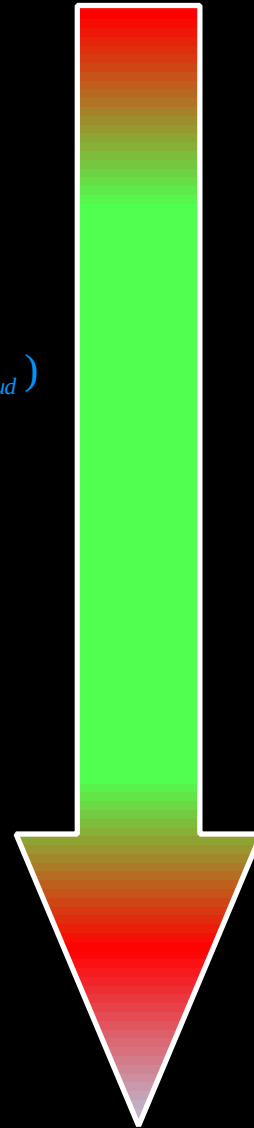
- Bruchkrümmung nimmt ab
- Duktilität nimmt ab

→ SIA 262: Gewährleistung ausreichender Duktilität durch Begrenzung der Druckzonenhöhe:

$$x/d \leq 0.35 \quad (\rho_{max} \approx 1.4 \%)$$

$$x/d \leq 0.50 \quad (\rho_{max} \approx 2.0 \%)$$

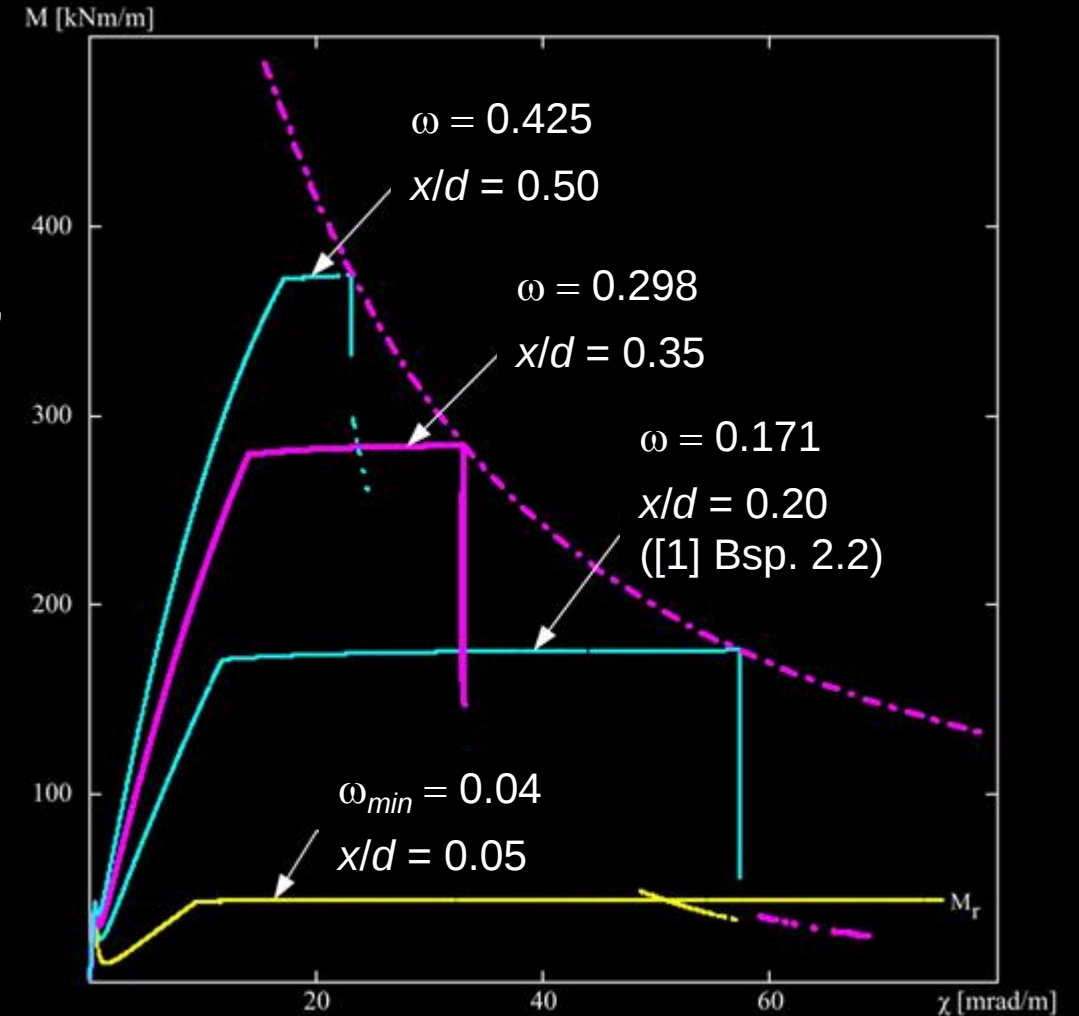
(ρ_{max} : normale Verhältnisse)



Biegung – Duktilität

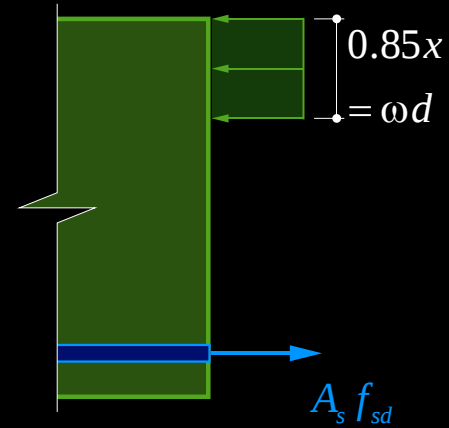
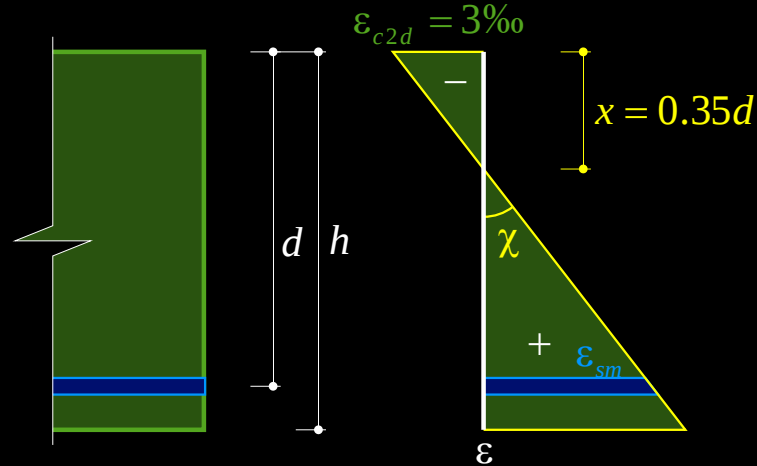
Momenten-Krümmungs-Diagramme ($M-\chi$) für Beispiel 2.2 aus [1] mit verschiedenen Bewehrungsgehalten

- Versagen durch Betonbruch begrenzt die Duktilität
- Mit Begrenzung $x/d < 0.35$ resp. $x/d < 0.50$ fließt Bewehrung noch, bevor der Beton bricht
- Versagen durch Reißen der Bewehrung nicht untersucht (bei Mindestbewehrung zu erwarten); Berücksichtigung erfordert Beziehung $\sigma_{sr}(\varepsilon_{sm})$
 - Zuggurtmodell



Biegung – Duktilität

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262



$$\leq 0.85 \cdot 0.35d = 0.298d$$

$$\rightarrow \omega \leq 0.298$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{sm} &= \frac{\varepsilon_{c2d}}{x} (d - x)) \\ &= 0.65 / 0.35 \cdot \varepsilon_{c2d} \approx 5.6\text{‰} \\ \text{somit } \varepsilon_{sr} &\gg f_{sd}/E_s \end{aligned}$$

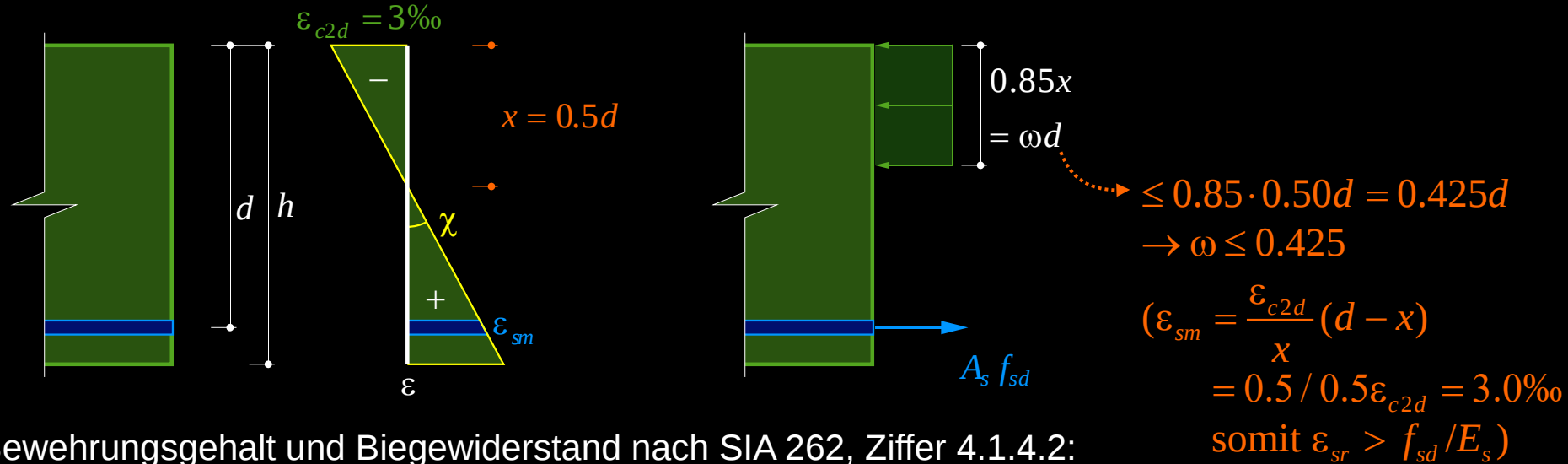
Maximaler Bewehrungsgehalt und Biegezugwiderstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $x/d \leq 0.35$: Schnittgrössenumlagerungen **ohne** Nachweis des Verformungsvermögens

$$x/d \leq 0.35 \rightarrow \omega \leq 0.298 \rightarrow M_{Rd} = bd^2 f_{cd} \omega (1 - \omega/2) \leq 0.253 \cdot bd^2 f_{cd}$$

Biegung – Duktilität

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262

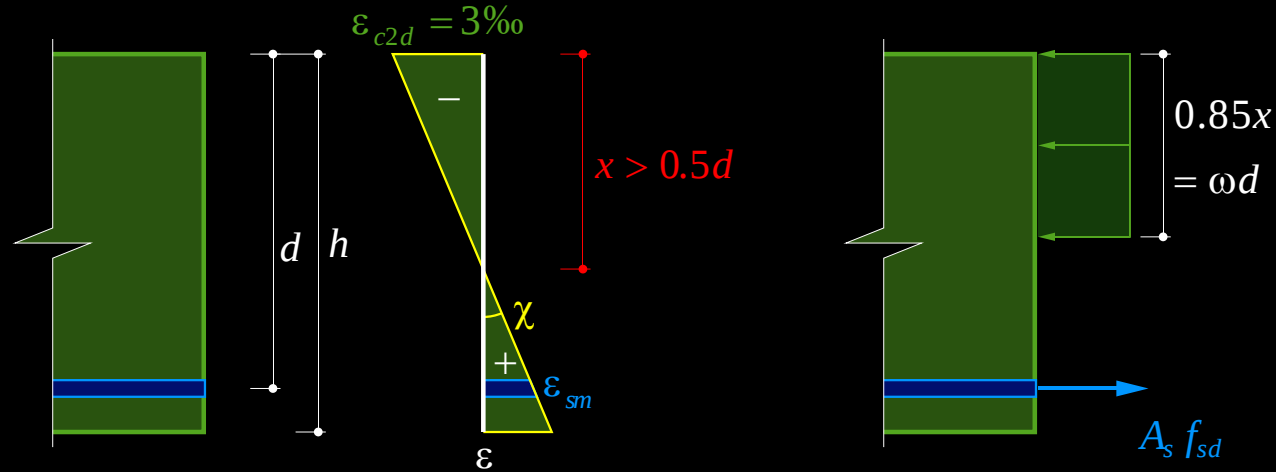


Maximaler Bewehrungsgehalt und Biegezugwiderstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $0.35 \leq x/d \leq 0.5$: Schnittgrössenumlagerungen **mit** Nachweis des Verformungsvermögens
 $x / d \leq 0.50 \rightarrow \omega \leq 0.425 \rightarrow M_{Rd} = b d^2 f_{cd} \omega (1 - \omega/2) \leq 0.335 \cdot b d^2 f_{cd}$

Biegung – Duktilität

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262

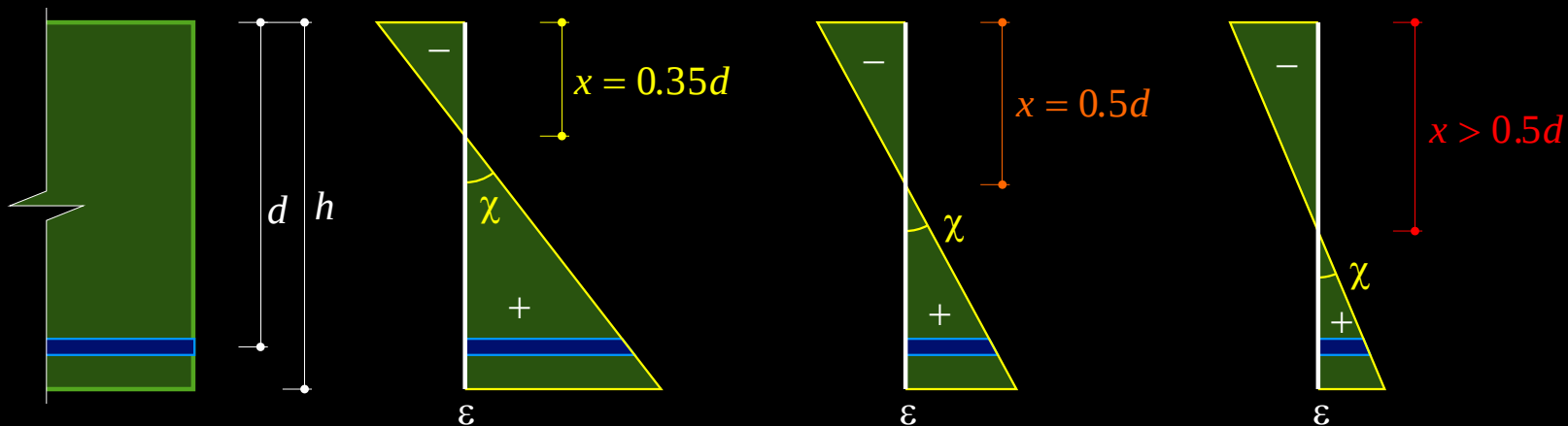


Maximaler Bewehrungsgehalt und Biegezugwiderstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $x/d > 0.50$: ist zu vermeiden

Biegung – Duktilität

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262



Maximaler Bewehrungsgehalt und Biegewiderstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $x/d \leq 0.35$: Schnittgrössenumlagerungen **ohne** Nachweis des Verformungsvermögens
 $x / d \leq 0.35 \rightarrow \omega \leq 0.298 \rightarrow M_{Rd} = b d^2 f_{cd} \omega (1 - \omega / 2) \leq 0.253 \cdot b d^2 f_{cd}$
- $0.35 \leq x/d \leq 0.5$: Schnittgrössenumlagerungen **mit** Nachweis des Verformungsvermögens
 $x / d \leq 0.50 \rightarrow \omega \leq 0.425 \rightarrow M_{Rd} = b d^2 f_{cd} \omega (1 - \omega / 2) \leq 0.335 \cdot b d^2 f_{cd}$
- $x/d > 0.50$: **ist zu vermeiden**

Biegung – Duktilität

Rotationsbedarf $\Theta_{pu,req}$ (Näherung, Beispiel Zweifeldträger)

Allgemein sind Verformungsvermögen und Verformungsbedarf gekoppelt.

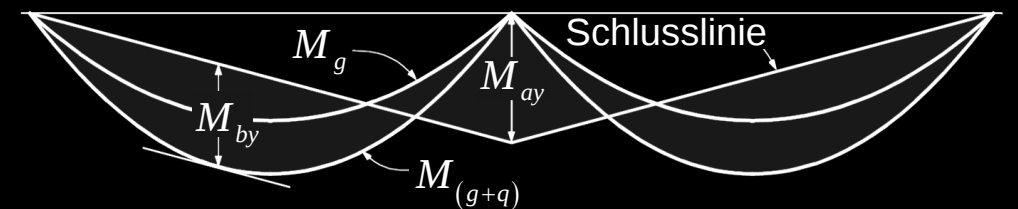
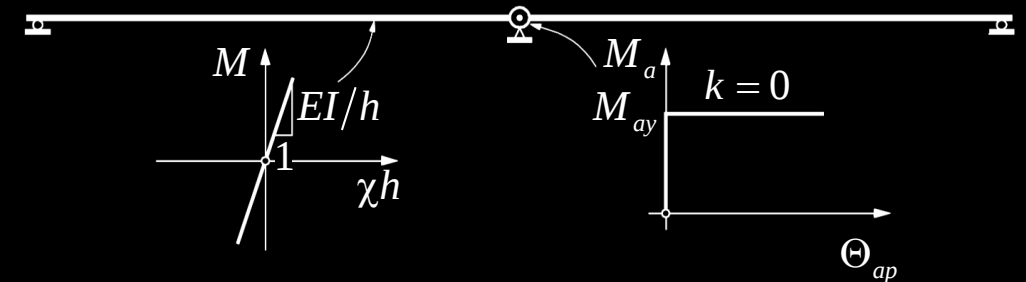
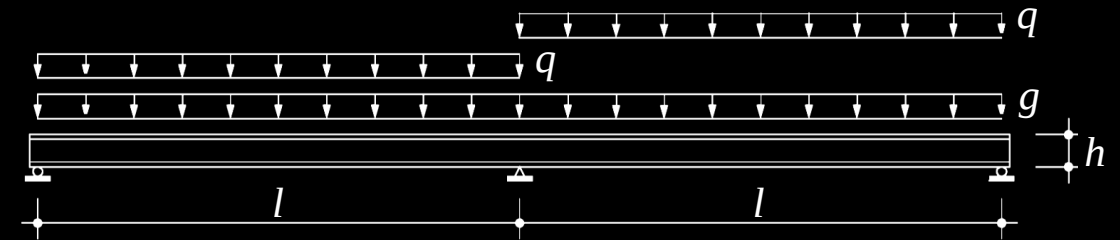
Nur für moderate Umlagerungen kann die Wechselwirkung vernachlässigt werden.

Zusätzliche Vereinfachungen:

- Biegesteifigkeit konstant
- M - Θ starr-ideal plastisch (keine Verfestigung im plastischen Gelenk)

Damit entspricht der **Rotationsbedarf** $\Theta_{pu,req}$ des Gelenks beim Zwischenauflager dem Auflagerdrehwinkel der beiden Trägerhälften, die nach dem Erreichen von M_{ay} (bei $q = q_y$) als einfache Balken betrachtet werden können:

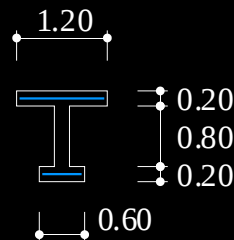
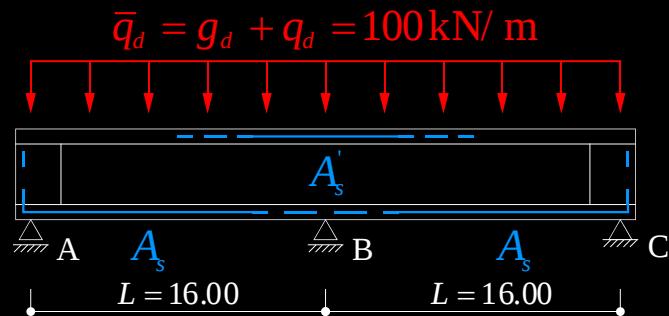
$$\Theta_{pu,req} = \frac{(q - q_y) l^3}{12EI}$$



(Zweifeldträger, erstes plastisches Gelenk beim Zwischenauflager, Verformungsbedarf für Vollast)

Biegung – Duktilität

Rotationsbedarf – Beispiel Zweifeldträger

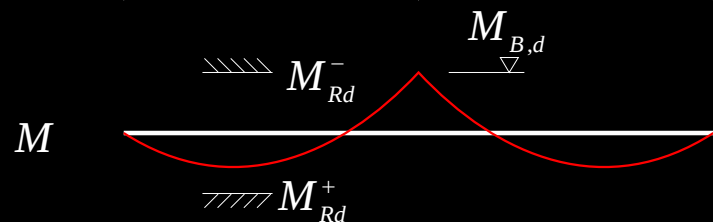


$$A'_s = 8\text{Ø}26$$

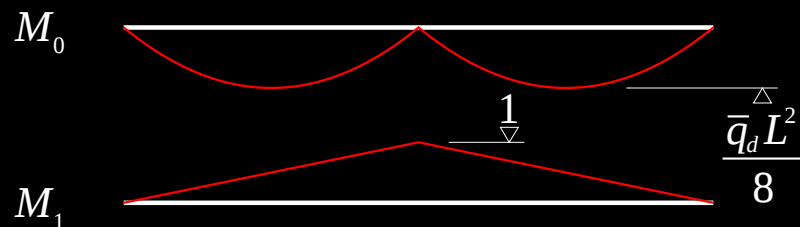
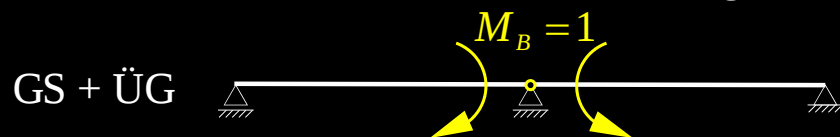
$$A_s = 8\text{Ø}26$$

$$A_s f_{sd} = 8 \cdot 530 \cdot 0.435 = 1'848 \text{ kN}$$

$$M_{Rd}^- = z^- \cdot A_s f_{sd} \approx 1'848 \text{ kNm}$$



Moment über Zwischenauflager



Kraftmethode

$$\Theta_{B0} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} = 2 \cdot \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \cdot \left(-\frac{L}{3EI^+} \right) = -\frac{\bar{q}_d L^3}{12EI^+}$$

$$\Theta_{B1} = \int \frac{M_1^2}{EI} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{L}{3EI^-} = \frac{2L}{3EI^-}$$

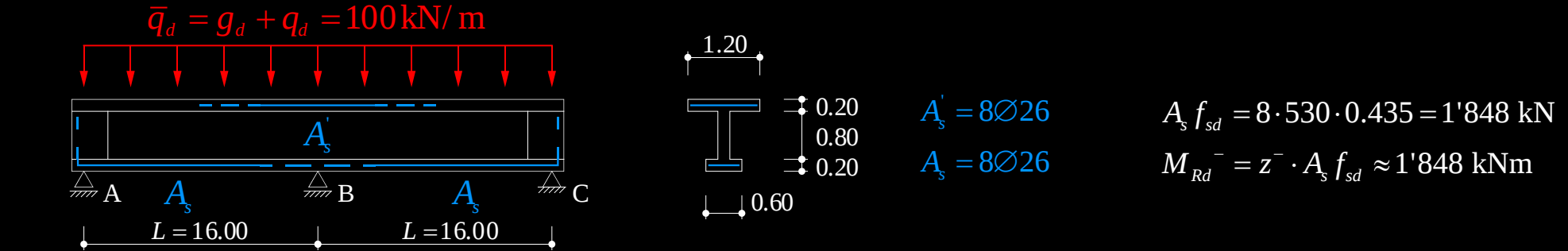
$$\Theta_B = \Theta_{B0} + M_B \Theta_{B1} = 0$$

$$\rightarrow M_B = -\frac{\Theta_{B0}}{\Theta_{B1}} = \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \frac{EI^-}{EI^+} = \alpha_r \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \leq \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \text{ (i.d.R.)}$$

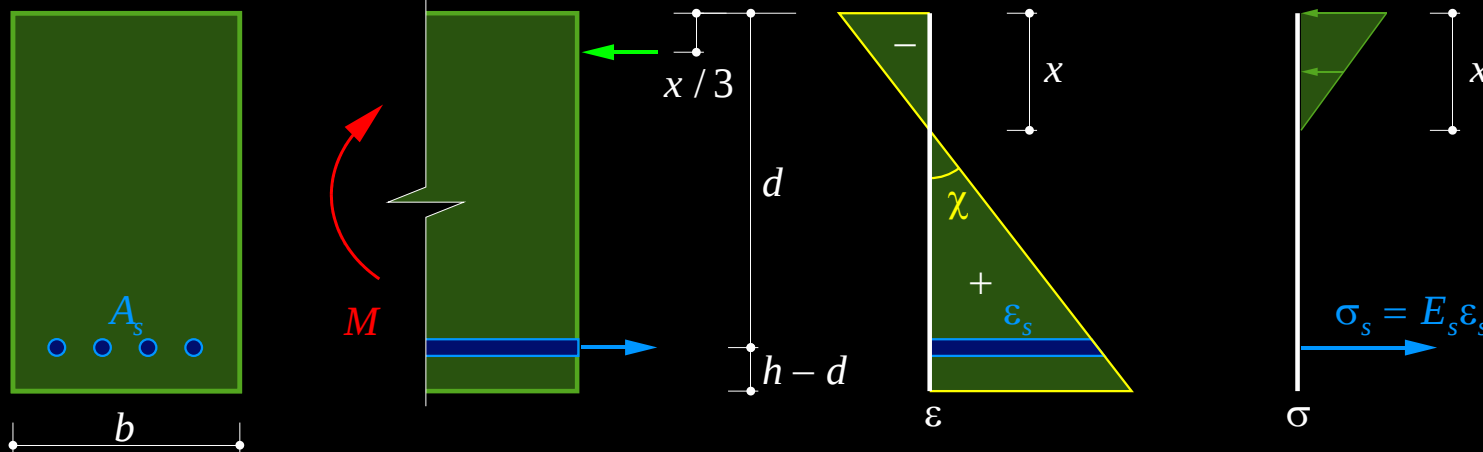
Da meist $EI^- < EI^+$ ist (Rissbildung beginnt über B), findet ein Teil der Schnittkraftumlagerungen bereits vor Fließbeginn statt (dadurch wird der plastische Rotationsbedarf reduziert → günstig!)

