

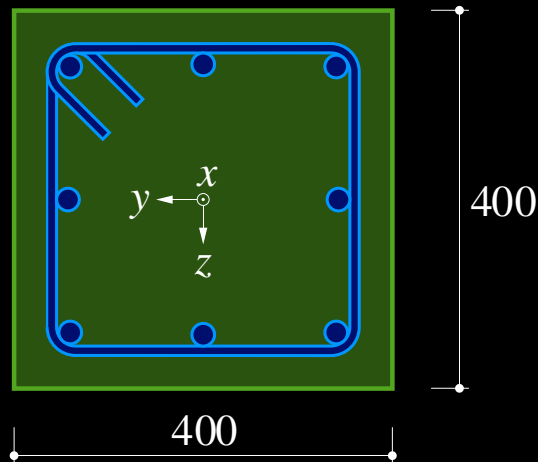
3 Stabtragwerke

3.1 Normalkraft

(schlaff bewehrte Zug- und Druckglieder)

Verhalten unter Normalkraft

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) → N - ε -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Bügelbewehrung $\varnothing 12$ ($c_{nom} = 35$ mm)

Längsbewehrung 8 $\varnothing 26$

NB: Durchmesser \varnothing immer in mm

- Beton C30/37: $f_{cd} = 20$ MPa
 $f_{ctm} = 2.9$ MPa
 $E_{cm} = 33.6$ GPa
- Betonstahl B500B: $f_{sd} = 435$ MPa
 $E_s = 205$ GPa

mit: $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 30 \text{ MPa} / 1.5$ mit $\eta_{fc} = \eta_t = 1$

$$f_{sd} = f_{sk} / \gamma_s = 500 \text{ MPa} / 1.15$$

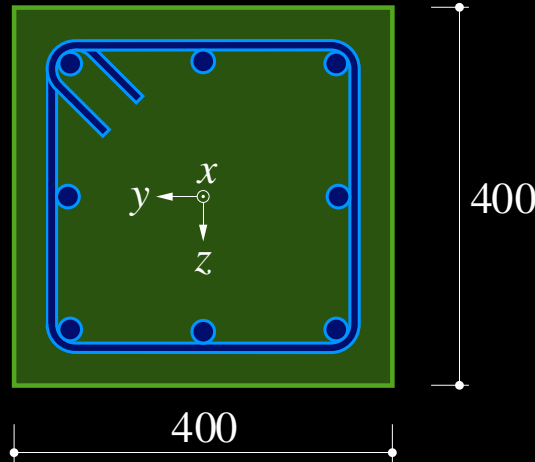
$$E_{cm} = k_E \cdot \sqrt[3]{f_{cm}} \quad \text{mit } k_E = 10'000 \text{ (Alluvialkies)}$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa}$$

(SIA 262, Ziff. 2.3, 3.1 und 3.2)

Verhalten unter Normalkraft – Zug

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) → N - ε -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Gleichgewicht und Verträglichkeit, starrer Verbund

$$N_{Ed} = N_c + N_s$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon$$

Elastisches Verhalten unter Zug bis Rissbildung

$$N_c = \varepsilon E_c A_c (1 - \rho) \quad \text{für } \varepsilon < f_{ctm} / E_c$$

$$N_s = \varepsilon E_s A_s = \varepsilon n E_c \rho A_c \quad \text{für } \varepsilon < f_{sd} / E_s$$

$$N_{Ed} = \varepsilon E_c A_c (1 + \rho(n - 1)) \rightarrow \text{ungerissener QS}$$

Annahmen:

- starrer Verbund im ungerissenen Zustand
- keine Mitwirkung des Betons nach der Rissbildung

mit: $n = E_s / E_c = 205 / 33.6 = 6.1$

$$\rho = A_s / A_c = 0.027$$

$$A_c = 400 \cdot 400 = 160'000 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 8 \cdot \pi / 4 \cdot 26^2 = 4'247 \text{ mm}^2$$

Wertigkeit (Betonstahl)

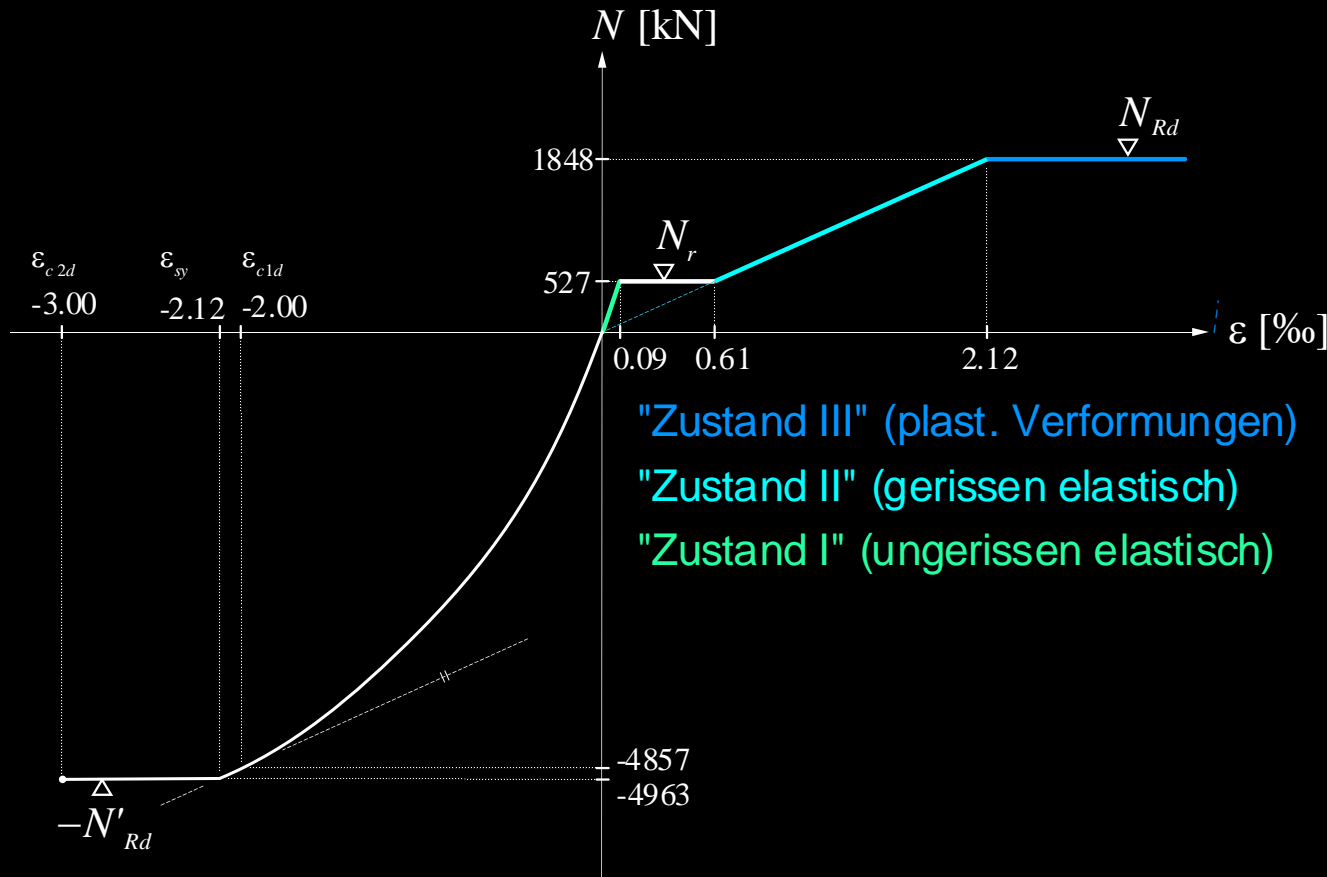
(geometrischer) Bewehrungsgehalt

Bruttoquerschnitt Beton (inkl. A_s)

Querschnittsfläche Längsbewehrung

Verhalten unter Normalkraft – Zug

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) → N - ϵ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Ungerissener QS (starrer Verbund) für $0 < \epsilon < f_{ctm} / E_c$

Rissnormalkraft bei $\epsilon = \epsilon_r = f_{ctm} / E_c = 0.09$ ‰

$$N_r = f_{ctm} A_c (1 + \rho(n-1))$$

$$= 2.9 \cdot 160'000 \cdot (1 + 0.027 \cdot (6.1 - 1)) = 527 \text{ kN}$$

Elastische Verformung der Bewehrung (ohne Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen Rissen) für $N_r / N_{Rd} \cdot \epsilon_{sy} < \epsilon < \epsilon_{sy}$

$$N_{Ed} = \epsilon E_s A_s$$

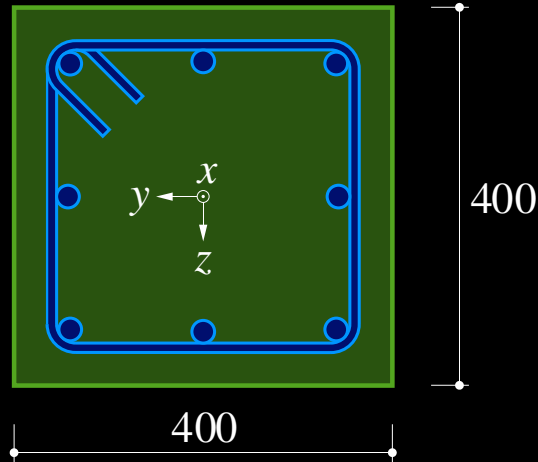
Zugwiderstand (Betonstahl fließt) ab $\epsilon_{sy} = f_{sd} / E_s = 2.12$ ‰

$$N_{Rd} = f_{sd} A_s = 435 \cdot 4'247 = 1'848 \text{ kN}$$

NB: Berücksichtigung Beton zwischen Rissen («tension stiffening»), siehe Zuggurtmodell!

Verhalten unter Normalkraft – Druck

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) → N - ε -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Gleichgewicht und Verträglichkeit, starrer Verbund

$$N_{Ed} = N_c + N_s$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon$$

Elastisch-plastisches Verhalten bei Druckbeanspruchung

- Beton gemäss SIA 262 Figur 12
- Stahl gemäss SIA 262 Figur 16

mit: $n = E_s / E_c$ Wertigkeit (Betonstahl)
 $\rho = A_s / A_c$ (geometrischer) Bewehrungsgehalt
 A_c Bruttoquerschnitt Beton (inkl. A_s)

NB: Näherung für kleine Normalkraft (bis ca. $\sigma_c = f_c/3$):

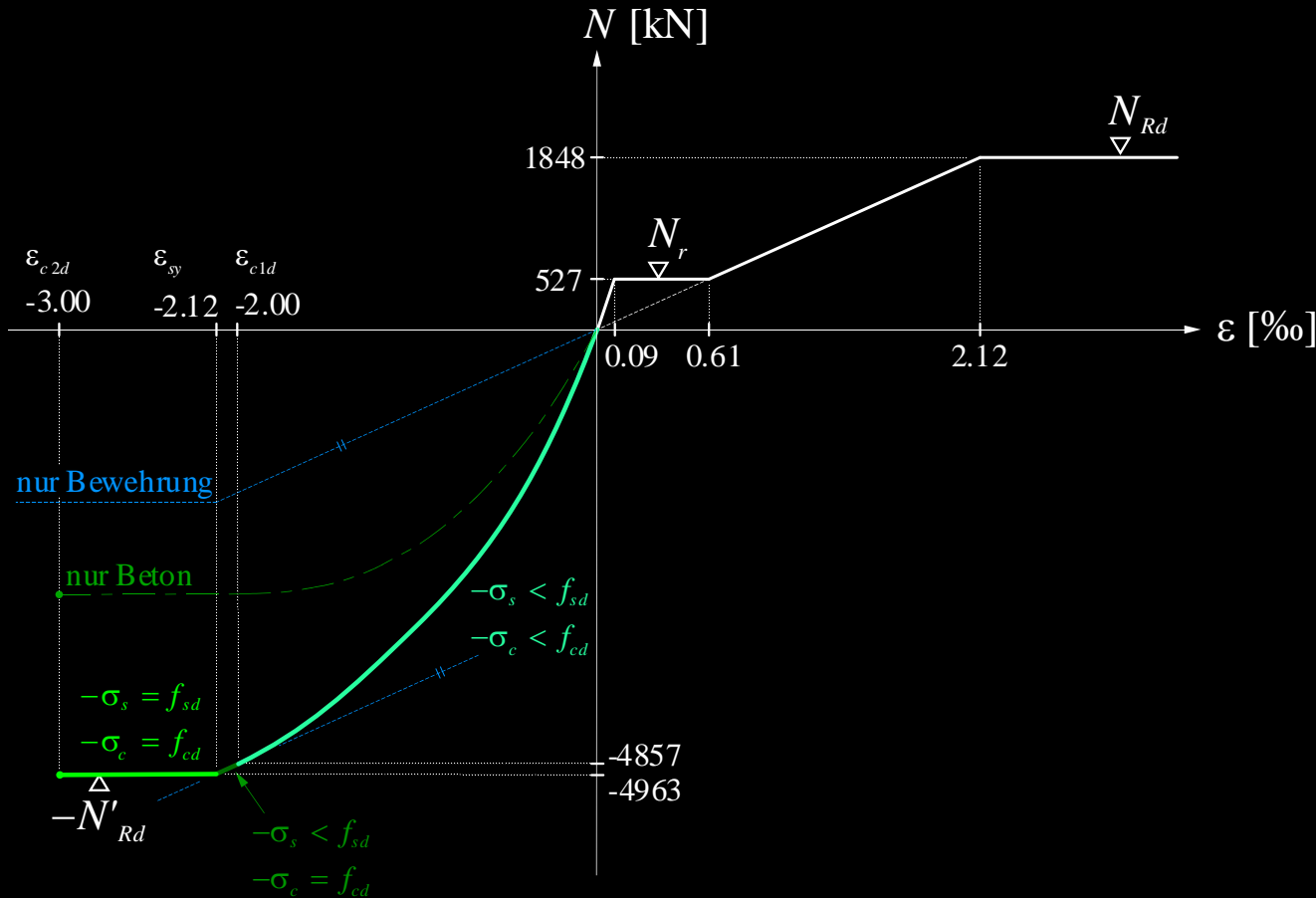
$$N_c = \varepsilon E_c A_c (1 - \rho)$$

$$N_s = \varepsilon E_s A_s = \varepsilon n E_c \rho A_c$$

$$N_{Ed} = \varepsilon E_c A_c (1 + \rho(n - 1))$$

Verhalten unter Normalkraft – Druck

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) → N - ϵ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Beton erreicht Druckfestigkeit bei $\epsilon = -\epsilon_{c1d} = -2\text{‰}$

$$\begin{aligned} N_{Ed} &= -f_{cd} A_c (1 - \rho) - \epsilon_{c1d} E_s A_s \\ &= -20 \cdot 160'000 \cdot (1 - 0.027) - 0.002 \cdot 205 \cdot 10^3 \cdot 4'247 \\ &= -4'857 \text{ kN} \end{aligned}$$

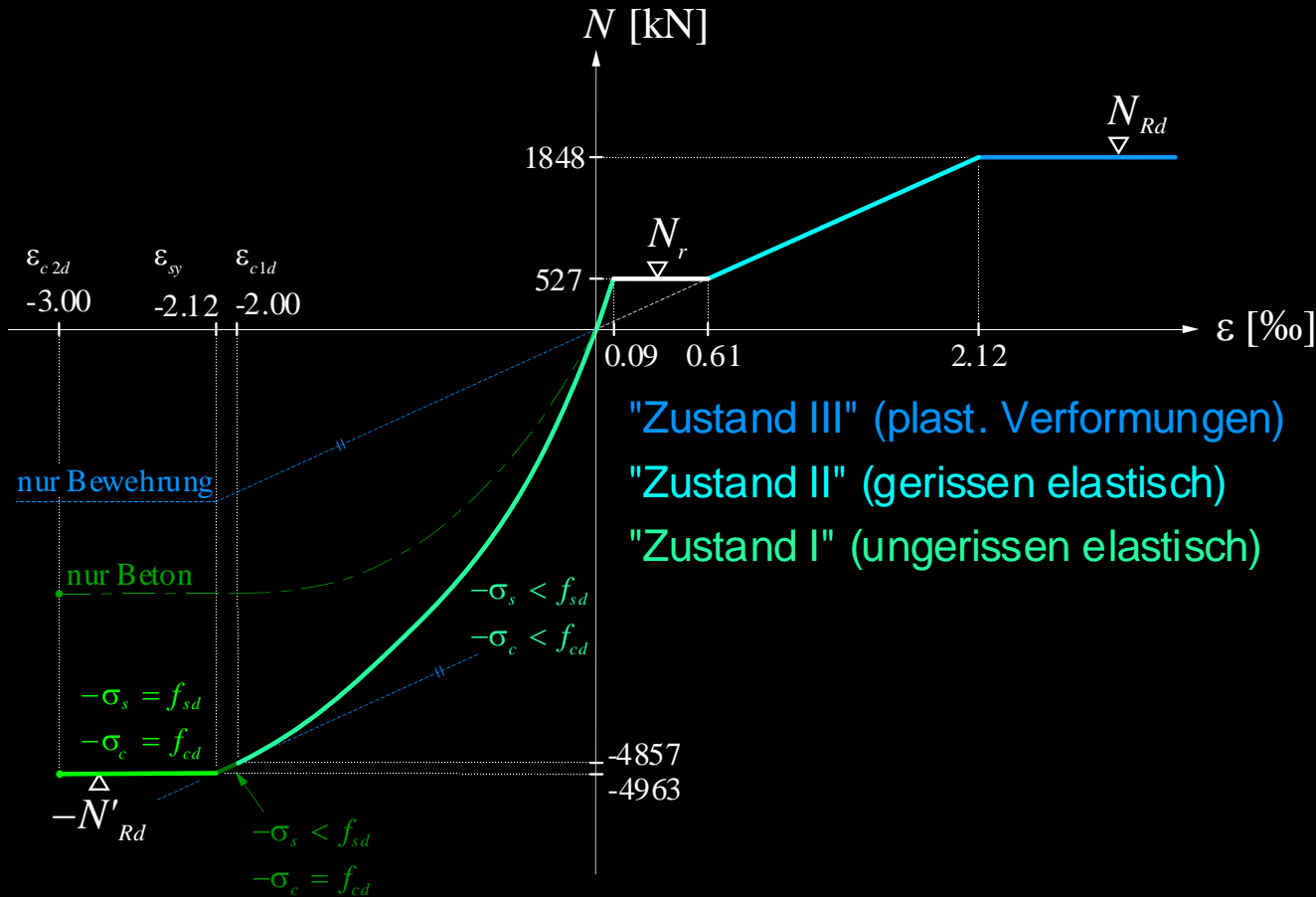
Betonstahl erreicht Fließgrenze bei $\epsilon = -f_{sd}/E_s = -2.12\text{‰}$

$$\begin{aligned} N_{Ed} &= -N'_{Rd} = -f_{cd} A_c (1 - \rho) - f_{sd} A_s \\ &= -20 \cdot 160'000 \cdot (1 - 0.027) - 435 \cdot 4'247 = -4'963 \text{ kN} \end{aligned}$$

- Bemessungswert Druckwiderstand N'_{Rd} erreicht
- Normalkraft konstant bis $\epsilon = -\epsilon_{c2d} = -3\text{‰}$ (rechnerischer Bruch)

Verhalten unter Normalkraft – Druck

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) → N - ε -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Ermittlung der Bruchwiderstände sehr einfach:

N_{Rd} (Zug) → nur Betonstahl wirksam

N'_{Rd} (Druck) → Summe (Beton + Betonstahl)

Verhalten im Zustand I (Zug) und näherungsweise im Gebrauchszustand unter Druck:

→ Untersuchung mit Wertigkeit $n = E_s/E_c$, $\sigma_s = n\sigma_c$

Verhalten im Zustand II (Zug)

→ Untersuchung mit Zuggurtmodell

Verhalten unter Normalkraft – Umschnürungswirkung

Umschnürungswirkung

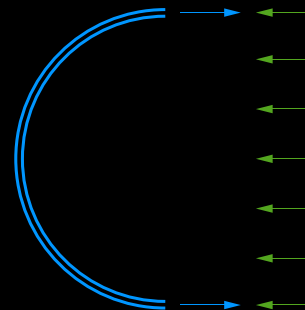
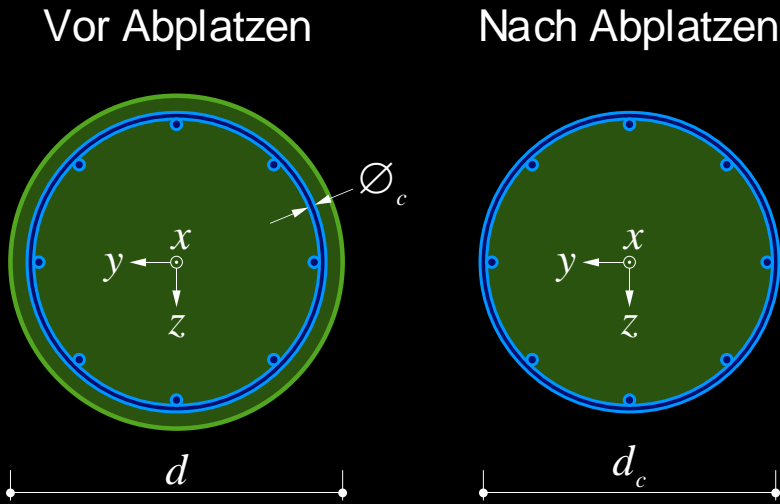
- Mit einer Umschnürungsbewehrung kann das Tragverhalten von Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung markant verbessert werden.
- In dem von einer Wendel- oder Bügelbewehrung umschnürten Kernbeton ergeben sich günstige dreiachsige Druckspannungszustände.
- Die Querdehnung des Betons aktiviert die Umschnürungsbewehrung auf Zug, wodurch im Kernbeton Querdruckspannungen aufgebaut werden.
- Nach dem Erreichen der einachsigen Betondruckfestigkeit kommt die Umschnürungsbewehrung durch den raschen Anstieg der Querdehnungen voll zum Tragen. Dabei ist jedoch von einem Abplatzen des Überdeckungsbetons auszugehen.
- Die Druckbeanspruchung kann erhöht werden, bis der Kernbeton versagt, Längsbewehrungsstäbe ausknicken oder Bügel zerrissen werden.
- Massgebender Druckwiderstand → grösserer der beiden folgenden Werte (jeweils inklusive Druckwiderstand der Längsbewehrung):
 - gesamter Querschnitt mit einachsiger Druckfestigkeit des Betons
 - umschnürter Querschnitt mit erhöhter Druckfestigkeit des Betons
- Ein Abplatzen des Überdeckungsbetons im Gebrauchszustand ist zu vermeiden
- Traglastversuche von Prof. Dr. Albin Kenel (HSLU) an der HSR Rapperswil [Blumenthal, G. Traglastversuche an hochfesten Stahlbetonstützen, 2011].



Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Umschnürungswirkung – Kreisquerschnitte

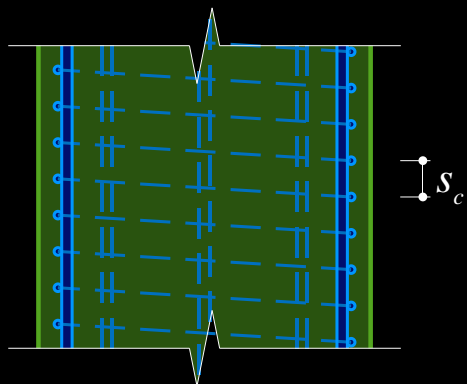
Für $s_c \ll d_c$ folgt der Querdruck (auch «Manteldruck») auf Bemessungsniveau nach der Kesselformel:



$$\sigma_{cy} = \sigma_{cz} = \sigma_{c1} = -\frac{\pi \varnothing_c^2 f_{sd}}{2d_c s_c}$$

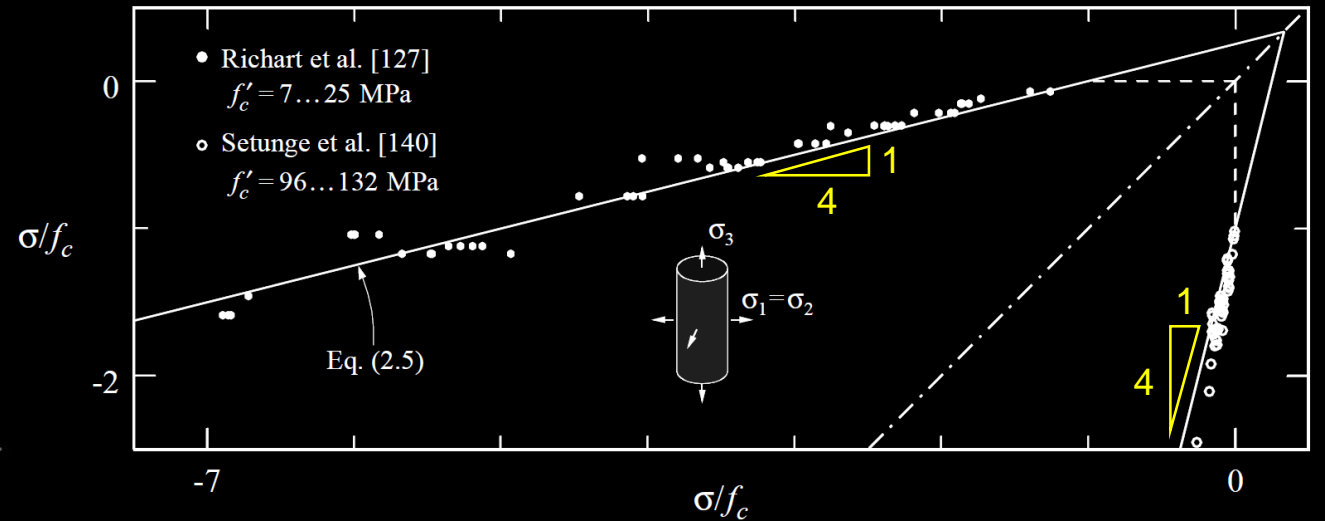
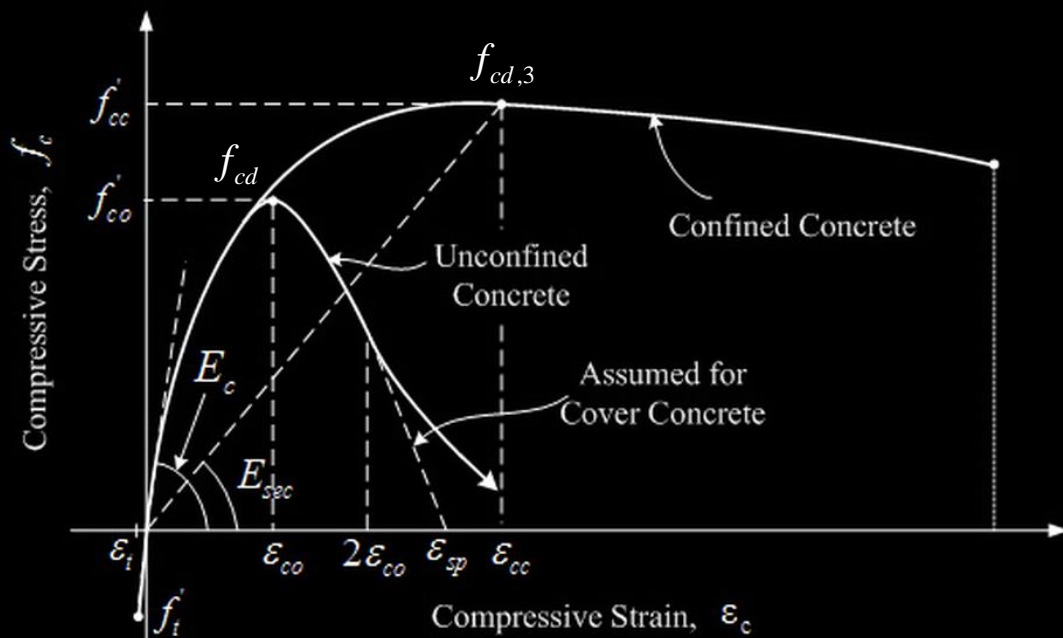
$$2 \cdot \frac{\pi \varnothing_c^2}{4} f_{sd} \quad d_c \sigma_{c1} s_c$$

Nachfolgend wird vorerst $s_c \ll d_c$ angenommen. Effektiv ist bei endlicher Ganghöhe der äussere Querschnittsbereich nicht wirksam umschnürt. Die Berücksichtigung (nach SIA 262 näherungsweise mit einem Abminderungsfaktor $(1-s_c/d_c)$) folgt später.



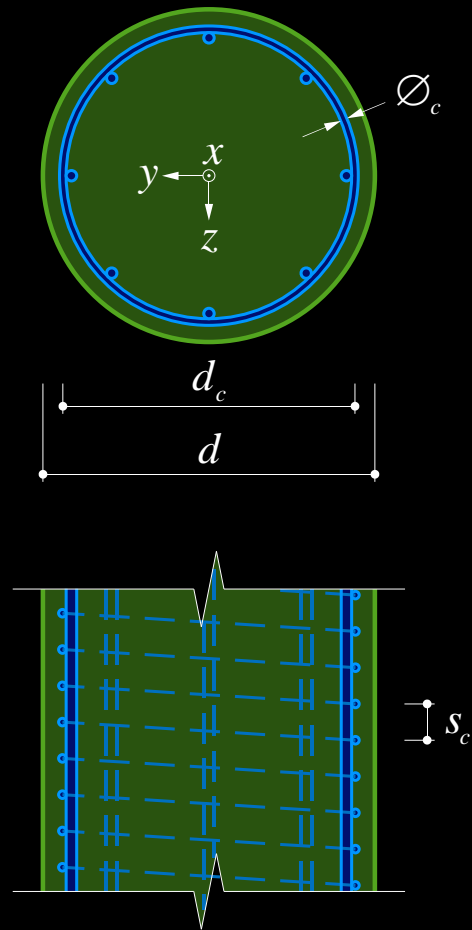
Verhalten von Beton auf Druck

- Druckfestigkeit wird durch dreiachsige Beanspruchung stark erhöht
 - Näherungsweise gilt $f_{c3} \cong f_c - 4 \sigma_{c1}$ (mit $\sigma_{c3} \leq \sigma_{c1} = \sigma_{c2}$)
 - Querbewehrung wirkt wie Querdruck (wirksamer als Längsbewehrung !)
- (Vorzeichen: Druckfestigkeit positiv, Druckspannung negativ)



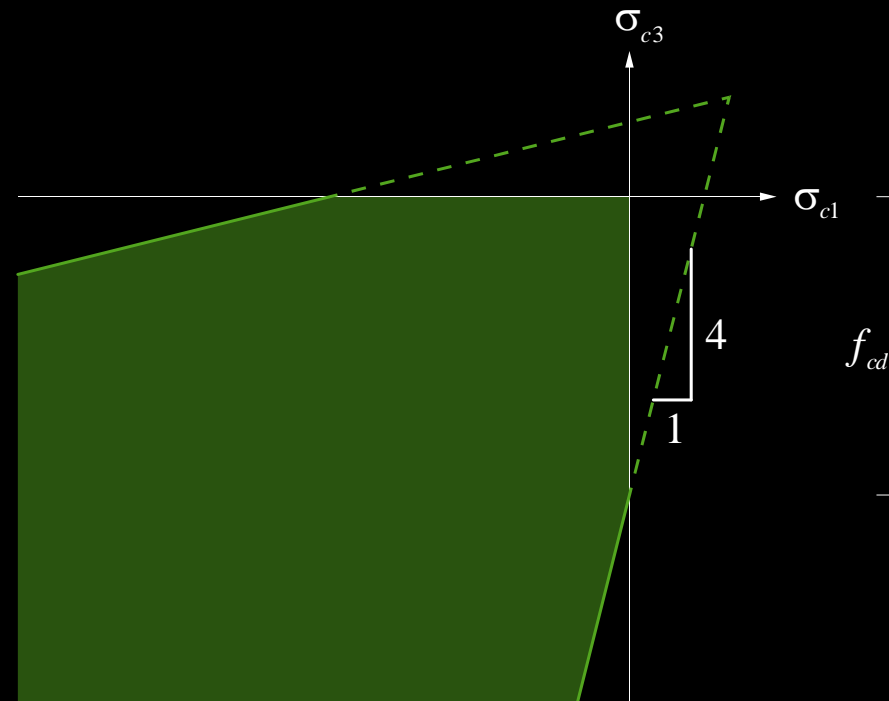
Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Umschnürungswirkung – Kreisquerschnitte



Mit der Fließbedingung von Coulomb und $\tan\varphi = \frac{3}{4}$ folgt:

$$f_{cd3} = f_{cd} + 4 \cdot \sigma_{c1} = f_{cd} + \frac{2 \cdot \pi \cdot \varnothing_c^2 \cdot f_{sd}}{d_c \cdot s_c}$$



Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Umschnürungswirkung – Kreisquerschnitte

Die mittlere Bruchstauchung nimmt mit dem Querdruck ebenfalls annähernd linear zu, aber rund fünfmal stärker als die Druckfestigkeit (günstig für Duktilität):

$$\varepsilon_{cd3} = 0.002 \cdot \left(\frac{5f_{cd3}}{f_{cd}} - 4 \right)$$

Der Querschnittswiderstand beträgt (weiterhin mit $s_c \ll d_c$):

$$N'_{Rd} = \left(\frac{d_c^2 \pi}{4} - A_{sx} \right) f_{cd3} + A_{sx} f_{sd} = \frac{d_c^2 \pi}{4} \left(f_{cd} + f_{sd} \left[2\rho_c + \rho_x \left(1 - 2\rho_c - \frac{f_{cd}}{f_{sd}} \right) \right] \right)$$

$$\rho_x = \frac{4A_{sx}}{\pi d_c^2} \quad \text{Längsbewehrungsgehalt (bez. Kernbetonvolumen)}$$

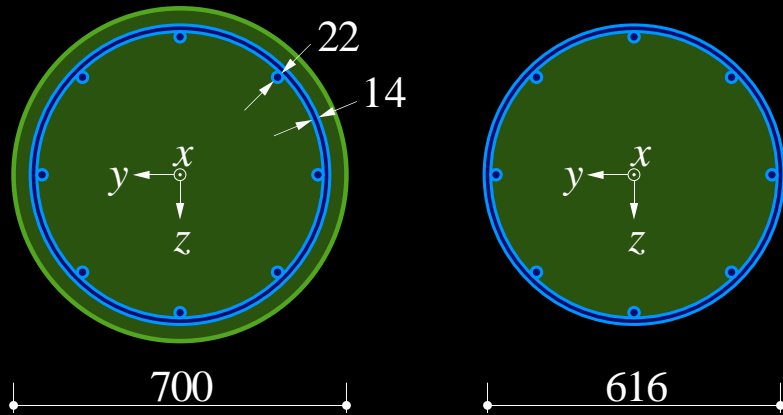
$$\rho_c = \frac{\pi \varnothing_c^2}{d_c s_c} \quad \text{Spiralbewehrungsgehalt (bez. Kernbetonvolumen)}$$

Die Spiralbewehrung ist demnach etwa doppelt so wirksam wie die Längsbewehrung.

Wird eine Umschnürungswirkung in Rechnung gestellt ist davon auszugehen, dass die Bewehrungsüberdeckung abplatzt (nur mit effektiv umschnürten Betonquerschnitt rechnen!).

Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Beispiel ([1], 3.24), Umschnürungswirkung bei einem Kreisquerschnitt ($s_c \ll d_c$)



- Stahlbetonstütze, $d = 700$ mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 12 Längsstäbe $\varnothing = 22$ mm, $A_{sx} = 12 \cdot 380 = 4'560$ mm²
- Spiralbewehrung $\varnothing_c = 14$ mm, Ganghöhe $s_c = 75$ mm
- Betondeckung $c_{nom} = 35$ mm
- Einachsige Druckfestigkeit (bezogen auf QS ohne Abplatzen!)

$$N_{Rd} = \frac{700^2 \pi}{4} \cdot 20 + 4'560 \cdot (435 - 20) = 9.6 \text{ MN}$$

Erhöhung der Druckfestigkeit infolge Umschnürungswirkung (triaxialer Spannungszustand, bezogen auf reduzierten QS):

$$d_c = d - 2c_{nom} - \varnothing_c = 700 - 2 \cdot 35 - 14 = 616 \text{ mm}$$

$$f_{cd3} = 20 + \frac{2\pi \cdot 14^2 \cdot 435}{616 \cdot 75} = 31.6 \text{ N/mm}^2 = 158\% \cdot f_{cd}$$

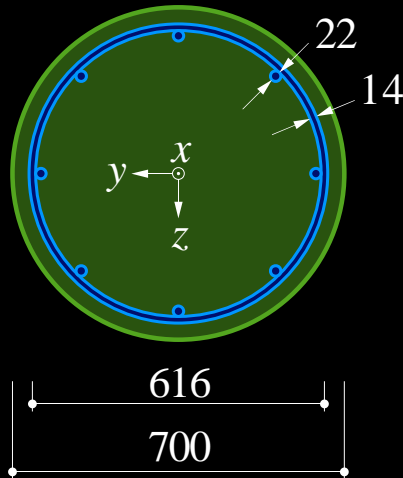
$$N'_{Rd} = \frac{616^2 \pi}{4} \cdot 31.6 + 4'560(435 - 31.6) = 11.3 \text{ MN} = 118\% \cdot N_{Rd}$$

$$\varepsilon_{cd3} = 0.002 \cdot \left(\frac{5 \cdot 31.6}{20} - 4 \right) = 7.8 \text{ ‰}$$

N.B.: Einfluss der Ganghöhe: Reduktion um ca. 5%, siehe nächste Folie.

Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Beispiel ([1], 3.24), Umschnürungswirkung nach SIA 262 (endliche Ganghöhe s_c)



- Stahlbetonstütze, $d = 700$ mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 12 Längsstäbe $\varnothing = 22$ mm, $A_{sx} = 12 \cdot 380 = 4'560$ mm²
- Spiralbewehrung $\varnothing_c = 14$ mm, Ganghöhe $s_c = 75$ mm
- Betondeckung $c_{nom} = 35$ mm
- Mechanischer Bewehrungsgehalt $\omega = \frac{A_s}{A_c} \cdot \frac{f_{sd}}{f_{cd}} = \rho \cdot \frac{f_{sd}}{f_{cd}}$

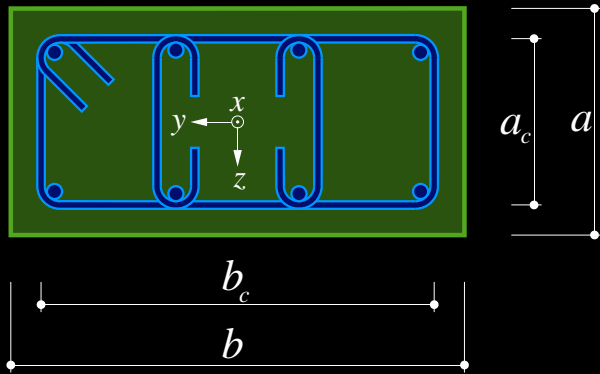
$$\omega_c = \frac{A_{sc} f_{sd}}{s_c d_c f_{cd}} = \frac{2 \cdot 154 \cdot 435}{75 \cdot 616 \cdot 20} = 0.145$$

$$\sigma_1 = -\omega_c f_{cd} \left(1 - \frac{s_c}{d_c} \right) = -0.145 \cdot 20 \cdot \left(1 - \frac{75}{616} \right) = -2.55 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{cd3} = f_{cd} - 4\sigma_1 = 20 + 4 \cdot 2.55 = 30.2 \text{ N/mm}^2 = 151\% \cdot f_{cd} \quad \rightarrow N'_{Rd} = 10.8 \text{ MN} = 113\% \cdot N_{Rd}$$

Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Umschnürungswirkung – Rechteckquerschnitte



Ein äusserer umlaufender Querschnittsbereich der Breite $s_c/2$ wird als nicht wirksam umschnürt betrachtet. Die Überlegungen vom Kreisquerschnitt können sinngemäss übernommen werden.

$$\rho_t = \text{Min} \left\{ \frac{A_{sy}}{a_c s_c}; \frac{A_{sz}}{b_c s_c} \right\}$$

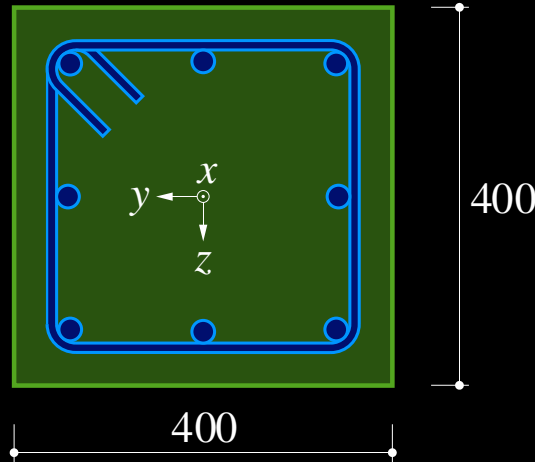
$$N'_{Rd} = a_c b_c f_{cd} + (a_c - s_c)(b_c - s_c) \rho_t f_{sd} \cdot 4 + A_{sx} (f_{sd} - f_{cd})$$

$$f_{cd3} = f_{cd} + 4\rho_t f_{sd} \left(1 - \frac{s_c}{a_c}\right) \left(1 - \frac{s_c}{b_c}\right) \quad \varepsilon_{cd3} = 0.002 \cdot \left(\frac{5f_{cd3}}{f_{cd}} - 4\right)$$

N.B.: Einfluss der Ganghöhe lässt sich beim Rechteckquerschnitt mit einfachem Spannungsfeld erklären

Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Beispiel ([1], 3.25), Umschnürungswirkung bei einem Rechteckquerschnitt – Einfluss der Ganghöhe



- Stahlbetonstütze, $a = b = 400$ mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 8 Längsstäbe $\varnothing = 26$ mm, $A_{sx} = 8 \cdot 531 = 4'248$ mm²
- Bügelbewehrung $\varnothing_c = 12$ mm, Abstand $s_c = 100$ mm resp. $s_c = 50$ mm
- Betondeckung $c_{nom} = 35$ mm
- $N_{Rd} = 4'963$ kN (Beispiel [1], S. 3.2)

$$a_c = b_c = 400 - 2 \cdot 35 - 12 = 318 \text{ mm}$$

$$\rho_t = \frac{2 \cdot 6^2 \pi}{318 \cdot 100} = 0.71\% \quad \text{resp.} \quad \rho_t = 1.42\%$$

$$N'_{Rd}(s_c = 100 \text{ mm}) = 20 \cdot 318^2 + 4 \cdot 0.0071 \cdot 435 \cdot (1 - 100/318)^2 \cdot 318^2 + 4'248 \cdot (435 - 20) = 4'373 \text{ kN} < N_{Rd} = 4'963 \text{ kN}$$

$$N'_{Rd}(s_c = 50 \text{ mm}) = 20 \cdot 318^2 + 4 \cdot 0.0142 \cdot 435 \cdot (1 - 50/318)^2 \cdot 318^2 + 4'248 \cdot (435 - 20) = 5'563 \text{ kN} = 112\% \cdot N_{Rd}$$

- Keine Erhöhung des Querschnittswiderstands mit $s_c = 100$ mm
- Erhöhung um 12% mit $s_c = 50$ mm
- Die Bruchdehnung nimmt deutlich zu auf $\varepsilon_{cd3} = 10.8$ ‰

Verhalten unter Zug

Normalkraftverhalten nach Rissbildung ohne Berücksichtigung des Verbundes

- Zugversteifung («tension stiffening») = Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen vernachlässigt (nackter Stahl betrachtet), somit u.a. keine Aussage möglich zu:
 - Einfluss des Verbundes auf die Duktilität (Bruchverhalten)
 - Rissbildung und Zwängungen (Gebrauchsverhalten)
- Berücksichtigung des Verbunds für allgemeine Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen ist aufwändig (numerische Lösung Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds)
- Aufgrund der grossen Streuungen (Verbundspannungen, Rissabstände, Zugfestigkeit Beton) ist eine «exakte» Erfassung gar nicht möglich

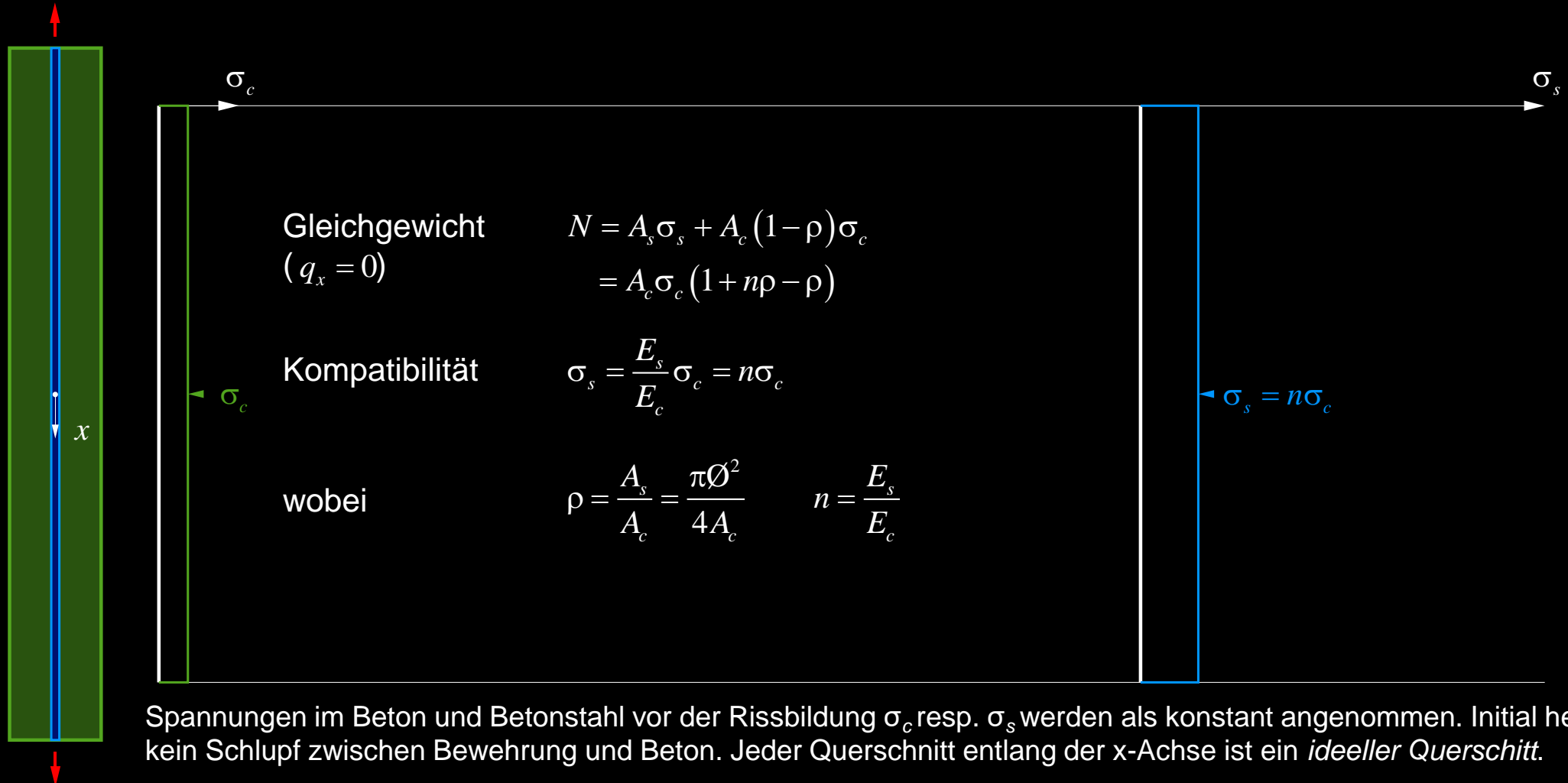


Zuggurtmodell (Tension Chord Model)

- Einfaches, auf mechanischen Grundlagen beruhendes Modell, das die wesentlichen Einflüsse berücksichtigt, aber trotzdem für Handrechnungen geeignet ist
- Ermöglicht fundierte Aussagen zur Duktilität von Zuggliedern
- Ermöglicht die Abschätzung von Rissabständen s_r und Rissbreiten w_r
- ist Grundlage der Normbestimmungen über die Mindestbewehrung

