

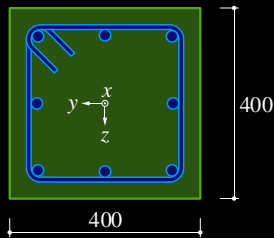
# 3 Stabtragwerke

## 3.1 Normalkraft

(schlaff bewehrte Zug- und Druckglieder)

## Verhalten unter Normalkraft

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) →  $N$ - $\varepsilon$ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Bügelbewehrung  $\varnothing 12$  ( $c_{nom} = 35$  mm)

Längsbewehrung 8  $\varnothing 26$

NB: Durchmesser  $\varnothing$  immer in mm

- Beton C30/37:  $f_{cd} = 20$  MPa  
 $f_{cm} = 2.9$  MPa  
 $E_{cm} = 33.6$  GPa
- Betonstahl B500B:  $f_{sd} = 435$  MPa  
 $E_s = 205$  GPa

mit:

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 30 \text{ MPa} / 1.5 \quad \text{mit } \eta_c = \eta_t = 1$$

$$f_{sd} = f_{sk} / \gamma_s = 500 \text{ MPa} / 1.15$$

$$E_{cm} = k_E \cdot \sqrt[3]{f_{cm}} \quad \text{mit } k_E = 10'000 \text{ (Alluvialkies)}$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa}$$

(SIA 262, Ziff. 2.3, 3.1 und 3.2)

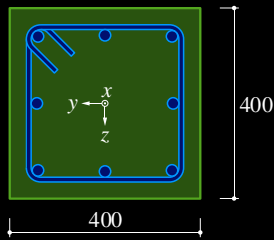
Das Verhalten unter Normalkraft wird auf den folgenden Seiten exemplarisch anhand eines Bauteils mit quadratischem Querschnitt (siehe Abbildung) untersucht.

Die Längsbewehrung (parallel zur Stabachse, orthogonal zum Querschnitt) besteht aus 8 Stäben mit einem nominellen Durchmesser von 26 mm. Der Vollständigkeit halber ist auch die Bügelbewehrung angegeben (Bügel mit einem nominellen Durchmesser von 12 mm), obschon die Bügel das Tragverhalten unter Normalkraft – bei Vernachlässigung der Umschnürungswirkung, welche erst später untersucht wird, nicht beeinflussen.

Die Materialkennwerte werden in allen Beispielen der Vorlesung nach SIA 262 verwendet. Der Elastizitätsmodul des Betons hängt dabei grundsätzlich vom Typ der Gesteinskörnung ab. Im Beispiel wurde ein Beiwert  $k_E = 10'000$  eingesetzt; allgemein kann für Alluvialkies  $k_E = 10'000 \dots 12'000$ , für gebrochenen Kalk  $k_E = 8'000 \dots 10'000$  und für glimmerhaltiges Gestein  $6'000 \dots 8'000$  angenommen werden.

## Verhalten unter Normalkraft – Zug

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) →  $N$ - $\varepsilon$ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Gleichgewicht und Verträglichkeit, starrer Verbund

$$N_{Ed} = N_c + N_s$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon$$

Elastisches Verhalten unter Zug bis Rissbildung

$$N_c = \varepsilon E_c A_c (1 - \rho) \quad \text{für } \varepsilon < f_{cm} / E_c$$

$$N_s = \varepsilon E_s A_s = \varepsilon n E_c \rho A_c \quad \text{für } \varepsilon < f_{sd} / E_s$$

$$N_{Ed} = \varepsilon E_c A_c (1 + \rho(n - 1)) \rightarrow \text{ungerissener QS}$$

Annahmen:

- starrer Verbund im ungerissenen Zustand
- keine Mitwirkung des Betons nach der Rissbildung

mit:  $n = E_s / E_c = 205 / 33.6 = 6.1$

$$\rho = A_s / A_c = 0.027$$

$$A_c = 400 \cdot 400 = 160'000 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 8 \cdot \pi / 4 \cdot 26^2 = 4'247 \text{ mm}^2$$

Wertigkeit (Betonstahl)

(geometrischer) Bewehrungsgehalt

Bruttoquerschnitt Beton (inkl.  $A_s$ )

Querschnittsfläche Längsbewehrung

Zunächst wird das Verhalten unter zentrischer Zugbeanspruchung untersucht.

Im ungerissenen Zustand (vor der Rissbildung) wird angenommen, dass zwischen Beton und Bewehrung starrer Verbund herrscht, was gleichbedeutend mit der Annahme ist, dass Beton und Bewehrung die gleiche Längsdehnung aufweisen.

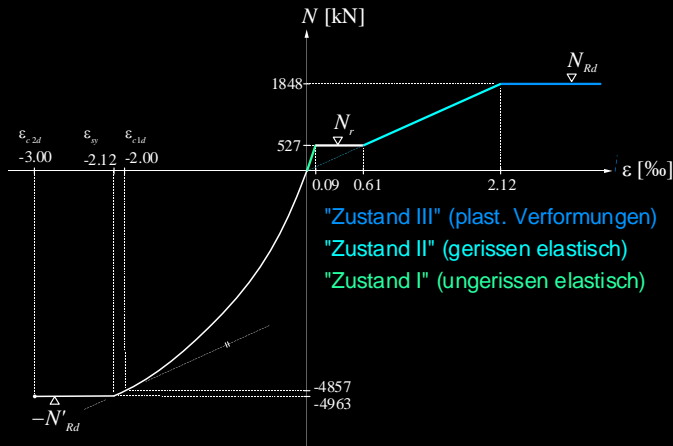
Die aufgebrachte Normalkraft entspricht der Summe der Normalkräfte im Beton und in den Bewehrungsstäben («Stahlbeton = Beton + Bewehrung»). Für linear elastisches Verhalten von Beton und Bewehrung folgt im ungerissenen Zustand aus der Annahme der Dehnungsgleichheit, dass die Spannungen in der Bewehrung um den Faktor  $n = E_s / E_c$  grösser sind als die Spannungen im Beton. Daraus lassen sich die Spannungen in Beton und Bewehrung einfach ermitteln.

### Ergänzende Bemerkungen

- Der geometrische Bewehrungsgehalt  $\rho$  ist eine wichtige Kenngrösse im Stahlbeton. Er wird im Rahmen dieser Vorlesung stets auf den Bruttoquerschnitt des Betons bezogen.
- Das Verhalten im ungerissenen Zustand kann mit ideellen Querschnittswerten (siehe Baustatik) untersucht werden, mit der Wertigkeit der Bewehrung  $n = E_s / E_c$  (Beton als Bezugswert).
- Der ungerissene Zustand wird auch als «Zustand I» bezeichnet, der gerissene Zustand als «Zustand II». Fließt die Bewehrung, spricht man vom «Zustand III».
- Bei nicht symmetrischen Querschnitten und/oder Bewehrungen herrscht zentrischer Zug vor der Rissbildung, wenn die Normalkraft im Schwerpunkt des ideellen Querschnitts angreift.

## Verhalten unter Normalkraft – Zug

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) →  $N$ - $\varepsilon$ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Ungerissener QS (starrer Verbund) für  $0 < \varepsilon < \varepsilon_r = f_{ctm} / E_c$

Rissnormalkraft bei  $\varepsilon = \varepsilon_r = f_{ctm} / E_c = 0.09\text{‰}$

$$N_r = f_{ctm} A_c (1 + \rho(n-1))$$

$$= 2.9 \cdot 160'000 \cdot (1 + 0.027 \cdot (6.1 - 1)) = 527 \text{ kN}$$

Elastische Verformung der Bewehrung (ohne Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen Rissen) für  $N_r / N_{Rd} \cdot \varepsilon_{sy} < \varepsilon < \varepsilon_{sy}$

$$N_{Ed} = \varepsilon E_s A_s$$

Zugwiderstand (Betonstahl fließt) ab  $\varepsilon_{sy} = f_{sd} / E_s = 2.12\text{‰}$

$$N_{Rd} = f_{sd} A_s = 435 \cdot 4217 = 1'848 \text{ kN}$$

NB: Berücksichtigung Beton zwischen Rissen («tension stiffening»), siehe Zuggurtmodell!

Wird die Zugfestigkeit des Betons überschritten, reißt der Querschnitt. Dabei fällt die Steifigkeit markant ab, und im Beton gespeicherte elastische Energie wird freigesetzt, was sich in einer schlagartigen Verlängerung des Bauteils bei Rissbildung manifestiert. Ab diesem Zeitpunkt wird angenommen, dass der Beton keine Zugspannungen mehr überträgt, so dass die gesamte Normalkraft durch die Bewehrung aufgenommen wird.

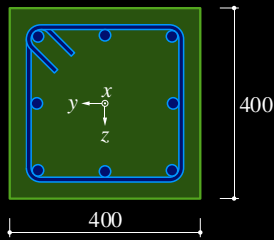
Die Spannungen in der Bewehrung im gerissenen Zustand können einfach ermittelt werden. Erreichen diese Spannungen die Fließgrenze der Bewehrung, nimmt die Verlängerung zu, ohne dass die Normalkraft anwächst. Der Bruch tritt ein, wenn die Bruchdehnung des Betonstahls erreicht wird (Zerreißen der Bewehrung).

### Ergänzende Bemerkungen

- Wird das Bauteil nach dem Überschreiten der Risszugkraft entlastet und wiederbelastet, entfällt der initiale, steifere ungerissene Ast der Last-Verformungsbeziehung. Stattdessen ist das Verhalten bis zum Erreichen der Fließzugkraft linear elastisch, mit der Steifigkeit der Bewehrung (Zugversteifung siehe später).
- Für sehr kleine Rissöffnungen überträgt der Beton im Riss Zugspannungen (siehe Materialverhalten, «Fictitious Crack Model»). Diese sind jedoch für die Bemessung irrelevant und werden vernachlässigt.
- In obigen Ausführungen werden die zugversteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen sowie die Verfestigung des Betonstahls vernachlässigt; nähere Angaben dazu siehe Zuggurtmodell.