Biegung – Duktilität

Rotationsbedarf – Beispiel Zweifeldträger



EI''' (gerissen)



$$M = A_s E_s \varepsilon_s \left(d - \frac{x}{3} \right), \quad \chi = \frac{\varepsilon_s}{d - x} = \frac{M}{EI''} \quad (\text{hier vereinfachend } \varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sr} \text{ angenommen, mit } \varepsilon_{sm} < \varepsilon_{sr} \text{ resultiert ein kleinerer Rotationsbedarf})$$

$$\rightarrow EI'' = \frac{M}{\chi} = A_s E_s \underbrace{\left(d - \frac{x}{3} \right)}_{\approx z} \underbrace{(d - x)}_{\approx 0.9z} \approx 0.9 A_s E_s z^2 = 0.9 \cdot 4'240 \cdot 205'000 \cdot 1^2 = 780 \text{ MNm}^2 \quad (EI_i^I = 3'502 \text{ MNm}^2)$$

Biegung – Duktilität

Rotationsbedarf – Beispiel Zweifeldträger

Flie遥beginn

$$\alpha_r \frac{\bar{q}_d L^2}{8} = M_{Rd}^- \rightarrow \bar{q}_{dy} = \frac{8M_{Rd}^-}{\alpha_r L^2} = \frac{1}{\alpha_r} \frac{8 \cdot 1'848}{256} = \frac{1}{\alpha_r} 57.8 \text{ kN/m}$$

$$\rightarrow \bar{q}_d - \bar{q}_{dy} = 100 - \frac{1}{\alpha_r} 57.8 \text{ kN/m} = 42.2 \text{ kN/m} \quad (\alpha_r = 1.0)$$

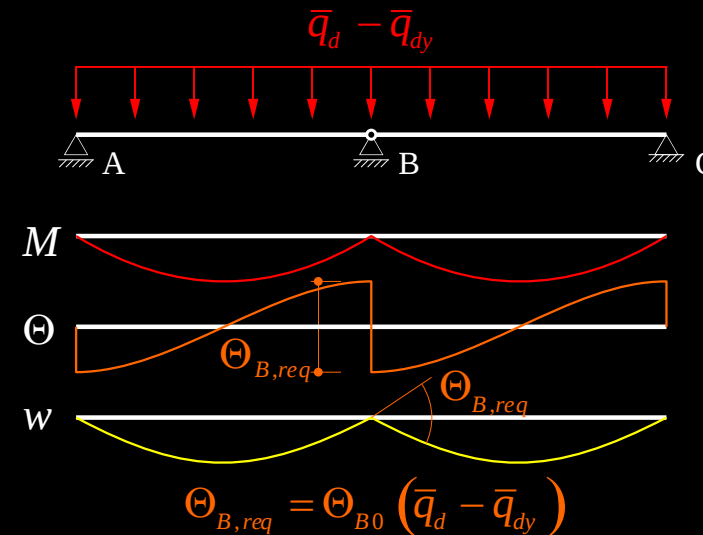
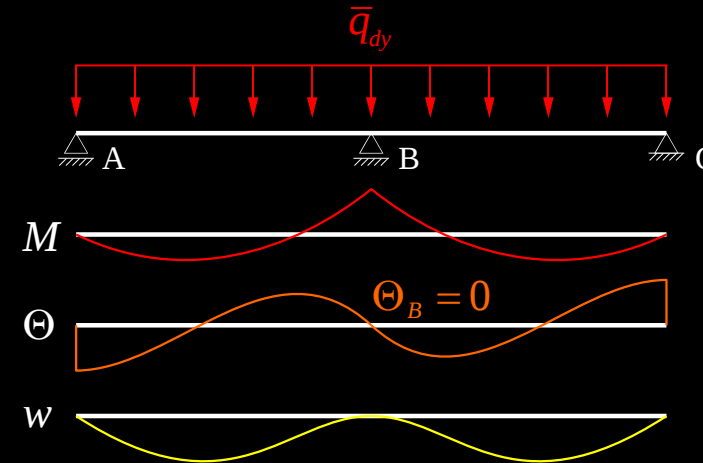
$$= 27.8 \text{ kN/m} \quad (\alpha_r = 0.8)$$

$$\Theta_{B,req} = (\bar{q}_d - \bar{q}_{dy}) \frac{L^3}{12EI} = \frac{42.2 \cdot 16^3}{12 \cdot 780 \cdot 10^3} \frac{\text{kNm}^2}{\text{kNm}^2}$$

$$= 18.5 \text{ mrad} \quad (\alpha_r = 1)$$

$$= 12.2 \text{ mrad} \quad (\alpha_r = 0.8)$$

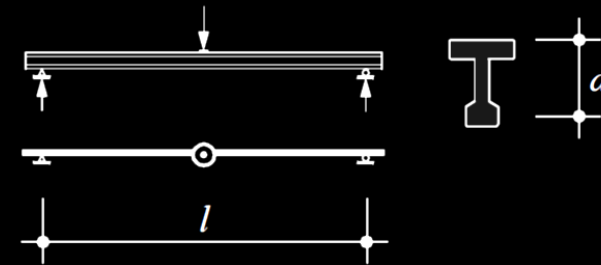
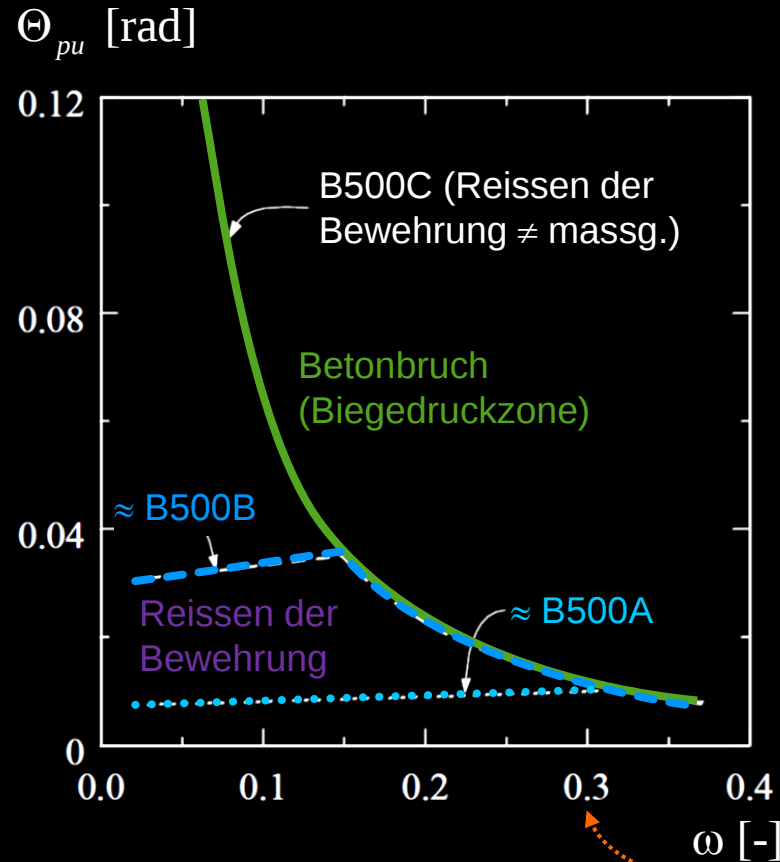
Nach Erreichen von M_{Rd}^- :
zwei Einfeldträger für Zusatzbelastung $\bar{q}_d - \bar{q}_{dy}$ mit entsprechender Relativverdrehung der Trägerenden über B (siehe GS+ÜG in Folie 28)



$$\Theta_{B,req} = \Theta_{B0} (\bar{q}_d - \bar{q}_{dy})$$

Biegung – Duktilität

Beispiel: Detaillierte Untersuchung des Verformungsvermögens (siehe SB III)
 Plastischer Gelenkwinkel in Funktion von ω ; Duktilitätsklassen Betonstahl A-C (2003)



Grundlagen für die Berechnungen:

$f_y = 500 \text{ MPa}$	$l/d = 20$
$E_s = 200 \text{ GPa}$	$\theta = 45^\circ$
$f_c = 30 \text{ MPa}$	$\varnothing = 20 \text{ mm}$
$\epsilon_{cu} = 5 \text{ ‰}$	$s_{rm} = 150 \text{ mm}$

$\omega = 0.298$ ($x/d = 0.35$): Verformungsvermögen deutlich geringer als bei kleinen ω

Biegung – Duktilität

Rotationsvermögen Θ_{pu} vereinfacht (siehe auch [1], p. 2-32ff)

Beschränkung der plastischen Rotation
infolge Betonstahl (Reissen der Bewehrung):

$$\Theta_{pus} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{smu}}{d - x} \right) \left(\frac{\varepsilon_{smy}}{d - x} \right)$$

Krümmung bei Flie遡beginn
Krümmung beim Reissen der Bewehrung

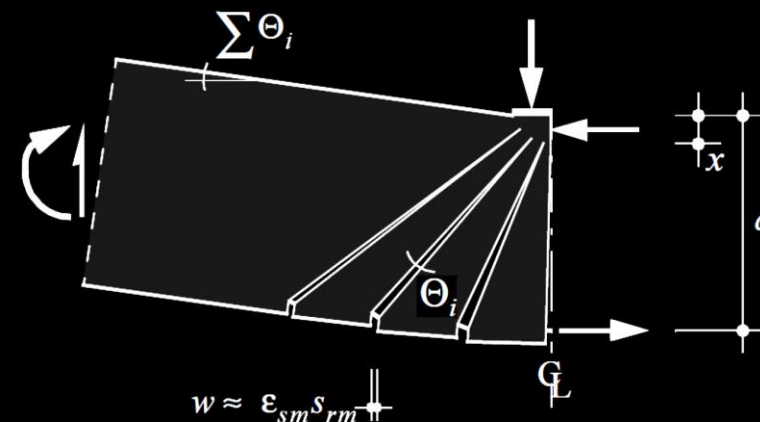
Beschränkung der plastischen Rotation
infolge Beton (Erreichen Bruchstauchung):

$$\Theta_{puc} = L_{pl} \left(\frac{\varepsilon_{c2d}}{x} \right) \left(\frac{\varepsilon_{smy}}{d - x} \right)$$

Krümmung bei Flie遡beginn
Krümmung bei Betonbruch

Rotation pro Riss: $\Theta_i \approx \frac{\varepsilon_{sm} s_{rm}}{d - x}$

Plastische Gelenkrotation = Summe der plastischen Rotationen aller Risse ab Flie遡beginn



L_{pl} Plastische Gelenklänge, abhängig von Belastungskonfiguration und Geometrie: Bereich, in welchem die Gurtbewehrung flie遡 (→ Gurtkraftverlauf i.A. aus Spannungsfeld ermitteln)
Näherung: $L_{pl} \approx 2d$, genauere Ermittlung siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete»

ε_{smu}	Mittlere Stahldehnung beim Erreichen von	$\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}$	$\sigma_{sr} = f_t$	} $\varepsilon_{sr} \leftrightarrow \varepsilon_{sm}$ → Zuggurtmodell
ε_{smy}	Mittlere Stahldehnung beim Erreichen von	$\varepsilon_{sr} = \frac{f_s}{E_s}$	$\sigma_{sr} = f_s$	

Biegung – Duktilität

Rotationsbedarf ↔ Rotationsvermögen vereinfacht – Beispiel Zweifeldträger

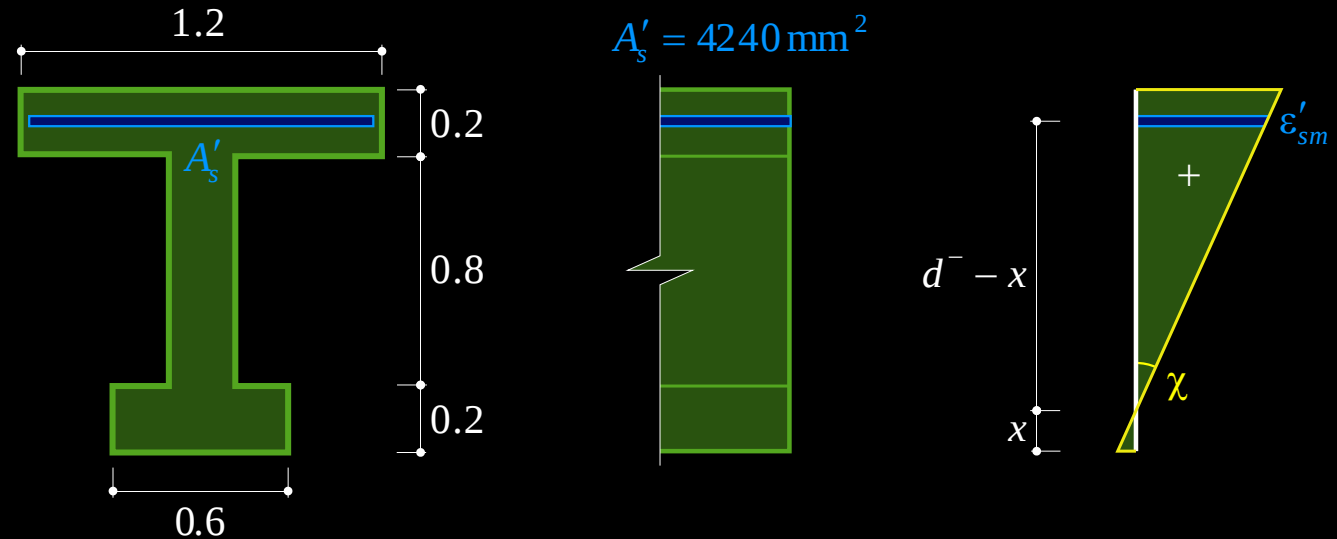
- C30/37:

$$f_{cd} = 20 \text{ MPa}, f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$$

- $d^- \approx 1.1 \text{ m}, A'_s f_{sd} = 1'848 \text{ kN}$

$$\rightarrow x = \frac{1'848}{0.85 \cdot 0.6 \cdot 20} = 181 \text{ mm}$$

$$d^- - x = 919 \text{ mm}$$



Rotation im Bruchzustand

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{puc} &= L_{pl} \cdot \left(\frac{\epsilon_{cu}}{x} - \frac{\epsilon_{smy}}{d^- - x} \right) \\ \Theta_{pus} &= L_{pl} \cdot \left(\frac{\epsilon_{smu}}{d^- - x} - \frac{\epsilon_{smy}}{d^- - x} \right) \end{aligned} \right\} \text{ mit } \frac{\epsilon_{smy}}{d^- - x} = \text{Krümmung bei Flie遥eginn, } L_{pl} = \text{plastische Länge} = \text{ca. } 2d^-$$

$$\approx \frac{f_s / E_s}{d^- - x} = 2.3 \text{ mrad/m}$$

Biegung – Duktilität

Rotationsbedarf ↔ Rotationsvermögen vereinfacht – Beispiel Zweifeldträger

Rotation im Bruchzustand

Betonbruch

$$\Theta_{puc} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d^- - x} \right) \approx 2 \cdot 1.10 \cdot \left(\frac{0.003}{0.181} - 0.0023 \right) = 14.3 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot 2.2 \text{ m} = 31.4 \text{ mrad}$$

$$\rightarrow \Theta_{puc} > \Theta_{B,req} \rightarrow \text{OK}$$

Stahlreissen

grobe Annahme: $\varepsilon_{smu} \approx 0.5\varepsilon_{ud} = \begin{cases} 22.5\text{‰} \text{ (B500B)} \\ 32.5\text{‰} \text{ (B500C)} \end{cases}$ (geschätzte Abminderung der Bruchdehnung infolge Zugversteifung – siehe hinten)

$$\Theta_{pus} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{smu}}{d^- - x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d^- - x} \right) = \begin{cases} 2 \cdot 1.10 \cdot \left(\frac{0.0225}{0.919} - 0.0023 \right) = 22.2 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot 2.2 \text{ m} = 48.8 \text{ mrad} \text{ (B500B)} \\ 2 \cdot 1.10 \cdot \left(\frac{0.0325}{0.919} - 0.0023 \right) = 33.1 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot 2.2 \text{ m} = 72.7 \text{ mrad} \text{ (B500C)} \end{cases}$$

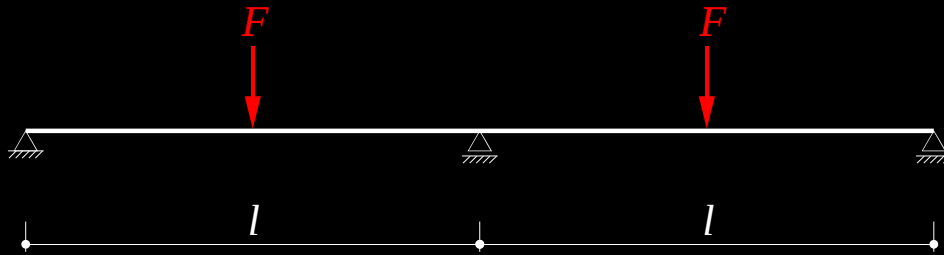
$$\rightarrow \Theta_{pus} > \Theta_{B,req} \rightarrow \text{OK}$$

Damit wäre der Nachweis des Verformungsvermögens erbracht.

Aber: Ist die Annahme von L_{pl} , ε_{smu} in Ordnung? → siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete»

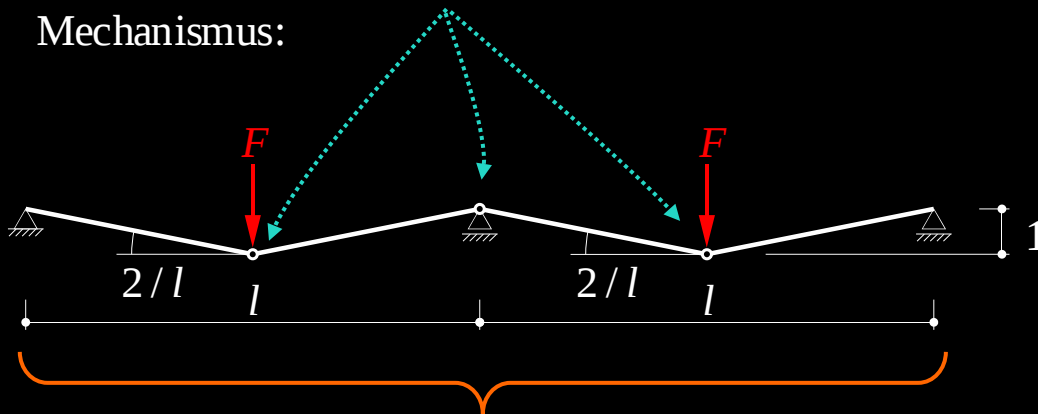
Verhalten unter Biegung – Duktilität

Statisches System:



Querschnitt so ausbilden, dass dieser ein duktiles Verhalten aufweist

Mechanismus:



Verbügelung (statisch / Mindestbewehrung), damit keine vorzeitigen Schubversagen auftreten!

Die Bemessung erfolgt in der Regel auf Basis des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie, obschon weder Beton noch Bewehrung ideal plastisch sind.

Bemessung und konstruktive Durchbildung müssen daher eine ausreichende Duktilität gewährleisten. Nur dann können bei der Ermittlung des Tragwiderstands Zwängungen vernachlässigt werden, und es kann von einem duktilen Versagen (Verformungen, Ankündigung) ausgegangen werden.

→ unter Einhaltung bestimmter Regeln sind Schnittkraftumlagerungen nach SIA 262 ohne weiteres zulässig (andernfalls ist eine Kontrolle der Verformungsvermögens erforderlich, siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete»)

→ für Biegung insbesondere zu beachten:

ρ_{min} aus Bedingung $M_{Rd} > M_r$ (kein Spröddbruch bei Rissbildung)

ρ_{max} aus Bedingung, dass der Stahl fließt, bevor die Betondruckzone versagt

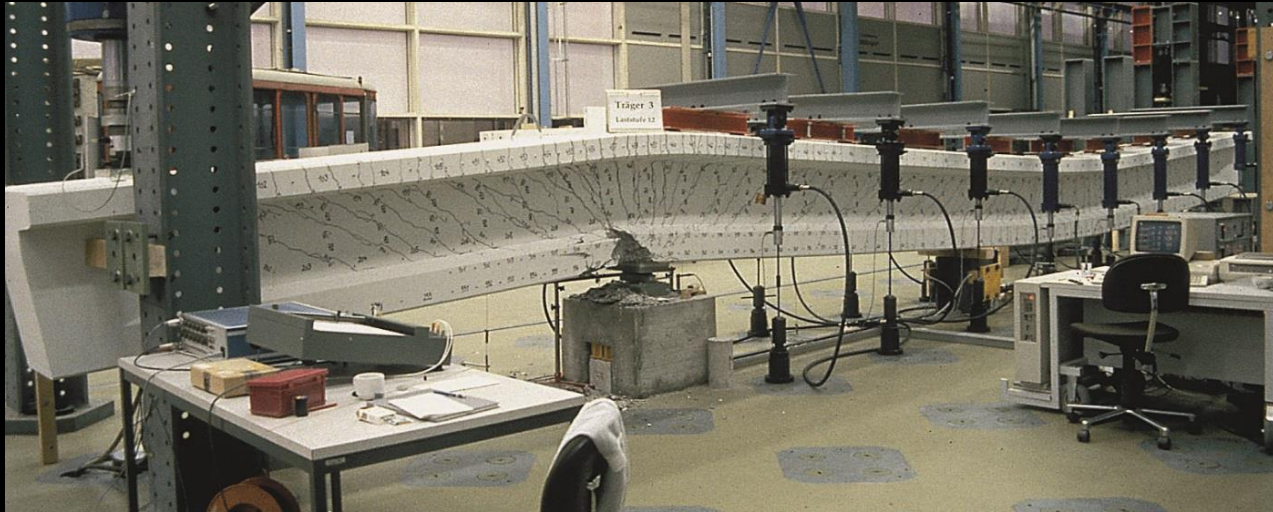
Verhalten unter Biegung – Duktilität

Auszug aus Norm SIA 262, 4.1.4.2 → **Duktilität**

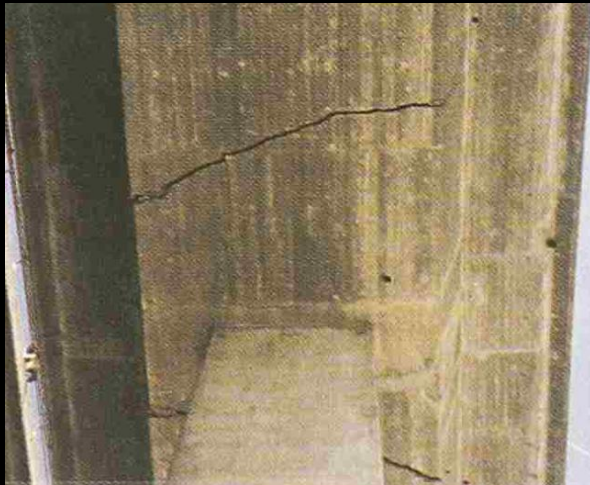
- 4.1.4.2 Methoden der Plastizitätstheorie
- 4.1.4.2.1 Die Methoden der Plastizitätstheorie eignen sich zur Schnittgrössenermittlung für den Grenzzustand der Tragsicherheit.
- 4.1.4.2.2 Die Tragwerksanalyse soll im Allgemeinen nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie (statische Methode) vorgenommen werden. Dabei ist von einem Gleichgewichtszustand der inneren und äusseren Kräfte auszugehen, der die statischen Randbedingungen erfüllt und die Fliessbedingungen nirgends verletzt.
- 4.1.4.2.3 Ein Vorgehen nach dem oberen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie (kinematische Methode) ist dann zulässig, wenn durch Erfahrung bekannt ist, dass sich die angenommenen Mechanismen im Bruchzustand tatsächlich einstellen können.
- 4.1.4.2.4 Ein duktilen Verhalten ist durch konstruktive Massnahmen (z.B. Verbügelung der Biegedruckzone), die Wahl der Baustoffe und das Einlegen einer Mindestbewehrung sicherzustellen.
- 4.1.4.2.5 Schnittgrössen statisch unbestimmter, vorwiegend auf Biegung beanspruchter Bauteile, die nach Ziffer 4.1.4.1 ermittelt wurden, können unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen und unter Beachtung von Ziffer 4.1.4.2.4 ohne rechnerischen Nachweis des Verformungsvermögens umgelagert werden, wenn:
- die bezogene Druckzonenhöhe den Wert $x/d = 0,35$ nicht überschreitet
 - Betonstahl der Klassen B oder C und Beton der Klassen $\leq C 50/60$ verwendet wird.
- Für die Ermittlung der Druckzonenhöhe x gelten die Idealisierungen gemäss Ziffer 4.2.1; eine allenfalls vorhandene Druckbewehrung darf in Rechnung gestellt werden.
- 4.1.4.2.6 Falls die Bedingungen der Ziffer 4.1.4.2.5 nicht eingehalten werden, ist ein rechnerischer Nachweis des plastischen Verformungsvermögens zu erbringen. Werte von $x/d > 0,5$ sind zu vermeiden.