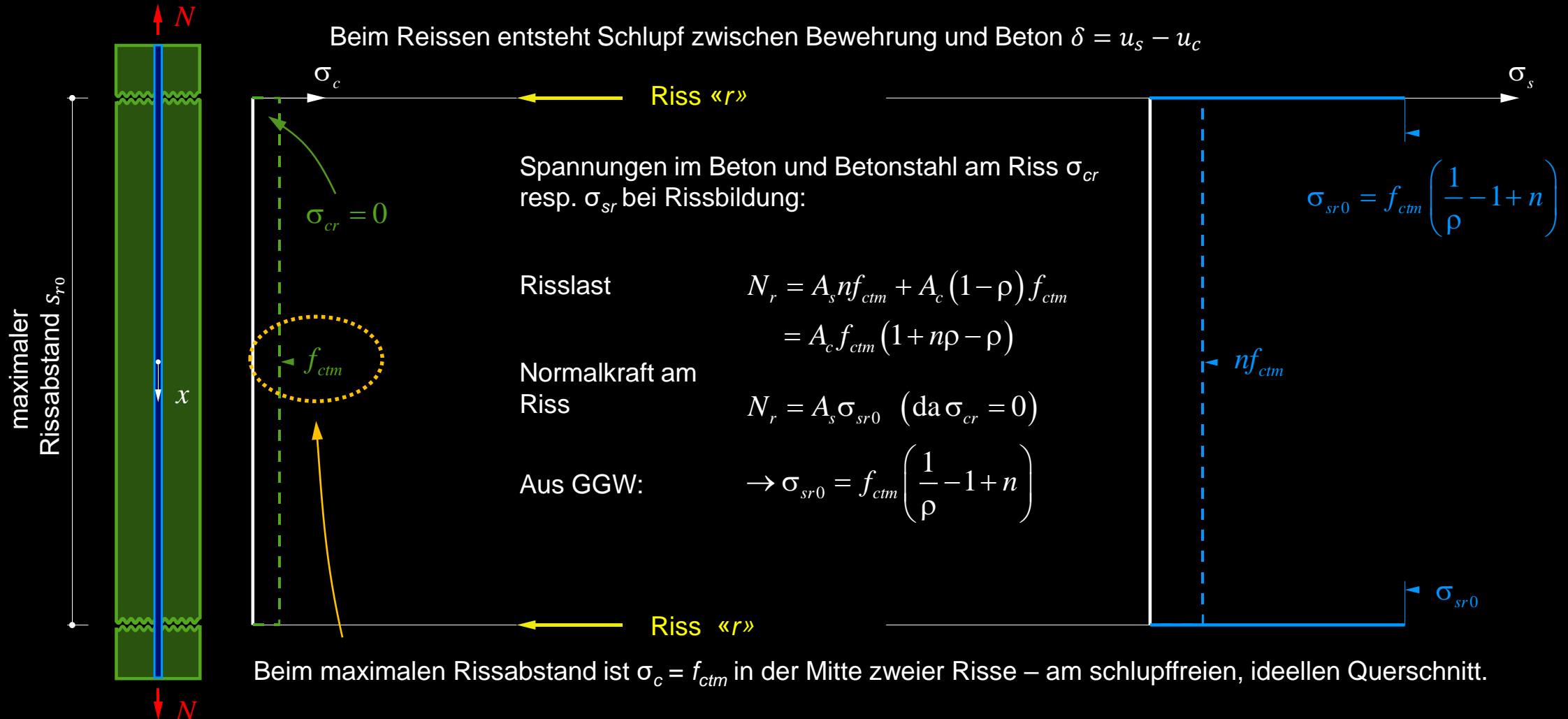
Verhalten unter Zug – Grundlagen

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset ([1], Seite 3.5f)



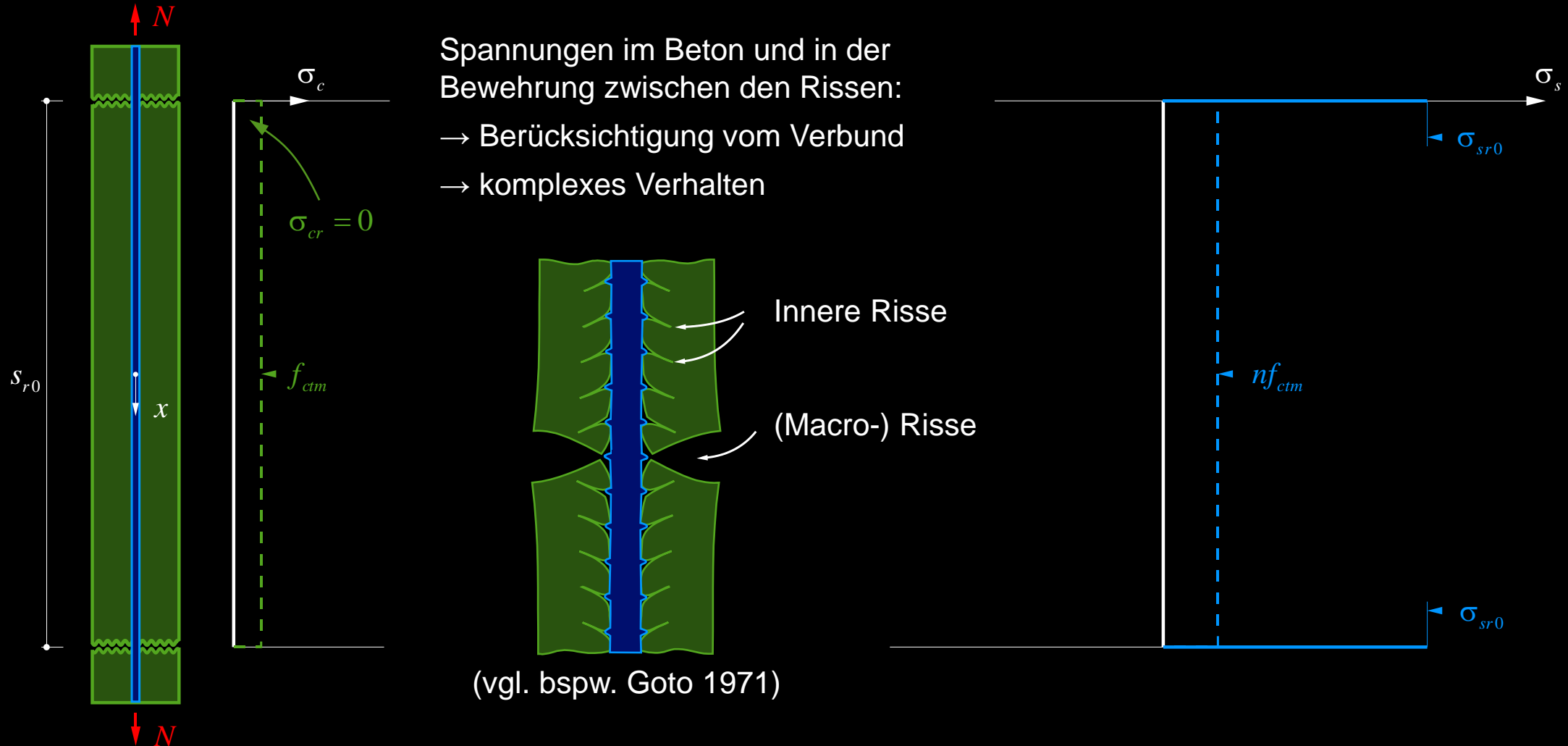
Verhalten unter Zug – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset und $N = N_r$ ([1], Seite 3.5f)



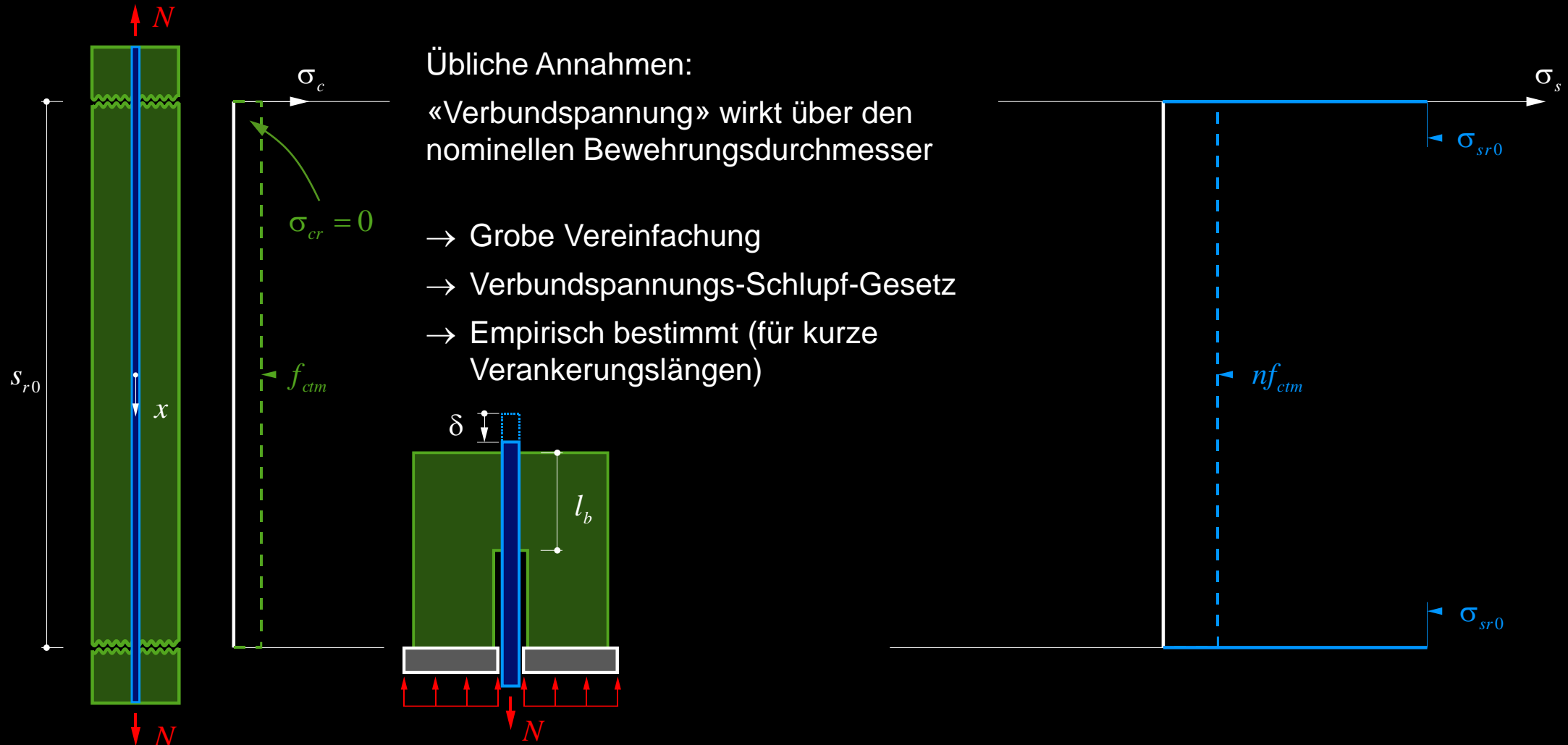
Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset und $N = N_r$ ([1], Seite 3.5f)



Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset und $N = N_r$ ([1], Seite 3.5f)



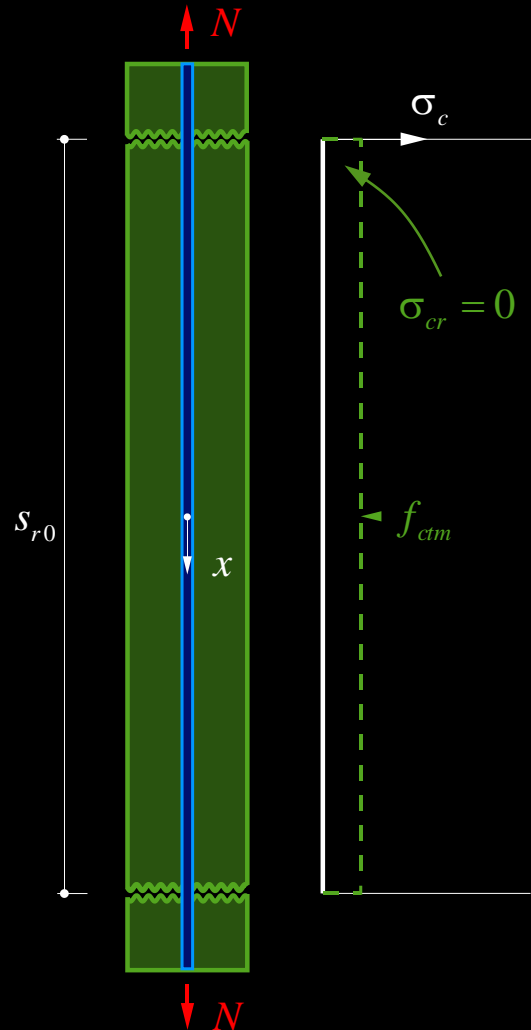
Übliche Annahmen:

«Verbundspannung» wirkt über den nominellen Bewehrungsdurchmesser

- Grobe Vereinfachung
- Verbundspannungs-Schlupf-Gesetz
- Empirisch bestimmt (für kurze Verankerungslängen)

Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

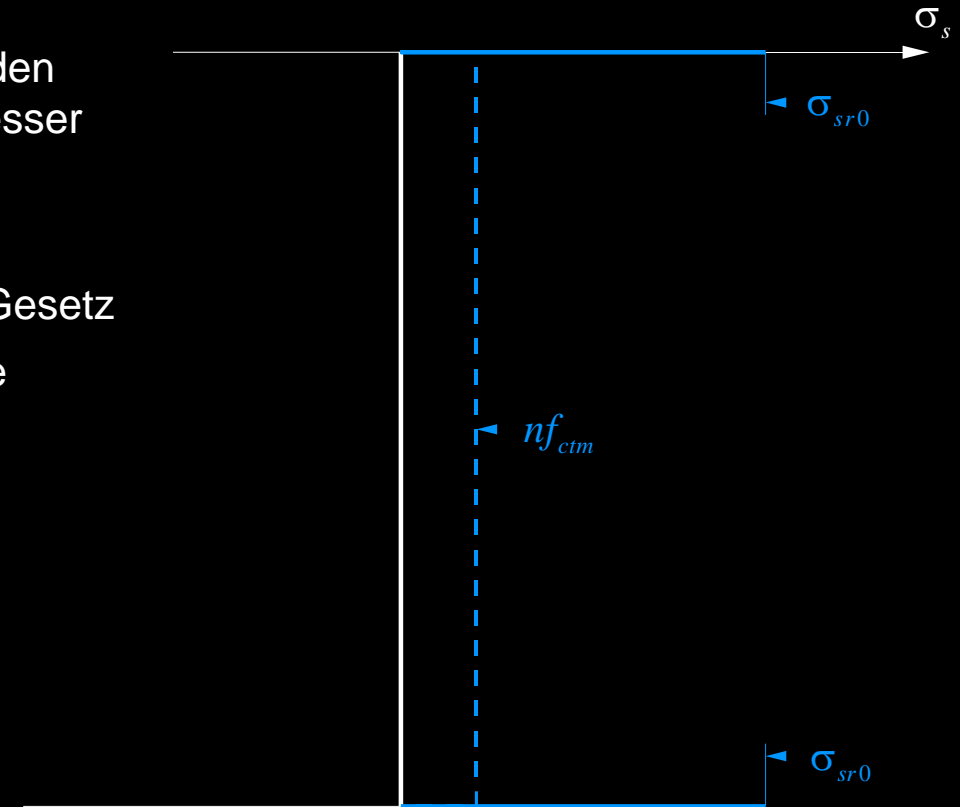
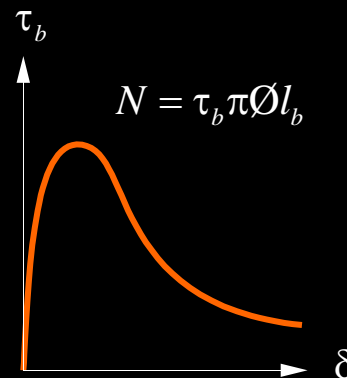
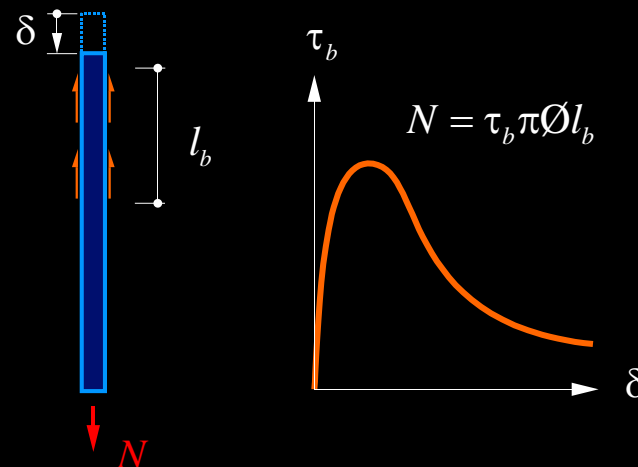
Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset und $N = N_r$ ([1], Seite 3.5f)



Übliche Annahmen:

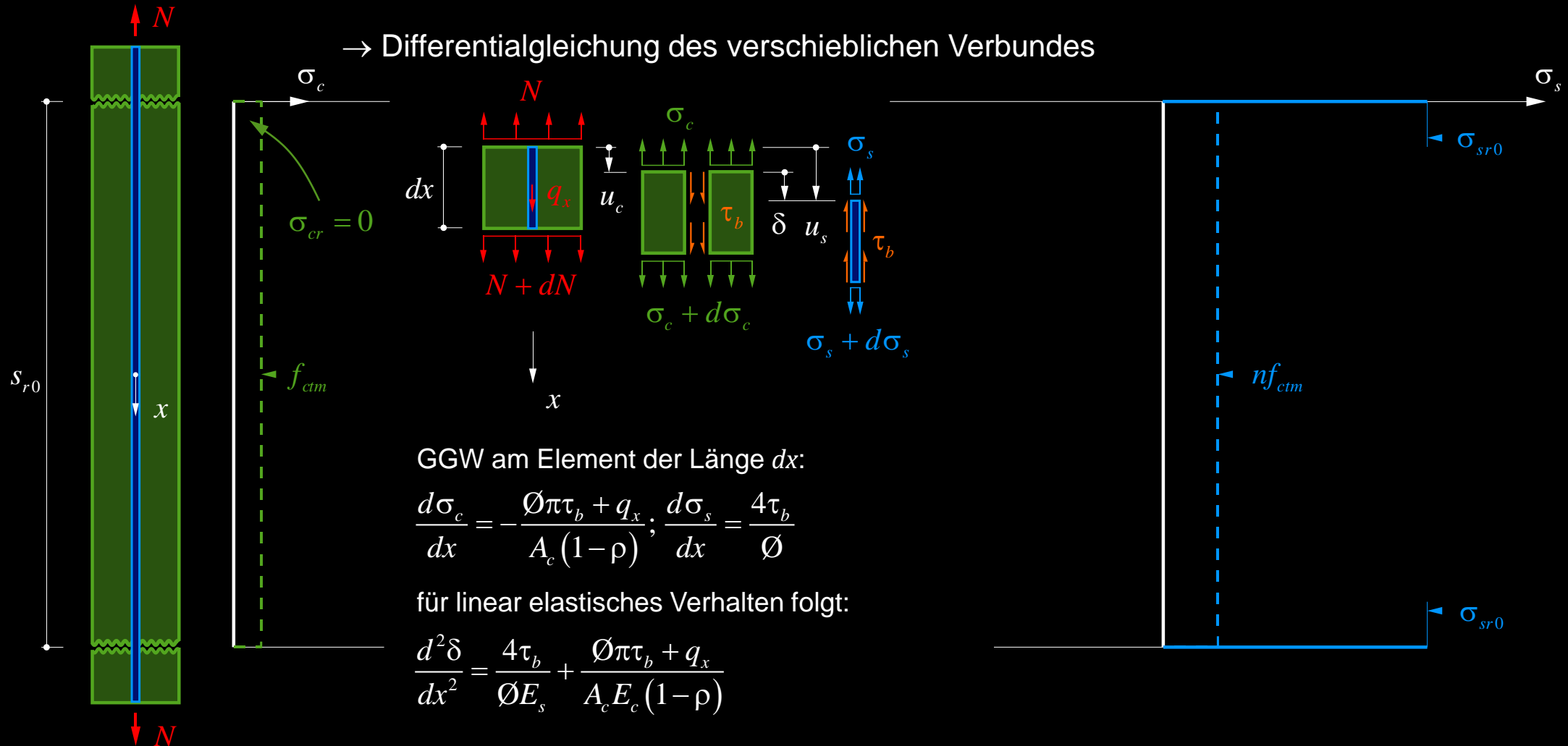
«Verbundspannung» wirkt über den nominellen Bewehrungsdurchmesser

- Grobe Vereinfachung
- Verbundspannungs-Schlupf-Gesetz
- Empirisch bestimmt (für kurze Verankerungslängen)