## Verhalten unter Normalkraft – Druck

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) →  $N$ - $\varepsilon$ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Gleichgewicht und Verträglichkeit, starrer Verbund

$$N_{Ed} = N_c + N_s$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon$$

Elastisch-plastisches Verhalten bei Druckbeanspruchung

- Beton gemäss SIA 262 Figur 12
- Stahl gemäss SIA 262 Figur 16

mit:  $n = E_s / E_c$  Wertigkeit (Betonstahl)  
 $\rho = A_s / A_c$  (geometrischer) Bewehrungsgehalt  
 $A_c$  Bruttoquerschnitt Beton (inkl.  $A_s$ )

NB: Näherung für kleine Normalkraft (bis ca.  $\sigma_c = f_c/3$ ):

$$N_c = \varepsilon E_c A_c (1 - \rho)$$

$$N_s = \varepsilon E_s A_s = \varepsilon n E_c \rho A_c$$

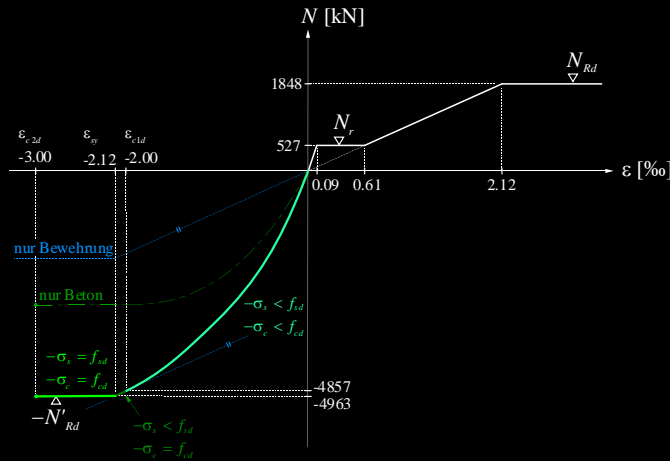
$$N_{Ed} = \varepsilon E_c A_c (1 + \rho(n - 1))$$

Das Verhalten unter Druckbeanspruchung kann ähnlich untersucht werden wie dasjenige unter Zugbeanspruchung im ungerissenen Zustand I. Wiederum wird angenommen, dass zwischen Beton und Bewehrung starrer Verbund herrscht, was gleichbedeutend mit der Annahme ist, dass Beton und Bewehrung die gleiche Längsdehnung aufweisen.

Für kleine Beanspruchungen (bis zu etwa einem Drittel der Betondruckfestigkeit) kann in guter Näherung angenommen werden, dass sich der Beton linear elastisch verhält. Es resultieren damit analoge Beziehungen wie für Zugbeanspruchung im ungerissenen Zustand I.

## Verhalten unter Normalkraft – Druck

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) →  $N$ - $\epsilon$ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Beton erreicht Druckfestigkeit bei  $\epsilon = -\epsilon_{c1d} = -2\text{‰}$

$$\begin{aligned} N_{Ed} &= -f_{cd} \cdot A_c (1 - \rho) - \epsilon_{c1d} E_s A_s \\ &= -20 \cdot 160'000 \cdot (1 - 0.027) - 0.002 \cdot 205 \cdot 10^3 \cdot 4'247 \\ &= -4'857 \text{ kN} \end{aligned}$$

Betonstahl erreicht Fließgrenze bei  $\epsilon = -f_{sd}/E_s = -2.12\text{‰}$

$$\begin{aligned} N_{Ed} &= -N'_{Rd} = -f_{cd} A_c (1 - \rho) - f_{sd} A_s \\ &= -20 \cdot 160'000 \cdot (1 - 0.027) - 435 \cdot 4'247 = -4'963 \text{ kN} \end{aligned}$$

→ Bemessungswert Druckwiderstand  $N'_{Rd}$  erreicht

→ Normalkraft konstant bis  $\epsilon = -\epsilon_{c2d} = -3\text{‰}$   
(rechnerischer Bruch)

Für höhere Beanspruchungen verhält sich der Beton nicht mehr linear elastisch. Das Normalkraft-Stauchungs-Verhalten kann trotzdem sehr einfach untersucht werden, indem für eine gegebene Dehnung (negative Dehnung = Stauchung) die Spannungen in Beton und Bewehrung aus den jeweiligen Stoffgesetzen ermittelt, über die Querschnittsflächen integriert und summiert werden («Stahlbeton = Beton + Bewehrung»).

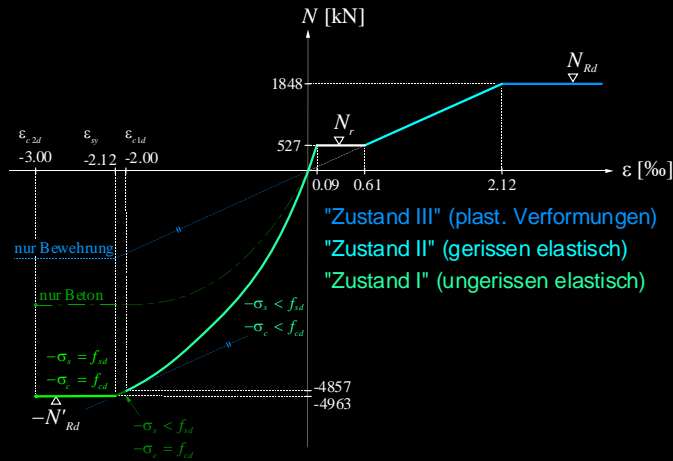
In der Abbildung ist dies für charakteristische Punkte der Kennlinien von Betonstahl (Erreichen der Fließgrenze bei  $\epsilon_s = -2.12\text{‰}$ ) und Beton (Erreichen der Druckfestigkeit bei  $\epsilon_c = -\epsilon_{c1d} = -2\text{‰}$ , Bruch bei  $\epsilon_c = -\epsilon_{c2d} = -3\text{‰}$ ) dargestellt.

### Ergänzende Bemerkung

- Die verwendete Kennlinie des Betons entspricht den Angaben der Norm SIA 262. Die dabei gegenüber unbewehrtem Beton im Zylinderdruckversuch (Bruch bei  $\epsilon_c \approx -2\text{‰}$ ) verwendete grössere Bruchstauchung von  $\epsilon_{c2d} = 3\text{‰}$  basiert auf Beobachtungen in Versuchen: Durch die vorhandene Bewehrung (insbesondere auch Querbewehrung) wird die Duktilität des Betons signifikant erhöht, siehe Umschnürungswirkung.

## Verhalten unter Normalkraft – Druck

Beispiel 1 ([1], Seite 3.2f) →  $N$ - $\varepsilon$ -Diagramm für quadratischen Querschnitt



Ermittlung der Bruchwiderstände sehr einfach:

$N_{Rd}$  (Zug) → nur Betonstahl wirksam

$N'_{Rd}$  (Druck) → Summe (Beton + Betonstahl)

Verhalten im Zustand I (Zug) und näherungsweise im Gebrauchszustand unter Druck:

→ Untersuchung mit Wertigkeit  $n = E_s/E_c$ ,  $\sigma_s = n\sigma_c$

Verhalten im Zustand II (Zug)

→ Untersuchung mit Zuggurtmodell


Die dargestellte Last-Verformungsbeziehung stimmt für Druckbeanspruchung gut mit dem tatsächlichen Verhalten überein. Für Zugbeanspruchung ist sie nach der Rissbildung (Zustand II) zu weich, da die zugversteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen vernachlässigt wurde (siehe Zuggurtmodell).

### Ergänzende Bemerkungen

- Die Bruchnormalkraft kann sehr einfach ermittelt werden, und zwar sowohl für Zugbeanspruchung als auch für Druckbeanspruchung; in letzterem Fall wird oft näherungsweise die Bruttoquerschnittsfläche des Betons eingesetzt,  $N_{Rd}' \approx A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{sd} = 3'200 \text{ kN} + 1'848 \text{ kN} = 5'048 \text{ kN}$ , Fehler ca. 1% klein).
- Die Rissnormalkraft kann näherungsweise unter Vernachlässigung der Bewehrung ermittelt werden ( $N_{Rd} \approx A_c \cdot f_{ctm} = 464 \text{ kN}$ , Fehler ca. 11% in Anbetracht der Streuung der Betonzugfestigkeit akzeptabel)

# Verhalten unter Normalkraft – Umschnürungswirkung

## Umschnürungswirkung

- Mit einer Umschnürungsbewehrung kann das Tragverhalten von Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung markant verbessert werden.
- In dem von einer Wendel- oder Bügelbewehrung umschnürten Kernbeton ergeben sich günstige dreiaxige Druckspannungszustände.
- Die Querdehnung des Betons aktiviert die Umschnürungsbewehrung auf Zug, wodurch im Kernbeton Querdruckspannungen aufgebaut werden.
- Nach dem Erreichen der einachsigen Betondruckfestigkeit kommt die Umschnürungsbewehrung durch den raschen Anstieg der Querdehnungen voll zum Tragen. Dabei ist jedoch von einem Abplatzen des Überdeckungsbetons auszugehen.
- Die Druckbeanspruchung kann erhöht werden, bis der Kernbeton versagt, Längsbewehrungsstäbe ausknicken oder Bügel zerrissen werden.
- Massgebender Druckwiderstand → grösserer der beiden folgenden Werte (jeweils inklusive Druckwiderstand der Längsbewehrung):
  - gesamter Querschnitt mit einachsiger Druckfestigkeit des Betons
  - umschnürter Querschnitt mit erhöhter Druckfestigkeit des Betons
- Ein Abplatzen des Überdeckungsbetons im Gebrauchszustand ist zu vermeiden
- Traglastversuche von Prof. Dr. Albin Kenel (HSLU) an der HSR Rapperswil [Blumenthal, G. Traglastversuche an hochfesten Stahlbetonstützen, 2011]. 

Wie im Kapitel 2 *Materialverhalten* erläutert, bewirkt ein allseitiger Querdruck eine starke Erhöhung der Druckfestigkeit des Betons, und die Bruchstauchung nimmt nochmals ausgeprägter zu. Zudem ist die Querdehnung des Betons (dilatantes Bruchverhalten) ausreichend, um eine Umschnürungsbewehrung zu aktivieren, d.h. der Querdruck muss nicht «aktiv» aufgebracht werden, sondern es reicht aus, wenn eine Umschnürungsbewehrung mit geeigneter Geometrie vorgesehen wird.