Verhalten unter Biegung – Verformungsvermögen

Duktilität = plastisches Verformungsvermögen – bei richtiger Bemessung und konstruktiver Durchbildung sehr gross



Versuchsträger von Dr. Viktor Sigrist (Direktor der Hochschule Luzern – Technik & Architektur) in der Bauhalle HIF



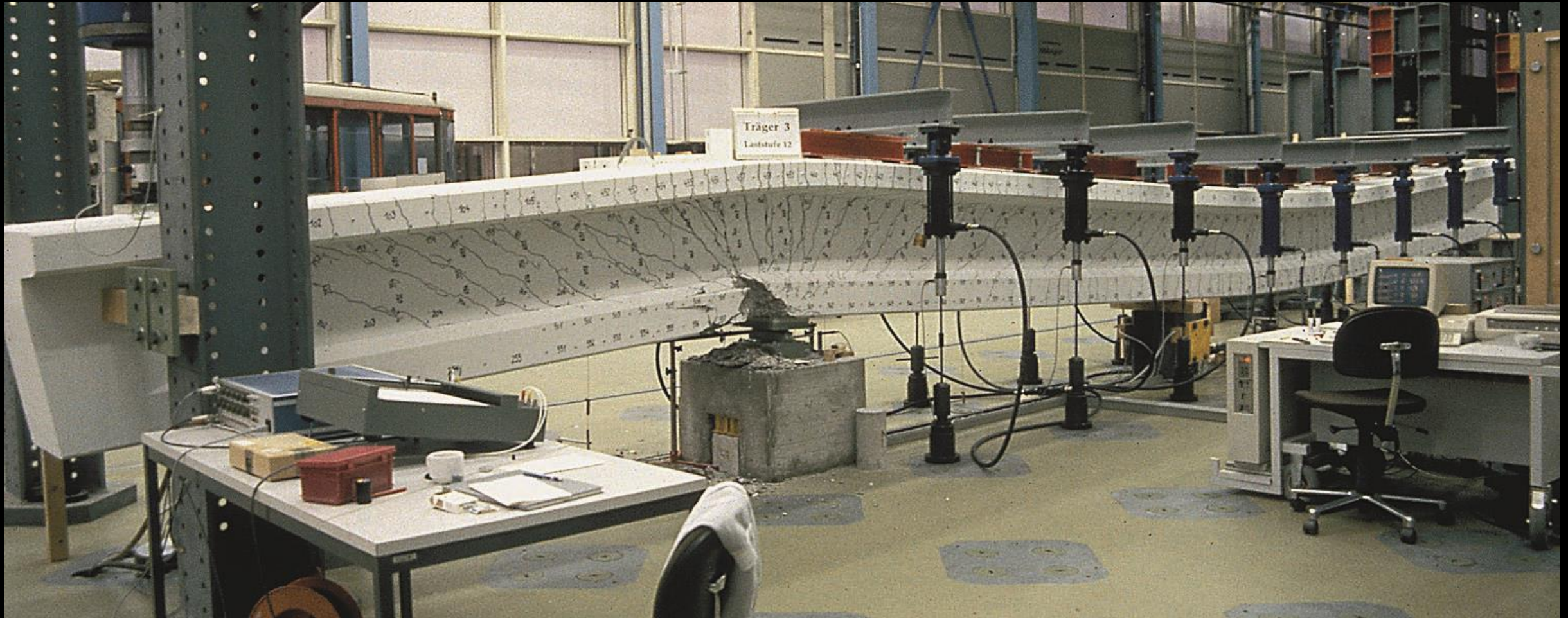
Reussbrücke Wassen
Unwetter 1987
→ Unterkolkung Stütze
→ grosse Verformungen
→ kein Kollaps
→ erfolgreich repariert

(siehe z.B. Beiträge im SIA,
Heft 25/1989)



Verhalten unter Biegung – Verformungsvermögen

Versuch Dr. Viktor Sigrist



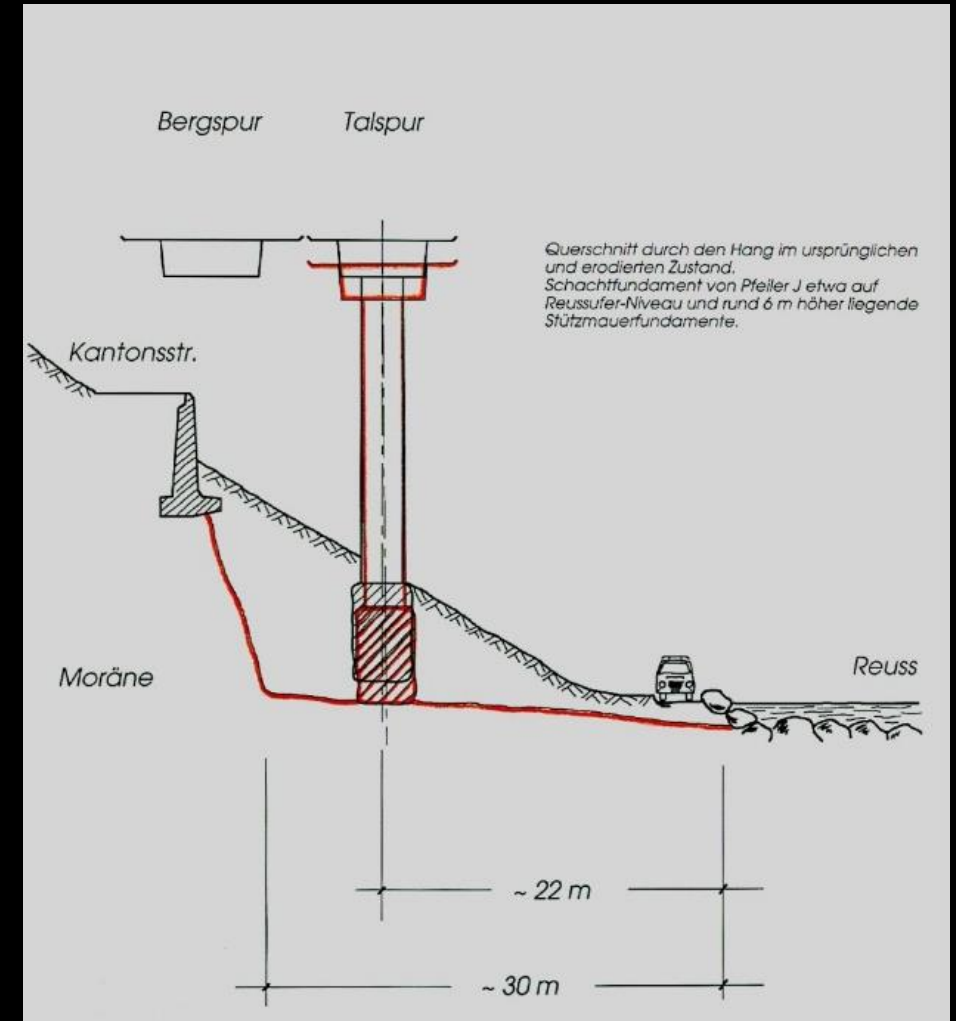
Verhalten unter Biegung – Verformungsvermögen

Reussbrücke Wassen (Baujahr 1972) im Juli 1987



Beispiel aus der Praxis – Reussbrücke Wassen

Reussbrücke Wassen – Schäden infolge Hochwasser (24./25. August 1987)



Beispiel aus der Praxis – Reussbrücke Wassen

Reussbrücke Wassen – Schäden infolge Hochwasser (24./25. August 1987)



Beispiel aus der Praxis – Reussbrücke Wassen

Reussbrücke Wassen – Reparaturarbeiten



Beispiel aus der Praxis – Reussbrücke Wassen

Reussbrücke Wassen – Reparaturarbeiten



Biegewiderstand – Berücksichtigung Druckbewehrung

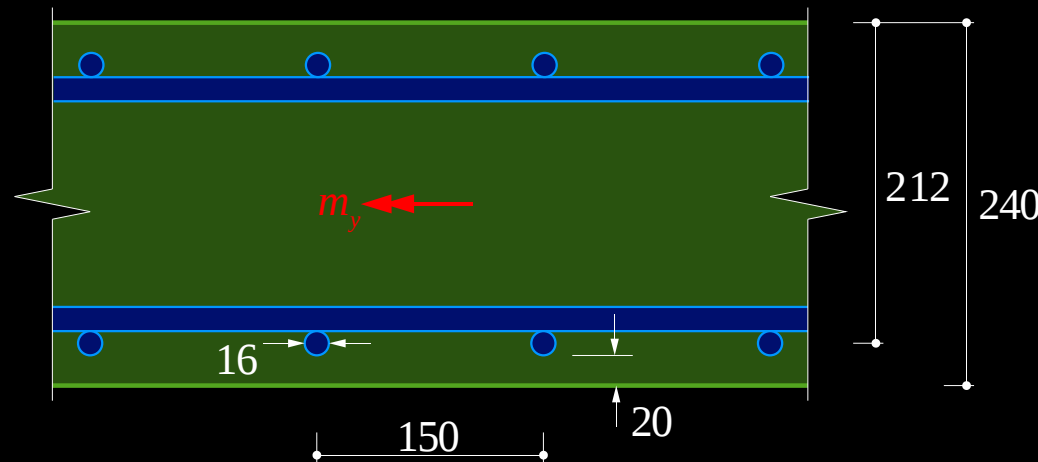
Siehe auch [1], Seite 2.4ff

- Die **Bewehrung auf Biegedruckseite** wird bei der Vorbemessung **normalerweise nicht berücksichtigt** (Einfluss auf Tragwiderstand für normale Verhältnisse gering).
- Die **Berücksichtigung ist im Ausführungsprojekt** bei grossen Bewehrungsgehalten sinnvoll. Heute ist dies mit **Querschnittsprogrammen** einfach möglich (Handrechnung ist relativ aufwändig, die früher eingesetzten Tabellenwerke sind nicht mehr zeitgemäss).
- In der Regel wird nur eine **konstruktive Bewehrung auf der Druckseite** vorgesehen, keine eigentliche Druckbewehrung (unwirtschaftlich: Beton ist günstiger (mehr als Verhältnis f_{sd} / f_{cd}), zudem wird f_{sd} auf Höhe der Druckbewehrung oft nicht erreicht).
- In speziellen Fällen (z. Bsp. **begrenzte Bauhöhe** verfügbar) ist eine Druckbewehrung sinnvoll. Sie ist gegen Ausknicken zu sichern (Bügel).
- Eine **Umschnürungsbewehrung** ist wirksamer als eine Druckbewehrung. Zudem kann damit auch die Bruchdehnung des Betons erhöht werden → günstig für Duktilität.
- Eine konstruktive Bewehrung auf der Biegedruckseite ist sinnvoll, um die **Langzeitverformungen** zu begrenzen (Beton entzieht sich durch Kriechen der Last, Druckkräfte werden auf Bewehrung umgelagert, dadurch geringere Zunahme der Verformungen als ohne Druckbewehrung).

Biegewiderstand – Berücksichtigung Druckbewehrung

Beispiel, Platte mit Bewehrung auf Biegedruckseite

1. Abschätzung m_{Rd} ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung (siehe Folie 14-15)



Stahlbetonplatte	$h = 240 \text{ mm}$
Beton C25/30	$f_{cd} = 16.5 \text{ MPa}$ $E_{cm} = 32 \text{ GPa}$
Betonstahl B500B	$f_{sd} = 435 \text{ MPa}$ $E_s = 205 \text{ GPa}$
$c_{nom} = 20 \text{ mm}$	

$$a_s = \frac{\varnothing^2 \cdot \pi}{4 \cdot s} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} = 1'340 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Konservativ (sichere Seite), da
 $0.9 \cdot d = 0.191 \text{ m} < z_{eff} = 0.194 \text{ m}$

$$m_{Rd} \approx a_s \cdot f_{sd} \cdot 0.9 \cdot d = 1'340 \cdot 0.435 \cdot 0.9 \cdot 0.212 = 111.2 \text{ kNm/m}$$

(Abschätzung, ohne Druckbewehrung)

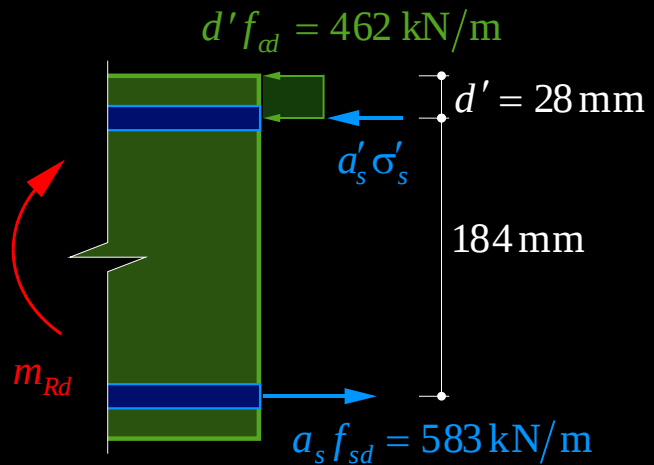
$$m_{Rd} = f_{cd} \cdot d^2 \cdot \omega \cdot (1 - \omega / 2) = 16.5 \cdot 212^2 \cdot 0.167 \cdot (1 - 0.084) = 113.3 \text{ kNm/m}$$

("genaue" Lösung, ohne Druckbewehrung)

Biegewiderstand – Berücksichtigung Druckbewehrung

Beispiel, Platte mit Bewehrung auf Biegedruckseite

2. Starr-ideal plastische Berechnung (keine Dehnungsbegrenzung)



Lage der Neutralachse auf der Höhe von a'_s

Starr-ideal plastisch, somit $-f_{sd} \leq \sigma'_s \leq f_{sd}$

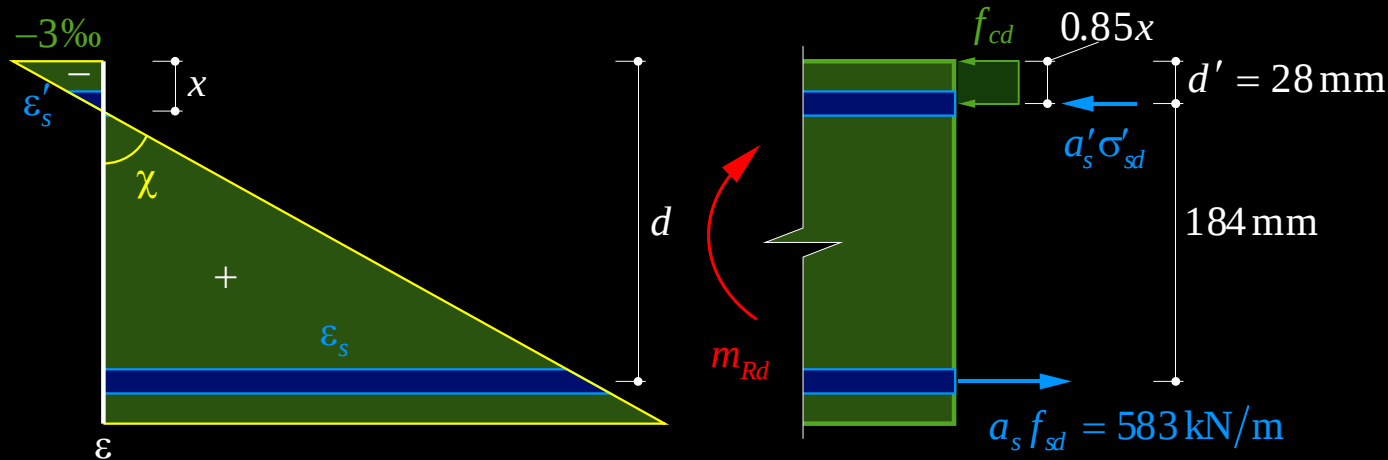
$$-a'_s \sigma'_s = 583 - 462 = 121 \text{ kN/m (GGW)}$$

$$m_{Rd} \approx 0.184 \cdot 583 + \frac{0.028}{2} \cdot 462 = 113.7 \text{ kNm/m}$$

Biegewiderstand – Berücksichtigung Druckbewehrung

Beispiel, Platte mit Bewehrung auf Biegedruckseite

3. Berechnung nach SIA 262 (mit Dehnungsbegrenzung)



$$\chi = \frac{0.003}{x}, \quad \varepsilon'_s = 0.003 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x}\right)$$

GGW:

$$a_s f_{sd} - 0.85x \cdot f_{cd} - a'_s E_s \varepsilon'_s = 0$$

(Annahme: $d' \leq x$)

GGW ergibt quadratische Gleichung für $x \rightarrow x = 32.9 \text{ mm} > d'$ (Annahme i.O.)

daraus $\varepsilon'_s = 0.44 \text{ ‰}$, $\sigma'_s = 91 \text{ MPa}$, $\sigma'_s a'_s = 122 \text{ kN/m}$, $\varepsilon_s = 16.4 \text{ ‰}$

$$m_{Rd} = 0.212 \cdot 583 - 0.028 \cdot 122 - \frac{0.85 \cdot 0.033}{2} \cdot 461 = 113.7 \text{ kNm/m}$$

Duktilitätsbedingung: $x / d = 0.16 < 0.35$ i.O.

Biegewiderstand – Berücksichtigung Druckbewehrung

Beispiel, Platte mit Bewehrung auf Biegedruckseite

Vergleich:

1. Abschätzung m_{Rd} ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung
2. Starr-ideal plastische Berechnung (keine Dehnungsbegrenzung)
3. Berechnung nach SIA 262 (mit Dehnungsbegrenzung)

"Genaueres" Resultat mit Berücksichtigung der Druckbewehrung:

$m_{Rd,3} = 113.7 \text{ kNm/m}$ → aufwändig zu rechnen, i.A. mit Querschnittsprogrammen

$m_{Rd,1} = 113.3 \text{ kNm/m} \approx m_{Rd,3}$ → für Praxis i.A. ausreichend, kleine Abweichung

$m_{Rd,2} = 113.7 \text{ kNm/m} \approx m_{Rd,3}$ → Annahme starr-ideal plastisches Verhalten unüblich

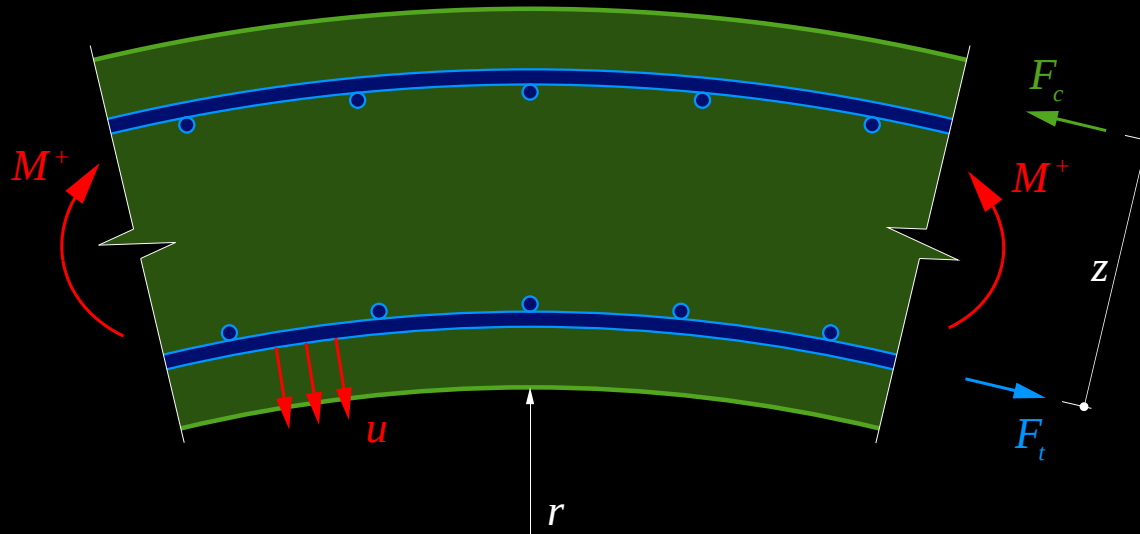
Fast gleich, weil neutrale Achse sehr nahe der für ideal-plastische Verhältnisse angenommenen (bei d'), i.A. grössere Unterschiede!

NB: Falls Druckbewehrung für Tragsicherheit notwendig → Abmessungen zu knapp gewählt, nur in Ausnahmen sinnvoll.

NB: Bewehrung auf Biegedruckseite kann auch auf Zug belastet sein. Das ist der Fall, wenn $x < d'$ (siehe [1], Seite 2.8).

Biegung im Aufriss gekrümmter Träger – Umlenkräfte

Beispiel: Tunnelgewölbe unter positivem Ringbiegemoment



$$F_t = M^+ / z$$

$$u = F_t / r$$

$$\sigma_{ct,u} = u / b_u$$

b_u gemäss SIA 262, (106)

Bei positivem Moment (Zug auf Innenseite) besteht die Gefahr, dass die innere Bewehrung ausgerissen wird, da die Zugbewehrung (F_t) Umlenkräfte (u) erzeugt → Aufnahme durch Überdeckungsбетон → Zugspannungen im Beton ($\sigma_{ct,u}$)

Nachweis gemäss SIA 262, Ziff. 5.2.7.1:
wenn nicht erbracht → Verbügelung

$$\sigma_{ct,u} \leq \frac{1}{3} \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c}$$

NB: Bei negativen Ringbiegemomenten erzeugen die Umlenkräfte Querdruck

Elastisches Querschnittsverhalten

Elastisches Querschnittsverhalten im Zustand I und II

(früher: «elastische Festigkeitslehre», « n -Theorie»)

- **Biegesteifigkeit** kann mit der Theorie der aus linear elastischen Werkstoffen aufgebauten **Verbundquerschnitte** bestimmt werden (siehe Baustatik)
→ E-Modul jeder Faser des Querschnitts über **Wertigkeit** n auf E-Modul des Betons bezogen (im Zustand II: Beton in Zugzone $n=0$)
- In Zustand I genügt meist die näherungsweise Berücksichtigung des reinen **Betonquerschnitts** (Erhöhung durch Bewehrung ca. 10...20%)
- Allgemeine Ermittlung der Querschnittswerte:

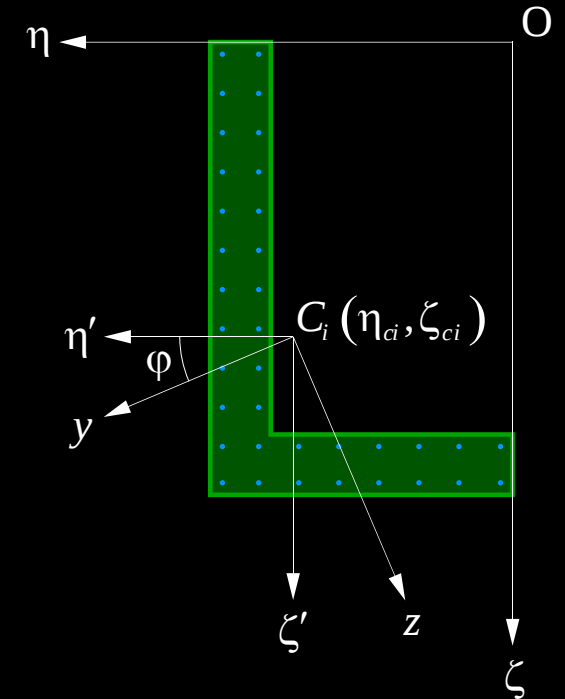
Wertigkeit und ideelle Querschnittsfläche: $n(\eta, \zeta) = \frac{E(\eta, \zeta)}{E_c}$, $A_i = \iint n \cdot dA$,

Schwerpunkt in (η, ζ) : $\eta_{ci} = \frac{\iint \eta \cdot n \cdot dA}{A_i}$, $\zeta_{ci} = \frac{\iint \zeta \cdot n \cdot dA}{A_i}$

Flächenträgheitsmomente in (η', ζ') : $I_{\eta'i} = \iint \zeta'^2 n \cdot dA$, $I_{\zeta'i} = \iint \eta'^2 n \cdot dA$, $C_{\eta'\zeta'i} = -\iint \eta' \zeta' \cdot n \cdot dA$