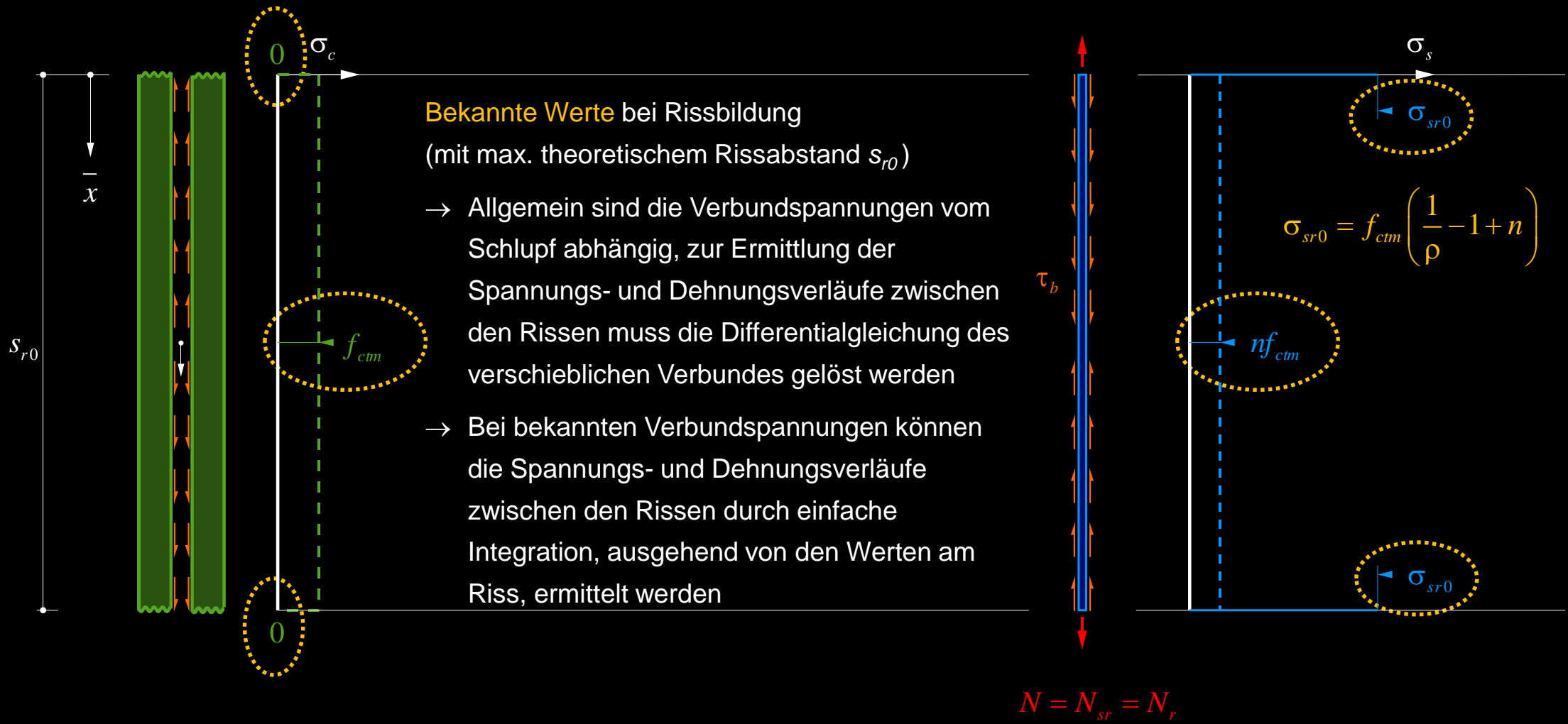


Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

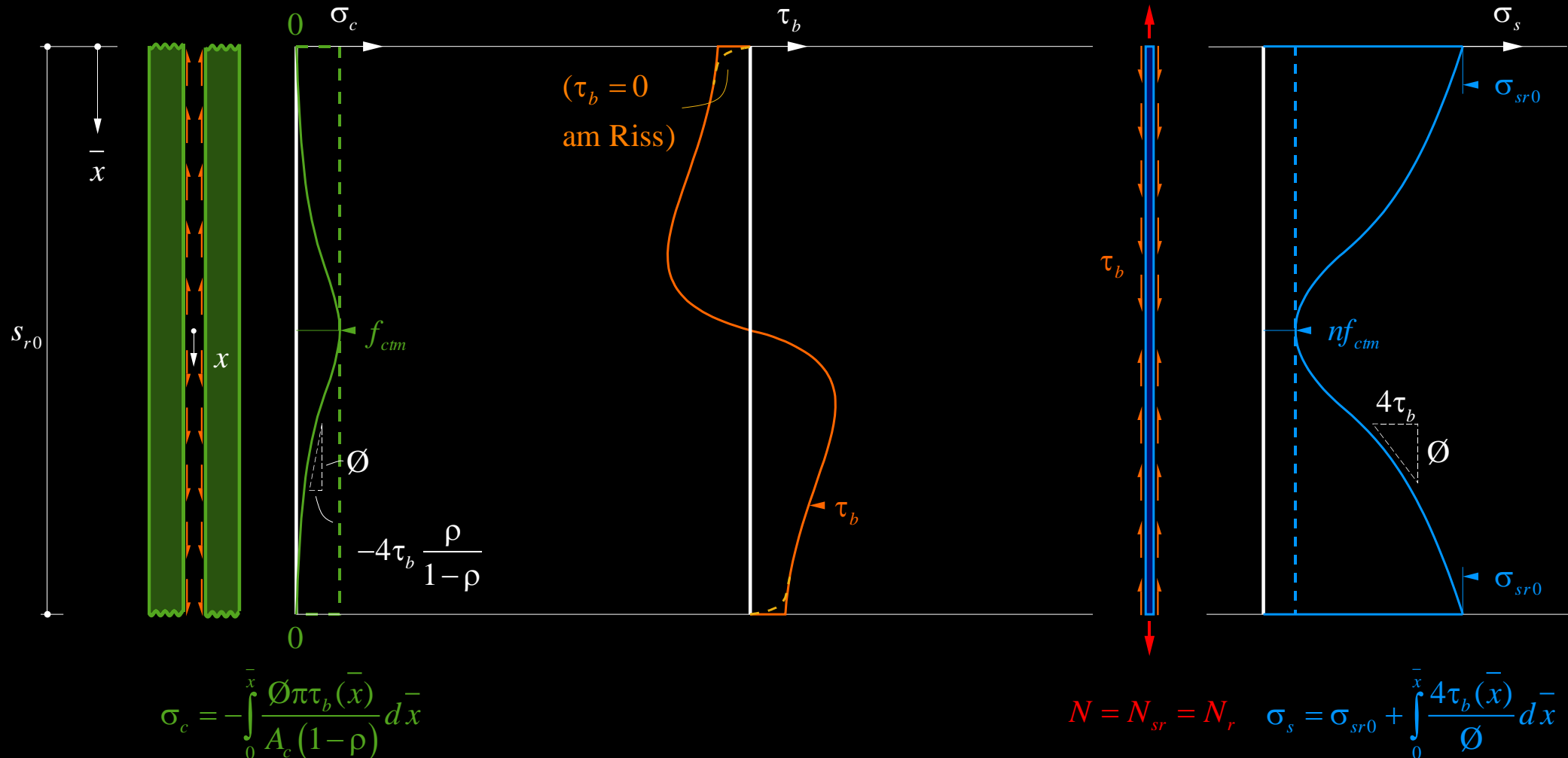
Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \varnothing und $N = N_r$ ([1], Seite 3.5f)



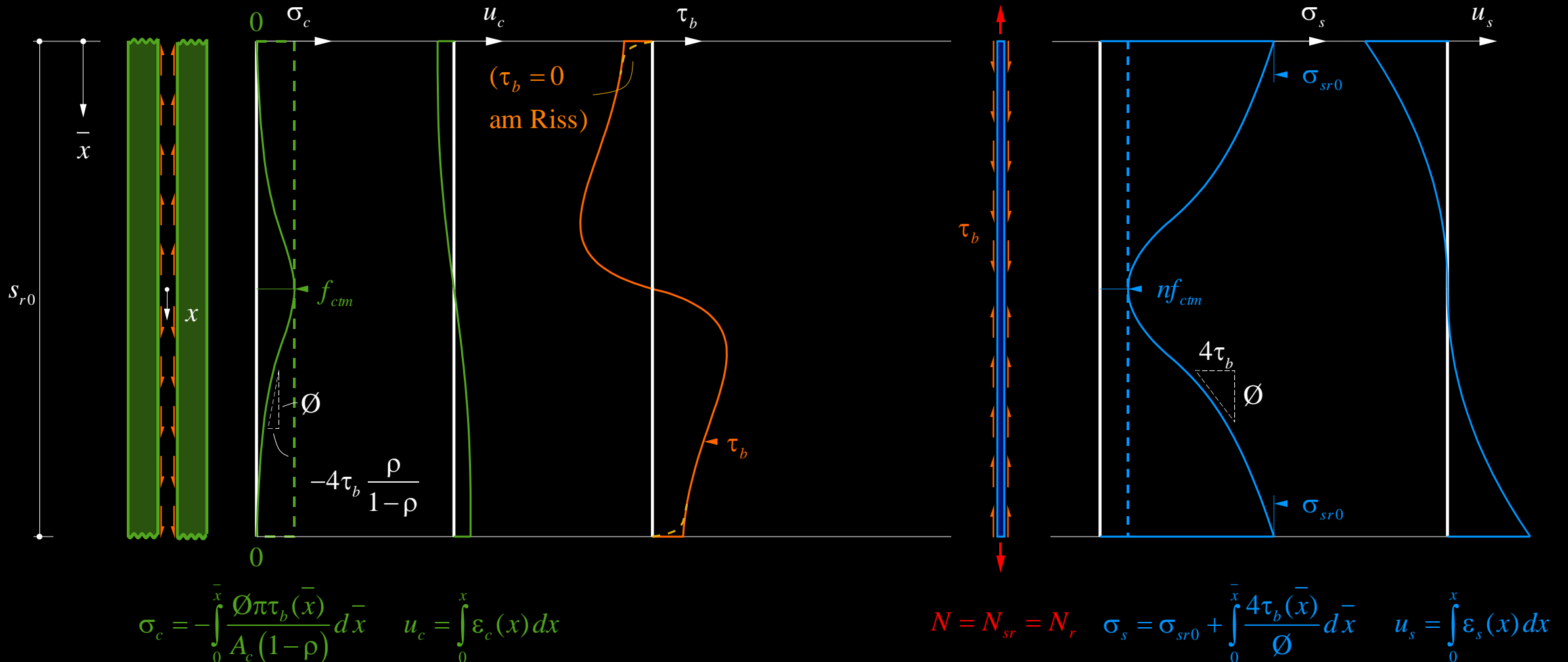
Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



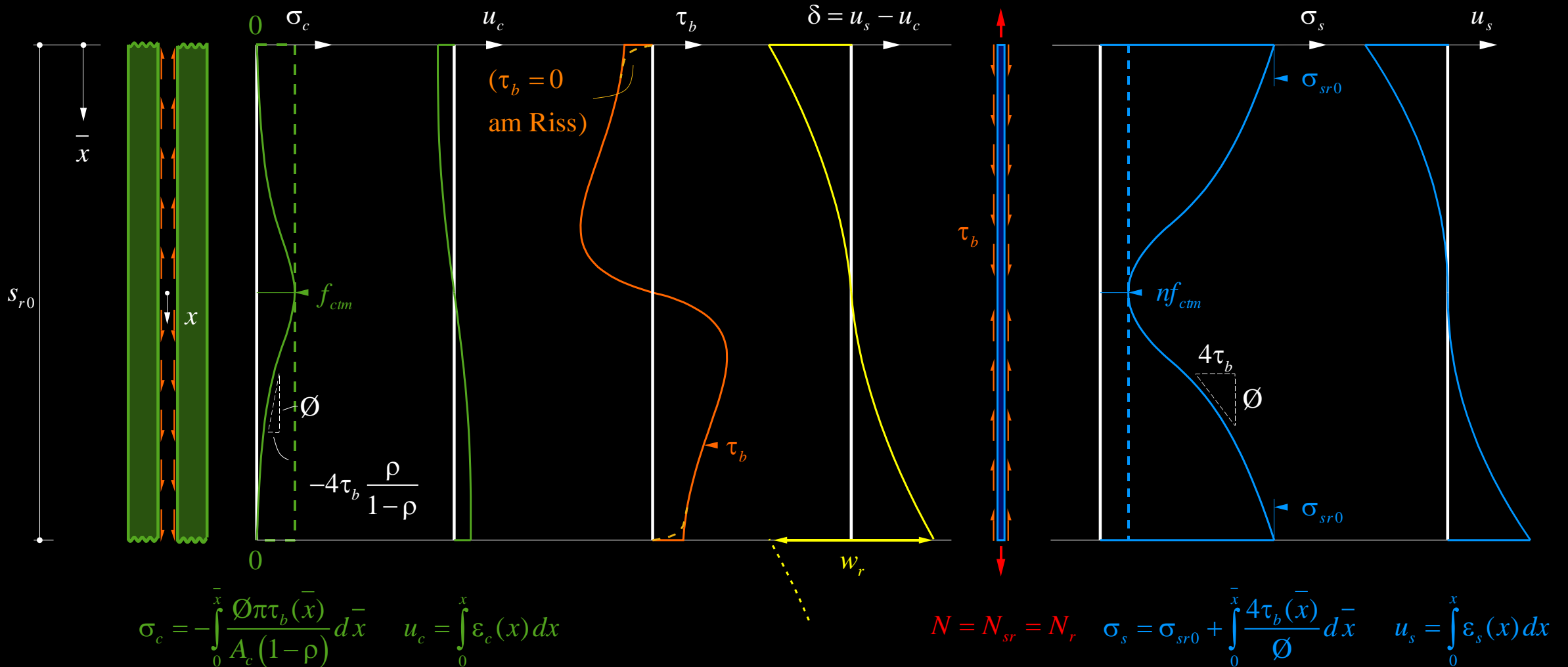
Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



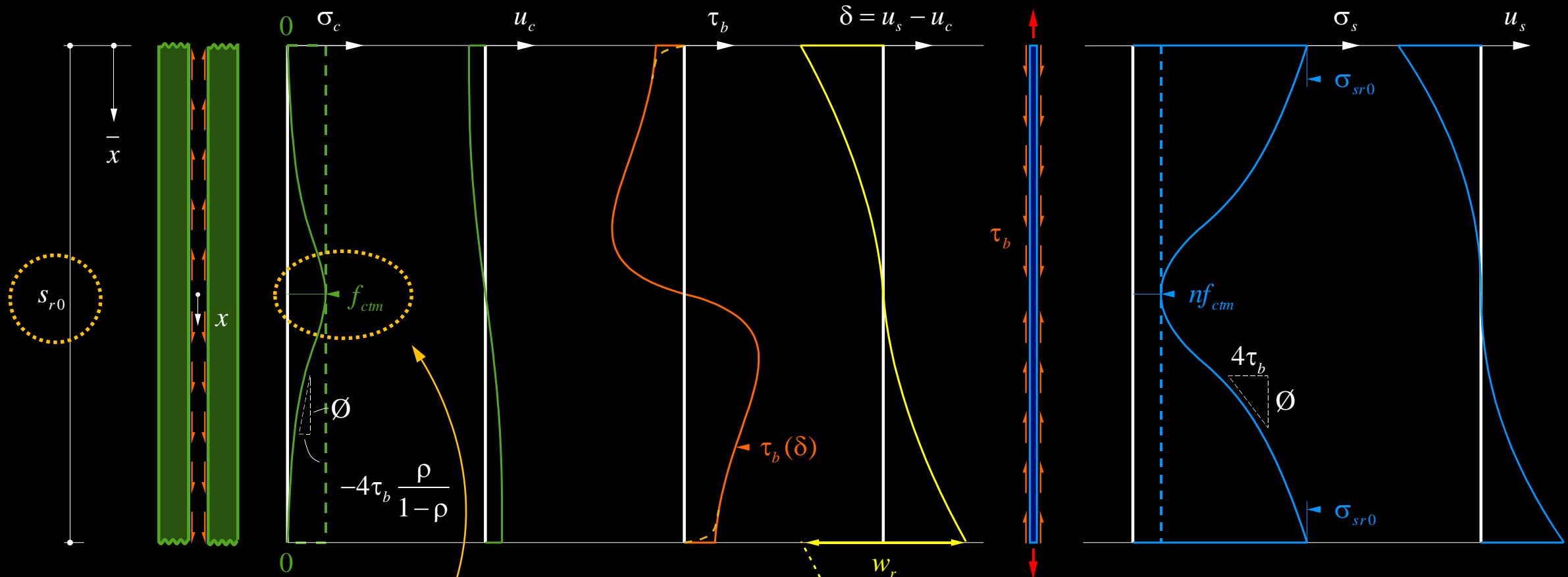
Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$

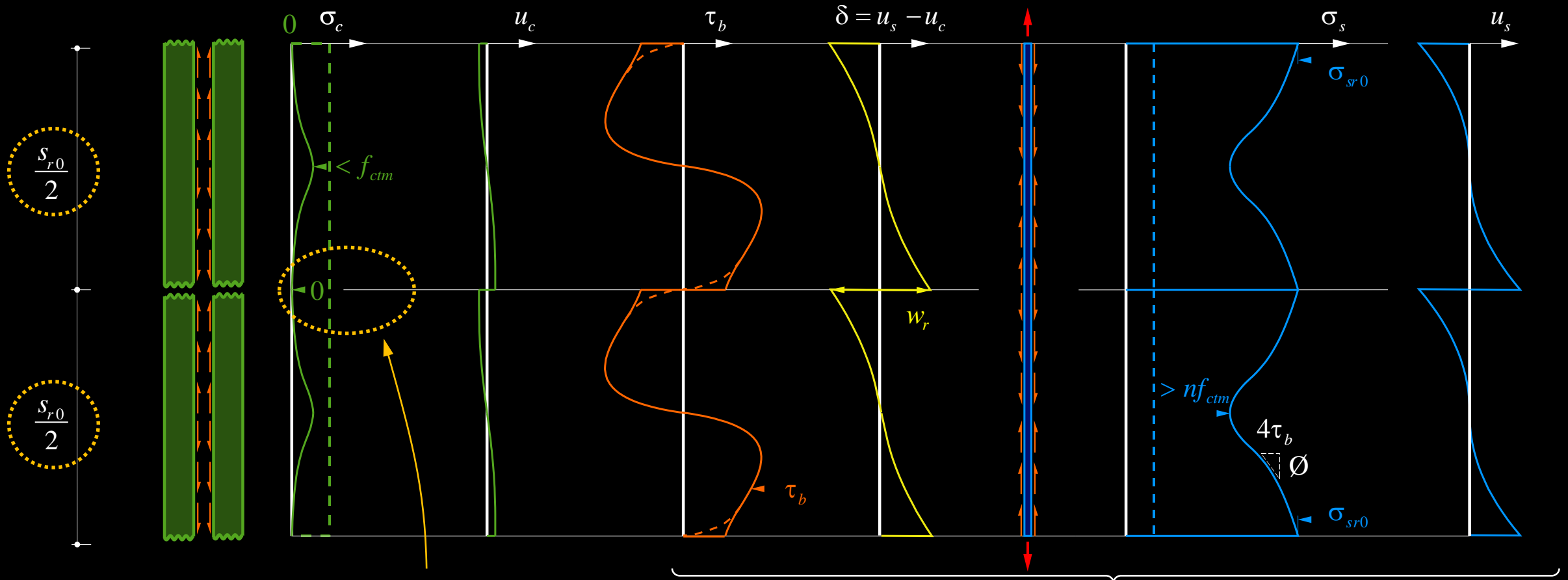


$\sigma_{cr} = f_{ctm}$ zwischen zwei Rissen

→ mögliche neue Rissstelle

$$N = N_{sr} = N_r$$

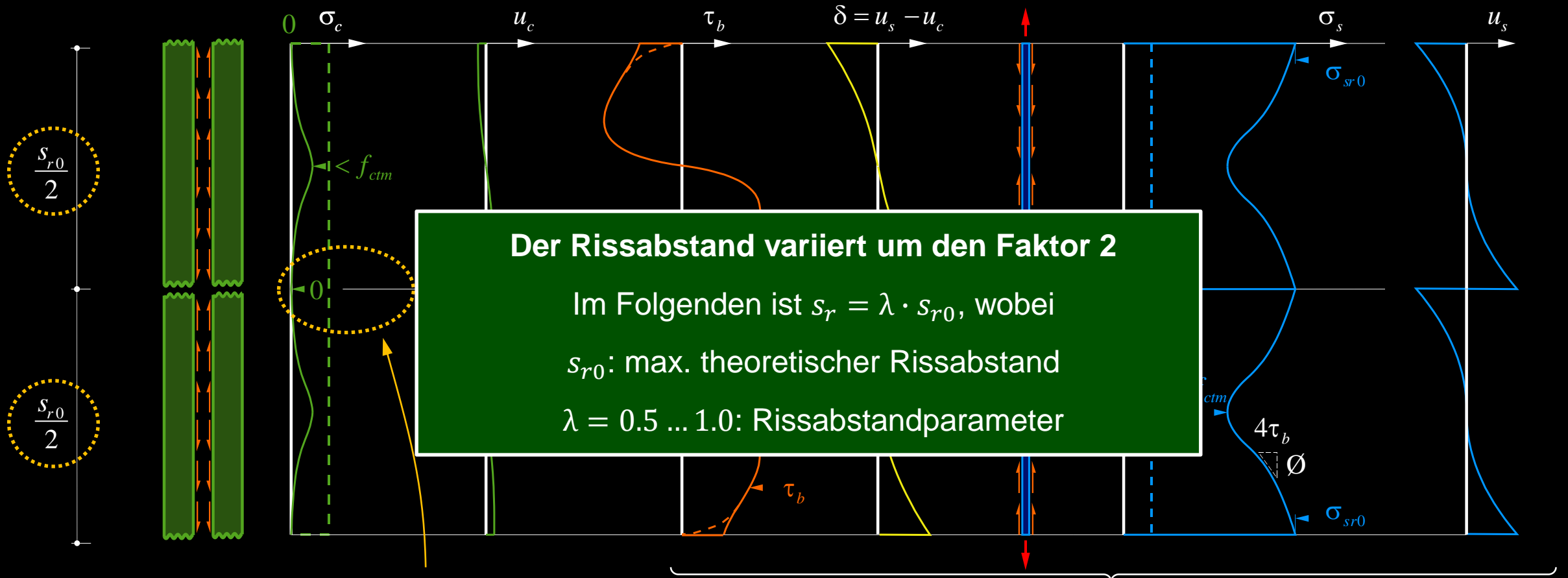
Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



Durch erneutes Reissen wird s_{r0} halbiert
 → min. theoretischer Rissabstand $s_{r0}/2$

Grosse Auswirkungen des neuen Rissabstandes

Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



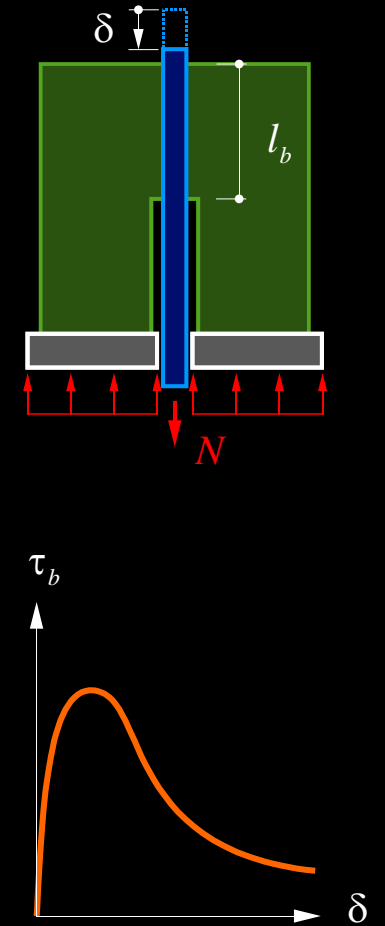
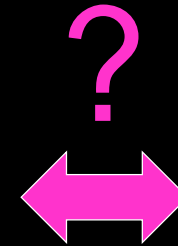
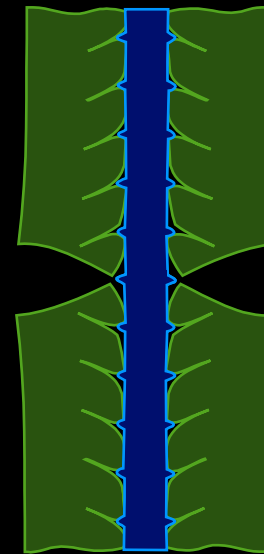
Durch erneutes Reissen wird s_{r0} halbiert
 → min. theoretischer Rissabstand $s_{r0}/2$

Grosse Auswirkungen des neuen Rissabstandes

Zuggurtmodell – Last – Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung

Lösen der DGL 2. Ordnung unter der Hinzunahme einer “genauen” Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung $\tau_b(\delta)$

- Grobe Vereinfachung « τ_b wirkt an $\pi \cdot \varnothing \cdot l_b$ »
 - Repräsentativität der Tests (Zuggurt vs. Ausziehstab)?
 - Erhebliche Unsicherheit im Rissabstand (Faktor 2)
 - Numerisches Lösen der DGL 2. Ordnung erforderlich
 - Primär von Interesse: Integrierte Größen $N(\varepsilon_{sm}), w_r(N, \varepsilon)$
- Hoher Aufwand für (vermeintlich) genaue Lösung ist nur selten gerechtfertigt



Zuggurtmodell – Last – Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung

Zuggurtmodell (Sigrist 1995 / Marti et al. 1998):