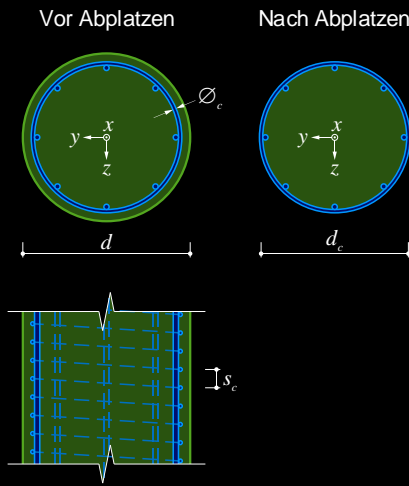
Dies macht man sich im Stahlbetonbau bei Bauteilen oder Tragwerksbereichen mit hoher Druckbeanspruchung zunutze (Druckglieder, Krafteinleitungen, Spanngliedverankerungen, ...).

Zur Veranschaulichung des Phänomens des Abplatzens dient das Video zu den Traglastversuchen an hochfesten Stützen, welche Prof. Kenel an der HSR durchgeführt hat. Die Versuche zeigen eindrücklich, wie explosiv das Abplatzen des Überdeckungsbetons bei hochfesten Bauteilen sein kann.

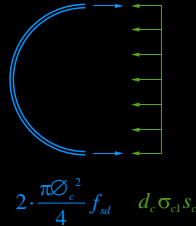


# Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

## Umschnürungswirkung – Kreisquerschnitte



Für  $s_c \ll d_c$  folgt der Querdruck (auch «Manteldruck») auf Bemessungsniveau nach der Kesselformel:



$$\sigma_{cy} = \sigma_{cz} = \sigma_{c1} = -\frac{\pi \varnothing_c^2 f_{sd}}{2 d_c s_c}$$

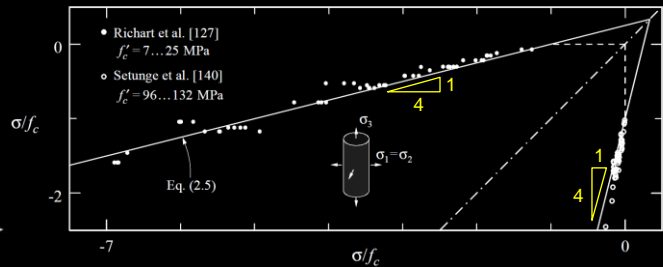
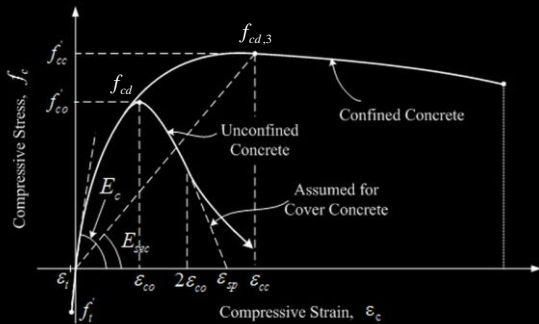
Nachfolgend wird vorerst  $s_c \ll d_c$  angenommen. Effektiv ist bei endlicher Ganghöhe der äussere Querschnittsbereich nicht wirksam umschnürt. Die Berücksichtigung (nach SIA 262 näherungsweise mit einem Abminderungsfaktor  $(1 - s_c/d_c)$ ) folgt später.

Der Querdruck kann bei kreisförmigen Querschnitten sehr einfach nach der Kesselformel ermittelt werden, wenn die diskrete Querbewehrung (Bügel mit endlichem Abstand resp. Spiralbewehrung mit endlicher Ganghöhe) gedanklich durch eine äquivalente, gleichmässig entlang der Bauteilachse verteilte Bewehrung ersetzt wird. Die dabei getroffene Annahme, dass die Fließgrenze der Querbewehrung erreicht wird, kann durch Versuche bestätigt werden (siehe Kapitel 2 *Materialverhalten*).

Der Einfluss der diskreten Anordnung der Querbewehrung wird später erläutert.

## Verhalten von Beton auf Druck

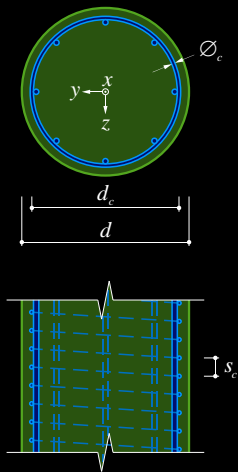
- Druckfestigkeit wird durch dreiachsige Beanspruchung stark erhöht
  - Näherungsweise gilt  $f_{c3} \cong f_c - 4 \sigma_{c1}$  (mit  $\sigma_{c3} \leq \sigma_{c1} = \sigma_{c2}$ )
  - Querbewehrung wirkt wie Querdruck (wirksamer als Längsbewehrung !)
- (Vorzeichen: Druckfestigkeit positiv, Druckspannung negativ)



Wie in Kapitel 2 *Materialverhalten* erläutert, entspricht die Zunahme der Druckfestigkeit etwa dem vierfachen Wert des (kleinsten) Querdrucks, und die Bruchstauchung nimmt nochmals etwa fünfmal so stark zu.

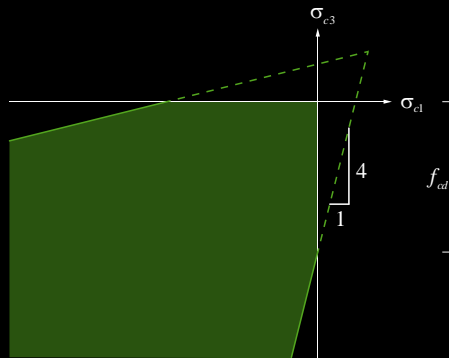
## Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

### Umschnürungswirkung – Kreisquerschnitte



Mit der Fließbedingung von Coulomb und  $\tan\phi = 3/4$  folgt:

$$f_{cd3} = f_{cd} + 4 \cdot \sigma_{c1} = f_{cd} + \frac{2 \cdot \pi \cdot \varnothing_c^2 \cdot f_{sd}}{d_c \cdot s_c}$$



Neben dem Querdruck wird die Druckfestigkeit eines Stahlbetonbauteils natürlich auch durch die Längsbewehrung erhöht. Die Längsbewehrung ist jedoch deutlich weniger wirksam als eine Umschnürungsbewehrung, siehe folgende Seite.

## Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

### Umschnürungswirkung – Kreisquerschnitte

Die mittlere Bruchstauchung nimmt mit dem Querdruck ebenfalls annähernd linear zu, aber rund fünfmal stärker als die Druckfestigkeit (günstig für Duktilität):

$$\varepsilon_{cd3} = 0.002 \cdot \left( \frac{5f_{cd3}}{f_{cd}} - 4 \right)$$

Der Querschnittswiderstand beträgt (weiterhin mit  $s_c \ll d_c$ ):

$$N'_{Rd} = \left( \frac{d_c^2 \pi}{4} - A_{sx} \right) f_{cd3} + A_{sx} f_{sd} = \frac{d_c^2 \pi}{4} \left( f_{cd} + f_{sd} \left[ 2\rho_c + \rho_x \left( 1 - 2\rho_c - \frac{f_{cd}}{f_{sd}} \right) \right] \right)$$

$$\rho_x = \frac{4A_{sx}}{\pi d_c^2} \quad \text{Längsbewehrungsgehalt (bez. Kernbetonvolumen)}$$

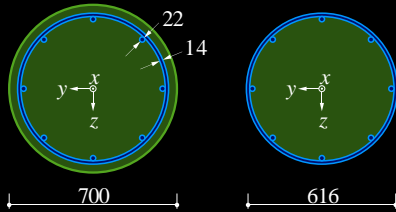
$$\rho_c = \frac{\pi \varnothing_c^2}{d_c s_c} \quad \text{Spiralbewehrungsgehalt (bez. Kernbetonvolumen)}$$

Die Spiralbewehrung ist demnach etwa doppelt so wirksam wie die Längsbewehrung.

Wird eine Umschnürungswirkung in Rechnung gestellt ist davon auszugehen, dass die Bewehrungsüberdeckung abplatzt (nur mit effektiv umschnürten Betonquerschnitt rechnen!).

## Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Beispiel ([1], 3.24), Umschnürungswirkung bei einem Kreisquerschnitt ( $s_c \ll d_c$ )



- Stahlbetonstütze,  $d = 700$  mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 12 Längsstäbe  $\varnothing = 22$  mm,  $A_{sx} = 12 \cdot 380 = 4'560$  mm<sup>2</sup>
- Spiralbewehrung  $\varnothing_c = 14$  mm, Ganghöhe  $s_c = 75$  mm
- Betondeckung  $c_{nom} = 35$  mm
- Einachsige Druckfestigkeit (bezogen auf QS ohne Abplatzen!)

$$N_{Rd} = \frac{700^2 \pi}{4} \cdot 20 + 4'560 \cdot (435 - 20) = 9.6 \text{ MN}$$

Erhöhung der Druckfestigkeit infolge Umschnürungswirkung (triaxialer Spannungszustand, bezogen auf reduzierten QS):

$$d_c = d - 2c_{nom} - \varnothing_c = 700 - 2 \cdot 35 - 14 = 616 \text{ mm}$$

$$f_{cd3} = 20 + \frac{2\pi \cdot 14^2 \cdot 435}{616 \cdot 75} = 31.6 \text{ N/mm}^2 = 158\% \cdot f_{cd}$$

$$N'_{Rd} = \frac{616^2 \pi}{4} \cdot 31.6 + 4'560(435 - 31.6) = 11.3 \text{ MN} = 118\% \cdot N_{Rd}$$

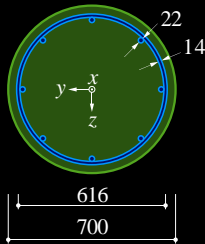
$$\varepsilon_{cd3} = 0.002 \cdot \left( \frac{5 \cdot 31.6}{20} - 4 \right) = 7.8 \text{ ‰}$$

N.B.: Einfluss der Ganghöhe: Reduktion um ca. 5%, siehe nächste Folie.