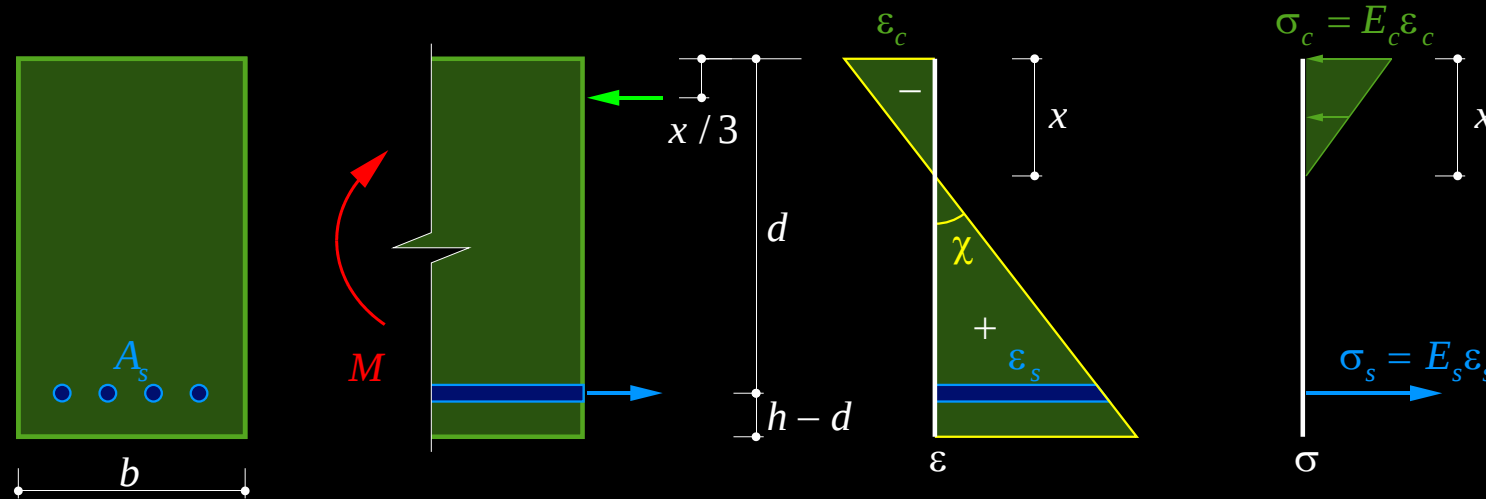
Haupttrichtungen (y, z) mit $C_{yzi} = 0$: $\tan 2\varphi = \frac{2 \cdot C_{\eta'\zeta'i}}{I_{\eta'i} - I_{\zeta'i}}$

→ Flächenträgheitsmomente des ideellen Querschnitts: $I_{yi} = \iint z^2 n \cdot dA$, $I_{zi} = \iint y^2 n \cdot dA$



Elastische Biegesteifigkeit

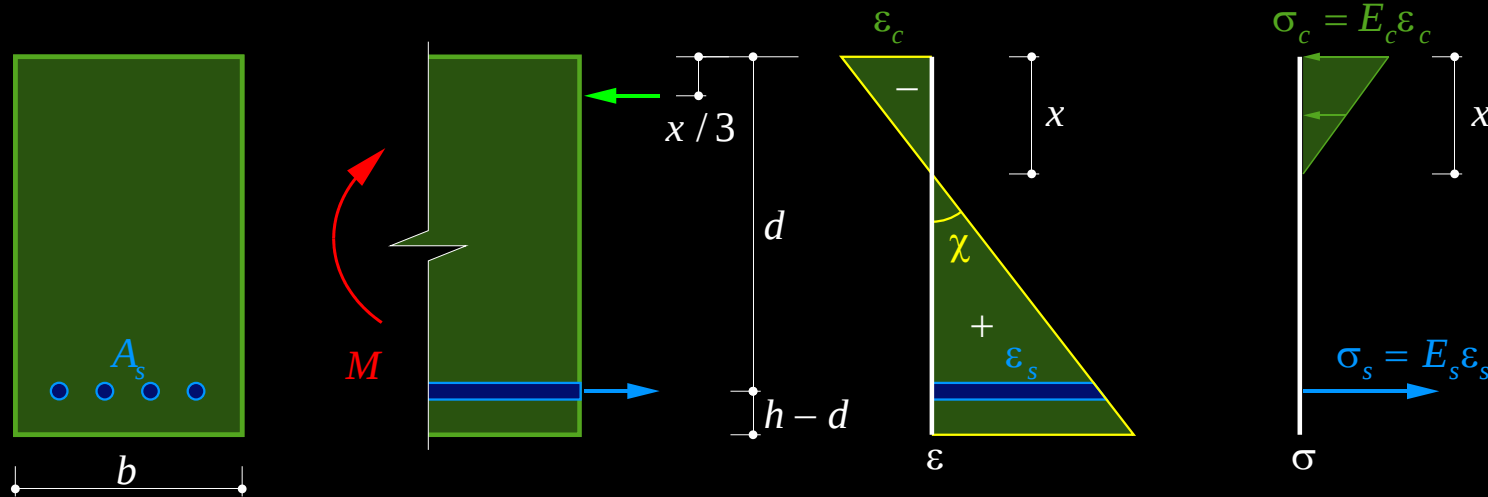
Elastisches Querschnittsverhalten im Zustand I und II



- Ermittlung im Zustand II analog Zustand I, aber Wertigkeit des Betons in der Zugzone = 0
- Für allgemeine Querschnitte umständlich → Querschnittsprogramme (früher wurden umfangreiche Tabellenwerke dafür verwendet, nicht mehr zeitgemäss)
- Für Rechteckquerschnitte mit und ohne Druckbewehrung können die Steifigkeit im Zustand I und Zustand II sowie die Spannungen in Beton und Bewehrung geschlossen angegeben werden (im Zustand II ist eigentlich $\sigma_{sr} > E_s \varepsilon_{sm} \rightarrow$ steiferes Verhalten → Zuggurtmodell)
- Querschnittssteifigkeit unabhängig von Beanspruchung (d.h. effektiv Querschnittswerte)
- Anwendung: Ermittlung von Spannungen für Ermüdungsnachweise (und Gebrauchszustand)

Elastische Biegesteifigkeit

Elastisches Querschnittsverhalten im Zustand II, ohne Druckbewehrung



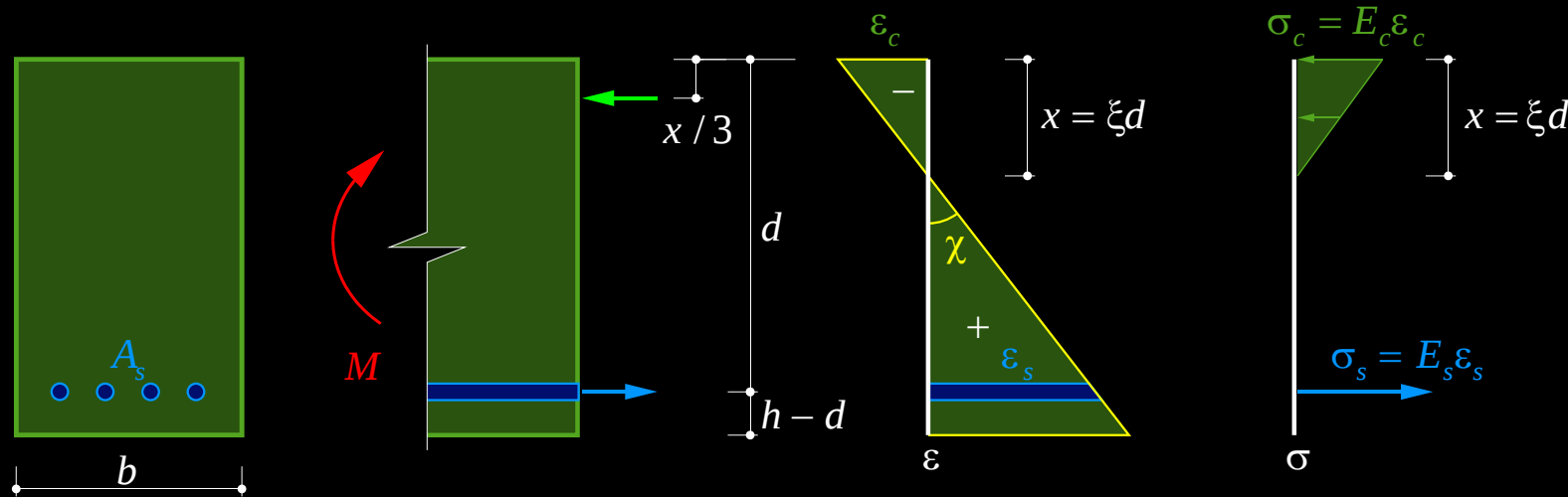
Ebenbleiben, linear elastisches Verhalten: $\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} |\varepsilon_c|$, $\sigma_s = \frac{E_s}{E_c} \frac{(d-x)}{x} |\sigma_c|$

Druckzonenhöhe (aus $N = 0$): $\frac{x}{2} b \cdot |\sigma_c| = A_s \cdot \sigma_s = \rho \cdot b \cdot d \cdot \frac{(d-x)}{x} \frac{E_s}{E_c} |\sigma_c| \rightarrow \frac{x}{2} = n \cdot \rho \cdot d \cdot \frac{(d-x)}{x} \rightarrow x^2 + 2 \cdot n \cdot \rho \cdot d \cdot x - 2 \cdot n \cdot \rho \cdot d^2 = 0$

$$\rightarrow x = d \frac{-2 \cdot n \cdot \rho + \sqrt{4 \cdot n^2 \rho^2 + 8 \cdot n \cdot \rho}}{2} \rightarrow \frac{x}{d} = \xi = \sqrt{n^2 \rho^2 + 2 \cdot n \cdot \rho} - n \cdot \rho \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{A_s}{bd}, \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

Elastische Biegesteifigkeit

Elastisches Querschnittsverhalten im Zustand II, ohne Druckbewehrung



$$\text{Spannungen: } \sigma_s = \frac{M}{A_s \left(d - \frac{x}{3} \right)} = \frac{M}{bd^2} \frac{1}{\rho \cdot \left(1 - \frac{\xi}{3} \right)}, \quad \sigma_c = \frac{2 \cdot M}{b \cdot x \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)} = \frac{M}{bd^2} \frac{2}{\xi \left(1 - \frac{\xi}{3} \right)} \left(= \frac{\sigma_s}{n} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} \right)$$

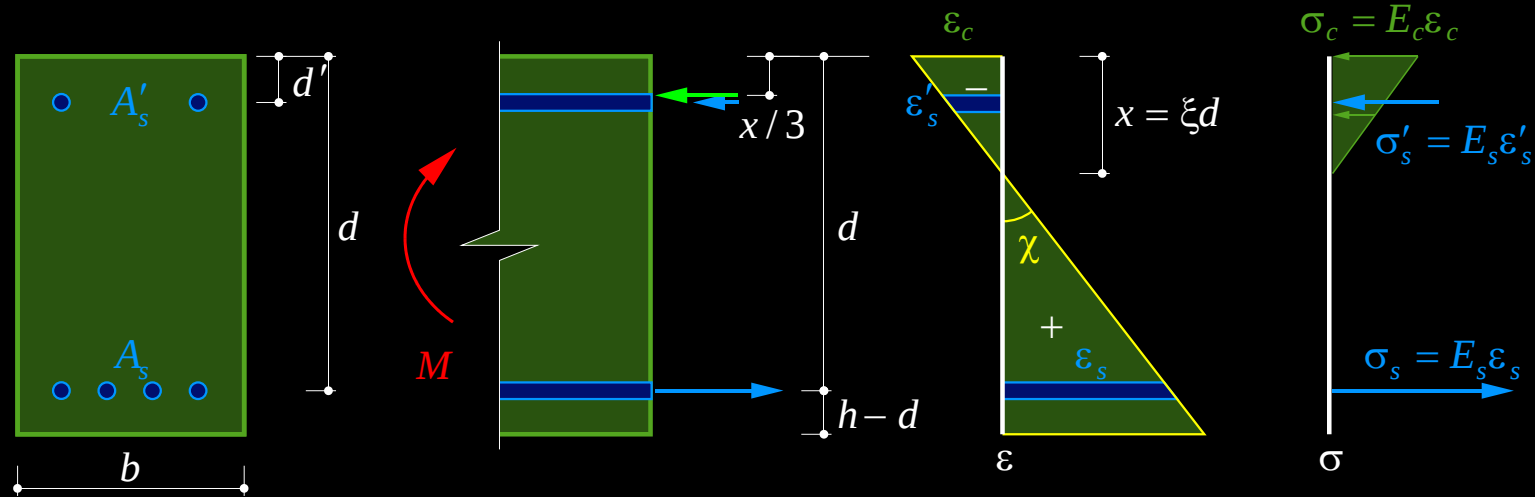
(Vergleich: Beton-Randspannungen im ungerissenen Zustand: $\sigma_c = 6 \frac{M}{bd^2}$)

$$\text{Krümmung und Biegesteifigkeit: } \chi = \frac{\varepsilon_s}{d - x}, \quad M = A_s \cdot \sigma_s \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right) = A_s E_s (d - x) \left(d - \frac{x}{3} \right) \chi$$

$$\rightarrow EI^{\text{II}} = A_s E_s (d - x) \left(d - \frac{x}{3} \right) = A_s E_s \cdot d^2 (1 - \xi) \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{d} = \sqrt{n^2 \rho^2 + 2 \cdot n \cdot \rho} - n \cdot \rho$$

Elastische Biegesteifigkeit

Elastisches Querschnittsverhalten im Zustand II, mit Druckbewehrung



Analoge Herleitung wie ohne Druckbewehrung (Annahme $x > d'$), siehe [1] Seite 2.15:

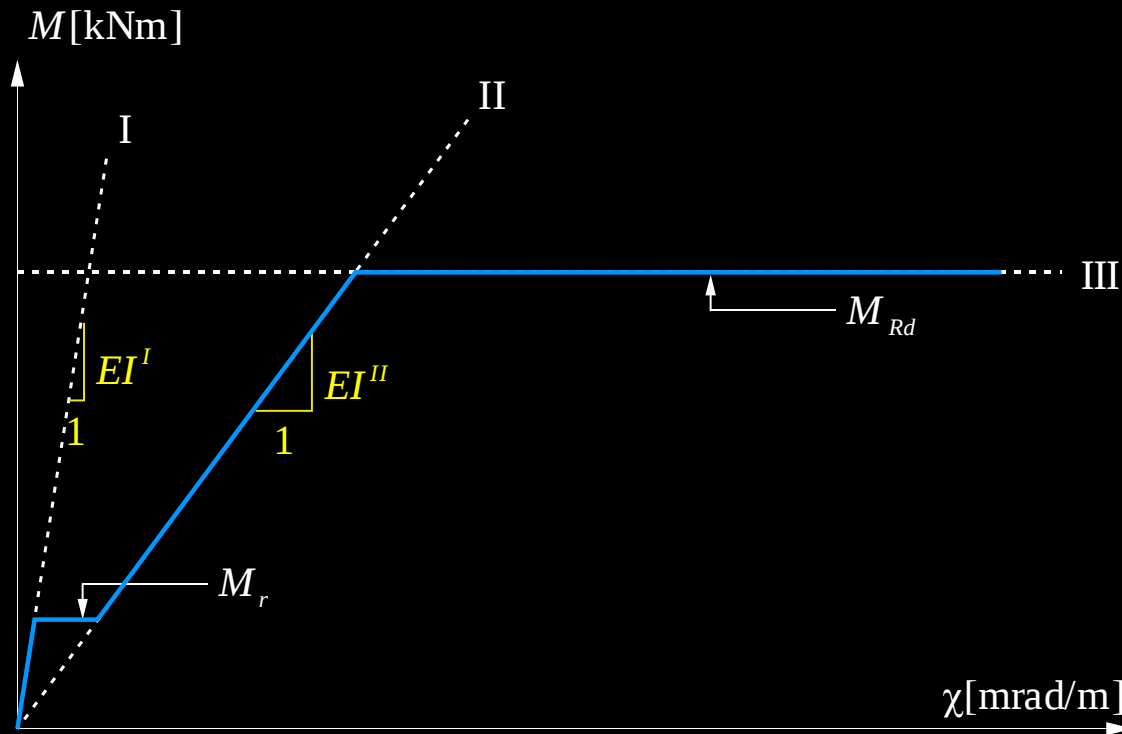
$$\text{Druckzonenhöhe (aus } N = 0\text{): } \frac{x}{d} = \xi = \sqrt{\left[n \cdot \rho + \rho'(n-1)\right]^2 + 2 \left[n \cdot \rho + \frac{d'}{d} \rho'(n-1)\right]} - \left[n \cdot \rho + \rho'(n-1)\right]$$

$$\text{Spannungen: } \sigma_s = \frac{M}{bd^2} \frac{1}{\rho \cdot \left(1 - \frac{\xi}{3}\right) + \rho' \cdot \left(\frac{\xi}{3} - \frac{d'}{d}\right) \left(\frac{\xi - d'/d}{1 - \xi}\right)}, \quad \sigma'_s = \sigma_s \cdot \frac{\xi - d'/d}{1 - \xi}, \quad \sigma_c = \frac{\sigma_s}{n} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi}$$

$$\text{Biegesteifigkeit: } EI^{\text{II}} = A_s E_s (d - x)^2 + A'_s (E_s - E_c) (x - d')^2 + \frac{b \cdot x^3 E_c}{3} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{A_s}{bd}, \quad \rho' = \frac{A'_s}{bd}, \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

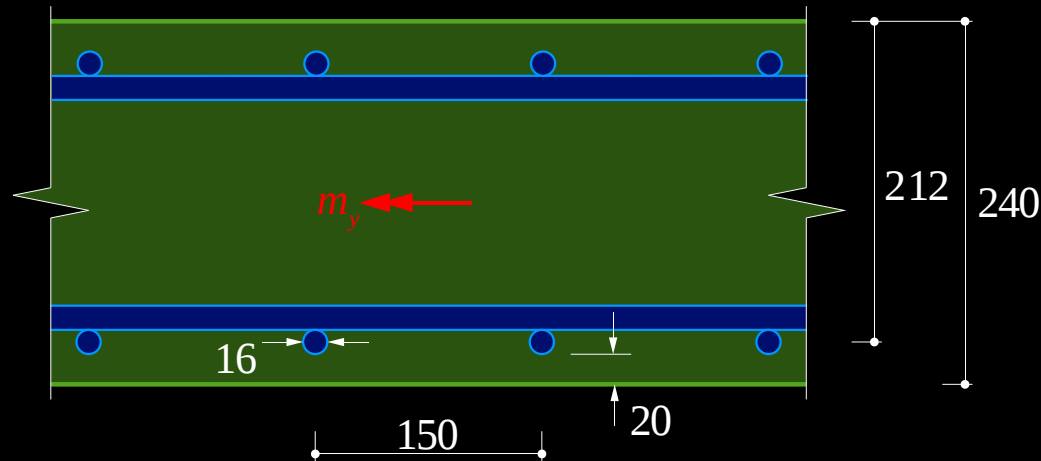
Elastische Biegesteifigkeit – M - χ -Diagramm

Elastisches Querschnittsverhalten – Momenten-Krümmungs-Verhalten



Elastische Biegesteifigkeit

Beispiel ([1], 2.13f), Biegesteifigkeit einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Stahlbetonplatte, $h = 240$ mm
- $E_c = 30$ GPa
- $E_s = 205$ GPa

Zustand I

Ideelle Querschnittsfläche: $A_i^I = 240 \cdot 1'000 + 1'340 \cdot \left(\frac{205}{30} - 1 \right) = 247'817 \text{ mm}^2/\text{m}$

Schwerpunkt: $\zeta_c = \frac{120 \cdot 240 \cdot 1'000 + 212 \cdot 7'817}{247'817} = 122.9 \text{ mm}$

Trägheitsmoment: $I_{yi}^I = \frac{240^3 \cdot 1'000}{12} + 240'000 \cdot (122.9 - 120)^2 + 1340 \cdot \left(\frac{205}{30} - 1 \right) \cdot (122.9 - 212)^2 = 1.22 \cdot 10^9 \text{ mm}^4/\text{m}$

$\rightarrow EI^I = E_c I_{yi}^I = 36.6 \text{ MNm}^2/\text{m}$

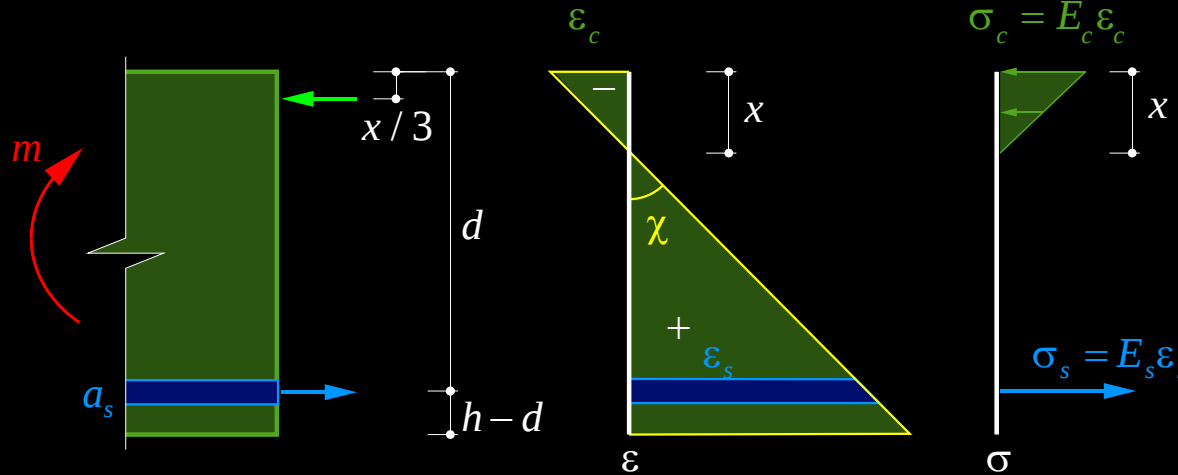
Zum Vergleich:

$I_{yc}^I = 1.15 \cdot 10^9 \text{ mm}^4/\text{m}$

$\rightarrow I_{yi}^I = 1.06 \cdot I_{yc}^I$

Elastische Biegesteifigkeit

Beispiel ([1], 2.13f), Biegesteifigkeit einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



Zustand II

Geometrischer Bewehrungsgehalt: $\rho = \frac{1'340}{212 \cdot 1000} = 0.63\%$

Druckzonenhöhe: $x = 212 \cdot \left(\sqrt{(0.0063 \cdot 6.83)^2 + 2 \cdot 0.0063 \cdot 6.83} - 0.0063 \cdot 6.83 \right) = 53.8 \text{ mm}$

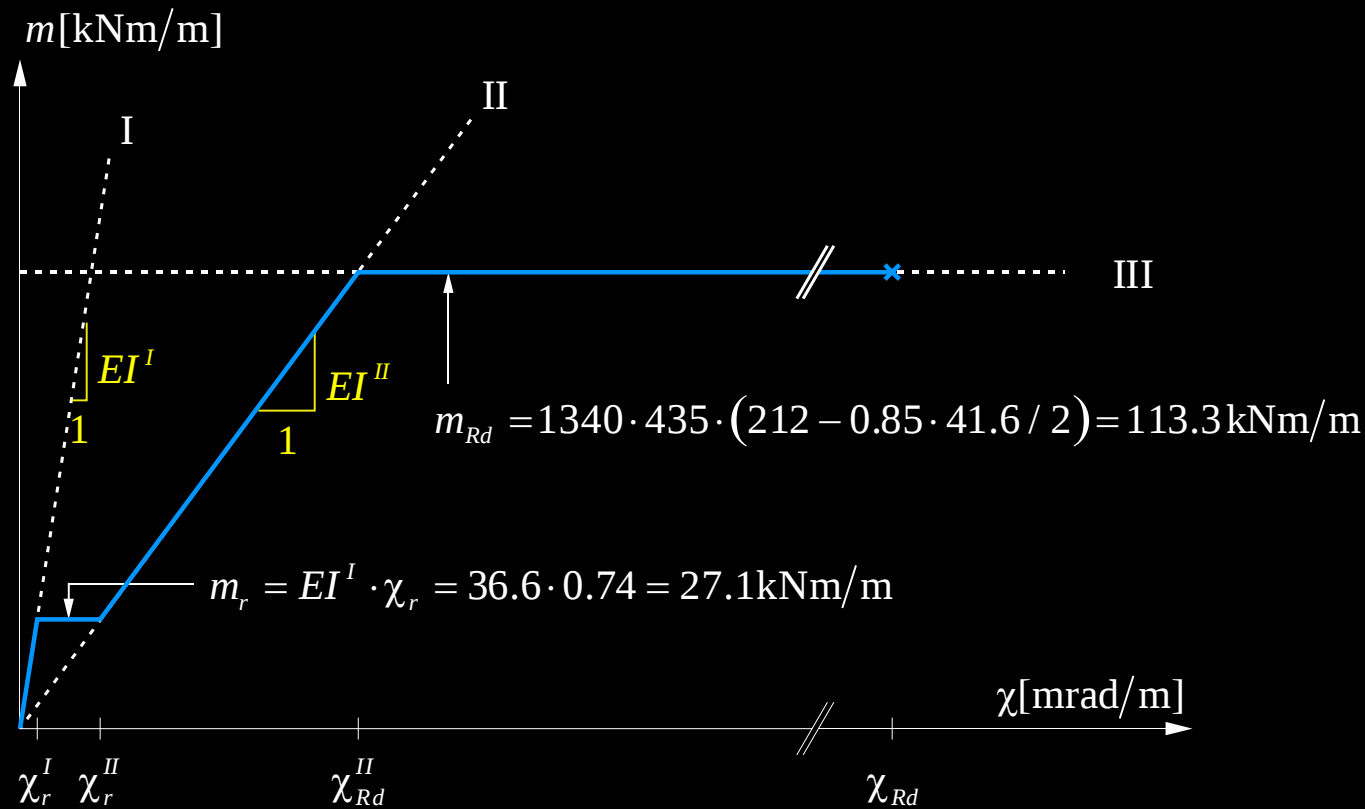
$\rightarrow EI^II = \frac{M}{\chi} = a_s E_s (d - x) \left(d - \frac{x}{3} \right) = 1340 \cdot 205'000 \cdot (212 - 53.8) \cdot \left(212 - \frac{53.8}{3} \right) = 8.4 \text{ MNm}^2/\text{m} \approx 0.23 \cdot EI^I$