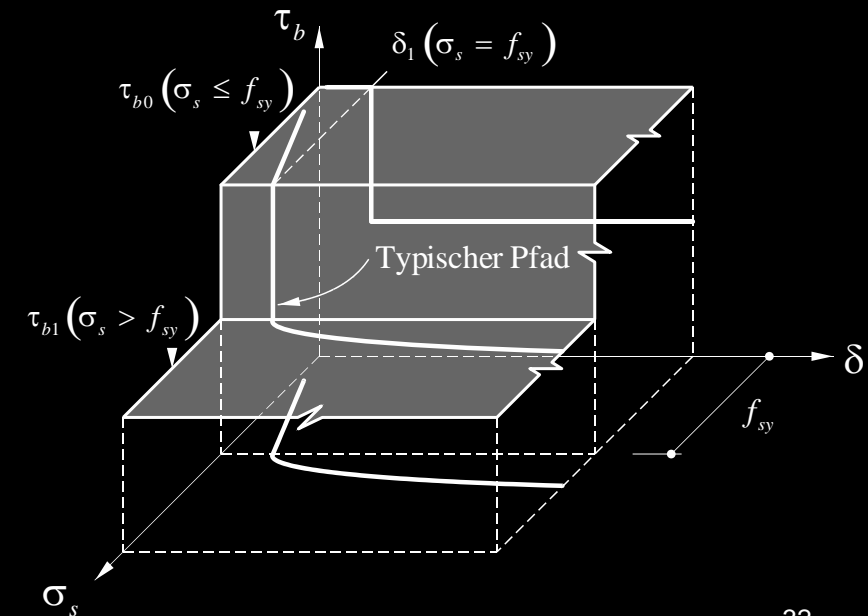
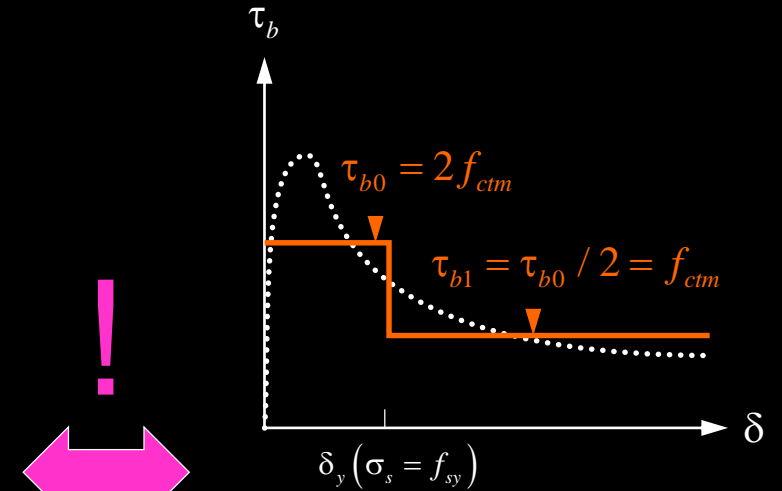
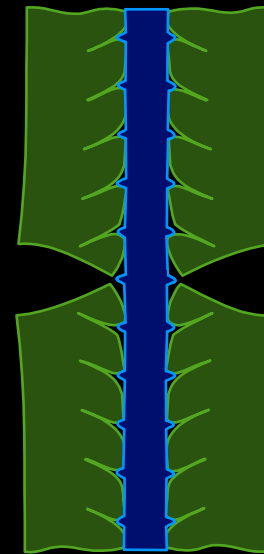
- Annahme: abgetreppte starr-ideal plastische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung ($\tau_b - \delta$):

$$\tau_b = \tau_{b0} = 2f_{ctm} \quad \text{für } \sigma_s \leq f_{sy}$$

$$\tau_b = \tau_{b1} = f_{ctm} \quad \text{für } \sigma_s > f_{sy}$$

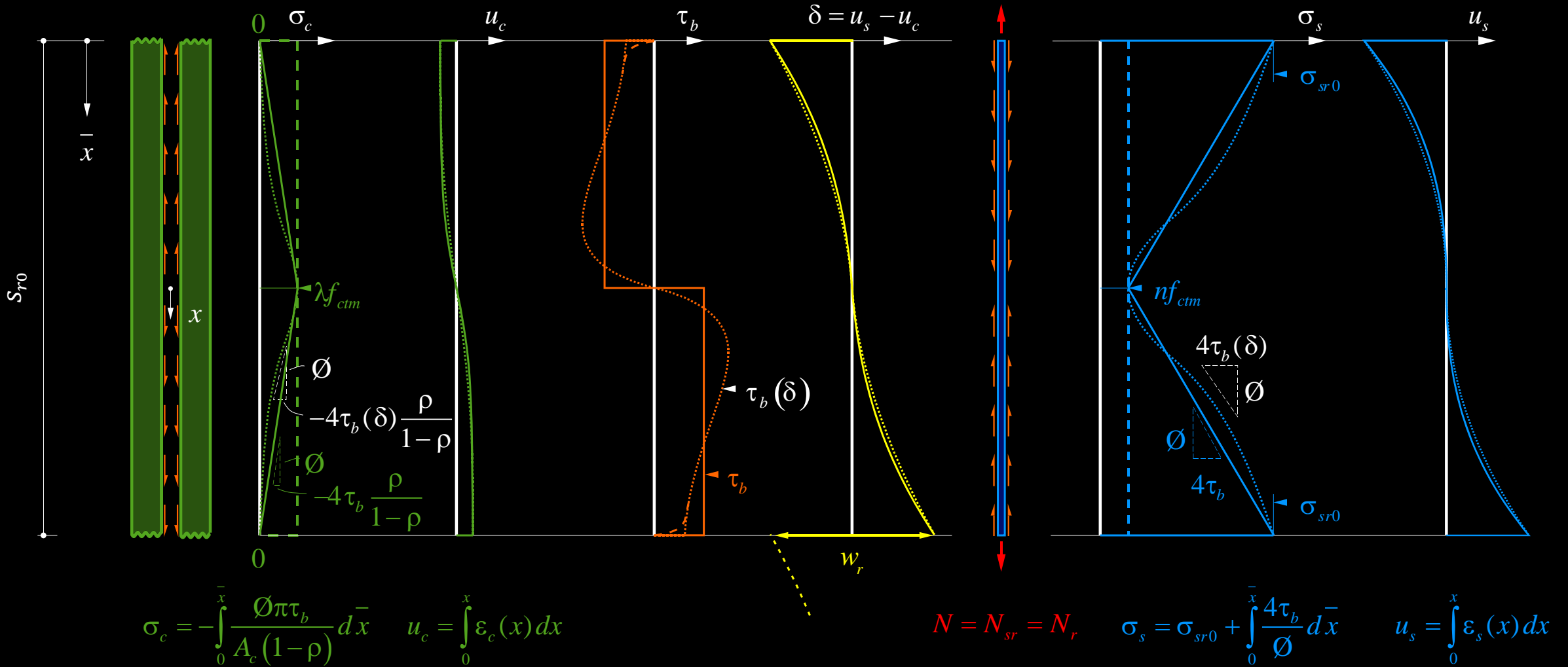
→ da τ_b (bereichsweise) unabhängig von δ ist, existiert eine geschlossene Lösung des Problems

- Oft in Kombination mit einer bilinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma_s(\epsilon_s)$
- Gebrauchstauglichkeit ($\sigma_s \leq f_{sy}$): konstanter Wert der Verbundspannung $\tau_b = 2f_{ctm}$



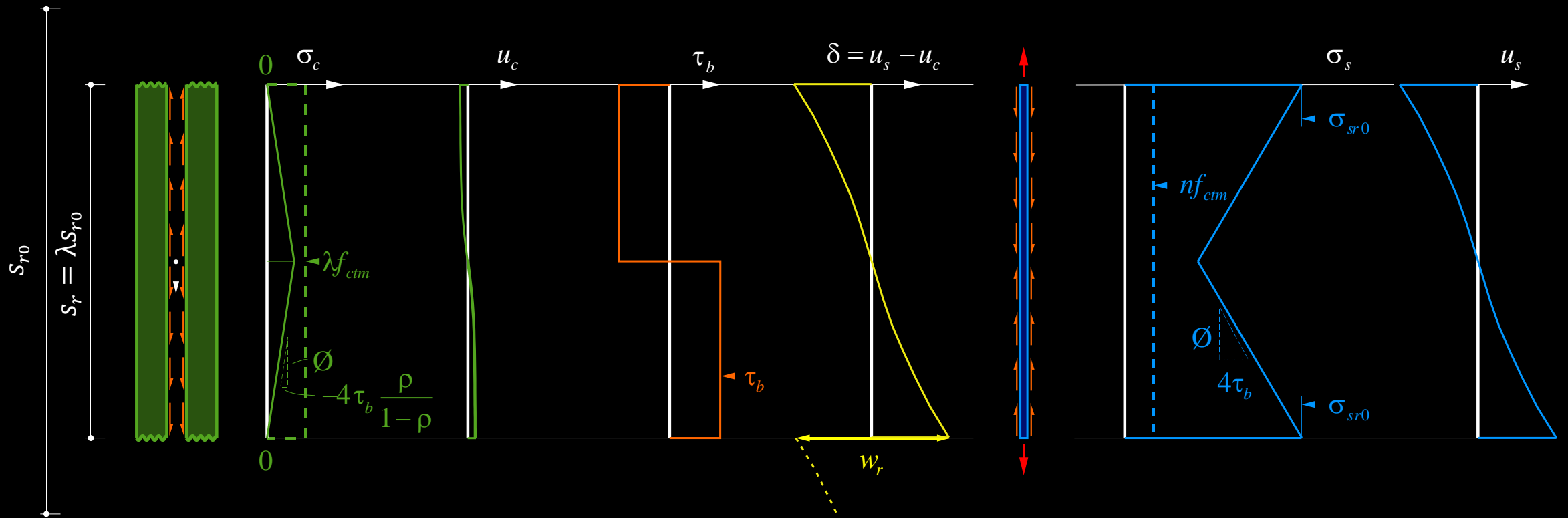
NB: Auch «genauere» Modelle für den Verbund (z.B. *fib* MC2010) gehen von einem markanten Abfall der Verbundspannung für $\epsilon_s \geq \epsilon_{sy}$ aus.

Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



$$N = N_{sr} = N_r$$

Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



$$\sigma_c = -\int_0^{\bar{x}} \frac{\emptyset \pi \tau_b}{A_c (1-\rho)} d\bar{x} \quad u_c = \int_0^x \varepsilon_c(x) dx$$

$$N = N_{sr} = N_r \quad \sigma_s = \sigma_{sr0} + \int_0^{\bar{x}} \frac{4\tau_b}{\emptyset} d\bar{x} \quad u_s = \int_0^x \varepsilon_s(x) dx$$

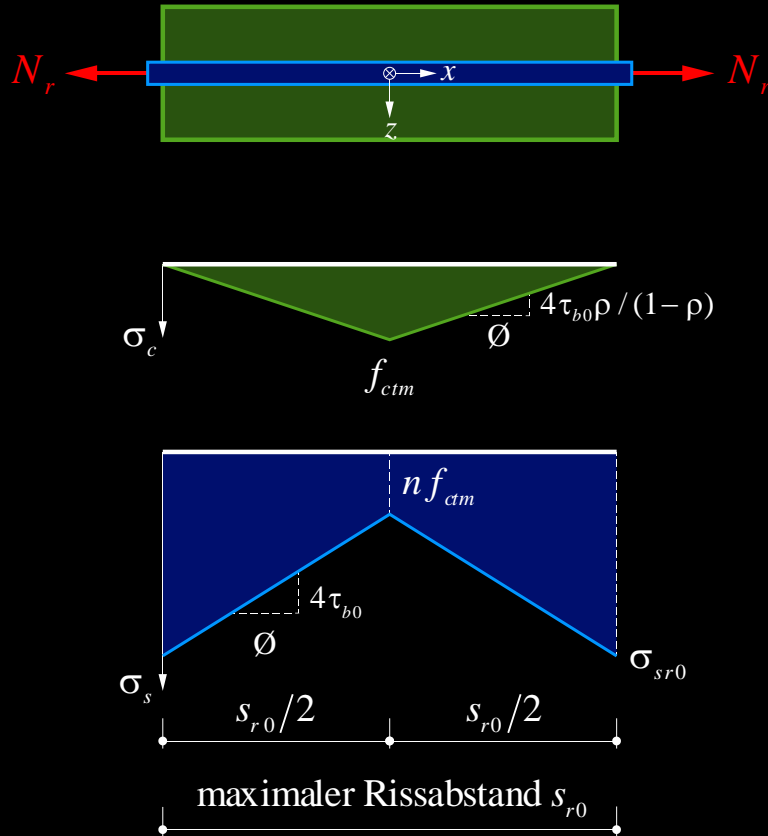
Zuggurtmodell – Annahmen

Die nachfolgenden Überlegungen und Resultate basieren auf einer Reihe von zum Teil sehr stark vereinfachenden Annahmen, deren Zulässigkeit im konkreten Fall zu überprüfen ist:

- Materialeigenschaften und Querschnitt sind entlang des Zugglieds konstant (zu Querschnittssprüngen siehe Hausübung)
- Grösse der aufgezwungenen Dehnungen ist entlang des Zugglieds und quer zur Beanspruchungsrichtung konstant (Betonquerschnitt bleibt eben)
- Betonquerschnitt reisst jeweils augenblicklich vollständig auf und ist fortan im Rissquerschnitt spannungsfrei
- linear elastisches Verhalten von Beton und Bewehrung im Rissbildungsprozess
- in ungerissenen Bereichen starrer, in gerissenen Bereichen verschieblicher, ideal plastischer Verbund gemäss Zuggurtmodell

Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset ([1], Seite 3.5f)



Gleichgewicht (Normalkraft über Länge des Zugglieds konstant, d.h. $q_x = 0$):

$$N_r = A_c(1-\rho)f_{ctm} + \rho A_c n f_{ctm} = \rho A_c \sigma_{sr0}$$

(mit $\rho = \emptyset^2 \pi / (4A_c)$ und $n = E_s / E_c$)

Stahlspannung im Riss bei Rissbildung

$$\sigma_{sr0} = f_{ctm} \left(\frac{1}{\rho} - 1 + n \right) \approx \frac{f_{ctm}}{\rho}$$

(gute Näherung für kleine ρ)

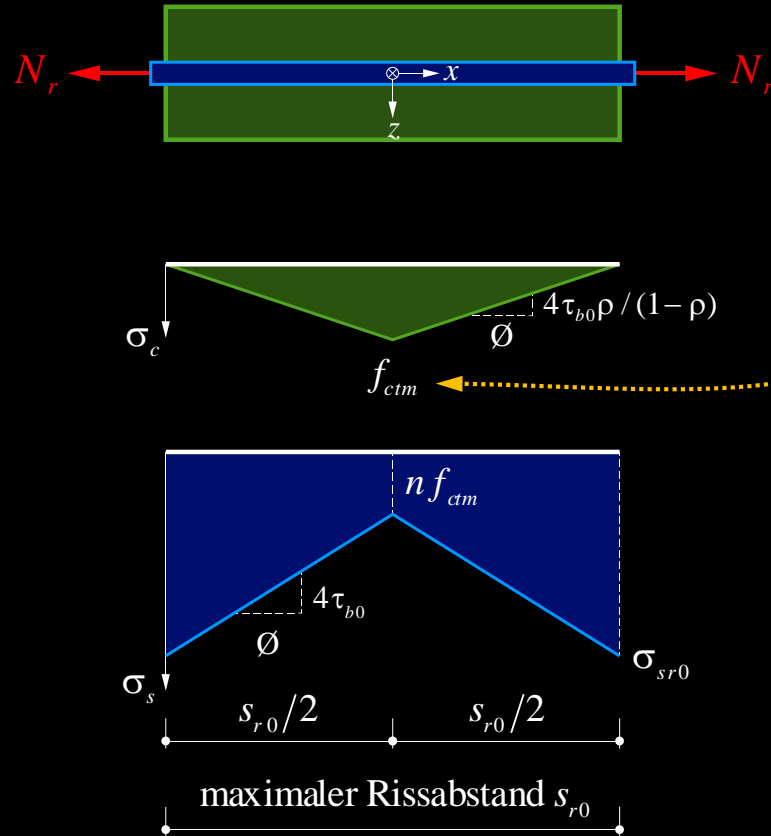
Maximaler Rissabstand

$$s_{r0} = \frac{\emptyset f_{ctm} (1-\rho)}{2\tau_{b0}\rho} = \frac{\emptyset}{4} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \approx \frac{\emptyset}{4\rho}$$

(mit $\tau_{b0} = 2\tau_{b1} = 2f_{ctm}$)

Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset ([1], Seite 3.5f)



Betonspannung in Mitte des Elements mit Länge s_{r0} ist $\sigma_c = f_{ctm}$, d.h. dort könnte sich ein weiterer Riss bilden.

Somit ist der minimale Rissabstand:

$$s_{r,min} = s_{r0} / 2$$

Allgemein mit Parameter λ :

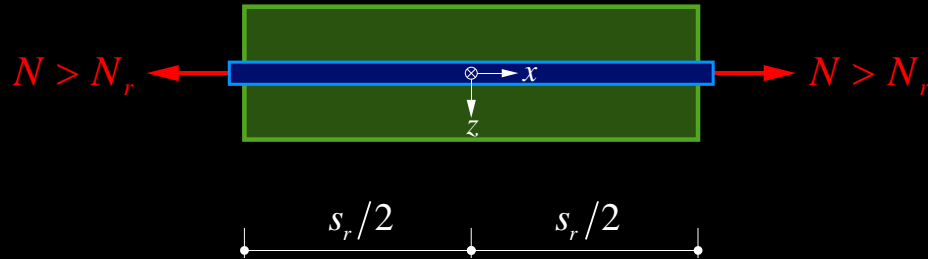
$$s_r = \lambda s_{r0} \quad \left(\frac{1}{2} < \lambda < 1 \right)$$

→ theoretische Grenzen der Rissabstände bei abgeschlossenem Rissbild!

NB: Bei Rissbildung stellt sich unter Last (theoretisch) schlagartig das abgeschlossene Rissbild ein.

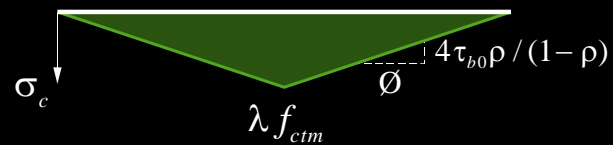
Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)



Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant.
Stahlspannungen steigen weiter.

Mittlere Betondehnung



$$\varepsilon_{cm} = \frac{\int_{-s_r/2}^{s_r/2} \varepsilon_c dx}{s_r} = \frac{\int_{-s_r/2}^{s_r/2} \frac{\sigma_c}{E_c} dx}{s_r} = \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c}$$

Verschiebung

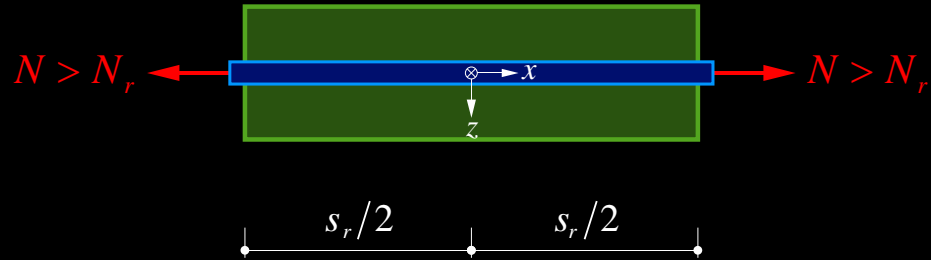


$$u_c(x) = \int_0^x \varepsilon_c(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma_c(x)}{E_c} dx$$

$$u_{cr} = u_c \left(x = \frac{s_r}{2} \right)$$

Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

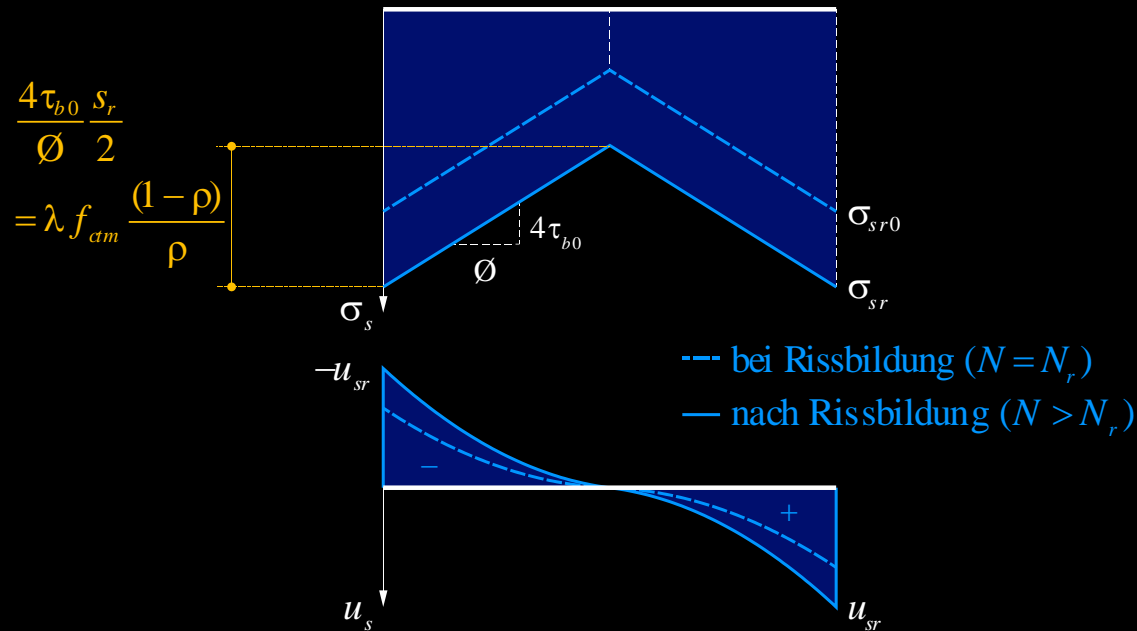
Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)



Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant.
Stahlspannungen steigen weiter.

Mittlere Stahldehnung = mittlere Dehnung

Zugglied



$$\varepsilon_{sm} = \frac{\int_{-s_r/2}^{s_r/2} \frac{\sigma_s}{E_s} dx}{s_r} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing} \frac{s_r}{4E_s} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm} (1-\rho)}{2\rho E_s}$$

Verschiebung

$$u_s(x) = \int_0^x \varepsilon_s(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma_s(x)}{E_s} dx$$

$$u_{sr} = u_s \left(x = \frac{s_r}{2} \right)$$

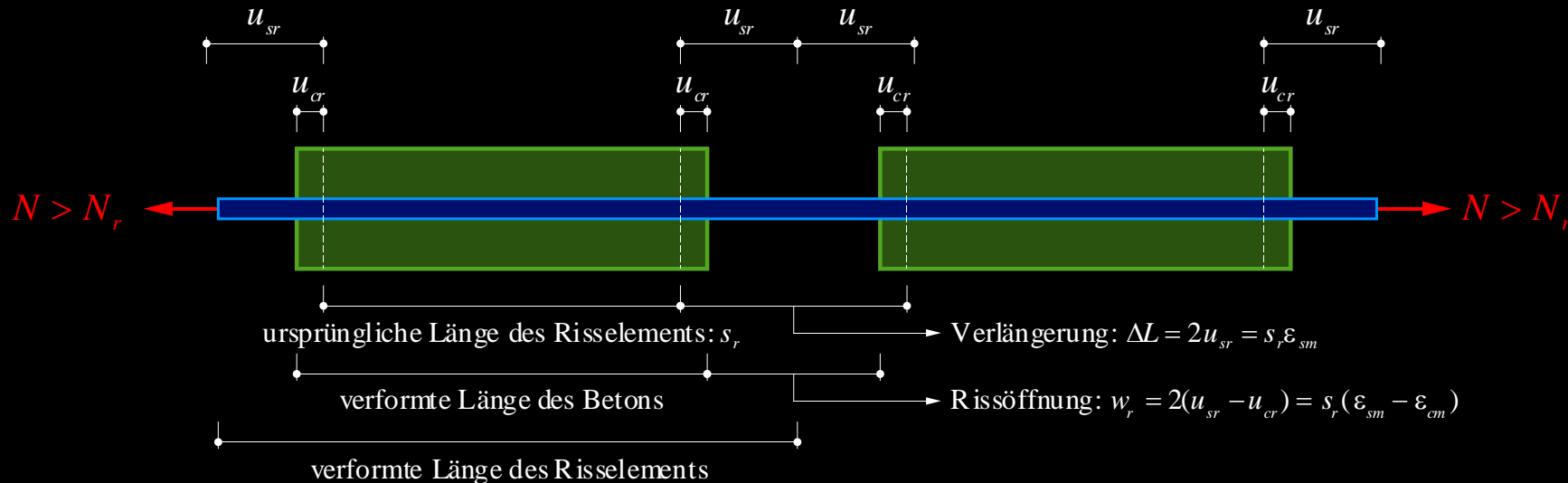
Zuggurtmodell – Last – Rissbreiten

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)

Rissbreiten: Differenz der mittleren Stahl- und Beton-Dehnungen, multipliziert mit s_r

$$w_r = s_r [\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}] = s_r \left[\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm} (1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c} \right] = \frac{\lambda s_{r0} (2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0})}{2E_s} \quad \text{mit } \sigma_{sr} = \frac{N}{A_s}$$

Grenzen für die Rissbreiten ($\frac{1}{2} < \lambda < 1$): $\frac{s_{r0}}{2E_s} \left(\sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{4} \right) \leq w_r \leq \frac{s_{r0}}{E_s} \left(\sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{2} \right)$



Zuggurtmodell – Last – Rissbreiten

Im Rissbildungsprozess (Zwang, Rissbild nicht abgeschlossen, $N=N_r$)

Rissbreiten: Differenz der mittleren Stahl- und Beton-Dehnungen, multipliziert mit s_r

$$w_r = s_r [\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}] = s_r \left[\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm} (1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c} \right] = \frac{\lambda s_{r0} (2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0})}{2E_s} \text{ mit } \sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$$

Grenzen für die Rissbreiten $\left(\frac{1}{2} < \lambda < 1\right)$:

$$\frac{3}{8} \frac{s_{r0}}{E_s} \sigma_{sr0} \leq w_r \leq \frac{1}{2} \frac{s_{r0}}{E_s} \sigma_{sr0}$$