Im Beispiel ist der Einfluss der Ganghöhe nicht berücksichtigt; bei einer Bemessung ist dies selbstverständlich nicht zulässig.

## Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Beispiel ([1], 3.24), Umschnürungswirkung nach SIA 262 (endliche Ganghöhe  $s_c$ )



- Stahlbetonstütze,  $d = 700$  mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 12 Längsstäbe  $\varnothing = 22$  mm,  $A_{s\ell} = 12 \cdot 380 = 4'560$  mm<sup>2</sup>
- Spiralbewehrung  $\varnothing_c = 14$  mm, Ganghöhe  $s_c = 75$  mm
- Betondeckung  $c_{nom} = 35$  mm
- Mechanischer Bewehrungsgehalt  $\omega = \frac{A_s}{A_c} \cdot \frac{f_{sd}}{f_{cd}} = \rho \cdot \frac{f_{sd}}{f_{cd}}$

$$\omega_c = \frac{A_{sc} f_{sd}}{s_c d_c f_{cd}} = \frac{2 \cdot 154 \cdot 435}{75 \cdot 616 \cdot 20} = 0.145$$

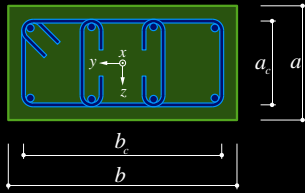
$$\sigma_1 = -\omega_c f_{cd} \left( 1 - \frac{s_c}{d_c} \right) = -0.145 \cdot 20 \cdot \left( 1 - \frac{75}{616} \right) = -2.55 \text{ N/mm}^2$$

$$k_c = 1 - 4 \frac{\sigma_1}{f_{cd}} = 1 + 4 \cdot \frac{2.55}{20} = 1.51 \quad \rightarrow N'_{Rd} = 10.8 \text{ MN}$$

Eine endliche Ganghöhe (resp. ein endlicher Bügelabstand) kann bei Kreisquerschnitten mit einem Korrekturfaktor berücksichtigt werden. Dieser Korrekturfaktor kann bei Rechteckquerschnitten mit einem einfachen Spannungsfeld begründet werden und wird auch durch Versuche bestätigt.

## Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

### Umschnürungswirkung – Rechteckquerschnitte



Ein äusserer umlaufender Querschnittsbereich der Breite  $s_d/2$  wird als nicht wirksam umschnürt betrachtet. Die Überlegungen vom Kreisquerschnitt können sinngemäss übernommen werden.

$$\rho_t = \text{Min} \left\{ \frac{A_{sv}}{a_c s_c}, \frac{A_{sz}}{b_c s_c} \right\}$$

$$N'_{Rd} = a_c b_c f_{cd} + (a_c - s_c)(b_c - s_c) \rho_t f_{sd} \cdot 4 + A_{sx} (f_{sd} - f_{cd})$$

$$f_{cd3} = f_{cd} + 4 \rho_t f_{sd} \left( 1 - \frac{s_c}{a_c} \right) \left( 1 - \frac{s_c}{b_c} \right) \quad \varepsilon_{cd3} = 0.002 \cdot \left( \frac{5 f_{cd3}}{f_{cd}} - 4 \right)$$

N.B.: Einfluss der Ganghöhe lässt sich beim Rechteckquerschnitt mit einfachem Spannungsfeld erklären

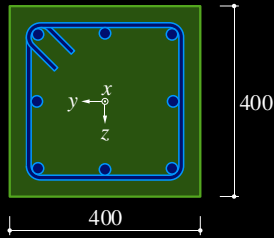
Bei Rechteckquerschnitten ist der Querdruck in beiden Hauptachsenrichtungen in der Regel unterschiedlich gross.

Gemäss der Bruchbedingung von Coulomb (siehe Kapitel 2 *Materialverhalten*) ist die mittlere Hauptspannung ohne Einfluss auf die Versagenslast; massgebend für die Druckfestigkeitserhöhung ist somit der (betragsmässig) kleinere Querdruck.

Ein endlicher Bügelabstand kann durch Korrekturfaktoren berücksichtigt werden, welche mit einem einfachen Spannungsfeld begründet und auch durch Versuche bestätigt werden können.

## Verhalten unter Druck – Umschnürungswirkung

Beispiel ([1], 3.25), Umschnürungswirkung bei einem Rechteckquerschnitt – Einfluss der Ganghöhe



- Stahlbetonstütze,  $a = b = 400$  mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 8 Längsstäbe  $\varnothing = 26$  mm,  $A_{sx} = 8 \cdot 531 = 4'248$  mm<sup>2</sup>
- Bügelbewehrung  $\varnothing_c = 12$  mm, Abstand  $s_c = 100$  mm resp.  $s_c = 50$  mm
- Betondeckung  $c_{nom} = 35$  mm
- $N_{Rd} = 4'963$  kN (Beispiel [1], S. 3.2)

$$a_c = b_c = 400 - 2 \cdot 35 - 12 = 318 \text{ mm}$$

$$\rho_t = \frac{2 \cdot 6^2 \pi}{318 \cdot 100} = 0.71\% \quad \text{resp.} \quad \rho_t = 1.42\%$$

$$N'_{Rd}(s_c = 100 \text{ mm}) = 318^2 \cdot 20 + 218^2 \cdot 0.0071 \cdot 435 \cdot 4 + 4'248 \cdot (435 - 20) = 4'373 \text{ kN} < N_{Rd} = 4'963 \text{ kN}$$

$$N'_{Rd}(s_c = 50 \text{ mm}) = 318^2 \cdot 20 + 268^2 \cdot 0.0142 \cdot 435 \cdot 4 + 4'248 \cdot (435 - 20) = 5'563 \text{ kN} = 112\% N_{Rd}$$

- Keine Erhöhung des Querschnittwiderstands mit  $s_c = 100$  mm
- Erhöhung um 12% mit  $s_c = 50$  mm
- Die Bruchdehnung nimmt deutlich zu auf  $\varepsilon_{cd3} = 10.8$  ‰

Im Beispiel ist die Druckfestigkeit unter Berücksichtigung der Umschnürungswirkung bei einem Bügelabstand von 100 mm kleiner als die Druckfestigkeit ohne Berücksichtigung der Umschnürung. Dies, da bei Berücksichtigung der Umschnürungswirkung nur der Beton innerhalb der Bügel berücksichtigt werden darf (Annahme, dass Überdeckungsбетон abplatzt).

Bei kleinerem Bügelabstand ist dagegen die Druckfestigkeit unter Berücksichtigung der Umschnürungswirkung grösser.

Bei der Bemessung darf jeweils der grössere Wert der Druckfestigkeit (ohne Umschnürungswirkung, ganzer Querschnitt resp. mit Umschnürungswirkung, nur umschnürter Querschnitt) verwendet werden.



# Verhalten unter Zug

## Normalkraftverhalten nach Rissbildung ohne Berücksichtigung des Verbundes

- Zugversteifung («tension stiffening») = Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen vernachlässigt (nackter Stahl betrachtet), somit u.a. keine Aussage möglich zu:
  - Einfluss des Verbundes auf die Duktilität (Bruchverhalten)
  - Rissbildung und Zwängungen (Gebrauchsverhalten)
- Berücksichtigung des Verbunds für allgemeine Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen ist aufwändig (numerische Lösung Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds)
- Aufgrund der grossen Streuungen (Verbundspannungen, Rissabstände, Zugfestigkeit Beton) ist eine «exakte» Erfassung gar nicht möglich



## Zuggurtmodell (Tension Chord Model)

- Einfaches, auf mechanischen Grundlagen beruhendes Modell, das die wesentlichen Einflüsse berücksichtigt, aber trotzdem für Handrechnungen geeignet ist
- Ermöglicht fundierte Aussagen zur Duktilität von Zuggliedern
- Ermöglicht die Abschätzung von Rissabständen  $s_r$  und Rissbreiten  $w_r$
- ist Grundlage der Normbestimmungen über die Mindestbewehrung

Das Zusammenwirken von Beton und Bewehrung (der «Verbund») ist von zentraler Bedeutung für das Tragverhalten von Stahlbeton. Auf den folgenden Seiten wird das *Zuggurtmodell* vorgestellt, welches auf Arbeiten von Prof. Peter Marti und seinen Mitarbeitenden zurückgeht (siehe u.a. [5]).

Dieses auf klaren mechanischen Grundlagen basierende Modell ermöglicht es, das grundsätzlich sehr komplexe Verbundverhalten einfach, aber trotzdem mit für die meisten Anwendungen ausreichender Genauigkeit zu erfassen. Das Verbundverhalten wird dabei – wie in praktisch allen Verbundmodellen – mittels einer «nominellen Verbundspannung» erfasst, welche entlang des nominellen Stabumfangs gleichmässig verteilt angenommen wird. Dies allein ist, wie in Kapitel 2 *Materialverhalten* erläutert, eine grobe Vereinfachung.

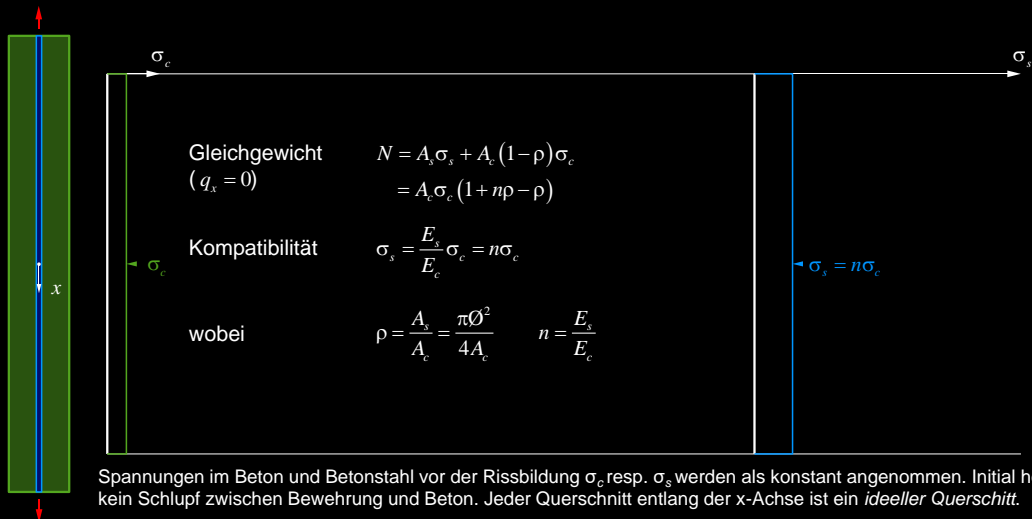
Im Vordergrund steht auf den folgenden Seiten zunächst die Erfassung der zugversteifenden Wirkung des Betons zwischen den Rissen bei Zugbeanspruchung (Lastbeanspruchung). Diese versteifende Wirkung wird in Englisch treffend als «Tension Stiffening» bezeichnet.