$(d - x) = \frac{\varepsilon_s}{\chi}$

Hebelarm der inneren Kräfte

Elastische Biegesteifigkeit – M - χ -Diagramm

Beispiel ([1], 2.13f), Elastisches Querschnittsverhalten – Momenten-Krümmungs-Diagramm



$$EI^I = 36.6 \text{ MNm}^2/\text{m}$$

$$EI^{II} = 8.4 \text{ MNm}^2/\text{m}$$

$$\chi_r^I = \frac{f_{ctm}}{E_c (h - z_c)} = \frac{2.6}{30 \cdot 117.1} = 0.7 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} = \frac{m_r}{EI^I}$$

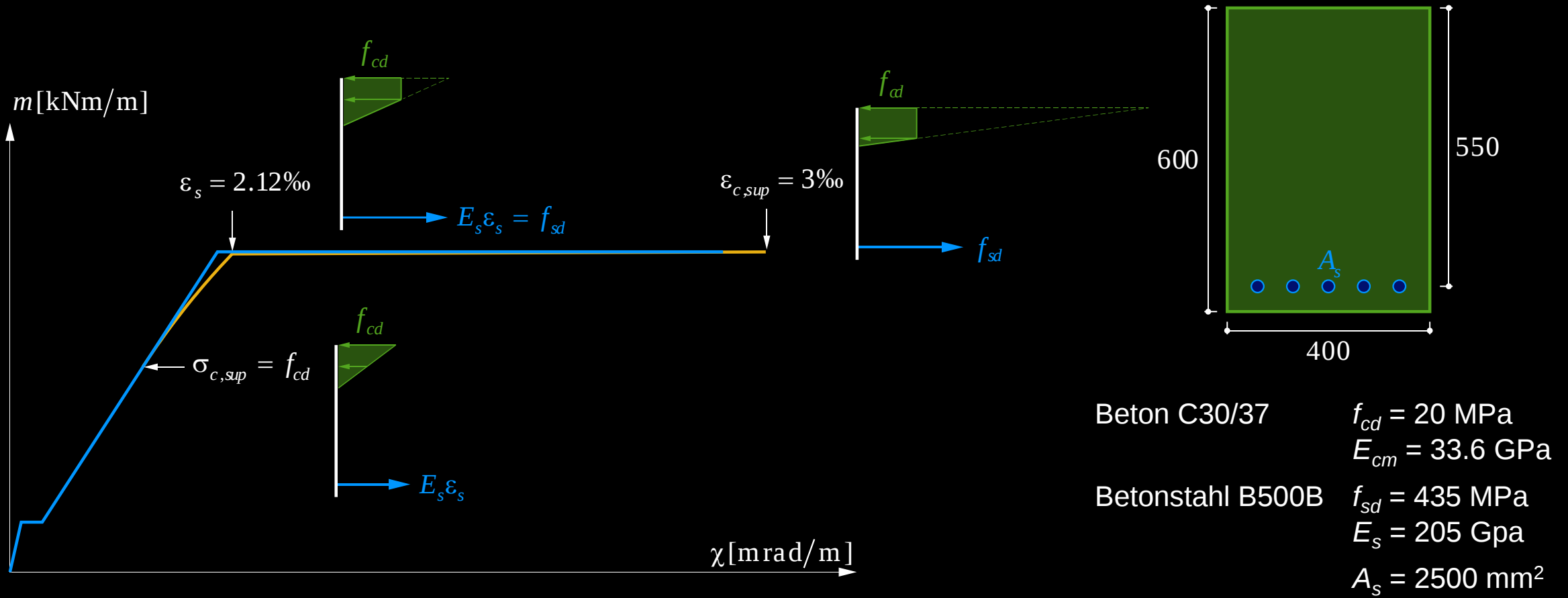
$$\chi_r^{II} = \frac{m_r}{EI^{II}} = \frac{27.1}{8.4} = 3.2 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\chi_{Rd}^{II} = \frac{m_{Rd}}{EI^{II}} = \frac{113.3}{8.4} = 13.4 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\chi_{Rd} = \frac{3\text{‰}}{\alpha} = \frac{3\text{‰}}{0.0538} = 55.8 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

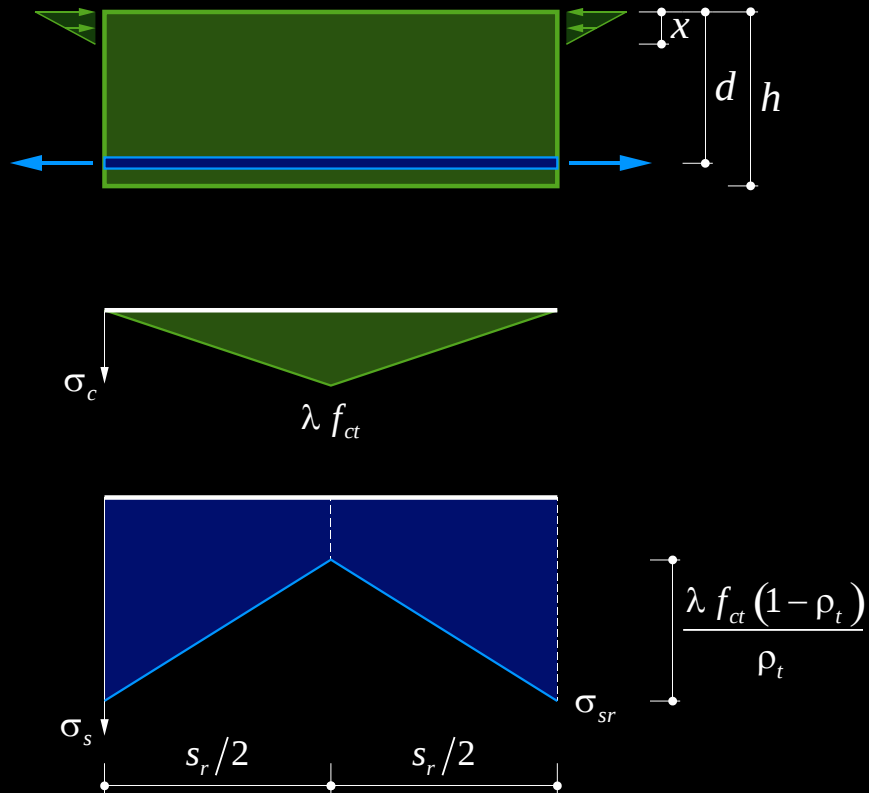
Elastische Biegesteifigkeit – $M-\chi$ -Diagramm

Elastisches Querschnittsverhalten – Momenten-Krümmungs-Verhalten mit Berücksichtigung der Begrenzung der Betonspannungen auf f_{cd}



Elastische Biegesteifigkeit – Zugversteifung

[1], Seite 2.16f



Zugversteifung bei Biegebeanspruchung analog zu Verhalten unter reinem Zug:

- bei Erreichen des Rissmoments M_r entstehen Risse im Abstand s_r , dazwischen wirkt Beton auf Zug noch mit
- mittlere Stahldehnung und somit mittlere Krümmung reduziert

Mittlere Dehnungsreduktion (siehe Kap. 3.1):

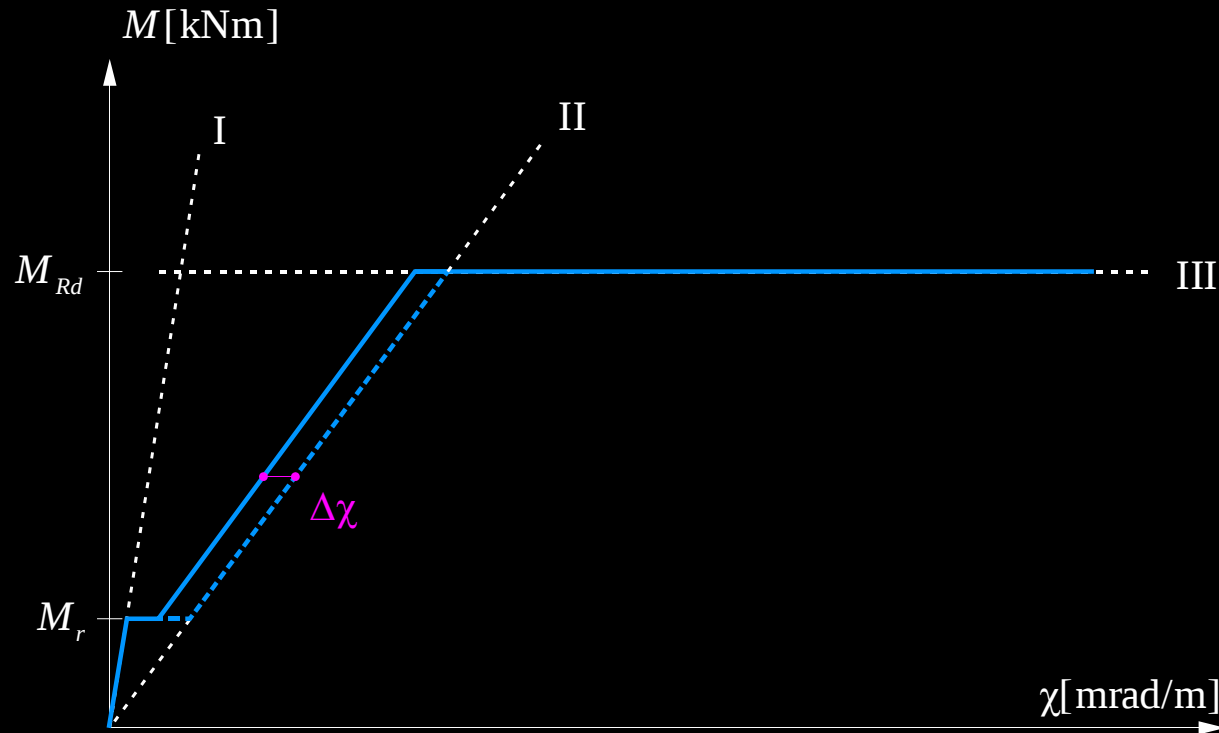
$$\Delta \varepsilon = \frac{\lambda \cdot f_{ct} (1 - \rho_t)}{2 \cdot \rho_t E_s}$$

Mittlere Krümmungsreduktion (analog):

$$\chi = \frac{\varepsilon_s}{(d - x)} \rightarrow \Delta \chi = \frac{\Delta \varepsilon}{(d - x)} = \frac{\lambda \cdot f_{ct} (1 - \rho_t)}{2 \cdot \rho_t E_s (d - x)}$$

Elastische Biegesteifigkeit – Zugversteifung

[1], Seite 2.16f



$$\Delta\chi = \frac{\lambda \cdot f_{ct}(1 - \rho_t)}{2 \cdot \rho_t E_s (d - x)}$$

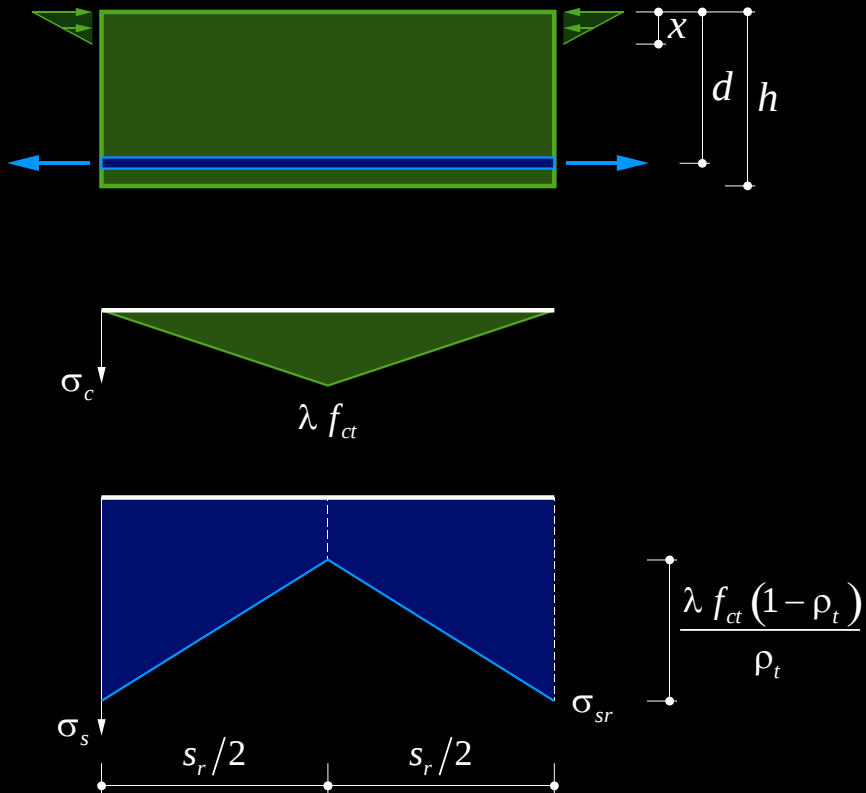
$$0.5 \leq \lambda \leq 1.0$$

Minimaler
Rissabstand

Maximaler
Rissabstand

Elastische Biegesteifigkeit – Zugversteifung

[1], Seite 2.16f



Setzt man die Stahlspannung am Riss

$$\sigma_{sr0} = \frac{M_r (d - x) E_s}{EI^II}$$

beim Erreichen von M_r gleich der Spannung

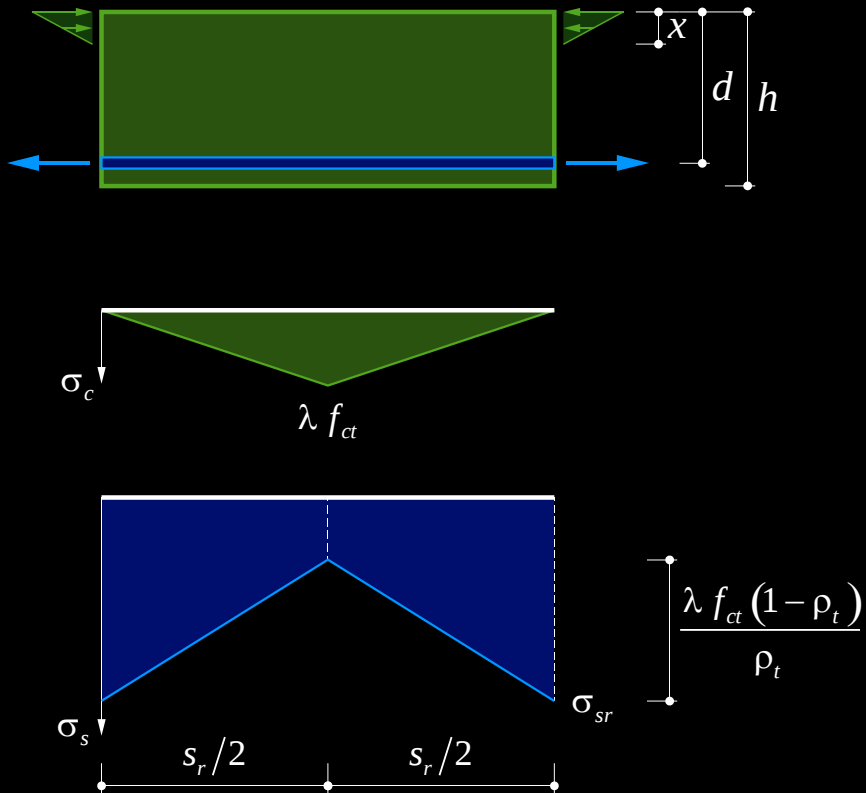
$$\sigma_{sr0} = f_{ct} \left(\frac{1}{\rho_t} + n - 1 \right)$$

beim Reißen eines Zuggurtelements, resultiert der äquivalente Bewehrungsgehalt ρ_t :

$$\rho_t = \frac{1}{\frac{M_r (d - x) E_s}{f_{ct} EI^II} + 1 - n}$$

Elastische Biegesteifigkeit – Zugversteifung

[1], Seite 2.16f



Krümmungsreduktion (ρ_t in Formel unten rechts auf Folie 59 rückeingesetzt):

$$\Delta\chi = \frac{\lambda \cdot f_{ct}(1 - \rho_t)}{2 \cdot \rho_t E_s (d - x)} = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{M_r}{EI^II} - \frac{f_{ct}}{E_c (d - x)} \right]$$

Rissabstände:

$$s_r = \lambda \cdot s_{r0}, \quad s_{r0} = \frac{\sigma \cdot (1 - \rho_t)}{4 \cdot \rho_t}$$

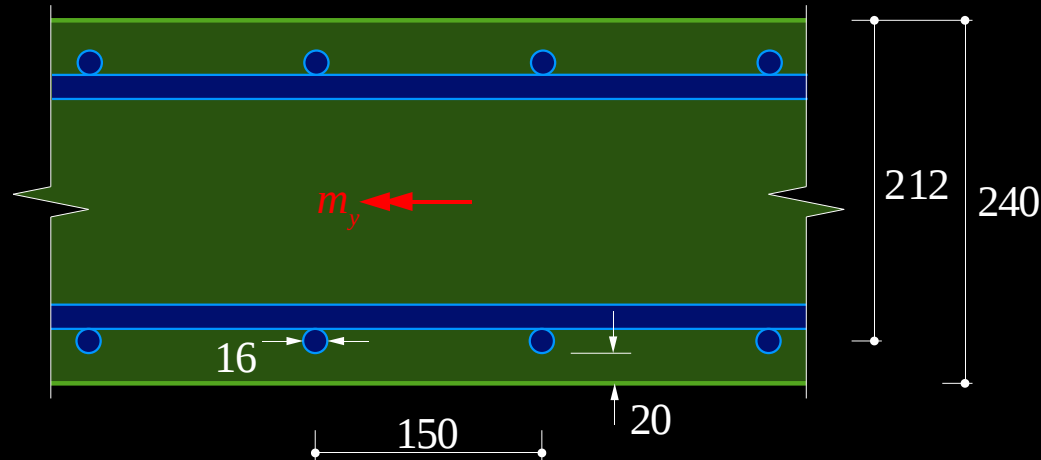
Rissbreiten:

$$w_r = \frac{\lambda \cdot s_{r0} (2 \cdot \sigma_{sr} - \lambda \cdot \sigma_{sr0})}{2 \cdot E_s} \quad (\sigma_{sr} \geq \sigma_{sr0})$$

mit
$$\rho_t = \frac{1}{\frac{M_r (d - x) E_s}{f_{ct} EI^II} + 1 - n}$$

Elastische Biegesteifigkeit – Zugversteifung

Beispiel ([1], 2.17), Stahlbetonplatte, $h = 240$ mm



Krümmungsreduktion:

$$\Delta\chi = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{m_r}{EI^II} - \frac{f_{ct}}{E_c(d-x)} \right]$$

$$= \begin{cases} 0.69 \text{ mrad/m, } \lambda=0.5 \\ 1.38 \text{ mrad/m, } \lambda=1.0 \end{cases}$$

Äquivalenter Bewehrungsgehalt:

$$\rho_t = 2.83 \%$$

$$\sigma_{sr0} = 2.6 \left(\frac{1}{0.028} + 6.83 - 1 \right) = 107 \text{ MPa}$$

$$s_{r0} = \frac{16 \cdot (1 - 0.028)}{4 \cdot 0.028} = 137 \text{ mm}$$

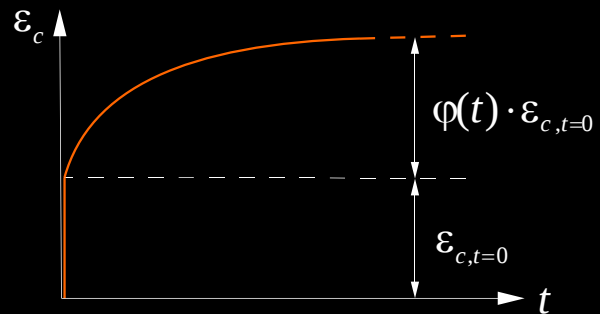
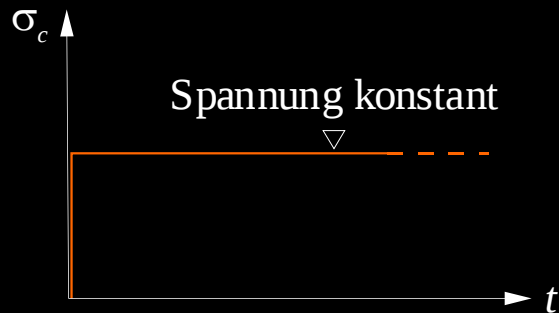
$$w_r = \frac{\lambda \cdot s_{r0} (2 \cdot \sigma_{sr} - \lambda \cdot \sigma_{sr0})}{2 \cdot E_s} \quad (\sigma_{sr} \geq \sigma_{sr0})$$

$$\sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow 0.03 \text{ mm} \leq w_r \leq 0.04 \text{ mm}$$

$$\sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow 0.14 \text{ mm} \leq w_r \leq 0.25 \text{ mm}$$

Elastische Biegesteifigkeit – Einfluss des Kriechens

[1], Seite 2.18f, SIA 262, Ziff. 3.1.2.6



- Zunahme der Verformung bei konstanter Spannung

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c,t=0} (1 + \varphi(t))$$

- Normalfall:

$$\varphi_{t=\infty} \cong 1.5 \dots 2.5$$

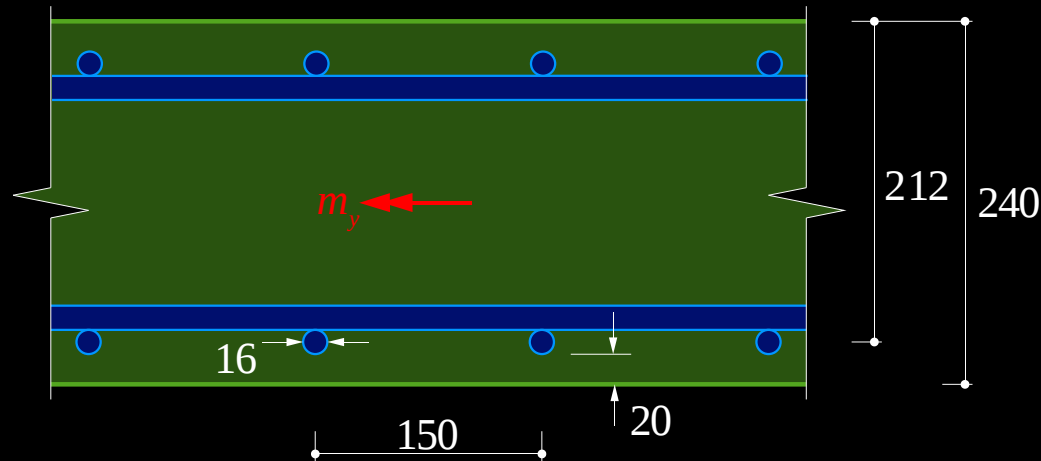
- Abschätzung des Kriecheinflusses über eine Abminderung des E-Moduls:

$$E_{ca} = \frac{E_{c,t=0}}{1 + \varphi(t)}$$

Berücksichtigung nach Theorie der Verbundquerschnitte
→ grosser Einfluss im Zustand I, weniger im Zustand II (aber nicht vernachlässigbar für z.B. Durchbiegungsberechnungen)

Elastische Biegesteifigkeit – Einfluss des Kriechens

Beispiel ([1], 2.18f), Stahlbetonplatte, $h = 240$ mm (ohne Berücksichtigung Druckbewehrung)



Abschätzung des Kriecheinflusses für $\varphi = 2$

$$E_{ca} = \frac{E_{c,t=0}}{1 + \varphi(t)} = \frac{30}{1 + 2} = 10 \text{ GPa}$$

Zustand I

Ideelle Querschnittsfläche: $A_i = 240 \cdot 1'000 + 1'340 \cdot \left(\frac{205}{10} - 1 \right) = 266'130 \text{ mm}^2/\text{m}$

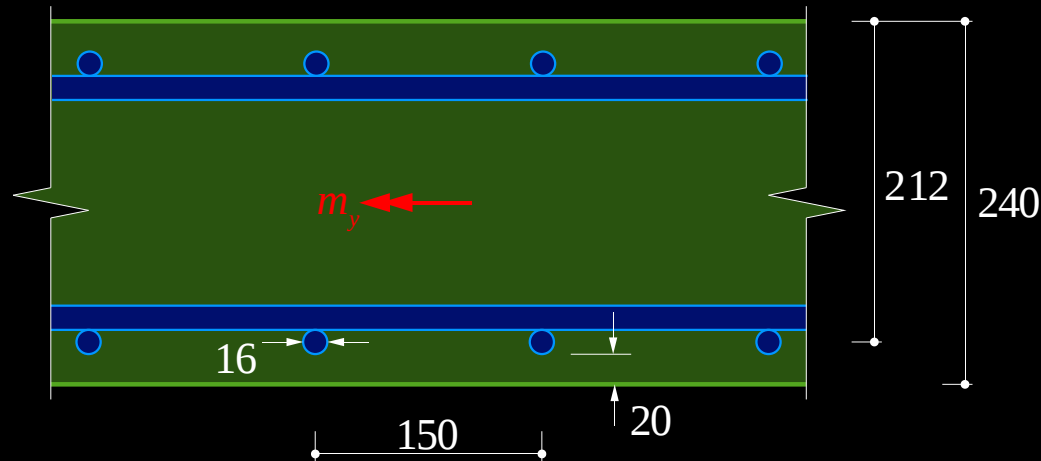
Schwerpunkt: $\zeta_C = \frac{120 \cdot 240 \cdot 1'000 + 212 \cdot 26'130}{266'130} = 129.0 \text{ mm}$