...Rissabstand eingesetzt:

$$\frac{3}{32} \frac{\emptyset(1-\rho)}{\rho E_s} \sigma_{sr0} \leq w_r \leq \frac{1}{8} \frac{\emptyset(1-\rho)}{\rho E_s} \sigma_{sr0}$$

...d.h. für kleine ρ näherungsweise:

$$\frac{3}{32} \frac{\emptyset}{\rho E_s} \sigma_{sr0} \leq w_r \leq \frac{1}{8} \frac{\emptyset}{\rho E_s} \sigma_{sr0}$$

...d.h. mit $\sigma_{sr0} \approx f_{ctm} / \rho$ d.h. $\rho \approx f_{ctm} / \sigma_{sr0}$:

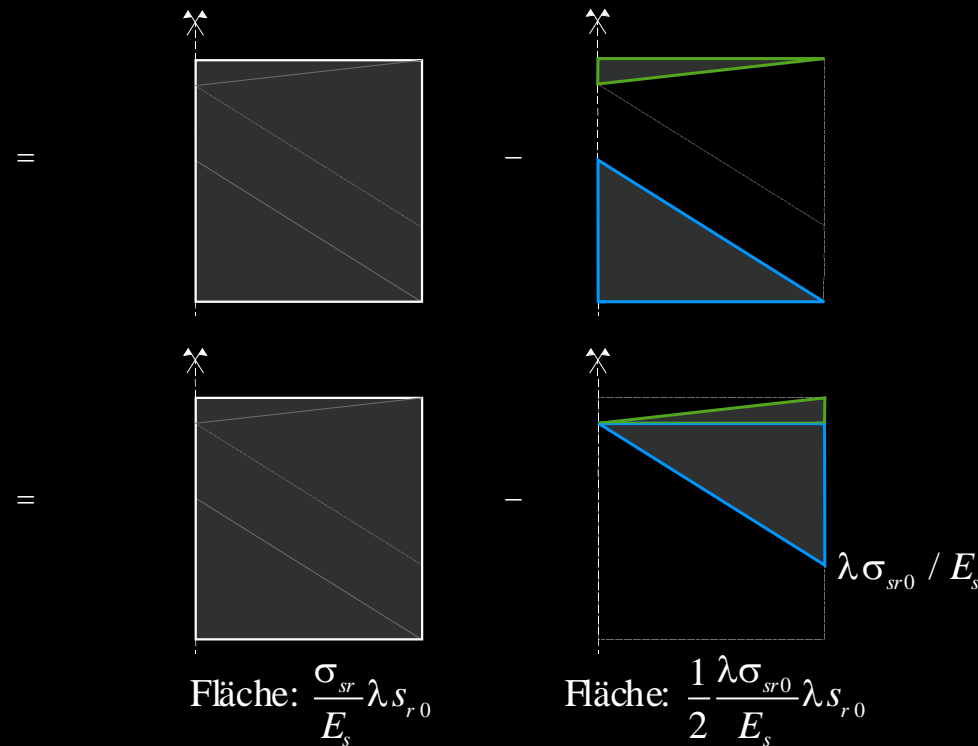
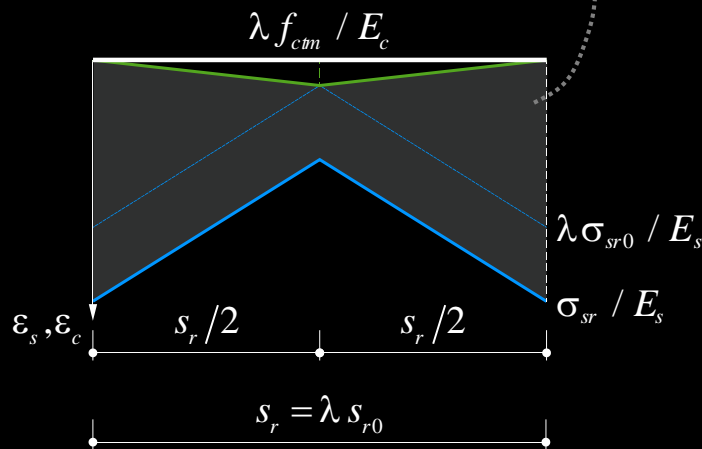
$$\frac{3}{32} \frac{\emptyset}{f_{ctm} E_s} \sigma_{sr0}^2 \leq w_r \leq \frac{1}{8} \frac{\emptyset}{f_{ctm} E_s} \sigma_{sr0}^2 \rightarrow \sigma_{sr0} \leq \sqrt{\frac{(8...11) f_{ctm} E_s w_r}{\emptyset}}, \rho \geq \sqrt{\frac{\emptyset f_{ctm}}{(8...11) E_s w_r}}$$

Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)

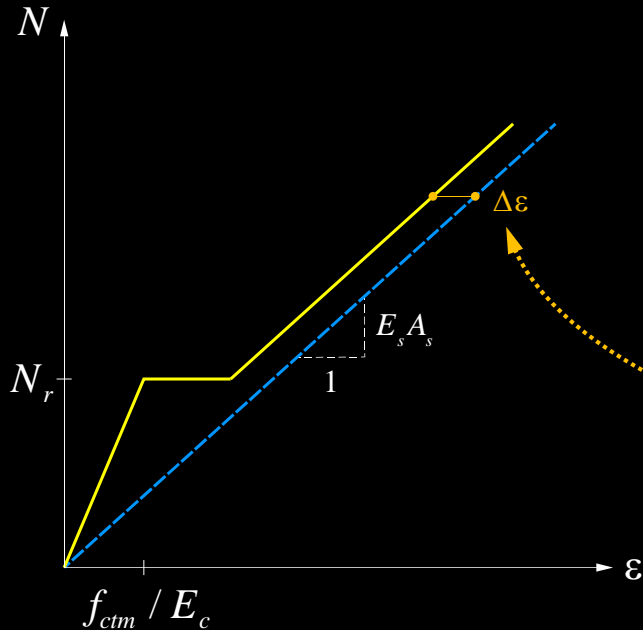
Grafische Ermittlung der Rissbreite:

$$w_r = \int_{-s_r/2}^{s_r/2} (\varepsilon_s - \varepsilon_c) dx = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} \lambda s_{r0} - \frac{1}{2} \frac{\lambda \sigma_{sr0}}{E_s} \lambda s_{r0} = \frac{\lambda s_{r0} (2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0})}{2E_s}$$



Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)



N - ε - und σ_{sr} - ε -Diagramme: Reduktion der Dehnung des nackten Stahls um $\Delta\varepsilon$
 ($\Delta\varepsilon$ bleibt bis Fließbeginn konstant).

NB: gute Näherung für w_r (kleine ρ)

$$\frac{\varnothing / 4\rho}{2E_s} \left(\frac{N}{A_s} - \frac{f_{ctm}}{4\rho} \right) \leq w_r \leq \frac{\varnothing / 4\rho}{E_s} \left(\frac{N}{A_s} - \frac{f_{ctm}}{2\rho} \right)$$

Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant.
 Stahlspannungen steigen weiter.

Stahldehnung am Riss

$$\varepsilon_{sr} = \sigma_{sr} / E_s$$

Mittlere Betondehnung

$$\varepsilon_{cm} = \lambda f_{ctm} / (2E_c)$$

Mittlere Stahldehnung

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0}}{\varnothing} \frac{s_r}{E_s} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm} (1-\rho)}{2\rho E_s}$$

Rissbreiten: Differenz der mittleren Stahl- und Betondehnungen, multipliziert mit s_r ($\lambda = 0.5 \dots 1$):

$$w_r = s_r \left[\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm} (1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c} \right] = \frac{\lambda s_{r0} (2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0})}{2E_s}$$

mit $\sigma_{sr} = N / A_s$

$$\frac{s_{r0}}{2E_s} \left(\sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{4} \right) \leq w_r \leq \frac{s_{r0}}{E_s} \left(\sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{2} \right)$$

Zuggurtmodell – Last – Beispiel

Anwendung des Zuggurtmodells auf Beispiel 1 ([1], Seite 3.6)

$$\rho = \frac{8 \cdot 13^2 \cdot \pi}{400^2} = 2.65\% \quad \text{und} \quad n = \frac{205}{33.6} = 6.1$$

Stahlspannung am Riss bei Rissbildung:

$$\sigma_{sr0} = 2.9 \left(\frac{1}{0.0265} - 1 + 6.1 \right) = 124 \text{ MPa} \quad (109 \text{ MPa})$$

Maximaler Rissabstand:

$$s_{r0} = \frac{26}{4} \left(\frac{1}{0.0265} - 1 \right) = 238 \text{ mm} \quad (\rightarrow \text{min. } 119 \text{ mm}) \quad (245 \text{ mm})$$

Rissbreiten:

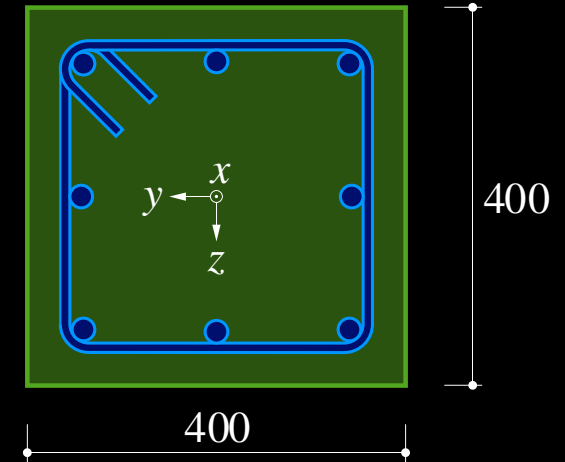
$$\lambda = 1/2 \rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.05 \text{ mm} \quad (0.05 \text{ mm})$$

$$\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.23 \text{ mm} \quad (0.24 \text{ mm})$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.07 \text{ mm} \quad (0.07 \text{ mm})$$

$$\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.43 \text{ mm} \quad (0.46 \text{ mm})$$

NB: Näherungen für Rissabstand und Rissbreiten stimmen trotz sehr grossem ρ sehr gut



Bügelbewehrung $\varnothing 12$ ($c_{nom} = 35 \text{ mm}$)

Längsbewehrung 8 $\varnothing 26$

Zuggurtmodell – Last – Beispiel

Anwendung des Zuggurtmodells auf Beispiel 1 ([1], Seite 3.6)

$$\rho = \frac{8 \cdot 13^2 \cdot \pi}{400^2} = 2.65\% \quad \text{und} \quad n = \frac{205}{33.6} = 6.1$$

Stahlspannung am Riss bei Rissbildung

$$\sigma_{sr0} = 2.9 \left(\frac{1}{0.0265} - 1 + 6.1 \right) = 124 \text{ MPa}$$

Maximaler Rissabstand

$$s_{r0} = \frac{26}{4} \left(\frac{1}{0.0265} - 1 \right) = 238 \text{ mm}$$

Rissbreiten

$$\lambda = 1/2 \rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.05 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.23 \text{ mm}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.07 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.43 \text{ mm}$$

Grosse Bewehrungsgehalte ρ bedeuten kleinere Stahlspannungen beim Riss und kleinere Rissabstände, was anzahlmässig mehr, aber feinere Risse bedeutet.

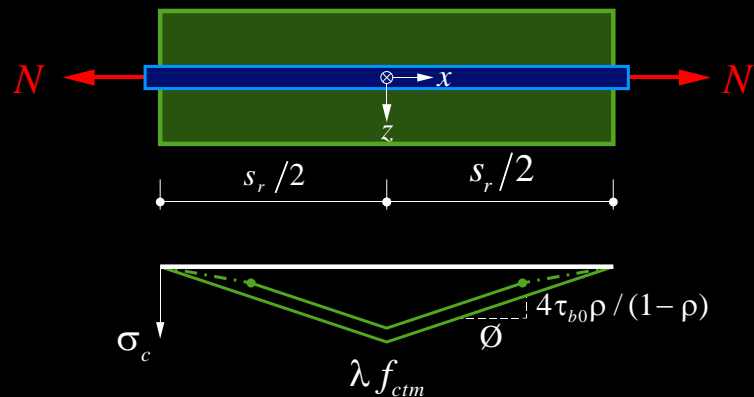
Grosse Stab- \emptyset bei gleichem Bewehrungsgehalt ρ bedeuten grössere Rissabstände, und somit weniger, aber breitere Risse \rightarrow unschön, weniger dauerhaft

Günstiges Gebrauchsverhalten (viele Risse mit kleiner Rissbreite) erreichbar mit

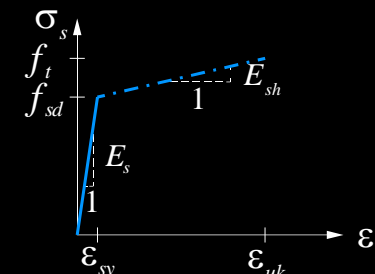
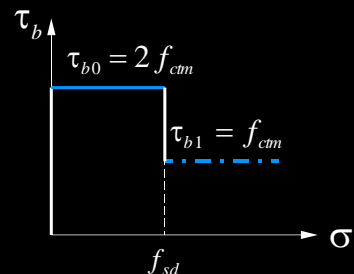
- \rightarrow hohem Bewehrungsgehalt (im Beispiel ist er sehr hoch \gg Mindestbewehrung)
- \rightarrow kleinen Stabdurchmessern
- \rightarrow kleinen Stababständen (aus Zuggurtmodell nicht direkt ersichtlich)
- \rightarrow Querbewehrung (gibt Risse vor)

Zuggurtmodell – Last – Duktilität

Verhalten nach Überschreiten der Fließgrenze

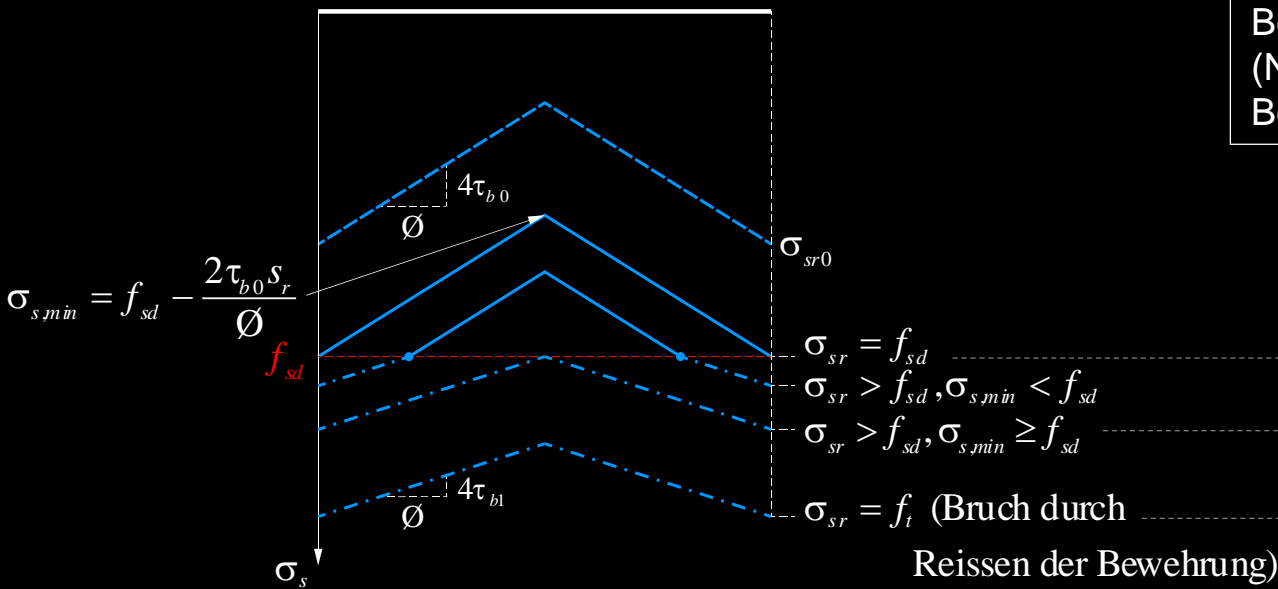


$$\sigma_{sr} > f_{sd} \rightarrow \tau_{b1} = \tau_{b0} / 2$$



Regimes:

Bewehrung in Rissnähe plastifiziert, dazwischen elastisch (N.B: bei kleiner Verfestigung Bruch in diesem Regime)
 Beziehung für ϵ_{sm} kompliziert (aber geschlossen lösbar)



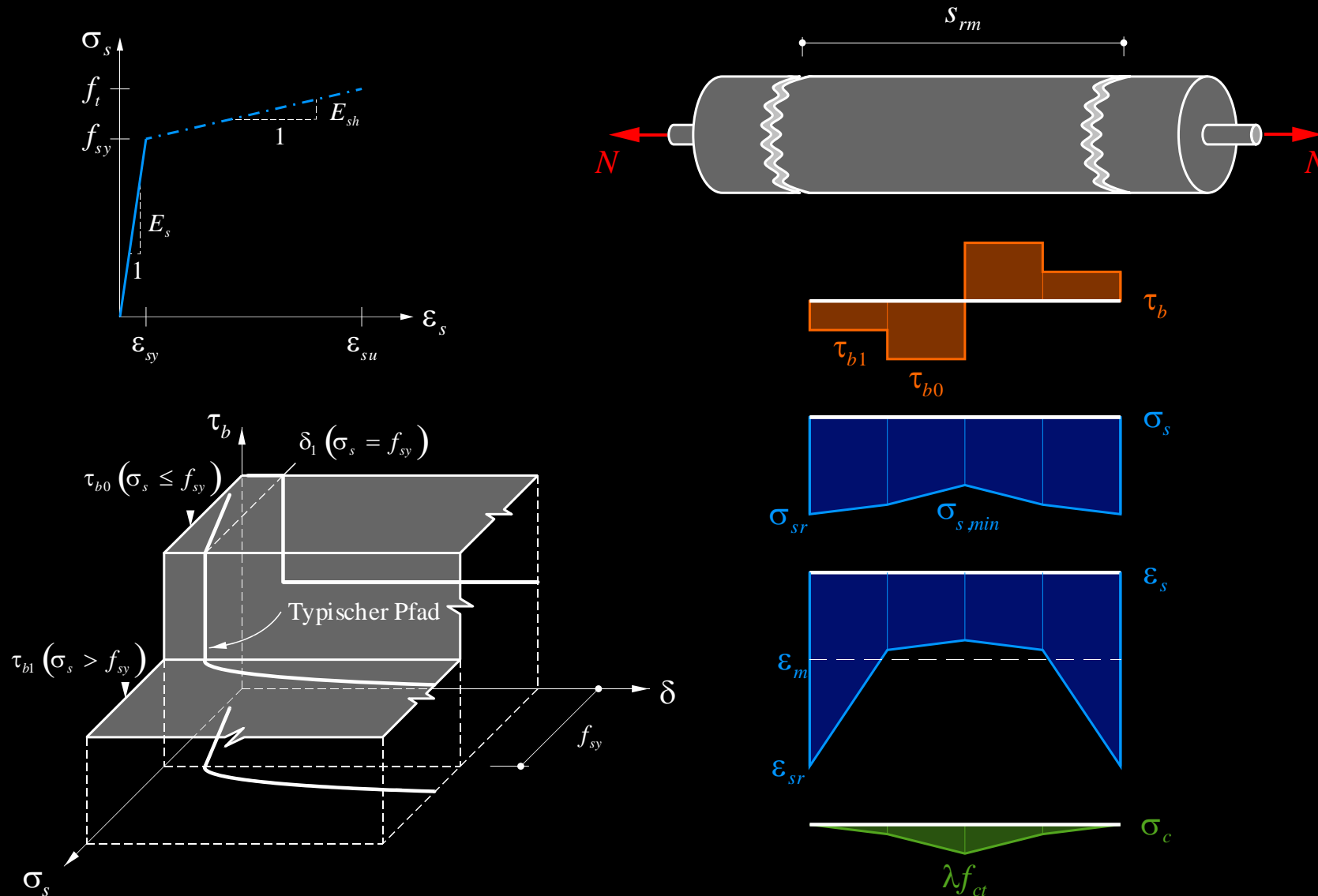
Bewehrung fließt im ganzen Risselement.

ϵ_{sm} analog wie im elastischen Bereich:

τ_{b1} statt τ_{b0} , mit $\tau_{b1} = \tau_{b0} / 2$

$$\epsilon_{sm} = \underbrace{\frac{f_{sd}}{E_s}}_{\text{nackter Stahl}} + \underbrace{\frac{\sigma_{sr} - f_{sd}}{E_{sh}} - \frac{\lambda f_{ctm} (1-\rho)}{4\rho E_{sh}}}_{\text{"}\Delta\epsilon_1\text{"} = \Delta\epsilon \frac{1}{2} \frac{E_s}{E_{sh}}}$$

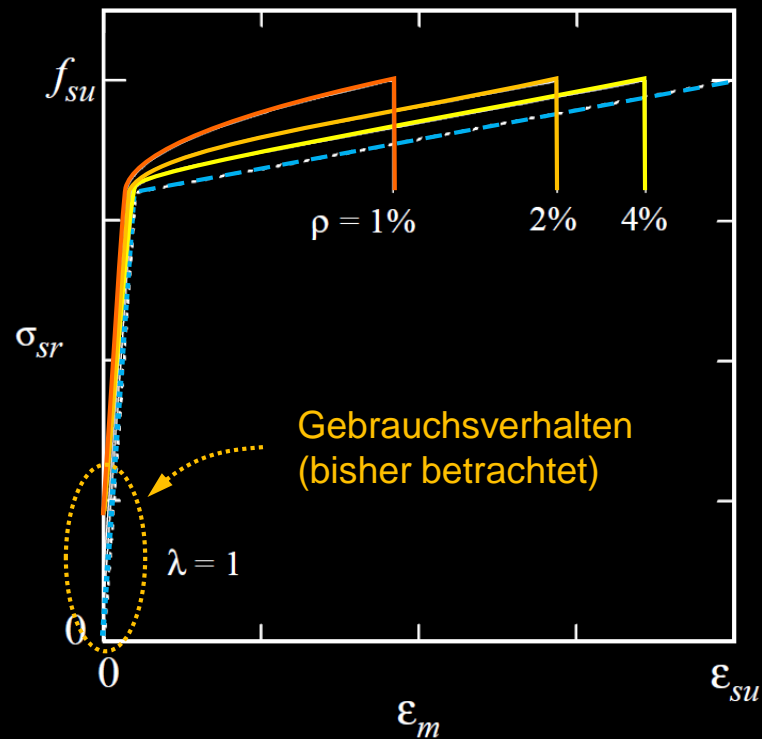
Zuggurtmodell – Last – Duktilität



Zuggurtmodell – Last – Duktilität

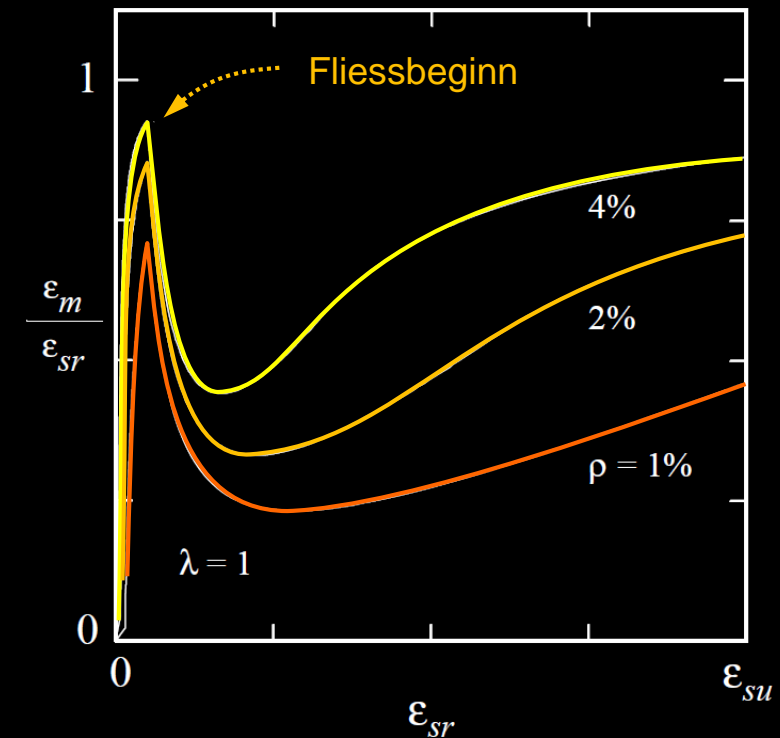
Last-Verformungsverhalten mit Berücksichtigung des Verbunds bei hoher Beanspruchung

- Kein Einfluss auf Zugwiderstand
- Steiferes Verhalten als nackter Stahl



Verhältnis mittlere Dehnungen zu maximaler Dehnung in den Rissen mit Berücksichtigung des Verbunds

- Starker Abfall nach Fließbeginn
- Einfluss auf Duktilität beachten!