Anschliessend wird das Zuggurtmodell eingeführt und auf Last- sowie Zwangsbeanspruchung angewendet, wobei insbesondere das Verhalten im Gebrauchszustand (Rissbreiten) untersucht wird. Im Kapitel 3.2 erfolgt die Erweiterung für Biegebeanspruchung.

Das Zuggurtmodell eignet sich ebenfalls für die Untersuchung von Stahlbetonelementen unter ebener Beanspruchung (siehe Stahlbeton III, *Cracked Membrane Model*), vorgespannte Betonzugglieder und zyklische Beanspruchung.

## Verhalten unter Zug – Grundlagen

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_c$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\emptyset$  ([1], Seite 3.5f)



18.09.2021

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

18

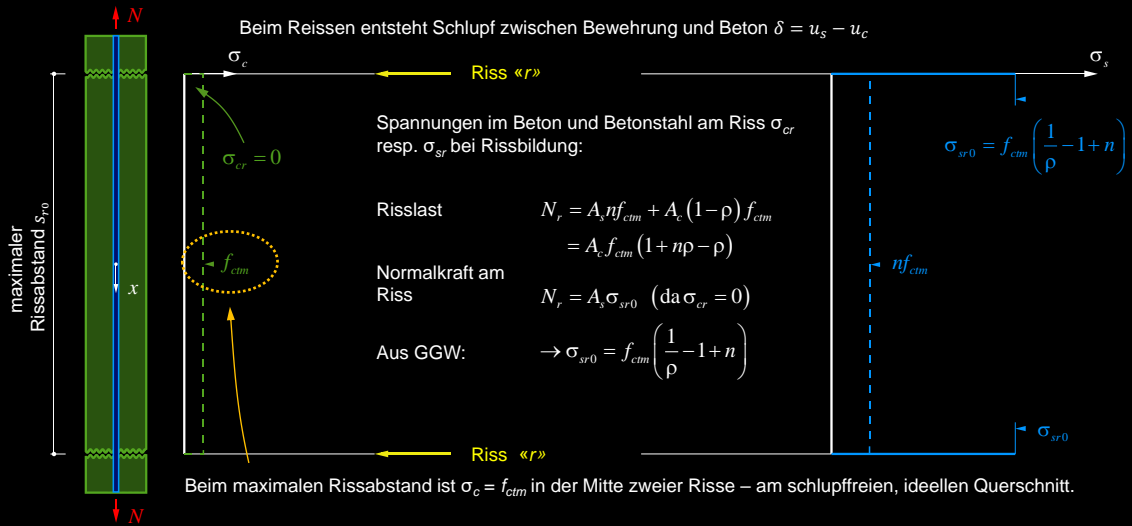
Auf den folgenden Folien wird zunächst das Verhalten eines Zuggurtes für allgemeine Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen aufgezeigt. Anschliessend wird erläutert, weshalb eine Vereinfachung sinnvoll ist und das Zuggurtmodell eingeführt. Dieses basiert auf der Annahme einer abgetreppten, starr-ideal plastischen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung.

Die Untersuchungen erfolgen an einem Zuggurtelement, welches beidseits durch einen Riss begrenzt ist («Risselement»). Das Risselement ist symmetrisch belastet (gleiche Zugkraft an beiden Enden), und die Bewehrung besteht aus einem einzelnen Stab (oder mehreren Stäben gleichen Durchmessers).

Die Risszugkraft resultiert aus den für Normalkraft (zentrischer Zug) gemachten Annahmen. Unmittelbar vor der Rissbildung betragen die Spannungen im Beton  $\sigma_c = f_{ctm}$  und in der Bewehrung  $\sigma_s = n \cdot f_{ctm}$ .

# Verhalten unter Zug – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_c$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\varnothing$  und  $N = N_r$  ([1], Seite 3.5f)



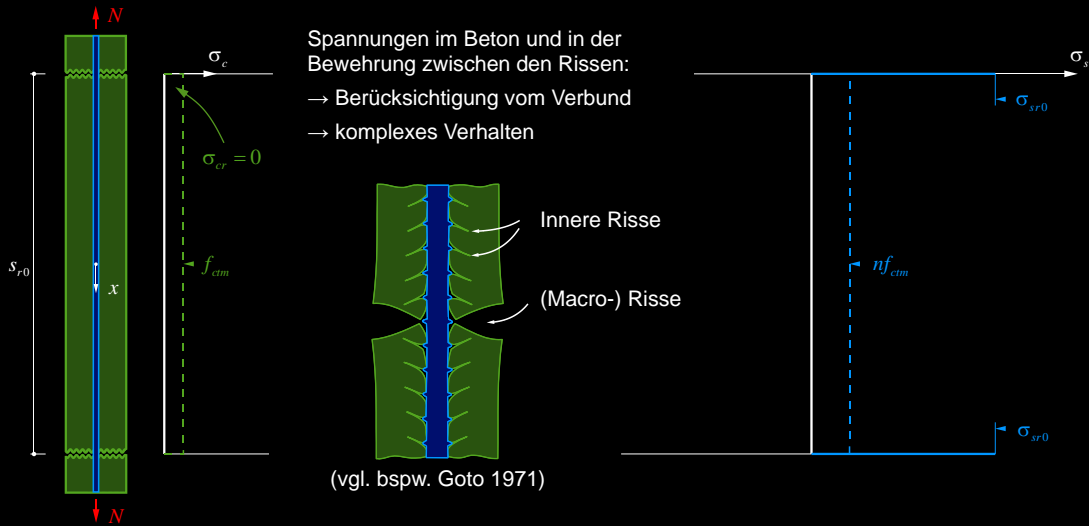
Bei der Erstrissbildung stellt sich der maximale Rissabstand  $s_{r0}$  ein (Berechnung siehe weiter hinten). Bei diesem entspricht die Betonspannung in der Mitte zwischen zwei Rissen gerade der Zugfestigkeit des Betons.

Aus Gleichgewichtsbetrachtungen lässt sich zudem sehr einfach die Stahlspannung am Riss ermitteln.

Bekannt sind damit die Spannungen am Rissquerschnitt sowie in der Mitte zweier Risse, wo ideale (d.h. schlupffreie) Querschnittsbedingungen herrschen, so dass die Stahlspannung  $n = E_s/E_c$  mal grösser ist als die Betonspannung.

## Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_g$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\varnothing$  und  $N = N_r$  ([1], Seite 3.5f)



18.09.2021

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

20

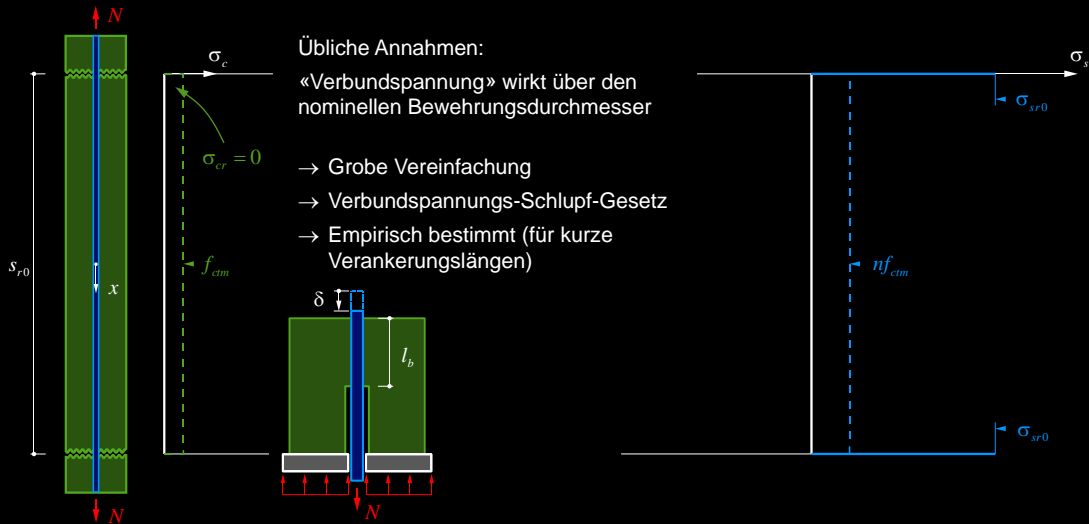
Von den Rissquerschnitten zur Risselementmitte hin nehmen die Betonspannungen zu und die Stahlspannungen ab, denn der mit dem Reißen eingetretene Schlupf aktiviert Verbundspannungen zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Beton.

Yukimasa Goto beschrieb 1971 das Rissbild auf der Basis von Versuchen, bei denen er die Versuchskörper mit Farbe injizierte und dann zersägte, so dass die Risse sichtbar wurden. Er unterschied dabei zwischen inneren Rissen, welche nicht bis zur Betonoberfläche führen, sowie Makro-Rissen.

[Goto, Y. «Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars». ACI Journal, Vol. 68, April 1971, p. 244-251.]

## Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_c$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\varnothing$  und  $N = N_r$  ([1], Seite 3.5f)



18.09.2021

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

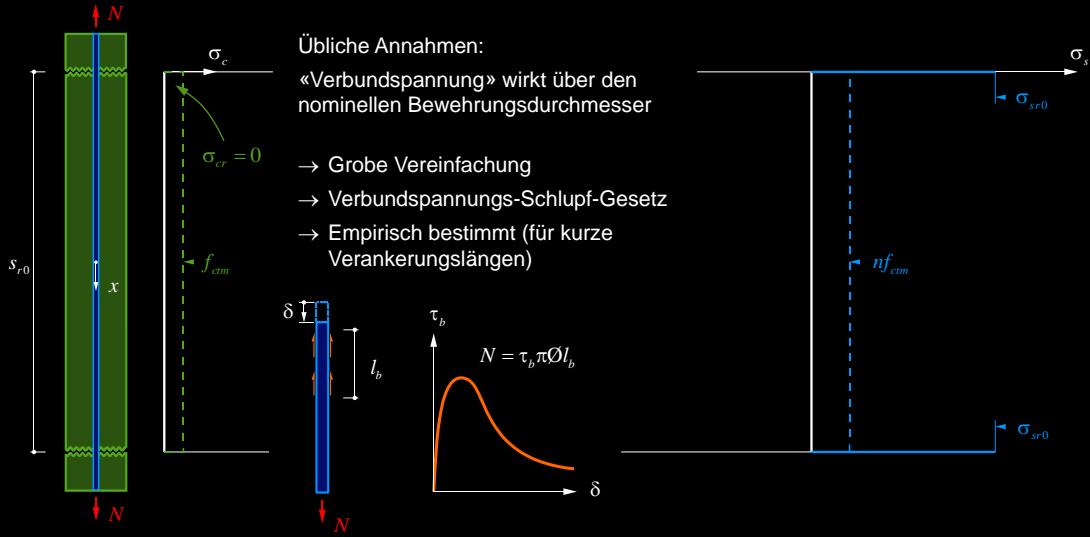
21

Das komplexe Verbundverhalten wird üblicherweise stark idealisiert, indem «nominelle Verbundspannungen» (die am nominellen Stabumfang angreifen) eingeführt werden.

Wie in Kapitel 2 *Materialverhalten* erläutert, wird das Verbundverhalten oft in Versuchen mit kurzer Verbundlänge ermittelt, siehe Abbildung links. Daraus erhält man mit der Annahme einer nominellen Verbundspannung sogenannte Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen, siehe Abbildung in der Mitte. Damit gelingt es, das Verbundverhalten analytisch zu erfassen (insbesondere: Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds, siehe Kapitel 2 *Materialverhalten*).

# Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

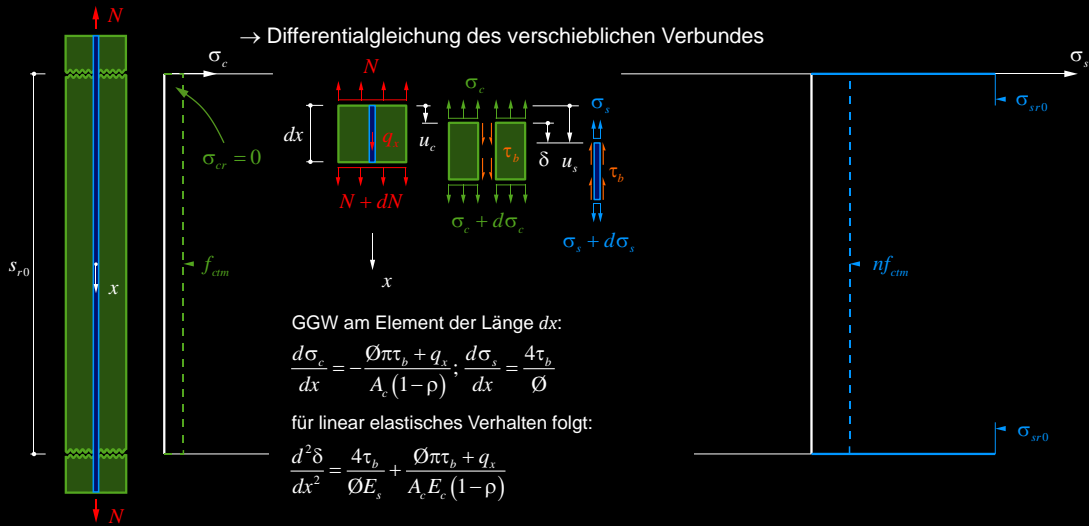
Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_g$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\varnothing$  und  $N = N_r$  ([1], Seite 3.5f)



Übliche Annahmen:  
 «Verbundspannung» wirkt über den  
 nominellen Bewehrungsdurchmesser  
 → Grobe Vereinfachung  
 → Verbundspannungs-Schlupf-Gesetz  
 → Empirisch bestimmt (für kurze  
 Verankerungslängen)

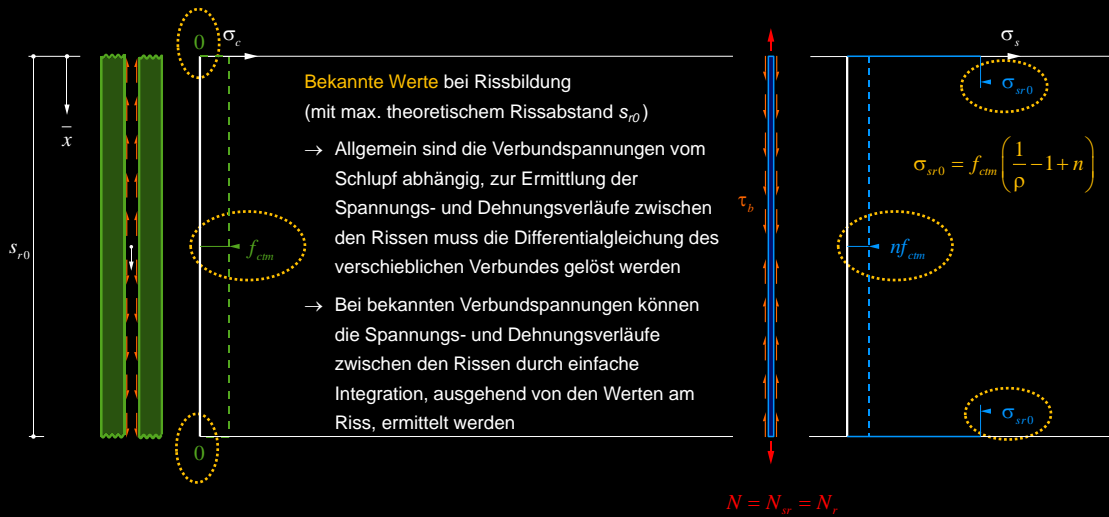
## Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_c$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\varnothing$  und  $N = N_r$  ([1], Seite 3.5f)



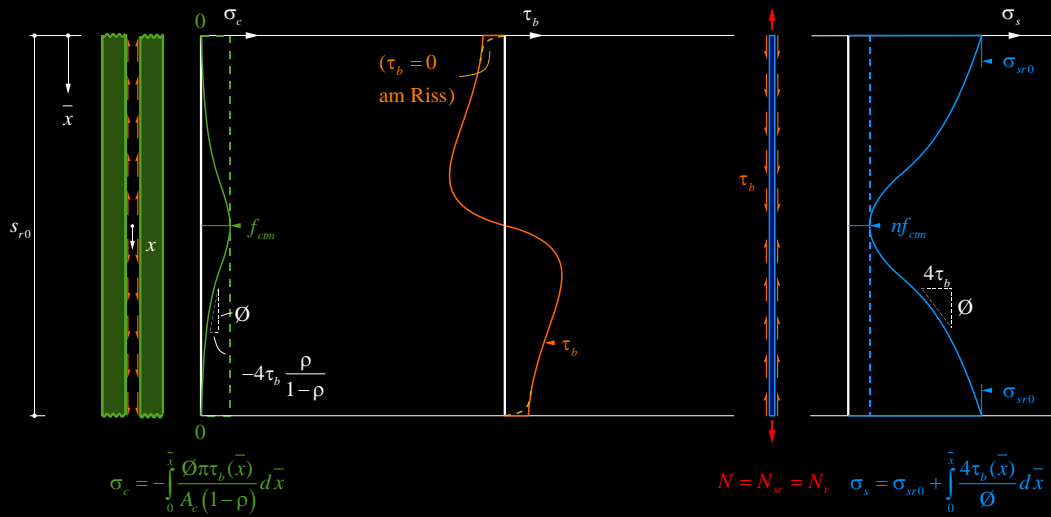
Mit dem Gleichgewicht am infinitesimalen Element, dem linear elastischen Stoffgesetz und der Hinzunahme der Äquivalenz des Schlupfes mit der Differenz der Längsverschiebungen von Bewehrung und Beton erhält man die Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes – eine DGL 2. Ordnung (siehe Kapitel 2 Materialverhalten).

## Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



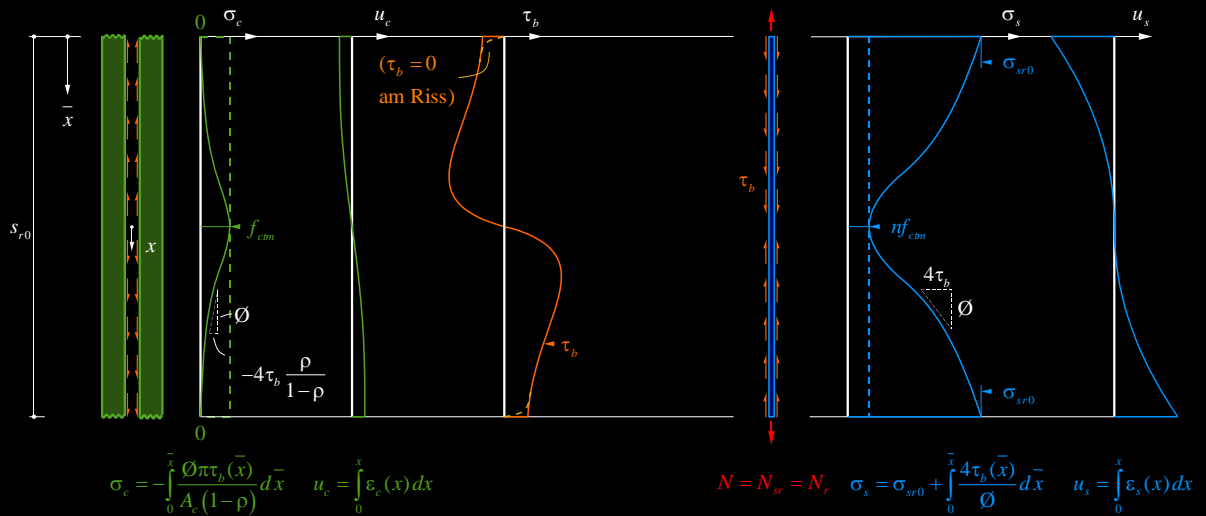


## Zuggutmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



Ausgehend von den bekannten Werten am Riss und in der Mitte zwischen zwei Rissen, liefert der Verbundspannungsverlauf in einem ersten Schritt durch Integration den Spannungsverlauf im Beton und im Bewehrungsstahl.