Trägheitsmoment: $I_{yi} = \frac{240^3 \cdot 1'000}{12} + 240'000 \cdot (129 - 120)^2 + 26'130 \cdot (129 - 212)^2 = 1.35 \cdot 10^9 \text{ mm}^4/\text{m}$

$\rightarrow EI_a^I = E_{ca} I_{yi} = 13.5 \text{ MNm}^2 / \text{m} = 0.37 EI^I$

Elastische Biegesteifigkeit – Einfluss des Kriechens

Beispiel ([1], 2.18f), Stahlbetonplatte, $h = 240$ mm (ohne Berücksichtigung Druckbewehrung)



Abschätzung des Kriecheinflusses für $\varphi = 2$

$$E_{ca} = \frac{E_{c,t=0}}{1 + \varphi(t)} = \frac{30}{1 + 2} = 10 \text{ GPa}$$

Zustand II

Geometrischer Bewehrungsgehalt: $\rho = \frac{1'340}{212 \cdot 1'000} = 0.63\%$, $n = \frac{205}{10} = 20.5$

Druckzonenhöhe: $x = 212 \cdot \left(\sqrt{(0.0063 \cdot 20.5)^2 + 2 \cdot 0.0063 \cdot 20.5} - 0.0063 \cdot 20.5 \right) = 83.8 \text{ mm}$

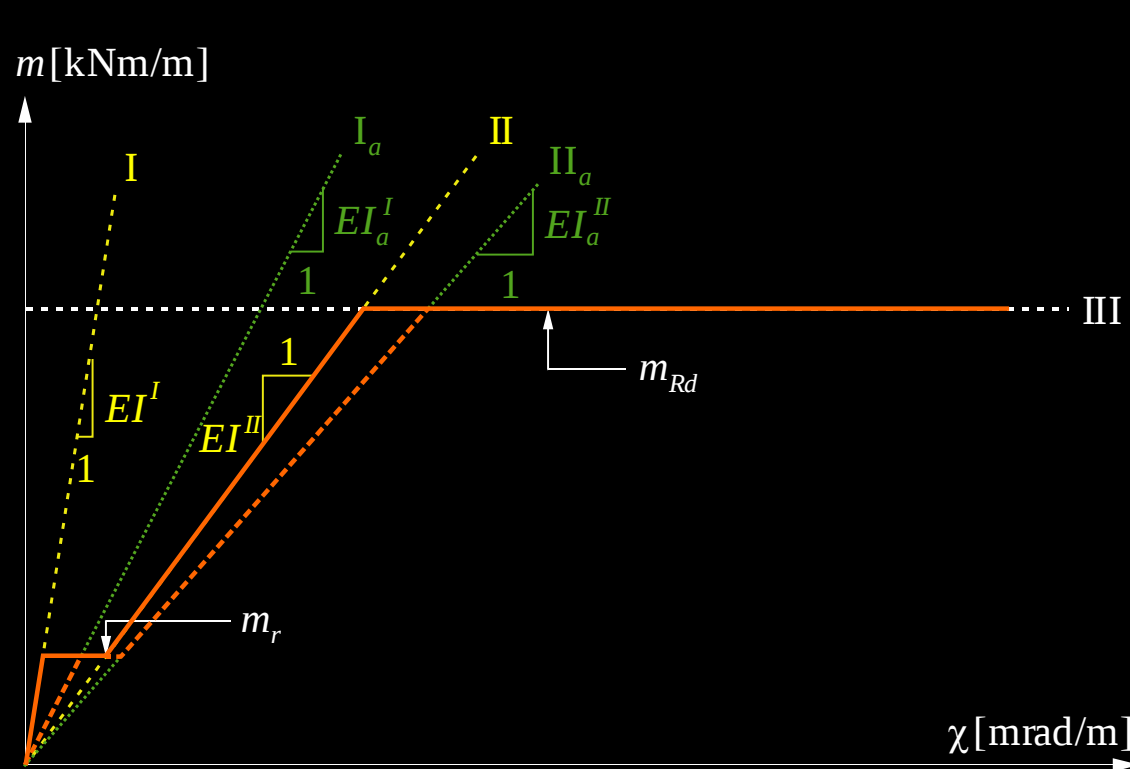
$$\rightarrow EI_a^II = \frac{M}{\chi} = a_s E_s (d - x) \left(d - \frac{x}{3} \right) = 1'340 \cdot 205'000 \cdot (212 - 83.8) \cdot \left(212 - \frac{83.8}{3} \right) = 6.5 \text{ MNm}^2/\text{m} = 0.77 \cdot EI^II$$

$$(d - x) = \frac{\varepsilon_s}{\chi}$$

Hebelarm der inneren Kräfte

Elastische Biegesteifigkeit – Einfluss des Kriechens

Beispiel ([1], 2.18f), Momenten-Krümmungs-Diagramm



$$EI^I = 36.6 \text{ MNm}^2/\text{m}$$

$$EI^II = 8.4 \text{ MNm}^2/\text{m}$$

$$EI_a^I = 13.5 \text{ MNm}^2/\text{m} = 0.37 \cdot EI^I$$

$$EI_a^II = 6.5 \text{ MNm}^2/\text{m} = 0.77 \cdot EI^II$$

Einfluss im Zustand I grösser
als im Zustand II

Elastische Biegesteifigkeit – Einfluss des Schwindens

[1], Seite 2.19f, SIA 262, Ziff. 3.1.2.7

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{cd}(t) + \varepsilon_{ca}(t)$$

→ Beton schwindet, Bewehrung schwindet nicht: Eigenspannungen in Stahlbetonbauteilen, bei statisch unbestimmten Systemen (innere) Zwängungen

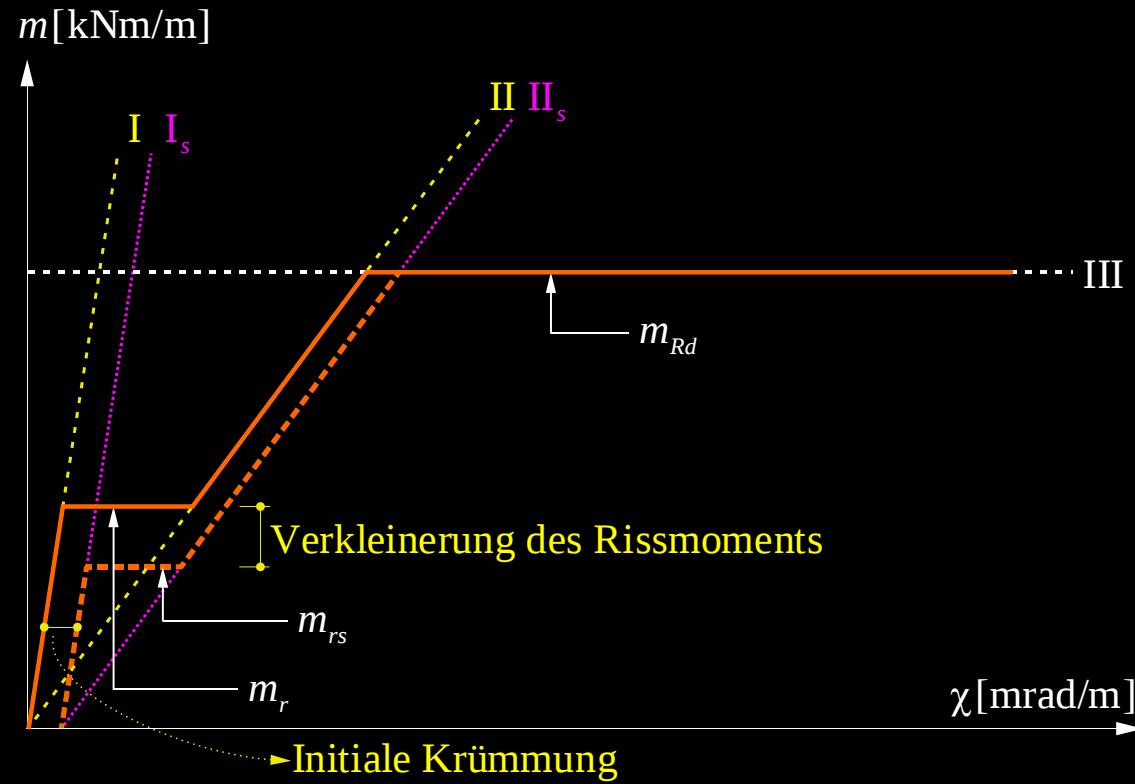
→ i.A. ergibt sich daraus eine initiale Krümmung (Verschiebung der Geraden I und II im M - χ -Diagramm)

→ Verkleinerung des Rissmoments wegen Eigenspannungen

→ Beispiel siehe [1], Seite 2.20

Elastische Biegesteifigkeit – Einfluss des Schwindens

[1], Seite 2.19f, SIA 262, Ziff. 3.1.2.7



Elastische Biegesteifigkeit

Einfluss von Rissbildung, Zugversteifung, Kriechen und Schwinden

1. Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

- Im **Gebrauchszustand** sind **Rissbildung, Zugversteifung, Kriechen und Schwinden** grundsätzlich zu berücksichtigen. Sie beeinflussen die **Steifigkeit** im Zustand I (ungerissen) und II (gerissen-elastisch).
- Mit einer **Bewehrung auf der Biegedruckseite** können die Kriechverformungen und der Schwindeinfluss im Zustand I und II reduziert werden.
- **Durchbiegungsberechnungen** schlaff bewehrter Bauteile erfolgen in der Praxis, mit ausreichender Genauigkeit, unter Annahme eines **gerissenen Querschnitts, unter Berücksichtigung des Kriechens** (abgeminderter E-Modul). Die Zugversteifung und das Schwinden werden dabei meist vernachlässigt.

2. Grenzzustand der Tragsicherheit

- Der **Biegewiderstand** (Zustand III) ist von Rissbildung, Zugversteifung, Kriechen und Schwinden weitgehend **unabhängig** (infolge Kriechen resultiert grundsätzlich auch im Grenzzustand der Tragsicherheit eine grössere Druckzonenhöhe = reduzierter Hebelarm = kleinerer Biegewiderstand unter ständigen Lasten. Ausser bei sehr hohem Anteil ständiger Lasten und grossen Bewehrungsgehalten kann dies jedoch vernachlässigt werden).

3. Grenzzustand der Ermüdung

- Ermüdungsnachweise erfolgen auf Basis der **Spannungen in Beton und Bewehrung im Zustand II** (bei ungerissenen Querschnitten nicht massgebend).

Ermüdungsnachweise

[1], Seite 2.35ff, SIA 262, Ziff. 4.3.8

Bei Bahnbrücken, Fahrbahnplatten von Strassenbrücken, Kranbahnträgern, Maschinenfundamenten etc. können Ermüdungsprobleme auftreten. Ab 50'000 Spannungswechseln ist ein **Ermüdungsnachweis für Beton und Bewehrung** zu führen.

Ermüdungsnachweise erfolgen auf Basis der Spannungen in Beton und Bewehrung im Zustand II (bei ungerissenen Querschnitten nicht massgebend). Gegebenenfalls ist das nichtlineare Verhalten des Betons durch Anpassung der Wertigkeit n zu berücksichtigen.

Bei der konstruktiven Durchbildung ermüdungsgefährdeter Bauteile sind folgende Punkte zu beachten:

- **Schweissungen vermeiden** (starke Reduktion der Ermüdungsfestigkeit insbesondere durch Punktschweissungen von Bewehrungskörben!)
- **Geschraubte Stösse vermeiden**; wenn unumgänglich, reduzierte Ermüdungsfestigkeit beachten (Bahnbrücken: Zulassung durch SBB, sehr tiefe Dauerfestigkeiten)
- Verankerungen und Kupplungen **in Bereichen geringer Spannungswechsel** anordnen
- Querkraftbewehrung in Platten muss Längsbewehrung umfassen (Überdeckung beachten)

Bei **Neubauten** soll der Nachweis in der Regel aufgrund der **Dauerfestigkeit** erfolgen. Bei Bedarf kann eine genauere Untersuchung unter Berücksichtigung von Betriebslastfaktoren λ erfolgen ([1], Seite 2.35ff).

Ermüdungsnachweise

[1], Seite 2.35ff, SIA 262, Ziff. 4.3.8

Der Nachweis der Ermüdungsfestigkeit der **Bewehrung** erfolgt auf Basis der ermüdungs-relevanten **Spannungsdifferenzen**

$\Delta\sigma_{sd}(Q_{fat}) = \sigma_{sd,max}(Q_{fat}) - \sigma_{sd,min}(Q_{fat})$, in der Form

$$\Delta\sigma(Q_{fat}) \leq 0.8\Delta\sigma_{sd,fat} \quad (\text{Dauerfestigkeit}) \text{ resp.}$$

$$\Delta\sigma_{sd} = \lambda \Delta\sigma_{sd}(Q_{fat}) \leq \Delta\sigma_{sd,fat} \quad (\text{Betriebsfestigkeit, mit Betriebslastfaktor } \lambda)$$

In der Norm SIA 262, Tab. 13 finden sich Angaben zur rechnerischen Ermüdungsfestigkeit $\Delta\sigma_{sd,fat}$. Auswahl (Werte bei gebogenen Stäben in Funktion des Biegeradius abzumindern):

- gerade Stäbe $\emptyset \leq 20$ mm: $\Delta\sigma_{sd,fat} = 145$ MPa
- gerade Stäbe $20 \leq \emptyset \leq 40$ mm: $\Delta\sigma_{sd,fat} = 120$ MPa
- vertikale Bügel $\emptyset \leq 16$ mm: $\Delta\sigma_{sd,fat} = 135$ MPa (Biegeradius d_3)
- geschweisste Längsstösse: $\Delta\sigma_{sd,fat} = 55$ MPa
- mechanische Stabverbindungen: $\Delta\sigma_{sd,fat} = 55$ MPa (SBB: nochmals tiefere Werte!)

Die **Ermüdungsfestigkeit des Betons** (aufnehmbare Schwingbreite) nimmt mit zunehmender Mittelspannung ab. Der Nachweis erfolgt daher aufgrund der **maximalen und minimalen Spannungen** ($|\sigma_{cd}|_{max}, |\sigma_{cd}|_{min}$) unter ermüdungsrelevanten Lasten (inkl. ständige Lasten!) in der Form (Darstellung im Goodman-Diagramm siehe [1], Seite 2.39):

$$|\sigma_{cd}|_{max} \leq 0.5k_c f_{cd} + 0.45|\sigma_{cd}|_{min} \leq 0.9k_c f_{cd}$$

Ermüdungsnachweise

Zustand II, elastisch

(N.B. In Regel gerissen, obwohl $M(Q_{fat}) < M_r$, da $M(Q_{max}) > M_r$ Risse bleiben bestehen)

$$\text{Druckzonenhöhe: } \frac{x}{d} = \sqrt{n^2 \rho^2 + 2 \cdot n \cdot \rho} - n \cdot \rho \quad \text{Spannungen: } \sigma_s = \frac{M}{A_s \left(d - \frac{x}{3} \right)}, \quad \sigma_c = \frac{2 \cdot M}{b \cdot x \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)}$$

Bewehrung: Dauerfestigkeit $\Delta\sigma(Q_{fat}) \leq 0.8 \Delta\sigma_{sd, fat}$ mit $\Delta\sigma_{sd}(Q_{fat}) = \sigma_s(G, Q_{fat})_{max} - \sigma_s(G, Q_{fat})_{min}$

$\left[\begin{array}{l} \text{wenn linear elastisch im gesamten Bereich bis } \Delta\sigma_s(G, Q_{fat})_{max} \text{ dann } \Delta\sigma_{sd}(Q_{fat}) = \sigma_s(Q_{fat})_{max} - \sigma_s(Q_{fat})_{min} \\ \text{Selten zutreffend, evtl. bei Bauteilen mit hoher Vorspannung oder Druckkraft!} \end{array} \right]$

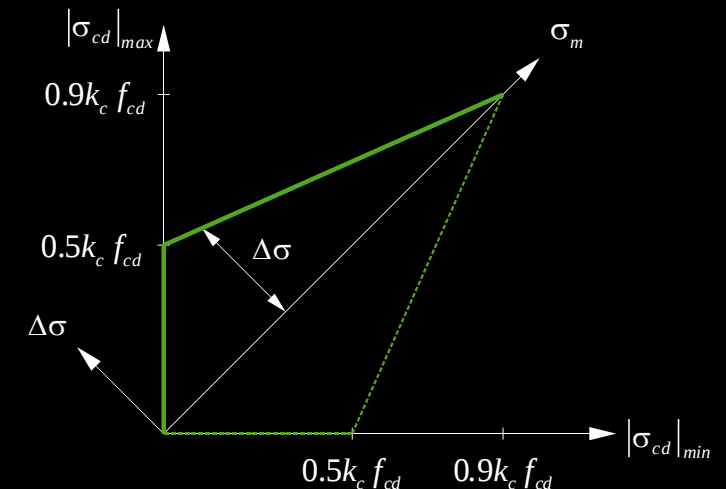
Beton:

$$|\sigma_{cd}|_{max} \leq 0.5 k_c f_{cd} + 0.45 |\sigma_{cd}|_{min} \leq 0.9 k_c f_{cd}$$

$$\text{mit } |\sigma_{cd}|_{max} = |\Delta\sigma_c(G, Q_{fat})|_{max}$$

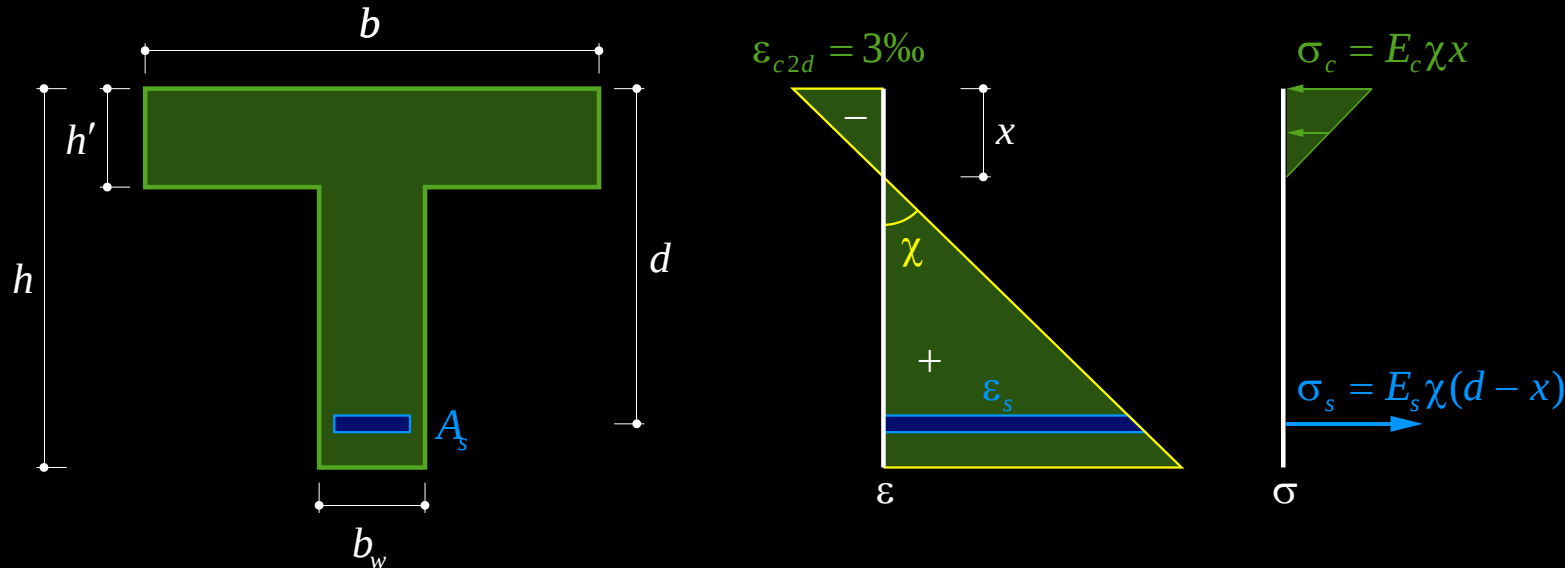
$$|\sigma_{cd}|_{min} = |\Delta\sigma_c(G, Q_{fat})|_{min}$$

Goodman-Diagramm



Elastische Biegesteifigkeit – Plattenbalken

[1], Seite 2.24ff, **Plattenbalken**



Plattenbalken kommen in Praxis häufig vor (Unterzüge im Hochbau, Platte = Flansch):

→ Steg mit Breite b_w und Flansch mit Breite $b > b_w$

→ Zustand I: analog Rechteckquerschnitt

→ Zustand II: für $x \leq h'$ analog Rechteckquerschnitt (Regelfall)

→ Zustand II: mit $x > h'$: Formel für x und EI'' siehe [1], 2.24

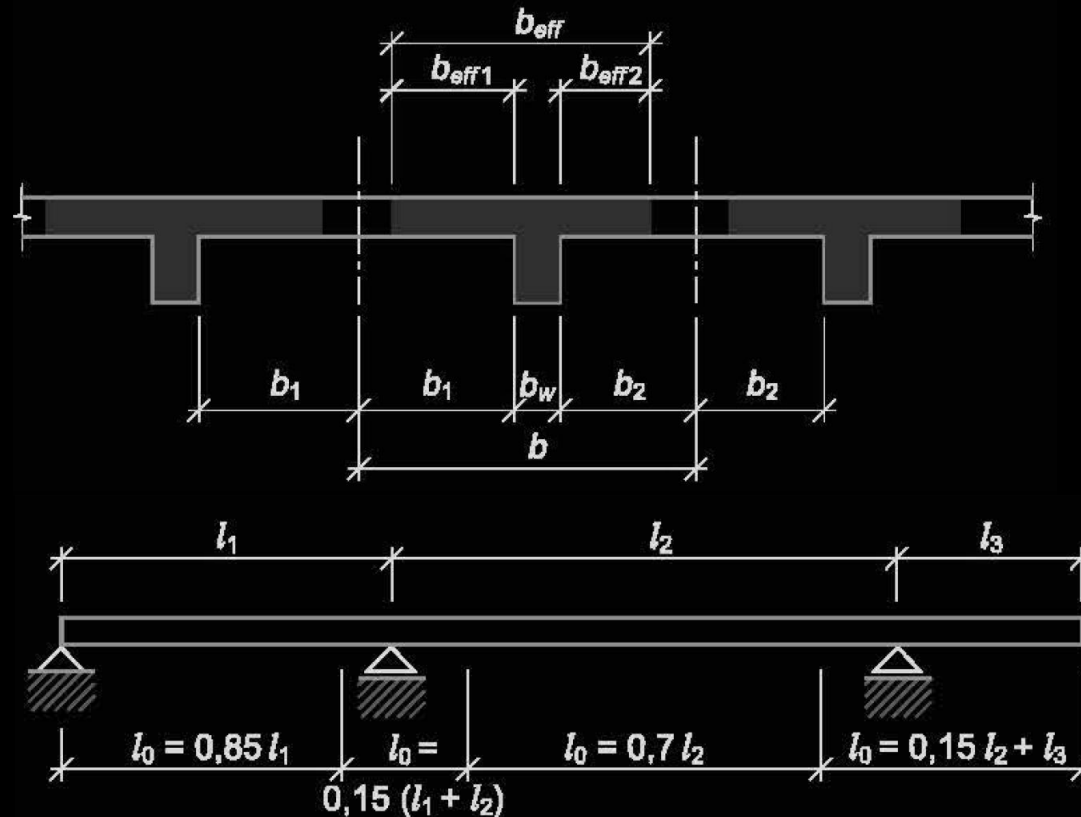
(im Bruchzustand soll die Druckzone $0.85x$ ganz im Flansch liegen, siehe Biege- und Querkraftwiderstand; Druckzone im Steg wird sonst aufgrund kleiner Breite schnell sehr gross, Hebelarm der inneren Kräfte nimmt ab → reduzierter Biege- und Querkraftwiderstand)