Zugversuche Dr. M. Alvarez – Versuchsanlage

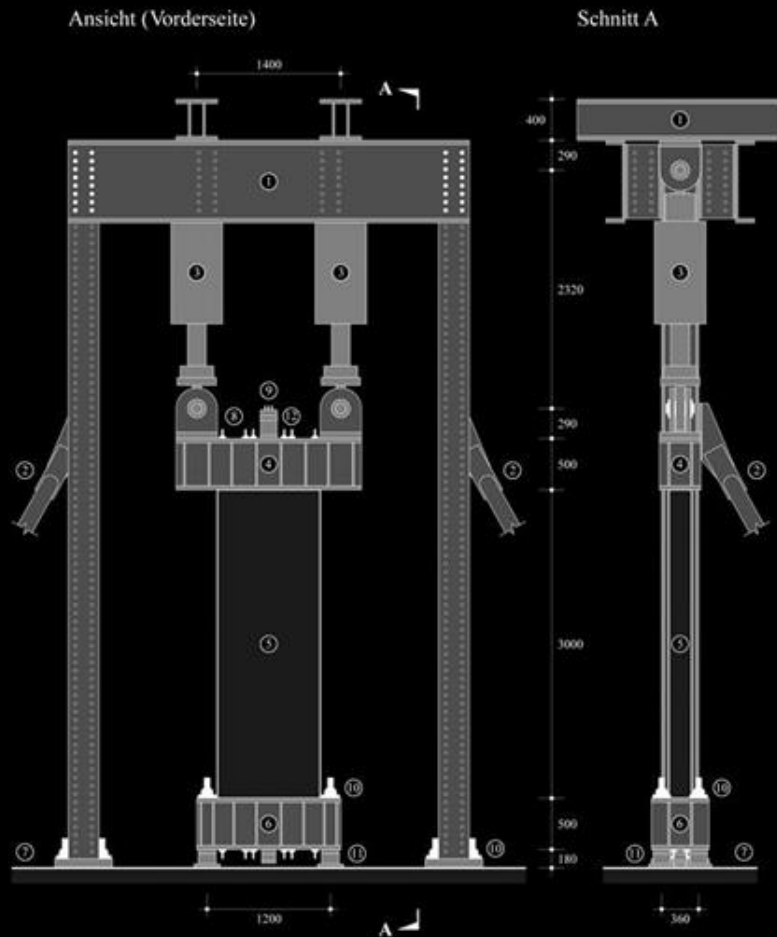


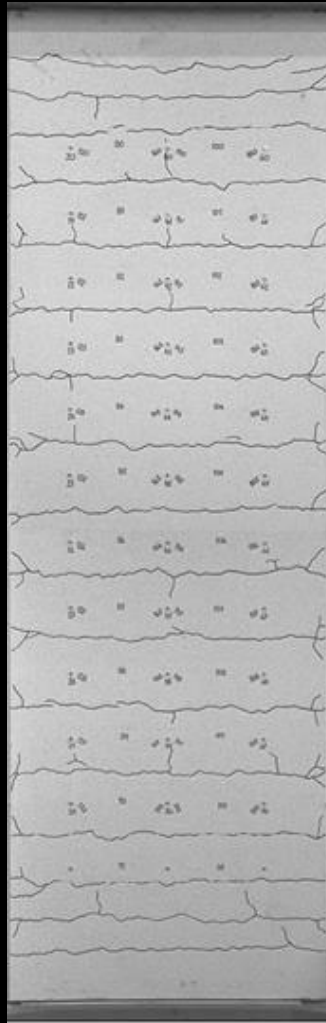
Bild 1.1 – Konzept der Zugversuche, [mm].

Versuchskörper	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9
Längsbewehrung A_s [mm ²]	2156					1232	616	1540	4312
Vorspannbewehrung A_p [mm ²]	0					1050		0	
Betonstahlqualität	H			N	L	H			
Bügelbewehrung [mm]	Ø 8 @ 200		0	Ø 8 @ 200					
Würfeldruckfestigkeit des Betons f_{cw} [MPa]	50	90	50						

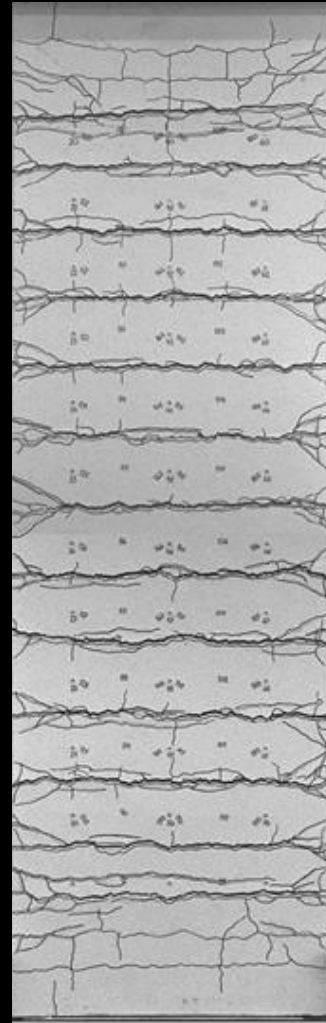
- ① Stahl-Reaktionsrahmen
- ② Druckstreben (Knicksicherung)
- ③ Servohydraulische Pressen (2 MN Kapazität)
- ④ Oberer Krafteinleitungsträger
- ⑤ Versuchskörper
- ⑥ Unterer Krafteinleitungsträger
- ⑦ Aufspannboden
- ⑧ Verankerungen der Anschlussstäbe
- ⑨ Verankerung des Vorspannkabels
- ⑩ Vorspannstangen (Verankerungen im Aufspannboden)
- ⑪ Kraftmessdosen (1 MN Nennbereich)
- ⑫ Kraftmessdose (2 MN Nennbereich)

H: $\epsilon_{su} = 14.6\%$ $f_t/f_s = 1.26$
N: $\epsilon_{su} = 3.8\%$ $f_t/f_s = 1.05$
L: $\epsilon_{su} = 3.1\%$ $f_t/f_s = 1.06$

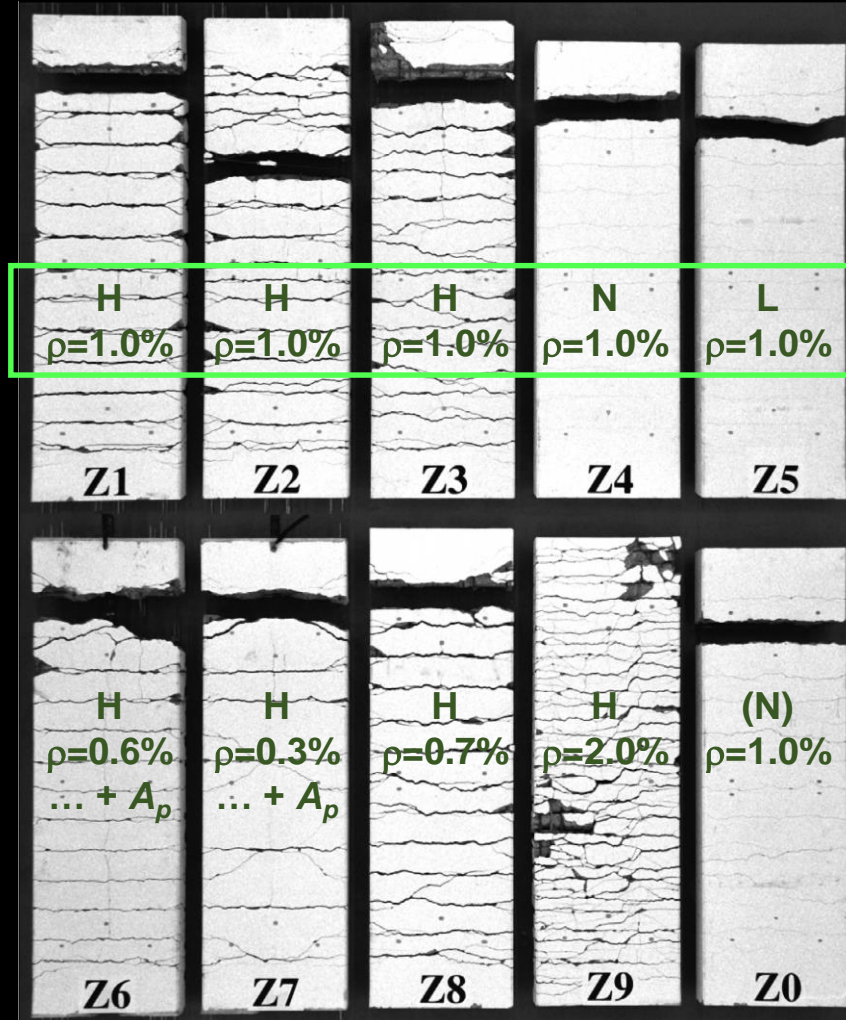
Zugversuche – Dr. M. Alvarez – Rissbilder / Bruchverlängerung



Versuch Z1 – LS 4



Versuch Z1 – LS 10

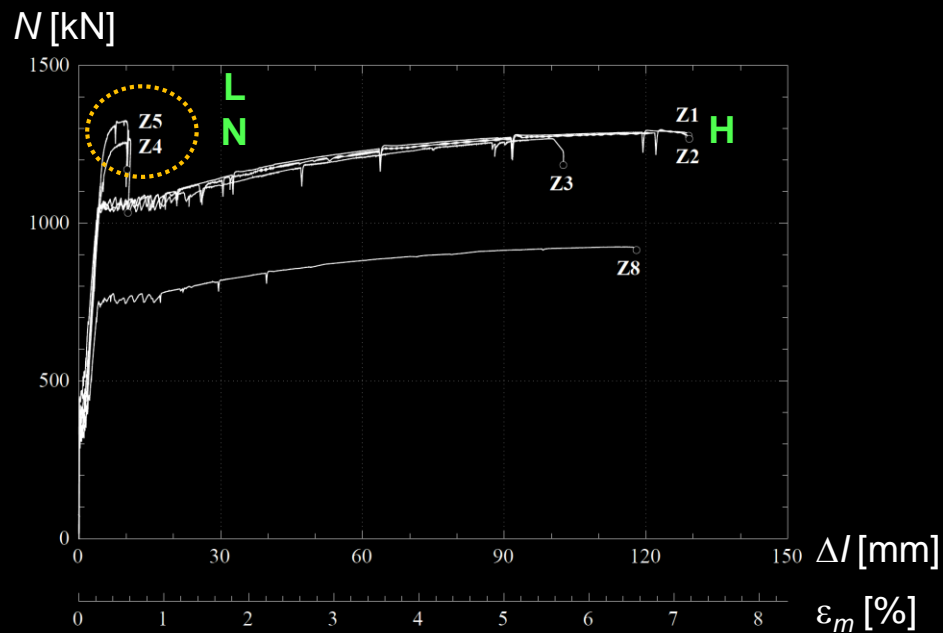


Alle Versuchskörper nach dem Bruch: Plastische (=bleibende) Verformungen stark unterschiedlich

Zugversuche Dr. M. Alvarez – Versuchsergebnisse

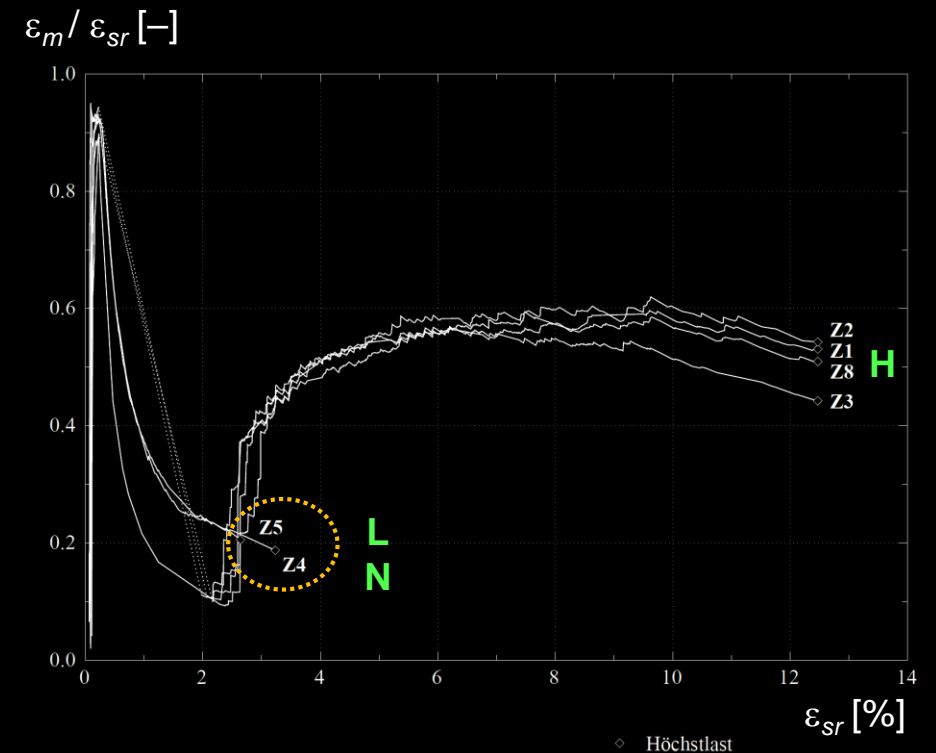
Last-Verformungsverhalten mit Berücksichtigung des Verbunds bei hoher Beanspruchung

→ Verformungsvermögen durch **Bewehrung mit zu geringer Duktilität** (Bruchdehnung und Verfestigung!) stark beeinträchtigt



Verhältnis mittlere Dehnungen zu maximaler Dehnung in den Rissen mit Berücksichtigung des Verbunds

→ gute Übereinstimmung mit Zuggurtmodell (bei Berücksichtigung der wirklichen Stahlkennlinie praktisch identisch)



Zuggurtmodell – Weitere Anwendungen

Mit dem Zuggurtmodell kann das Verhalten von Stahlbetonbauteilen unter Zugbeanspruchung untersucht werden.

Neben dem bisher behandelten Verhalten schlaff bewehrter Stahlbeton-Zugglieder unter monoton zunehmender Normalkraft im Gebrauchs- und Bruchzustand kann damit insbesondere die Zwangsbeanspruchung durch aufgezwungene oder behinderte Verformungen an statisch unbestimmten Systemen untersucht werden:

→ Äusserer Zwang (behinderte Verkürzung bei Temperaturabfall, Auflagerverschiebung, ...)

→ Innerer Zwang (behinderte Schwindverkürzung des Betons)

Das Zuggurtmodell dient damit als Grundlage für Überlegungen zur Mindestbewehrung in Betonbauteilen und der entsprechenden Bestimmungen der Norm SIA 262 Ziff. 4.4.2.

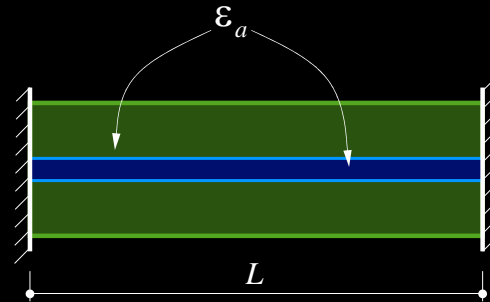
Daneben existiert eine ganze Reihe von weiteren Anwendungen des Zuggurtmodells, wie zum Beispiel vorgespannte Zugglieder (siehe Stahlbeton II).

Das Zuggurtmodell dient auch als Grundlage des gerissenen Scheibenmodells (Cracked Membrane Model) für zweiachsige Beanspruchung (siehe Advanced Structural Concrete).

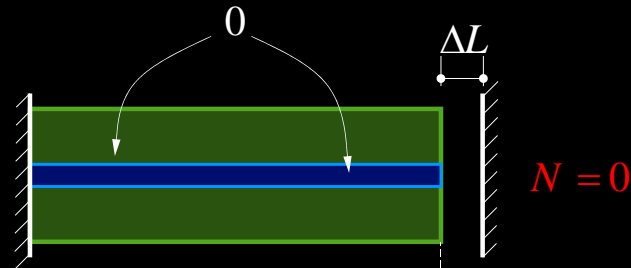
Äusserer und innerer Zwang

Äusserer Zwang (z.B. aufgezwungene Längenänderung oder behinderte Verkürzung infolge Temperaturabfall)

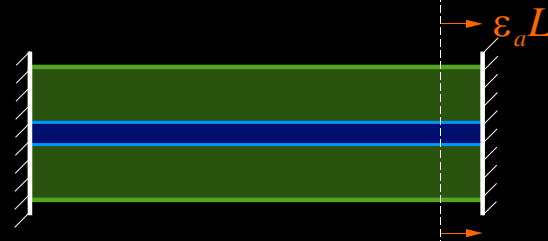
Einwirkung:
aufgezwungene Dehnung
in Beton und Bewehrung ε_a
z.B. durch eine
Temperaturänderung $\alpha_T \Delta T$



Gedankenmodell:
Schritt 1: freie Verkürzung
 $\Delta L = \varepsilon_a L$



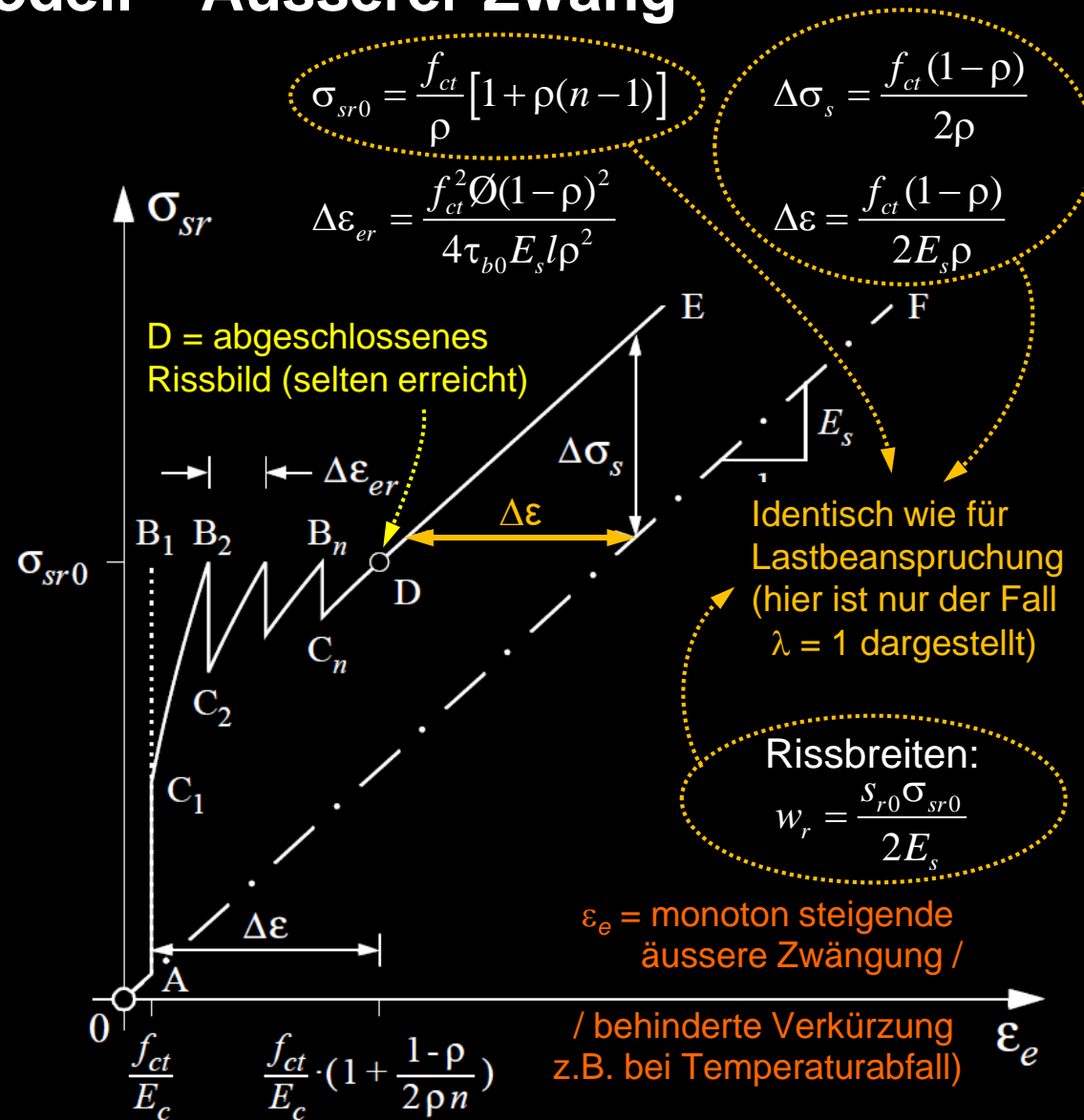
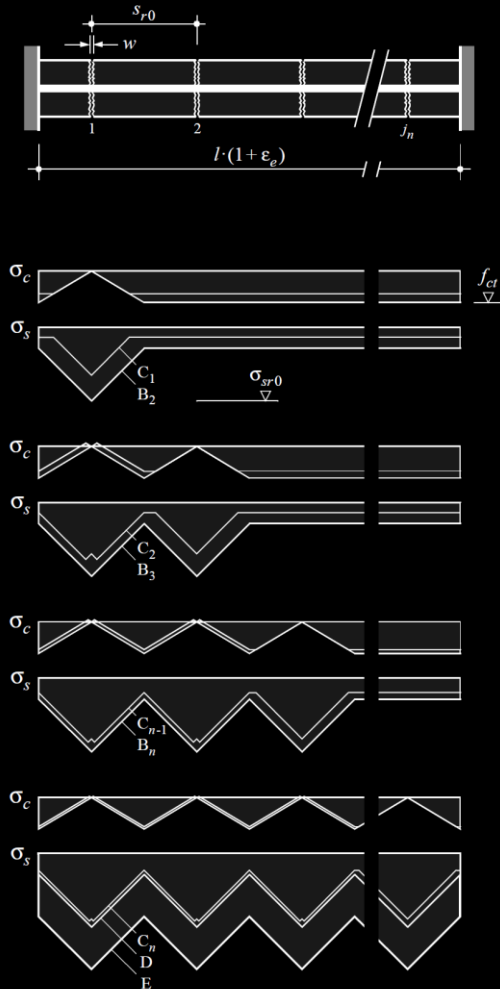
Schritt 2: Aufgezwungene
Längenänderung $\Delta L = \varepsilon_a L$



Analog wie Last mit Verformungssteuerung

Zuggurtmodell – Äusserer Zwang

- [1], Seite 3.7f; [5], Seite 160f



Beispiel äusserer Zwang

Beispiel 2 ([1], Seite 3.8): Wand $b = 300$ mm, an den Enden unverschieblich gehalten, erfährt eine Abkühlung um 30°C ($\alpha_s = \alpha_c = 10^{-5}/^\circ\text{C}$)

Beton C30/37 $\rightarrow f_{ctm} = 2.9$ MPa, $E_c = 33.6$ GPa

Betonstahl B500B $\rightarrow E_s = 205$ GPa

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 150^2} = 0.894\%$$

Maximaler Rissabstand

$$s_{r0} = \frac{16}{4} \left(\frac{1}{0.00894} - 1 \right) = 444 \text{ mm } (\rightarrow \text{minimal } 222 \text{ mm})$$