Plattenbalken – Mitwirkende Breite

SIA 262, Ziff. 4.1.3.3.2 und 4.1.3.3.3

Mitwirkende Plattenbreiten

- Vom Steg weiter entfernte Flanschbereiche entziehen sich der Mitwirkung («shear lag»)
- Berücksichtigung durch Ansatz von mitwirkenden Plattenbreiten (Werte in Anlehnung an Elastizitätstheorie festgelegt):



$$b_{eff} = \sum b_{eff,i} + b_w \leq b$$

$$b_{eff,i} = 0.2b_i + 0.1l_0 \leq 0.2l_0$$

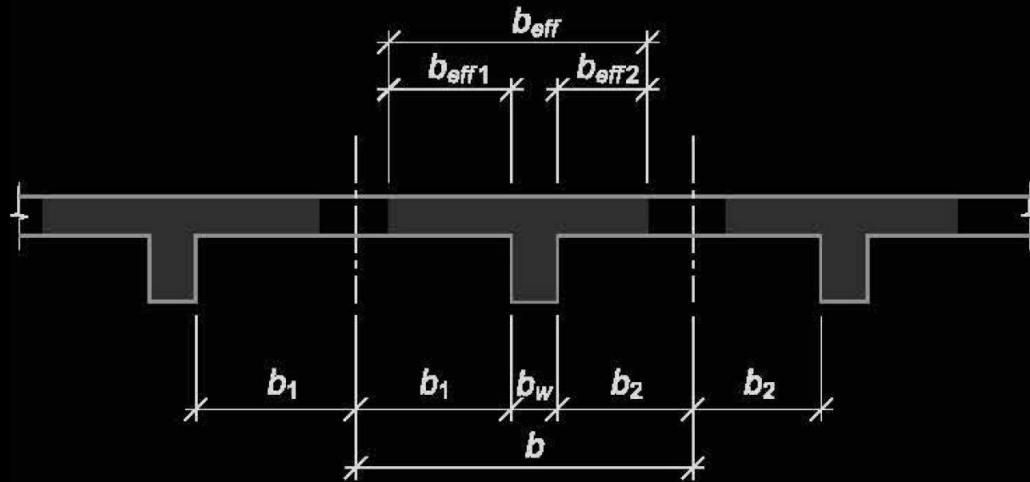
(l_0 : Abstand der Momentennullpunkte)

Plattenbalken – Mitwirkende Breite

SIA 262, Ziff. 4.1.3.3.2 und 4.1.3.3.3

Mitwirkende Plattenbreiten

- Vom Steg weiter entfernte Flanschbereiche **entziehen sich der Mitwirkung** («shear lag»)
- Berücksichtigung durch Ansatz von **mitwirkenden Plattenbreiten** (Werte in Anlehnung an Elastizitätstheorie festgelegt):



$$b_{eff} = \sum b_{eff,i} + b_w \leq b$$

$$b_{eff,i} = 0.2b_i + 0.1l_0 \leq 0.2l_0$$

(l_0 : Abstand der Momentennullpunkte)

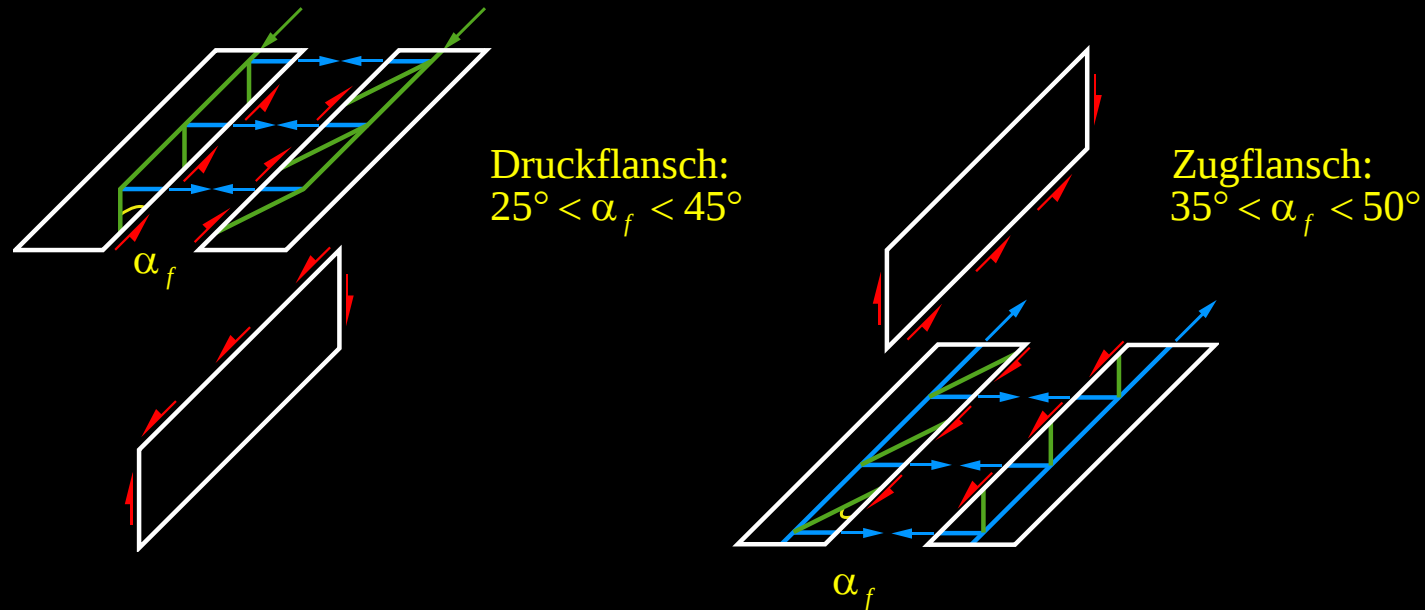
Anwendung mitwirkender Breiten nach SIA 262, Ziff. 4.1.3.3:

- Festlegung der **Steifigkeiten** (Stabstatikprogramme), Berechnungen im **Gebrauchszustand**, insbesondere Durchbiegungen
- Anhaltspunkt für im **Grenzzustand der Tragsicherheit** anzusetzende Plattenbreite
(Breite nach unterem Grenzwertsatz grundsätzlich frei wählbar, **Kraftausbreitung** beachten)

Plattenbalken – Schubanschluss der Flanschplatten

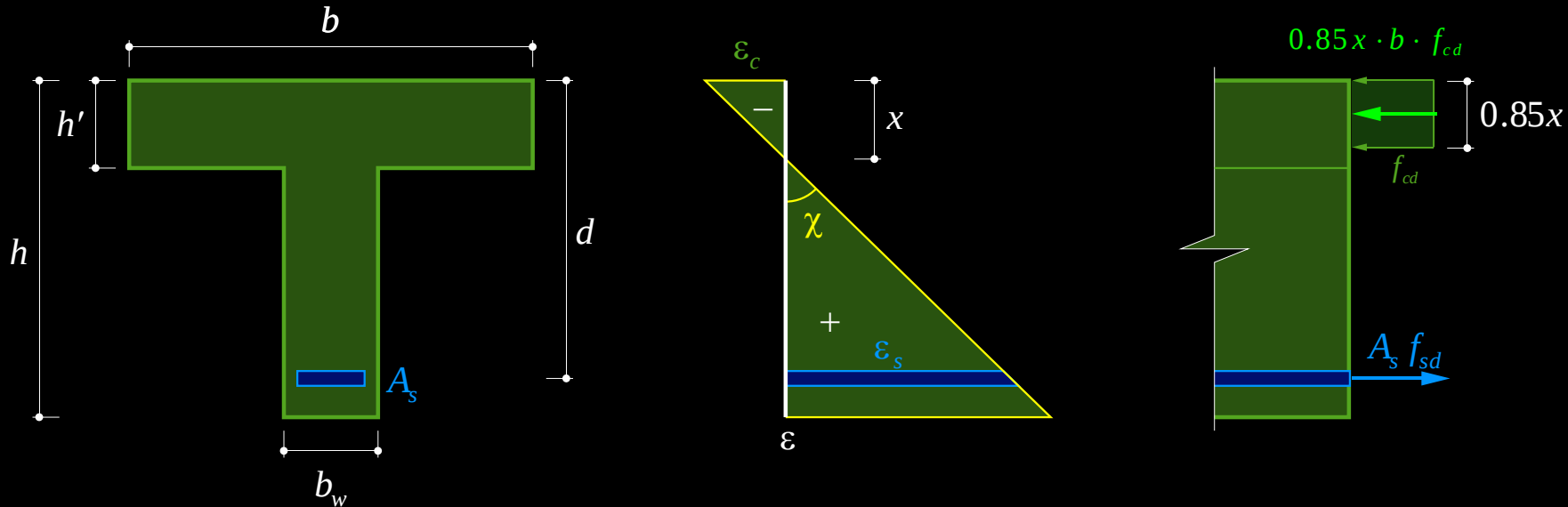
SIA 262, Ziff. 4.3.4.1 – Krafteinleitung in die Gurte (Schubanschluss)

- Im Grenzzustand der Tragsicherheit ist der Schubanschluss der Flanschplatten an den Steg zu berücksichtigen
- Einleitung von Zug-/Druckkräften in die Flansche (Gurte) erzeugt Schubkräfte im Übergang zwischen Steg und Flansch, sowie Querkzug- und Druckkräfte in den Flanschen
- Siehe Kapitel Fachwerkmodelle und SIA 262, 4.3.4.1



Plattenbalken – Tragsicherheit

[1], Seite 2.24ff, **Plattenbalken**



Biegewiderstand von Plattenbalkenquerschnitten:

- Für $0.85 \cdot x \leq h'$ analog Rechteckquerschnitt (Regelfall), wobei der mechanische Bewehrungsgehalt ω auf die Flanschbreite zu beziehen ist
- Die Biegedruckzone soll im Bruchzustand vollständig im Flansch liegen (Fall $0.85 \cdot x > h'$ vermeiden). Andernfalls kann der Schubwiderstand stark beeinträchtigt werden, da sich das Druckspannungsfeld (siehe Querkraft) nicht über die ganze Steghöhe ausbilden kann
(relevant auch bei Hohlkastenträgern, insbesondere im Bereich von Zwischenauflagern bei Durchlaufträgern!)

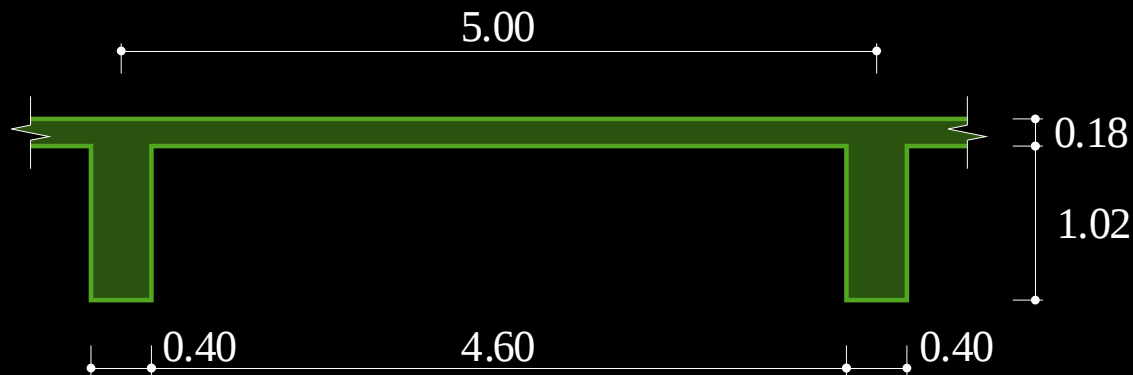
Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.26ff

Plattenbalken überspannt als einfacher Balken 16 m, zusätzlich zu Eigengewicht wirken eine Auflast von $g_{a,k} = 1 \text{ kN/m}^2$ und eine Nutzlast von $q_k = 3 \text{ kN/m}^2$

Geometrie

Abmessungen in [m]



Baustoffe

Beton C25/30 $\rightarrow f_{cd} = 16.5 \text{ MPa}$

Betonstahl B500B $\rightarrow f_{sd} = 435 \text{ MPa}$

$c_{nom} = 30 \text{ mm}$

Einwirkungen

Eigengewicht g_k mit $\gamma_{Beton} = 25 \text{ kN/m}^3$

Auflast $g_{a,k} = 1 \text{ kN/m}^2$

Nutzlast $q_k = 3 \text{ kN/m}^2$

N.B.: typischen Schlankheiten:

$\rightarrow$ Platten $h \geq l / 25$ (hier Querrichtung: $4.6 / 0.18 \dots l / 25.6$)

$\rightarrow$ Träger $h \geq l / 12$ (hier Längsrichtung: $16 / 1.2 \dots l / 13.3$)

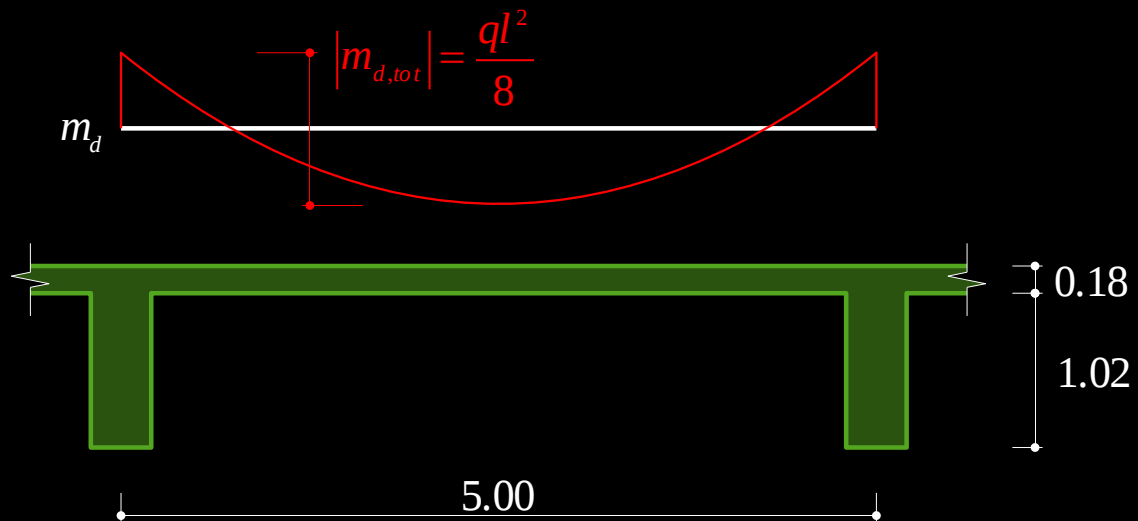
Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.26ff

Platte in Querrichtung (spannt als Durchlaufträger zwischen den Balken)

Einwirkungen

$$\left. \begin{array}{l} g_k = 0.18 \cdot 25 = 4.5 \text{ kN/m}^2 \\ g_{a,k} = 1 \text{ kN/m}^2 \\ q_k = 3 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_{d,Platte} + q_{d,Platte} = 1.35 \cdot (4.5 + 1) + 1.5 \cdot 3 = 11.9 \text{ kN/m}^2 \\ \rightarrow |m_{d,tot}| = 11.9 \cdot 5.0^2 / 8 = 37.2 \text{ kNm/m} \end{array}$$



Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.26ff

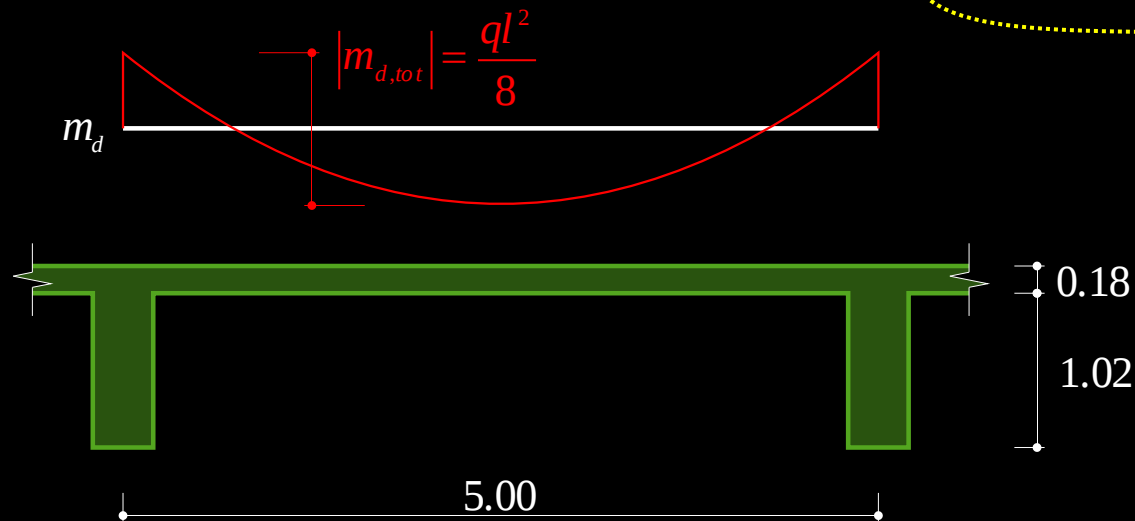
Platte in Querrichtung (spannt als Durchlaufträger zwischen den Balken)

Widerstand

→ Wahl: Plattenbewehrung 4 Lagen Ø10/200, 1. und 4. Lage in Querrichtung, $c_{nom} = 30$ mm

$$m_{Rd}^+ = a_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{a_s \cdot f_{sd}}{2 \cdot f_{cd}} \right) = 393 \cdot 435 \cdot \left(145 - \frac{393 \cdot 435}{2 \cdot 1'000 \cdot 16.5} \right) = 23.9 \text{ kNm/m}$$

$$m_{Rd,erf}^- = |m_{d,tot}| - m_{Rd}^+ = 37.2 - 23.9 = 13.3 \text{ kNm/m}$$



$m_{Rd}^- = m_{Rd}^+$, aber:

Obere Querbewehrung muss neben neg. Moment auch Querkraft aus Schubanschluss aufnehmen → Superposition der Kräfte ergibt erforderliche Bewehrung (siehe später)

Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.26ff

Plattenbalken in Längsrichtung - Einfacher Balken, $l = 16$ m

Einwirkungen

$$g_d + q_d = 5.00 \cdot (g_{d,Platte} + q_{d,Platte}) + 1.35 \cdot 0.4 \cdot 1.02 \cdot 25 = 73.4 \text{ kN/m}$$

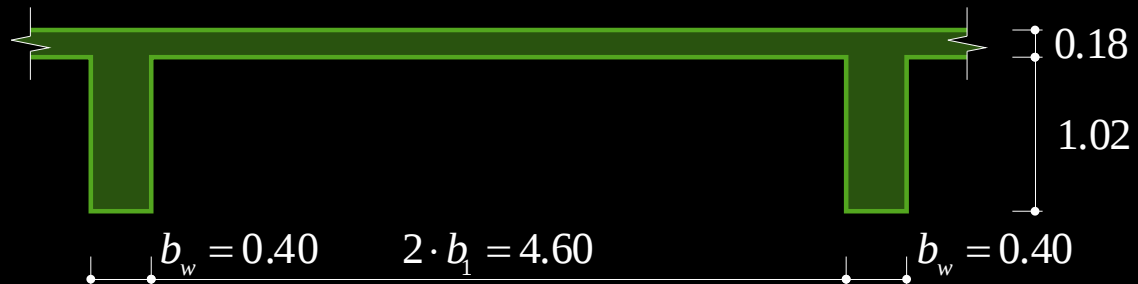
$$\rightarrow M_d = 73.4 \cdot 16^2 / 8 = 2'349 \text{ kNm}$$

$$(\rightarrow V_d = 73.4 \cdot 16 / 2 = 587 \text{ kN})$$

Mitwirkende Plattenbreite

$$b_{eff,1} = b_{eff,2} = 0.2b_1 + 0.1l_0 = 0.2 \cdot 2.3 + 0.1 \cdot 16 = 2.06 \text{ m}$$

$$b_{eff} = \sum b_{eff,i} + b_w = 2 \cdot 2.06 + 0.4 = 4.52 \text{ m} (< b = 5.00 \text{ m})$$



Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.26ff

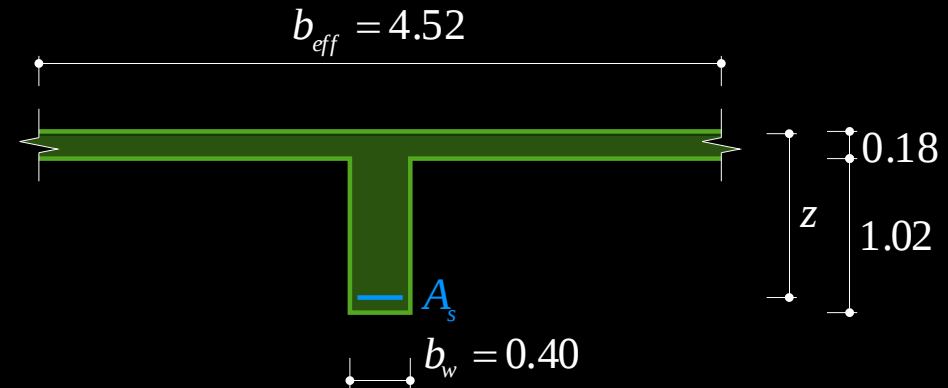
Plattenbalken in Längsrichtung - Einfacher Balken, $l = 16 \text{ m}$

Abschätzung der erforderlichen Längsbewehrung

$d \approx 1'100 \text{ mm}$ (Annahme : 2 Lagen Längsbewehrung)

$z \approx 0.95 \cdot d \approx 1'050 \text{ mm}$ (0.95 anstatt 0.9 da bei Plattenbalken viel breitere Druckzone)

$$A_{s,erf} = \frac{M_d}{z \cdot f_{sd}} = \frac{2'349 \cdot 10^6}{1'050 \cdot 435} = 5'140 \text{ mm}^2 \rightarrow 7\emptyset 30 \hat{=} 4'950 \text{ mm}^2$$



Plattenbalken – Biegebemessung

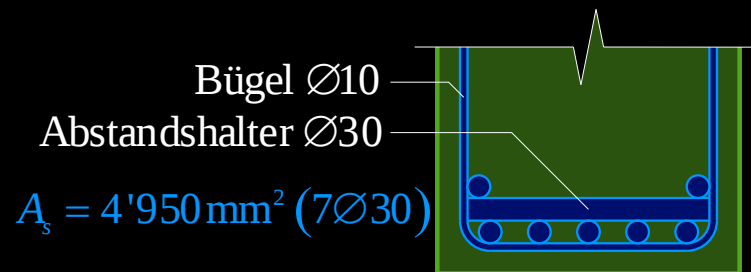
Beispiel [1], Seite 2.26ff

Plattenbalken in Längsrichtung - Einfacher Balken, $l = 16 \text{ m}$

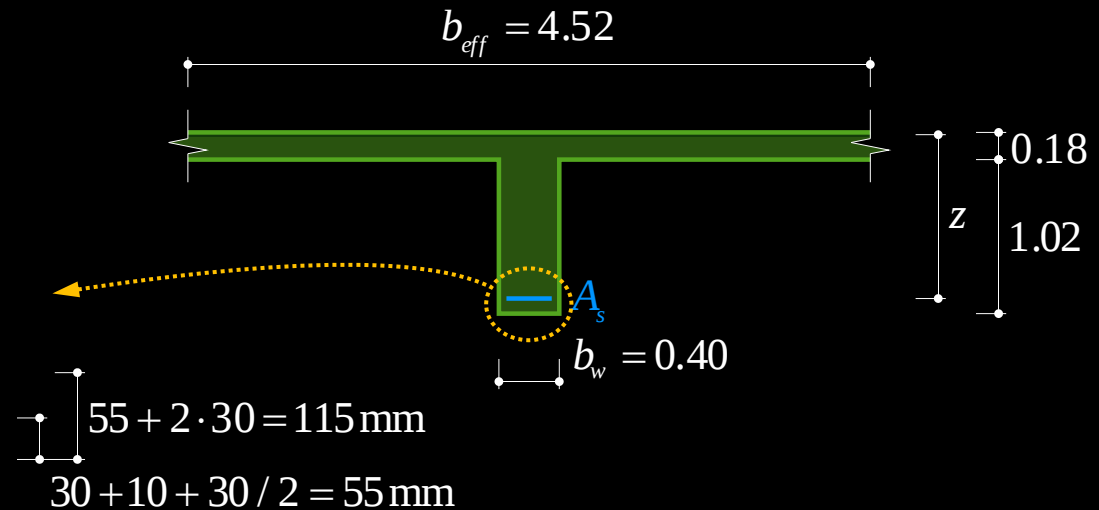
Effektiver Biegewiderstand (Nachweis Biegetragsicherheit)

$$d = 1'200 - \frac{5 \cdot 55 + 2 \cdot 115}{7} = 1'128 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} = A_s f_{sd} \left(d - \frac{A_s f_{sd}}{2b_{eff} f_{cd}} \right) = 4'950 \cdot 435 \cdot \left(1'128 - \frac{4'950 \cdot 435}{2 \cdot 4'520 \cdot 16.5} \right) = 2'398 \text{ kNm} \geq M_d = 2'349 \text{ kNm}$$

$$0.85x/2$$


$$A_s = 4'950 \text{ mm}^2 (7\varnothing 30)$$



Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.26ff

Plattenbalken in Längsrichtung - Einfacher Balken, $l = 16$ m

Weitere erforderliche Nachweise (siehe später)

- Querkrafttragsicherheit der Platte (SIA 262, Ziff. 4.3.3.2)
- Querkrafttragsicherheit des Plattenbalkens (mittels Spannungsfeld, SIA 262, Ziff. 4.3.3.3)
- Schubanschluss – Krafteinleitung in die Gurte (SIA 262, Ziff. 4.3.4.1)

Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.31ff

Durchbiegung des behandelten Plattenbalkens

Gerissene Steifigkeit kurzfristig

Annahme : $x < h'$, nur Hauptbewehrung 7Ø30 berücksichtigt

$$\rho = \frac{A_s}{b_{eff} \cdot d} = \frac{4'950}{4'520 \cdot 1'128} = 0.097 \%$$

$$E_c = 32 \text{ GPa}, E_s = 205 \text{ GPa} \rightarrow \rho n = 0.0062$$

$$\rightarrow x = 119.0 \text{ mm} < h' = 180 \text{ mm} \quad \rightarrow EI^II = 1'115 \text{ MNm}^2$$

Gerissene Steifigkeit langfristig

Annahme : $x > h'$, nur Hauptbewehrung 7Ø30 berücksichtigt

$$\varphi = 2 \rightarrow E_c = 10.7 \text{ GPa}, n = \frac{205 \cdot 3}{32} = 19.2$$

$$\rightarrow x = 198.6 \text{ mm} > h' = 180 \text{ mm} \quad \rightarrow EI_a^II = 1'002 \text{ MNm}^2$$

Bei der Berücksichtigung des Einflusses des Kriechens hat die Druckbewehrung einen positiven Einfluss. Mit einer entsprechenden Bewehrung können die Langzeitverformungen etwas reduziert werden. Bei Verwendung von Ø10/150 im Flansch:

$$\rightarrow EI_a^II = 1'014 \text{ MNm}^2$$

Plattenbalken – Biegebemessung

Beispiel [1], Seite 2.31ff

Durchbiegung des behandelten Plattenbalkens

Durchbiegungen kurzfristig infolge veränderlicher Lasten

$$q_k = 5 \cdot 3 = 15 \text{ kN/m}$$

$$w_q = \frac{5q_k l^4}{384EI_{II}} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 16'000^4}{384 \cdot 1'115 \cdot 10^{12}} = 11.5 \text{ mm}$$

Durchbiegung langfristig infolge ständiger Lasten

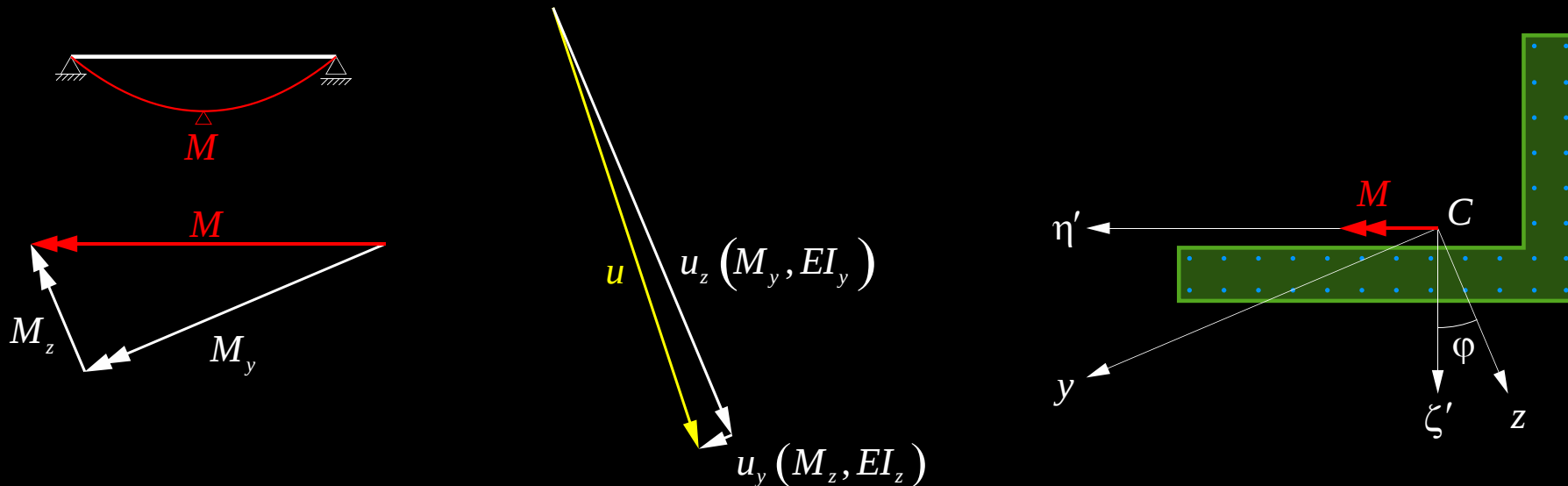
$$g_k = 5 \cdot 5.5 + 0.4 \cdot 1.02 \cdot 25 = 37.7 \text{ kN/m}$$

$$w_g = \frac{5g_k l^4}{384EI_a} = \frac{5 \cdot 37.7 \cdot 16'000^4}{384 \cdot 1'000 \cdot 10^{12}} = 32.1 \text{ mm}$$

Biegung allgemeiner Querschnitte – Allgemeines

Verallgemeinerung auf **allgemeine, unsymmetrische Querschnitte**

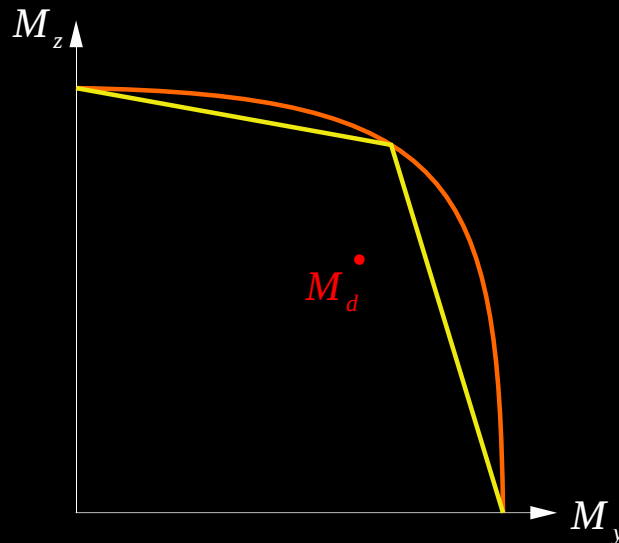
- Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf allgemeine Querschnitte übertragen
- Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens analog wie für Rechteckquerschnitte, in der Praxis mit Querschnittsprogrammen
- Im allgemeinen Fall resultiert **schiefe Biegung**
- Die statische Berechnung erfolgt in der Regel mit den **Hauptachsen** des Betonquerschnitts (ev. ideeller Querschnitt)
- Beispiel: Vorfabrizierte Balkonplatte mit Brüstung (einfacher Balken unter vertikaler Last = Eigengewicht und Nutzlasten), verformt sich nicht vertikal nach unten, sondern auch in Querrichtung:



Biegung allgemeiner Querschnitte – Tragsicherheit

Tragsicherheitsnachweis bei **allgemeiner Biegebeanspruchung** und allgemeinen Querschnitten

- Grundsätzlich kann der Biegewiderstand für eine **beliebige Richtung des Momentenvektors** analog wie für einfache Biegung ermittelt werden
- Tragsicherheitsnachweis erfolgt zweckmässigerweise mit **M_y - M_z -Interaktionsdiagrammen**
- **Querschnittsprogramme** → genaues Interaktionsdiagramm (Fliesskurve in M_y - M_z -Ebene)
- **Berechnung von Hand**: einzelne einfach zu bestimmende Punkte berechnen, linear verbinden → unterer Grenzwert der Tragsicherheit für konvexe Fliessbedingung



M_{Rd} : effektive Fliessfigur $Y(M_y, M_z) = 0$, konvex

Näherung für M_{Rd} (einzelne Punkte,
linear verbunden = unterer Grenzwert)

Nachweis:

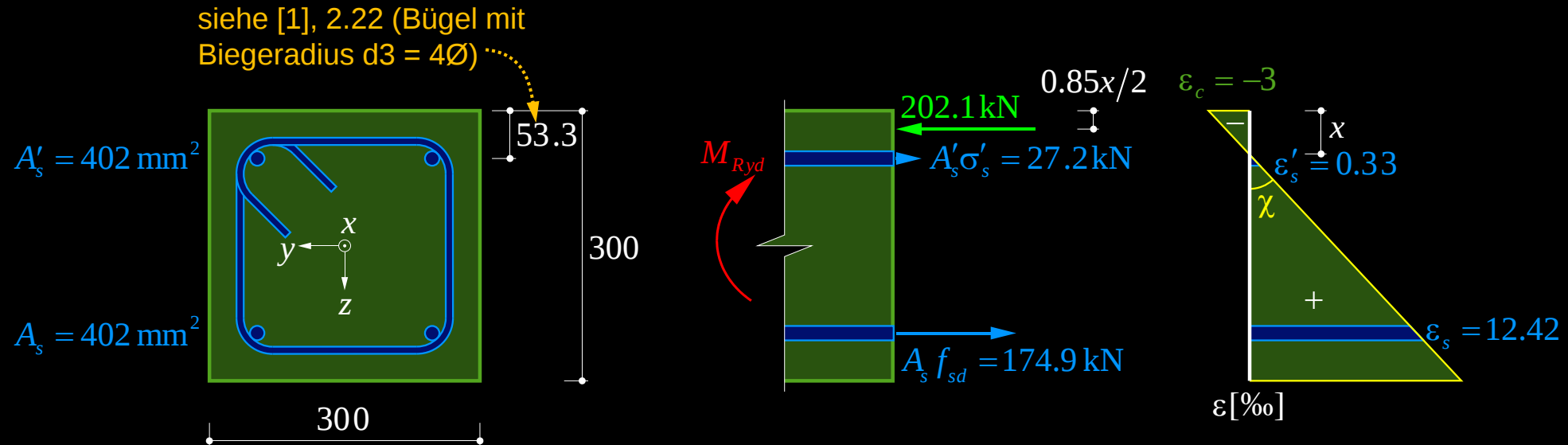
$$M_d(M_{yd}, M_{zd}) < M_{Rd}$$

Biegung allgemeiner Querschnitte – Tragsicherheit

Beispiel Interaktionsdiagramm, [1], Seite 2.22

→ Quadratquerschnitt, Beton C25/30, Bügel Ø8/100, Längsbewehrung 4Ø16

→ Einachsige Biegung um Hauptachsen ($M_{Ryd} = M_{Rzd}$):



$$\sum N = 0 : 0.85x \cdot 300 \cdot 16.5 - \frac{53.3 - x}{x} \cdot 0.003 \cdot 205'000 \cdot A'_s = 435 \cdot A_s \rightarrow x = 48 \text{ mm}$$

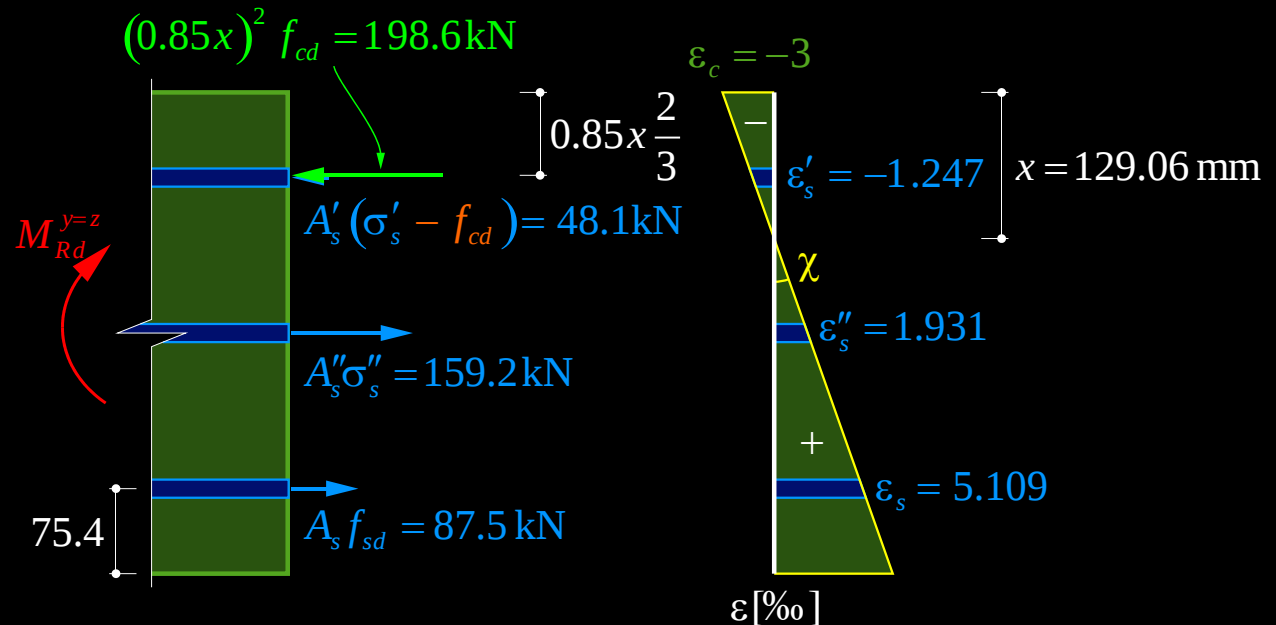
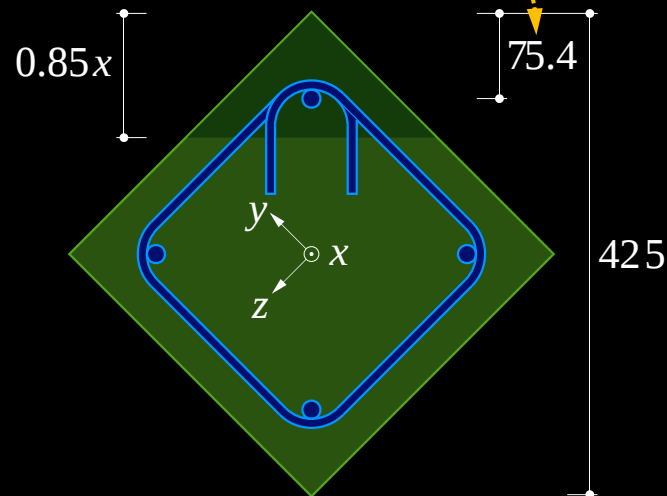
$$\rightarrow M_{Ryd} = M_{Rzd} = 174.9 \cdot (300 - 53.3) + 27.2 \cdot 53.3 - 202.1 \cdot \frac{0.85 \cdot 48}{2} = 40.5 \text{ kNm}$$

Biegung allgemeiner Querschnitte – Tragsicherheit

Beispiel Interaktionsdiagramm, [1], Seite 2.22

→ Schiefe Biegung um 45° ($M_{y,Rd} = M_{z,Rd}$) → $M_{Rd}^{y=z} = 46.2 \text{ kNm}$

siehe [1], 2.22 (Bügel mit
Biegeradius $d_3 = 4\emptyset$)



$$\sum N = 0 : \frac{(0.85x\sqrt{2})^2}{2} \cdot 16.5 + 8^2 \pi \cdot \left\{ 0.003 \cdot \frac{x - 75.4}{x} \cdot 205'000 - 16.5 \right\} = 8^2 \pi \left[435 + 2 \cdot 0.003 \cdot \frac{150\sqrt{2} - x}{x} \cdot 205'000 \right]$$

→ $x = 129.1 \text{ mm}$

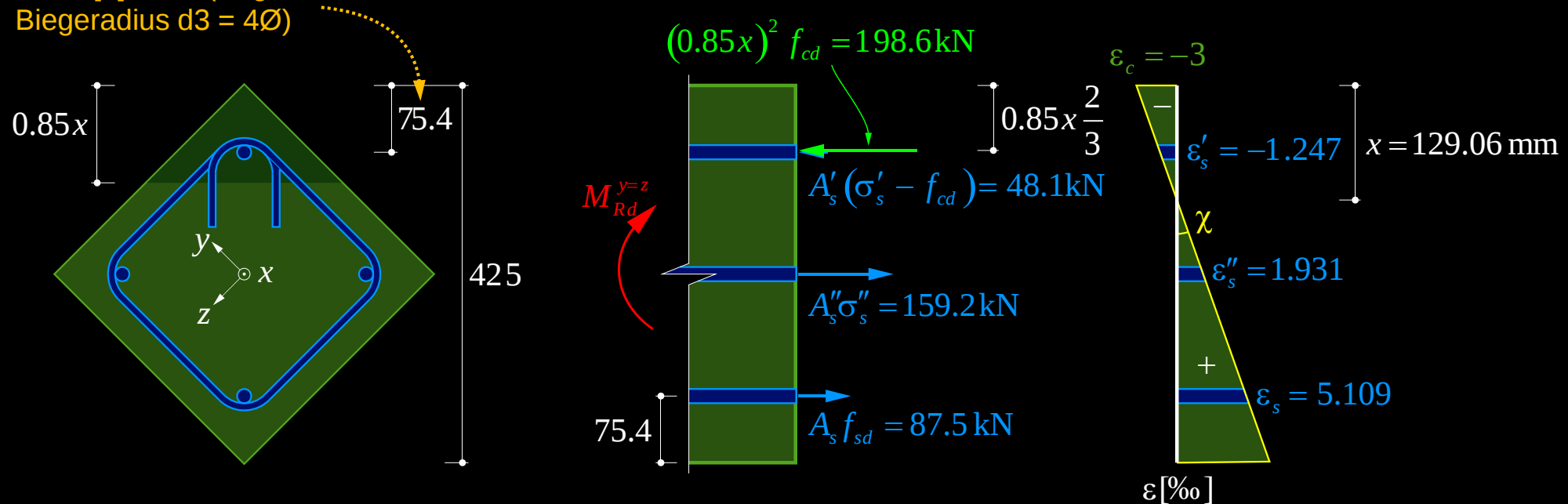
NB: Bewehrungskräfte:
 $A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s$, in der
Druckzone $-A_s \cdot f_{cd}$ (da
Betonkraft ohne Abzug
von A_s gerechnet wurde)

Biegung allgemeiner Querschnitte – Tragsicherheit

Beispiel Interaktionsdiagramm, [1], Seite 2.22

→ Schiefe Biegung um 45° ($M_{y,Rd} = M_{z,Rd}$) → $M_{Rd}^{y=z} = 46.2 \text{ kNm}$

siehe [1], 2.22 (Bügel mit
Biegeradius $d_3 = 4\emptyset$)

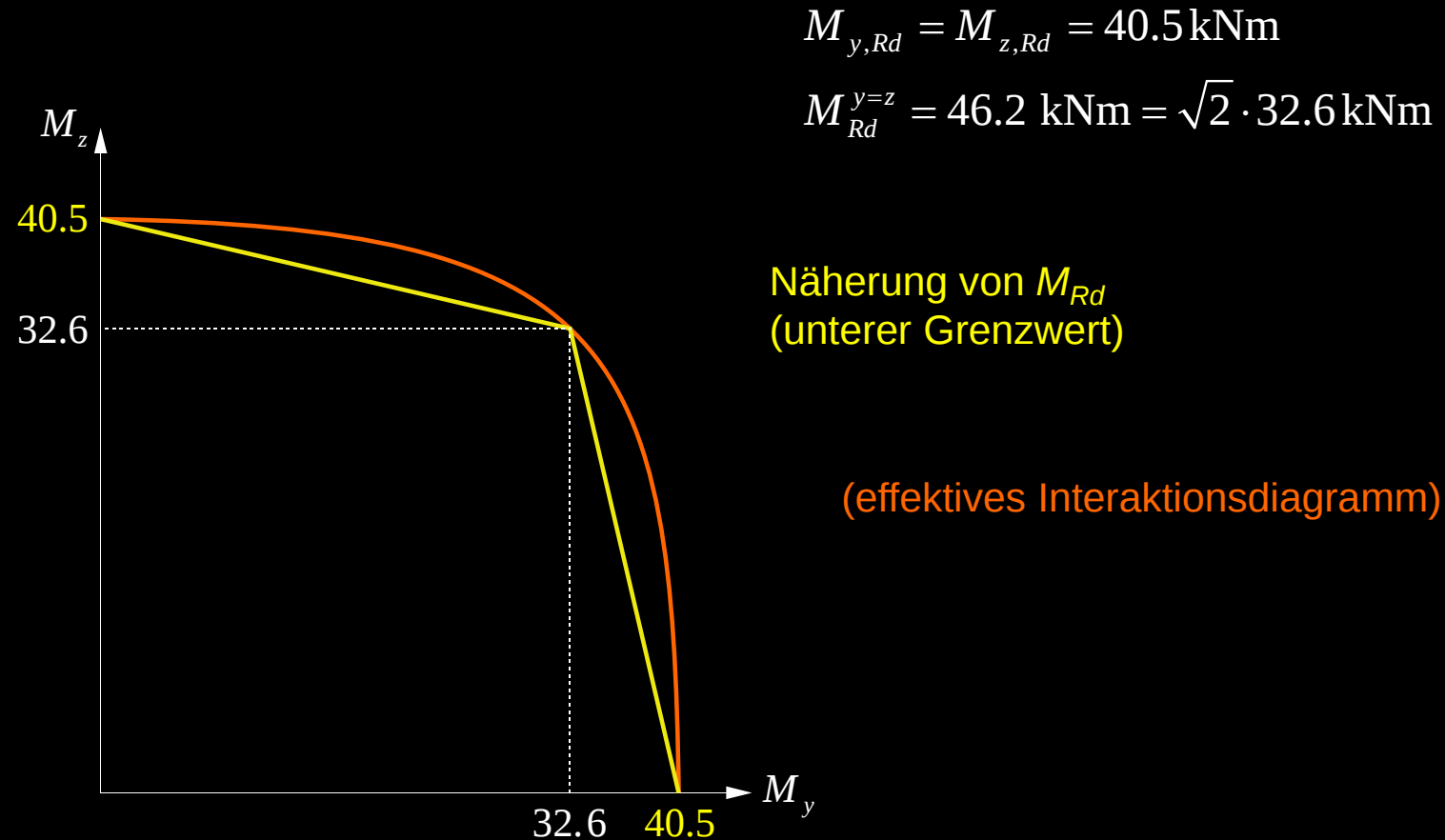


$$\rightarrow M_{Rd}^{y=z} = 87.5 \cdot (300\sqrt{2} - 75.4) + 159.2 \cdot 150\sqrt{2} - 48.1 \cdot 75.4 - 198.6 \cdot 0.85 \cdot 129.06 \cdot \frac{2}{3} = 46.2 \text{ kNm}$$

NB: Für Handrechnung ist starr-ideal plastische Idealisierung (leicht auf unsicherer Seite) wesentlich einfacher, siehe [1] Seite 2.23

Biegung allgemeiner Querschnitte – Tragsicherheit

Beispiel Interaktionsdiagramm, [1], Seite 2.22



Biegung – Zusammenfassung (1)

1. Das Verhalten von Stahlbetonbauteilen unter Biegebeanspruchung wird durch Momenten-Krümmungsdiagramme beschrieben. Wie unter Zugbeanspruchung unterscheidet man «Zustand I» (ungerissen elastisch), «Zustand II» (gerissen, Bewehrung elastisch) und «Zustand III» (gerissen, Bewehrung fließt).
2. Das Verhalten im Zustand I kann mit ideellen Querschnittswerten ($n=E_s/E_c$, $\sigma_s=n\sigma_c$) untersucht werden. Meist ist die Betrachtung reiner Betonquerschnitte ausreichend.
3. Das Verhalten im Zustand II kann für linear elastisches Verhalten der Bewehrung und des Betons (auf Druck) gut erfasst werden. Die Berücksichtigung des Kriechens und des nichtlinearen Verhaltens des Betons kann durch Anpassung der Wertigkeit n erfolgen.
4. Der Bruchwiderstand (Zustand III) kann unter Voraussetzung eines ideal plastischen Verhaltens von Bewehrung und Beton ermittelt werden. Die Krümmungen werden durch die Fließdehnung der Bewehrung (in der Zugzone) und die Bruchstauchung des Betons (in der Druckzone) begrenzt.
5. Die Bewehrungsgehalte sind nach unten resp. oben wie folgt zu begrenzen:
 - $\rho_{\min}$ so, dass Bewehrung bei Rissbildung elastisch bleibt (kein Sprödbbruch)
 - $\rho_{\max}$ so, dass Bewehrung fließt, bevor Beton die Bruchstauchung erreicht (Duktilität)
6. Plattenbalken können analog wie Rechteckquerschnitte behandelt werden; zu beachten sind die mitwirkende Plattenbreite und der Schubanschluss. Zudem soll die Druckzone im Bruchzustand möglichst nicht in den Steg reichen.

Biegung – Zusammenfassung (2)

7. **Durchbiegungen** können anhand des Verhaltens in **Zustand I und Zustand II** abgeschätzt werden, unter Berücksichtigung des Kriechens mittels abgemindertem E-Modul. Für verfeinerte Untersuchungen können gerissene und ungerissene Bereiche unterschieden werden (**Rissbildung unter Nutzlasten beachten**, Querschnitt bleibt danach auch für ständige Lasten gerissen), und die Zugversteifung kann mit dem Zuggurtmodell berücksichtigt werden.
8. Bei Bedarf können **Rissabstände und Rissbreiten** mit dem **Zuggurtmodell** abgeschätzt werden (äquivalenter Bewehrungsgehalt der Zugzone).
9. Das Verhalten **beliebiger Querschnitte** unter allgemeiner Beanspruchung kann mit **Querschnittsprogrammen** untersucht werden (Tabellenwerke sind nicht mehr zeitgemäss).
10. **Plastische Schnittkraftumlagerungen** sind unter Beachtung der Begrenzung $x/d < 0.35$ ohne Nachweis des **Verformungsvermögens** (→ Vorlesung «Advanced Structural Concrete») zulässig.
11. **Ermüdungsnachweise** erfolgen auf Basis der Spannungen in Beton und Bewehrung im Zustand II (bei ungerissenen Querschnitten nicht massgebend).
12. **Empfohlenes Vorgehen** in der Praxis:
 - Tragsystem, Abmessungen und Baustoffe festlegen
 - Überschlägige Bemessung (in Richtung des Kraftflusses)
 - Konstruktive Details und Bauvorgang (in umgekehrter Richtung)
 - Kontrolle, definitive Bemessung (in Richtung des Kraftflusses)
 - Zusammenstellung getroffener Annahmen und offener Punkte für Weiterbearbeitung