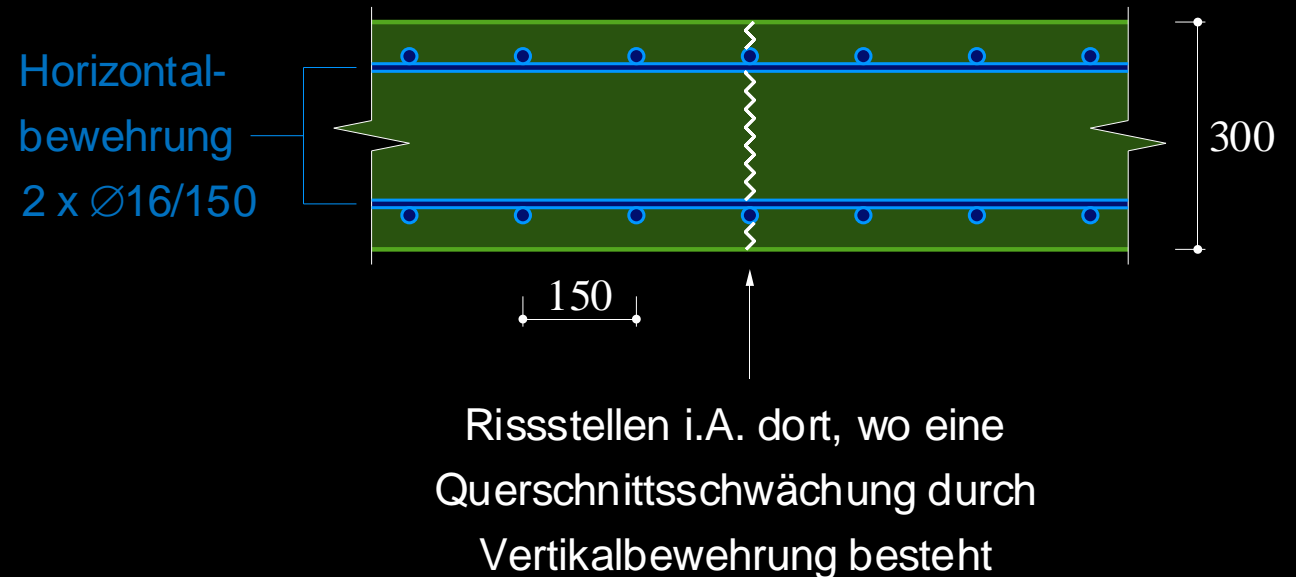
Stahlspannung am Riss

$$\sigma_{sr0} = 2.9 \left(\frac{1}{0.00894} - 1 + 6.1 \right) = 339 \text{ MPa}$$

Rissbreiten mit $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$

$\lambda = 1 \rightarrow w_r = 0.37$ mm

$\lambda = 1/2 \rightarrow w_r = 0.28$ mm



Beispiel äusserer Zwang

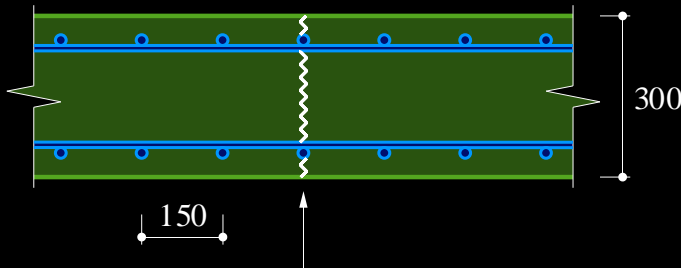
Beispiel 2 ([1], Seite 3.8), Rissbild nicht abgeschlossen, da $\Delta\varepsilon_T < f_{ct}/E_c + \Delta\varepsilon$:

Horizontale Länge der σ_{sr} - ε -Kurve mit $\lambda=1$ und $\tau_{b0} = 2f_{ctm}$:

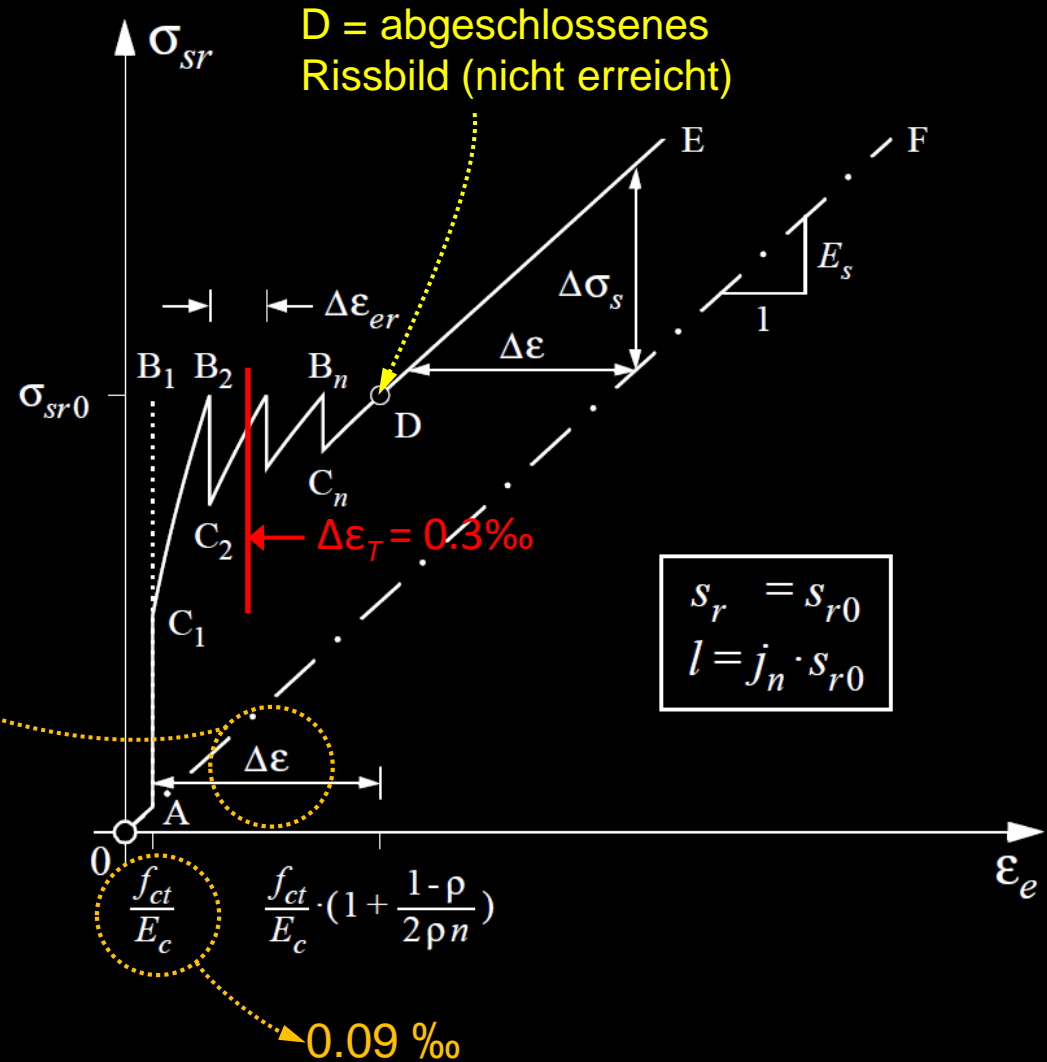
$$\Delta\varepsilon = \frac{f_{ct}(1-\rho)}{2E_s\rho} = \frac{2.9(1-0.00894)}{2 \cdot 205'000 \cdot 0.00894} = 0.78\%$$

Zwängung aus Temperaturänderung:

$$\Delta\varepsilon_T = \Delta T \cdot \alpha_c = 30^\circ\text{C} \cdot \frac{10^{-5}}{^\circ\text{C}} = 0.3\%$$



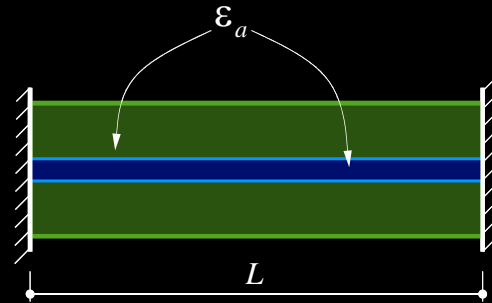
Rissstellen i.A. bei Querbewehrungsstäben



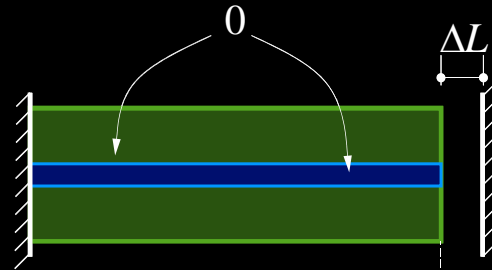
Äusserer und innerer Zwang

Äusserer Zwang (z.B. aufgezwungene Längenänderung oder behinderte Verkürzung infolge Temperaturabfall)

Einwirkung:
aufgezwungene Dehnung in Beton und Bewehrung ε_a z.B. durch eine Temperaturänderung $\alpha_T \Delta T$



Gedankenmodell:
Schritt 1: freie Verkürzung $\Delta L = \varepsilon_a L$



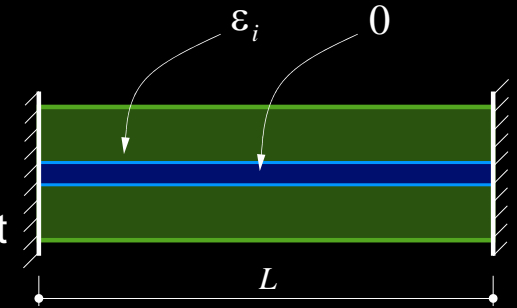
$N = 0$

Schritt 2: Aufgezwungene Längenänderung $\Delta L = \varepsilon_a L$

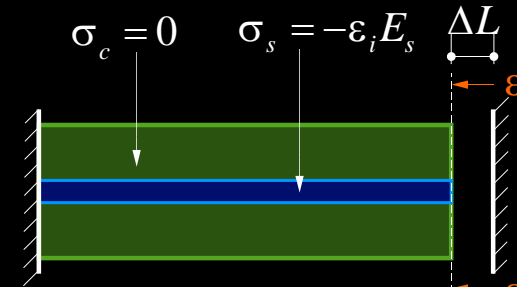


Innerer Zwang (z.B. Schwinden)

Einwirkung:
Dehnung im Beton ε_i z.B. durch Schwinden, Bewehrung schwindet nicht

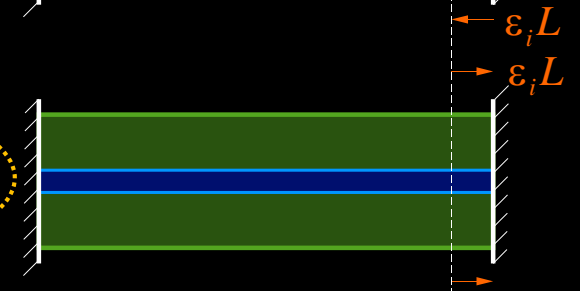


Gedankenmodell:
Schritt 1: Aufgezwungene Verkürzung $\Delta L = \varepsilon_i L$



$N < 0$

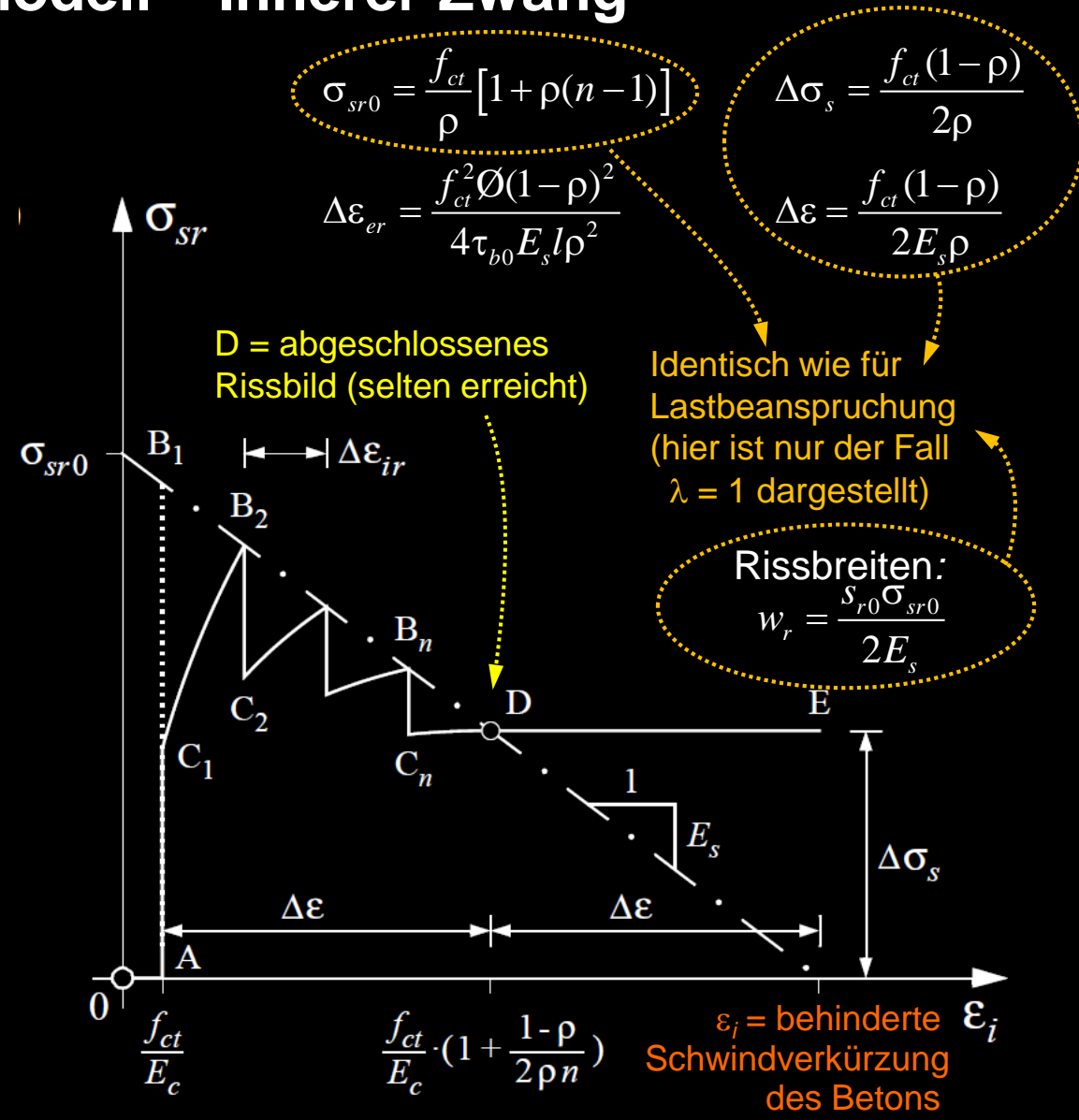
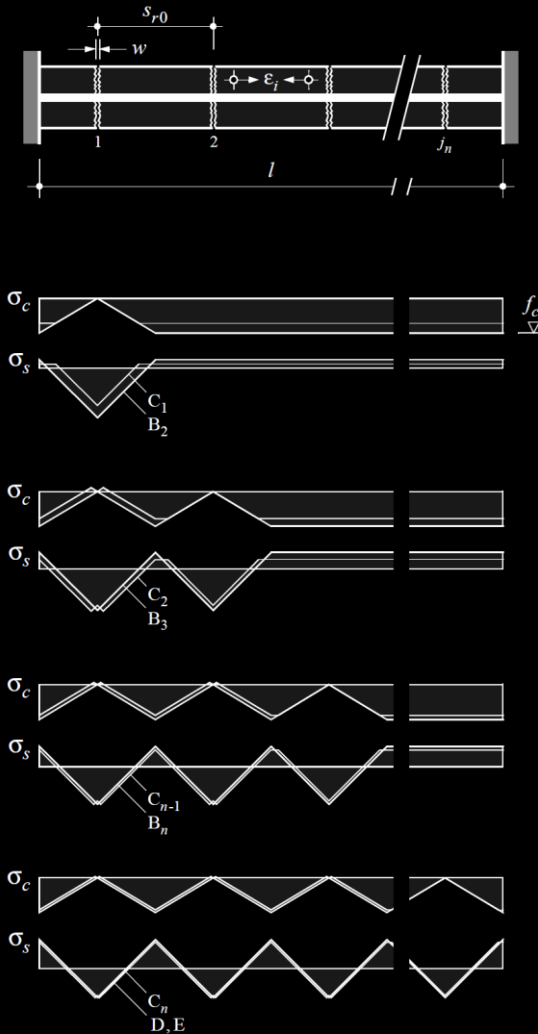
Schritt 2: Aufgezwungene Längenänderung $\Delta L = \varepsilon_i L$



Analog wie Last mit Verformungssteuerung

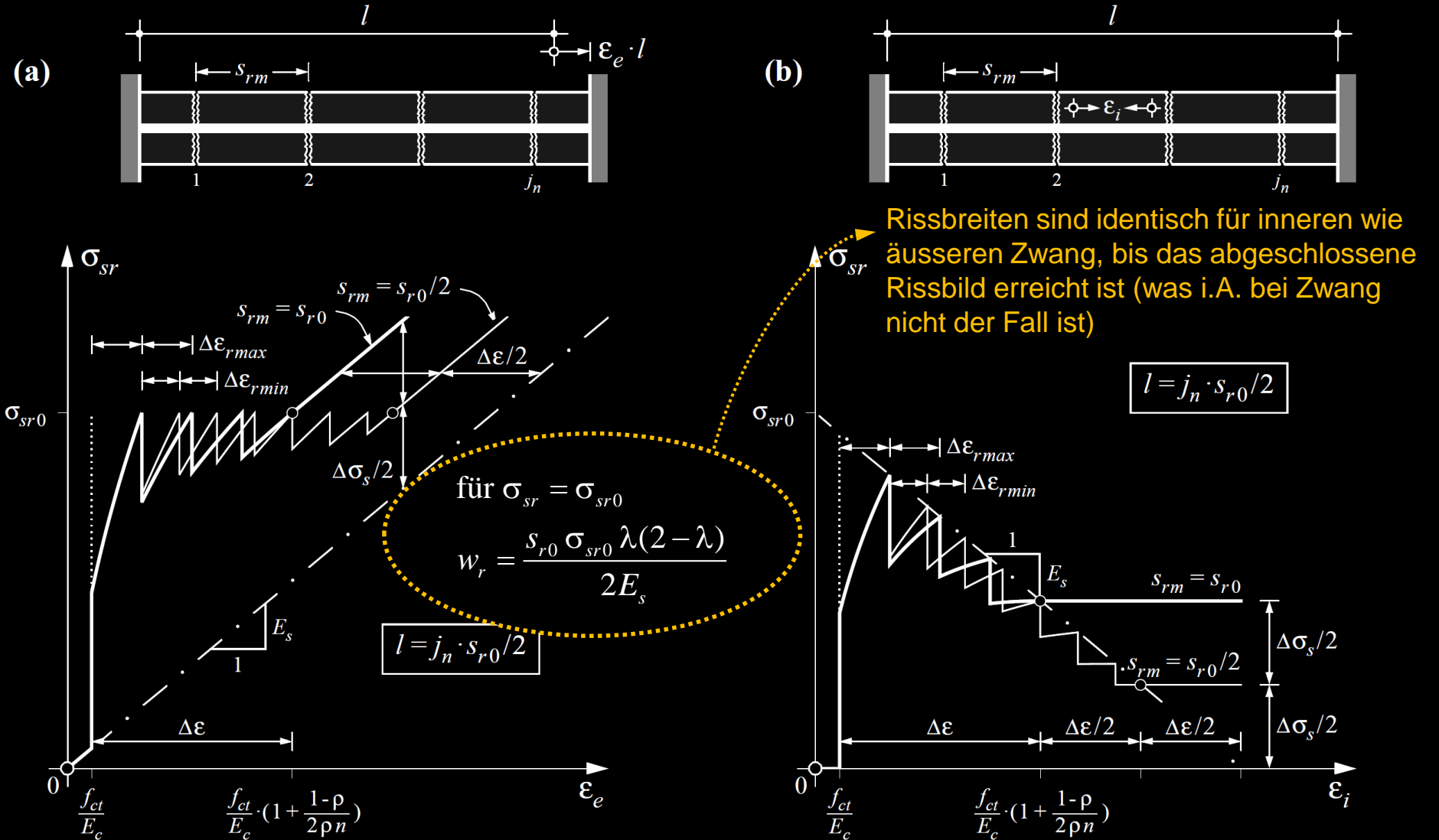
Zuggurtmodell – Innerer Zwang

- [1], Seite 3.9; [5], Seite 161ff



Zuggurtmodell – Innerer / äusserer Zwang

- [5], Seite 163, Bild 6.9



Zuggurtmodell – Mindestbewehrung

Eine Mindestbewehrung ([1], Seite 3.10f) ist vorzusehen, um

- einen **Sprödbbruch** beim Auftreten des ersten Risses zu vermeiden (SIA 262, Fig. 31 und Tab. 17), also $\sigma_{sr0} < f_{sch}$, mit σ_{sr0} = Stahlspannung im Riss bei Rissbildung:

$$\sigma_{sr0} = f_{ctd} \left(\frac{1}{\rho} - 1 + n \right) \leq f_{sd} \rightarrow \rho_{min} = \frac{f_{ctd}}{f_{sd} - f_{ctd}(n-1)} \text{ mit } f_{ctd} = \text{ Bemessungswert von } f_{ct}$$

Nachweis nach SIA 262 Ziff. 4.4.1 → je nach Fall nach Ziff. 4.4.1.3 und 4.4.1.4:

Normalfall: $f_{ctd} = k_t f_{ctm}$, mit $k_t = \frac{1}{1+0.5t}$ (t: Bauteilabmessung in m)

Zwang (*): $f_{ctd} = k_t f_{ctk0.95}$, mit $f_{ctk0.95} = 1.3 f_{ctm}$ = oberer charakteristischer Wert von f_{ct}

(*) wenn ein hoher Wert von f_{ct} eines Bauteils ungünstig für angrenzende Bauteile ist

- ein ausreichendes **Verformungsvermögen** sicherzustellen
→ Regeln für die konstruktive Durchbildung (maximale Stababstände etc.)
- die **Rissbreiten** auf akzeptable Werte zu beschränken
→ Begrenzung von σ_{sr} (SIA 262 Korrigenda C1, Fig. 31 / Tab. 17 oder direkt mit Zuggurtmodell)

NB: Der Effekt der feineren Rissverteilung bei Verwendung kleiner Durchmesser der Bewehrung ist in der SIA 262 seit der Korrigenda C1 (2017) erfasst, dafür wird der aus dem Zuggurtmodell nicht direkt ersichtliche Einfluss des Abstands der Bewehrungsstäbe seither nicht mehr berücksichtigt.

Normalkraft – Zusammenfassung

1. Die Ermittlung des Bruchwiderstands unter Normalkraft ist sehr einfach. Der Zugwiderstand entspricht demjenigen des Betonstahls (Gleichgewicht im Riss, $\sigma_c = 0$), der Druckwiderstand der Summe der Widerstände von Beton und Betonstahl.
2. Mit einer Umschnürungsbewehrung können der Druckwiderstand und insbesondere die Duktilität bei Druckbeanspruchung signifikant erhöht werden. Eine Umschnürungsbewehrung ist etwa doppelt so wirksam wie eine Druckbewehrung.
3. Bei Zugbeanspruchung unterscheidet man «Zustand I» (ungerissen), «Zustand II» (gerissen elastisch) und «Zustand III» (plastische Verformungen). Diese Unterscheidung findet auch bei Biegung Anwendung.
4. Das Verhalten im Zustand I, und näherungsweise für mässige Druckbeanspruchung, kann mit der Wertigkeit $n = E_s/E_c$, $\sigma_s = n\sigma_c$ («n-Theorie») untersucht werden.
5. Das Verhalten im Zustand II kann mit dem Zuggurtmodell analytisch (und somit sehr anschaulich) mit ausreichender Genauigkeit untersucht werden, wobei der Fall Zwang sehr praxisrelevant ist. Folgerungen:
 - kleine Rissweiten resultieren für kleine \emptyset , grosse ρ und kleine f_{ct} (hohe f_{ct} ungünstig!)
 - Rissweiten sind für inneren und äusseren Zwang bei $\varepsilon_f = \varepsilon_e$ identisch
 - unter äusserem Zwang wird das abgeschlossene Rissbild selten erreicht (möglich z. Bsp. bei grossen Setzungen eines Auflagers), unter innerem Zwang praktisch nie.
5. Das Verhalten im Zustand III, insbesondere die Duktilität, kann ebenfalls mit dem Zuggurtmodell untersucht werden. Folgerungen:
 - (zu) guter Verbund wirkt sich ungünstig auf die Duktilität aus
 - Betonstahl mit zu geringer Duktilität beeinträchtigt das Verformungsvermögen stark

NB: Es wurden ausschliesslich Zug- und Druckglieder mit symmetrischer Bewehrung untersucht. Das Verhalten bei nicht symmetrischer Bewehrung ist komplizierter. Es kann analog zu «Biegung und Normalkraft» (mit $M = 0$) untersucht werden.