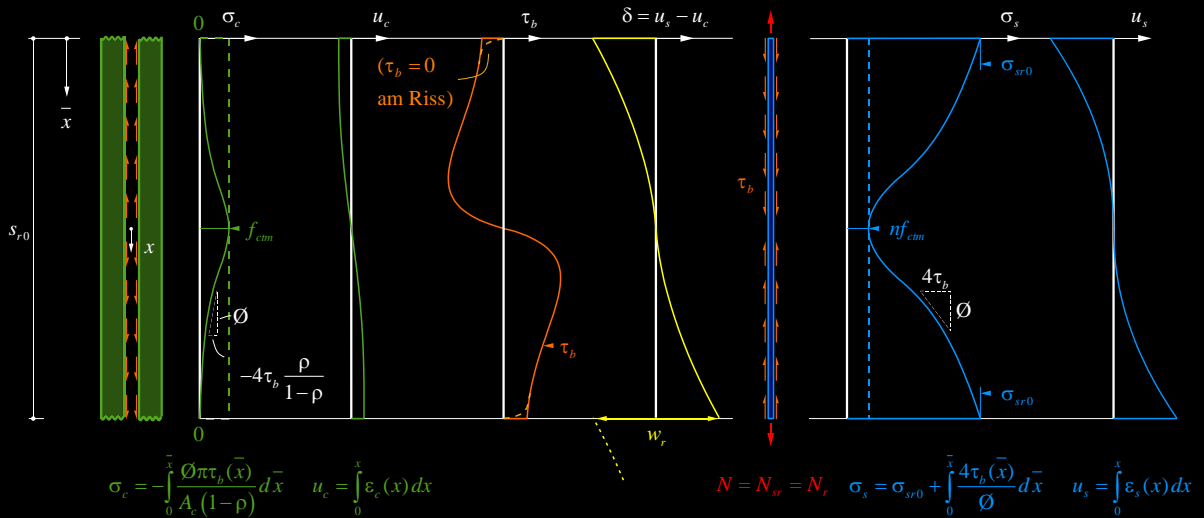
## Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



Ausgehend von den bekannten Werten am Riss und in der Mitte zwischen zwei Rissen, liefert der Verbundspannungsverlauf in einem ersten Schritt durch Integration den Spannungsverlauf im Beton und im Bewehrungsstahl.

Unter Berücksichtigung des linear elastischen Materialverhaltens sind somit auch Beton- und Betonstahldehnungen bekannt. Durch Integration der Dehnungen können schliesslich auch die Verschiebungen  $u_c$  und  $u_s$  berechnet werden. Deren Differenz ist der Schlupf.

## Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



18.09.2021

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

27

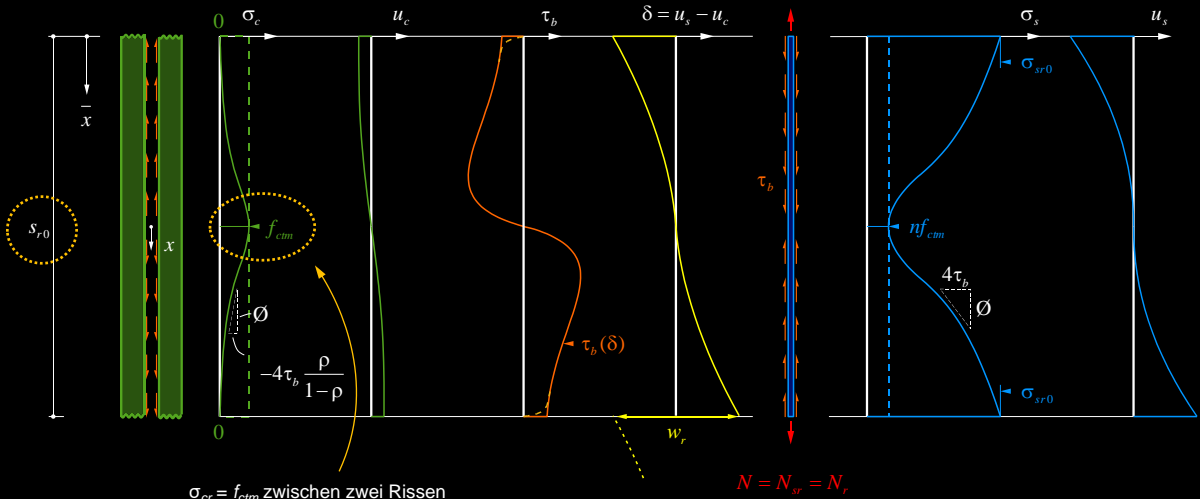
Ausgehend von den bekannten Werten am Riss und in der Mitte zwischen zwei Rissen, liefert der Verbundspannungsverlauf in einem ersten Schritt durch Integration den Spannungsverlauf im Beton und im Bewehrungsstahl.

Unter Berücksichtigung des linear elastischen Materialverhaltens sind somit auch Beton- und Betonstahldehnungen bekannt. Durch Integration der Dehnungen können schliesslich auch die Verschiebungen  $u_c$  und  $u_s$  berechnet werden. Deren Differenz ist der Schlupf.

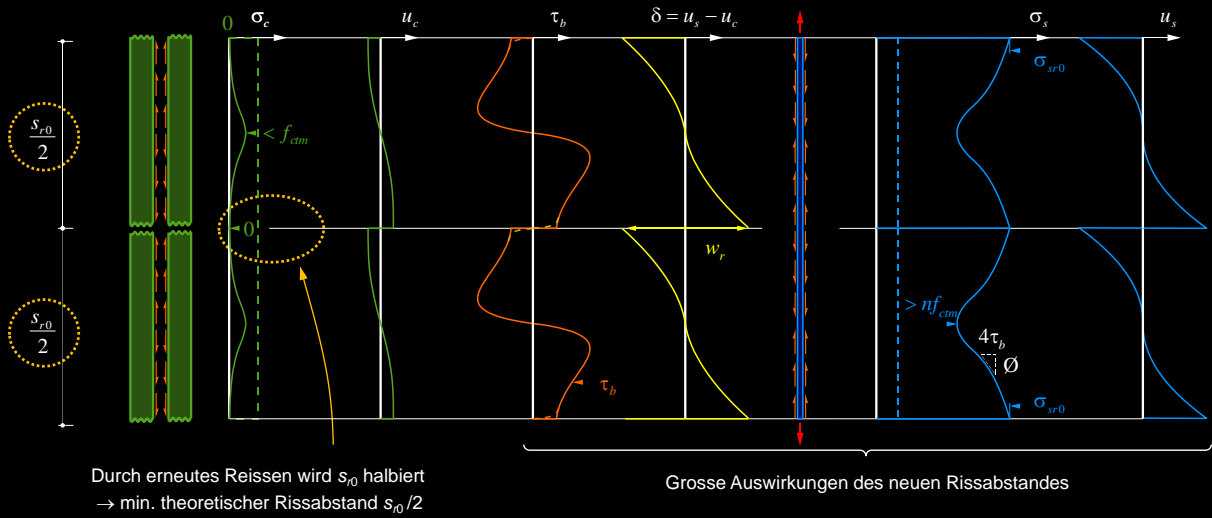
Die Rissbreite setzt sich aus dem doppelten Schlupf am Riss zusammen, da zwei Risselemente in einem Riss zusammentreffen.

Bei bekanntem Verbundspannungsverlauf ist die Ermittlung der Spannungs- und Dehnungsverläufe in Beton und Bewehrung sowie der Rissbreiten wie beschrieben damit relativ einfach. Im allgemeinen Fall hängt jedoch die Grösse der Verbundspannungen vom Schlupf ab, der gemäss obigem Vorgehen erst am Ende der Berechnungen bekannt ist. Die Ermittlung der Spannungs- und Dehnungsverläufe in Beton und Bewehrung sowie der Rissbreiten bedingt daher im allgemeinen Fall die Lösung der Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds (in der Regel nicht analytisch lösbar).

# Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$

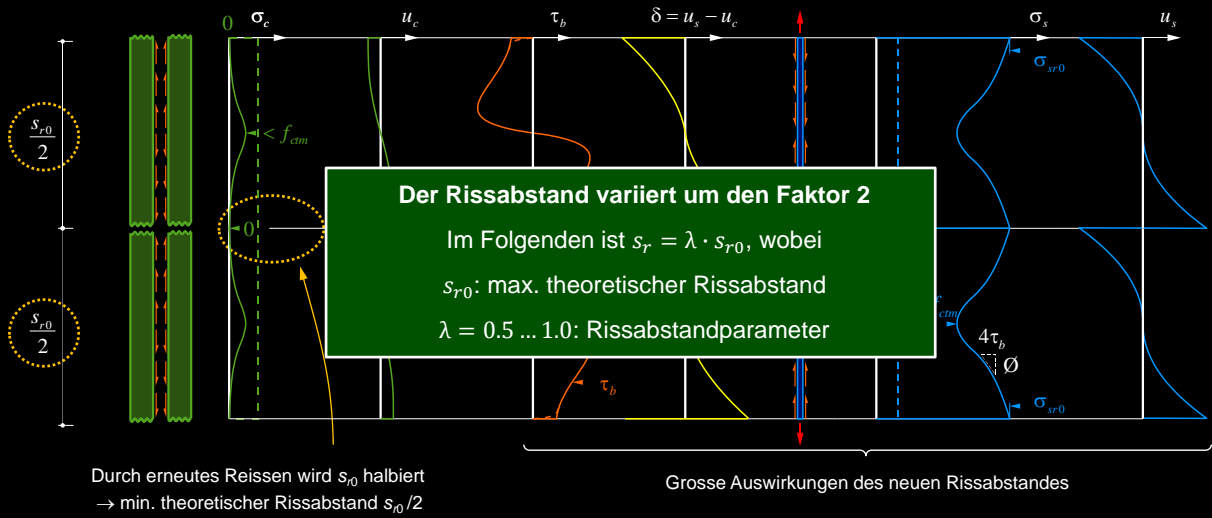


## Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



Das allfällige erneute Reissen des Betons löst in der Nähe des neuen Risses eine Schlupfumkehr aus und hat, wie abgebildet, grosse Auswirkungen auf alle Kenngrössen.

## Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$

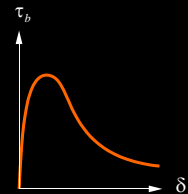
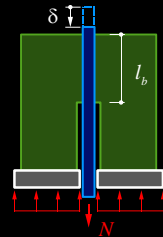


Das allfällige erneute Reissen des Betons löst in der Nähe des neuen Risses eine Schlupfumkehr aus und hat, wie abgebildet, grosse Auswirkungen auf alle Kenngrössen.

## Zuggurtmodell – Last – Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung

Lösen der DGL 2. Ordnung unter der Hinzunahme einer "genauen" Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung  $\tau_b(\delta)$

- Grobe Vereinfachung « $\tau_b$  wirkt an  $\pi \cdot \varnothing \cdot l_b$ »
  - Repräsentativität der Tests (Zuggurt vs. Ausziehstab)?
  - Erhebliche Unsicherheit im Rissabstand (Faktor 2)
  - Numerisches Lösen der DGL 2. Ordnung erforderlich
  - Primär von Interesse: Integrierte Grössen  $N(\varepsilon_{sm})$ ,  $w_f(N, \varepsilon)$
- Hoher Aufwand für (vermeintlich) genaue Lösung ist nur selten gerechtfertigt



Das auf den vorhergehenden Folien beschriebene Vorgehen ist wie einleitend bemerkt grundsätzlich für beliebige ("genaue") Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen gültig.

Es ist jedoch zu beachten, dass es sich in jedem Fall um eine relative grobe Vereinfachung des wirklichen Verhaltens handelt, da das komplexe Verbundverhalten mit nominellen Verbundspannungen idealisiert wird. Ebenfalls stellt sich die Frage, wie repräsentativ die experimentell ermittelten Verbundspannungs-Schlupf-Verläufe (Verbundversuche mit kleiner Einbindelänge) für das tatsächliche Verbundverhalten in einem Zuggurt sind. Generell besteht zudem eine Unsicherheit vom Faktor 2 beim Rissabstand (siehe vorhergehende Folie).

Zudem erfordert das Vorgehen im allgemeinen Fall die (in der Regel numerische) Lösung der Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds (DGL 2. Ordnung), von primärem Interesse sind aber die integralen Grössen: Verlängerung (über Risselement gemittelte Dehnung) und Rissbreite.

Zumindest für praktische Anwendungen ist der mit einer Lösung für allgemeine Verbundspannungs-Schlupfgesetze (wie sie beispielsweise im fib Model Code 2010 enthalten sind) verbundene hohe Aufwand damit kaum gerechtfertigt.

# Zuggurtmodell – Last – Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung

## Zuggurtmodell (Sigrist 1995 / Marti et al. 1998):

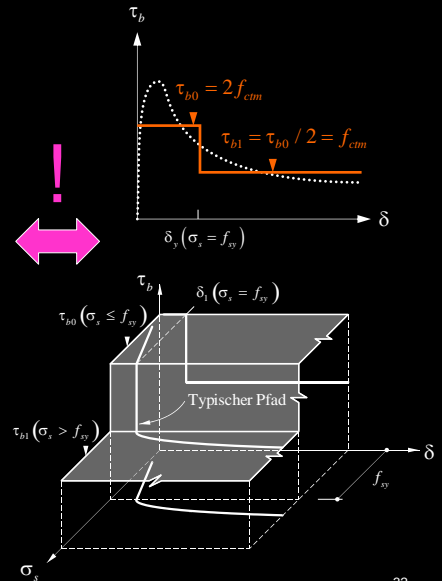
- Annahme: abgetrepte starr-ideal plastische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung ( $\tau_b - \delta$ ):

$$\tau_b = \tau_{b0} = 2f_{ctm} \quad \text{für } \sigma_s \leq f_{sy}$$

$$\tau_b = \tau_{bl} = f_{ctm} \quad \text{für } \sigma_s > f_{sy}$$

→ da  $\tau_b$  (bereichsweise) unabhängig von  $\delta$  ist, existiert eine geschlossene Lösung des Problems

- Oft in Kombination mit einer bilinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung  $\sigma_s(\varepsilon_s)$
- Gebrauchstauglichkeit ( $\sigma_s \leq f_{sy}$ ): konstanter Wert der Verbundspannung  $\tau_b = 2f_{ctm}$



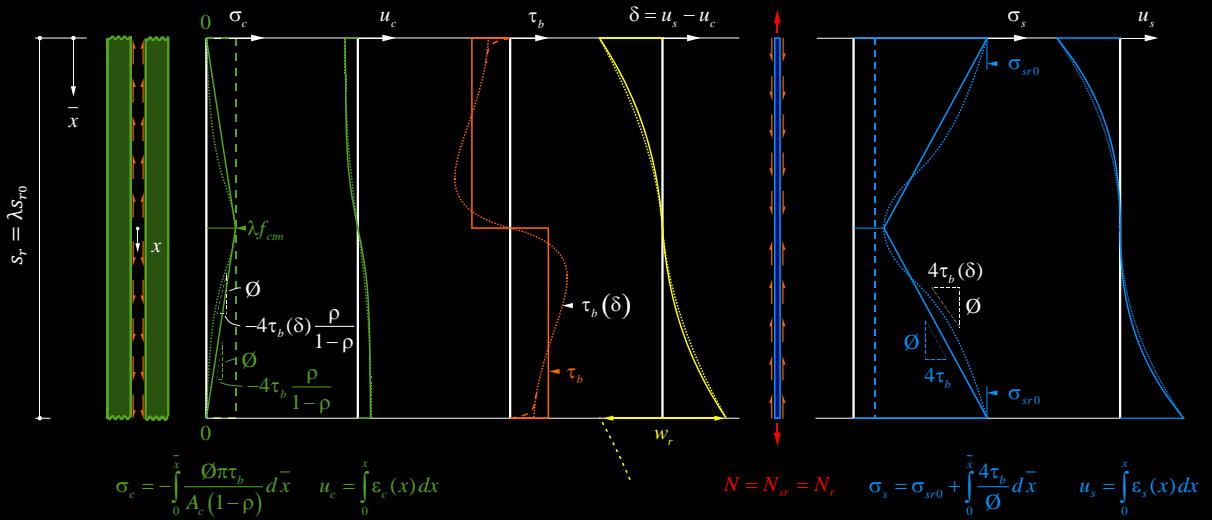
NB: Auch «genauere» Modelle für den Verbund (z.B. fib MC2010) gehen von einem markanten Abfall der Verbundspannung für  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{sy}$  aus.

Auf der Basis von Versuchen mit langer Verbundlänge, in denen ein Abfall der Verbundspannung im Bereich des Erreichens der Fließgrenze der Bewehrung festgestellt wurde, schlugen Marti und Sigrist daher bereits 1994 vor, vereinfachend eine starr-ideal plastische, abgetrepte Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung zu verwenden und begründeten damit das Zuggurtmodell.

Durch die abschnittsweise konstante Grösse der Verbundspannung – resp. die im Gebrauchszustand nochmals einfachere, starr-ideal plastische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung – ist es möglich, den Verlauf der Spannungen in Beton und Bewehrung direkt aus Gleichgewichtsbeziehungen zu ermitteln. Dadurch wird die analytische Behandlung von Verbundproblemen ermöglicht, was ein direktes Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge ermöglicht (welche bei allgemeinen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen nicht wesentlich anders sind).



## Zuggurtmodell – Last – Risselement bei Rissbildung $N = N_r$



Bei Anwendung des Zuggurtmodells (abschnittsweise konstante Verbundspannungen) resultieren lineare Spannungsverläufe. Die aus den Dehnungen durch einfache Integration resultierenden Verschiebungen verlaufen somit – bei elastischem Materialverhalten – quadratisch.

## Zuggurtmodell – Annahmen

Die nachfolgenden Überlegungen und Resultate basieren auf einer Reihe von zum Teil sehr stark vereinfachenden Annahmen, deren Zulässigkeit im konkreten Fall zu überprüfen ist:

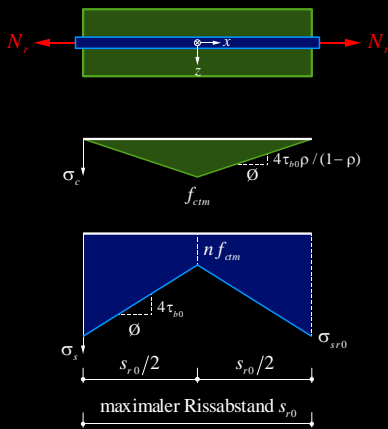
- Materialeigenschaften und Querschnitt sind entlang des Zugglieds konstant (zu Querschnittssprüngen siehe Hausübung)
- Grösse der aufgezwungenen Dehnungen ist entlang des Zugglieds und quer zur Beanspruchungsrichtung konstant (Betonquerschnitt bleibt eben)
- Betonquerschnitt reisst jeweils augenblicklich vollständig auf und ist fortan im Rissquerschnitt spannungsfrei
- linear elastisches Verhalten von Beton und Bewehrung im Rissbildungsprozess
- in ungerissenen Bereichen starrer, in gerissenen Bereichen verschieblicher, ideal plastischer Verbund gemäss Zuggurtmodell

Nachfolgend wird mit dem Zuggurtmodell zunächst das Verhalten unter Last im Gebrauchszustand untersucht. Solange dabei nur elastische Beanspruchungen der Bewehrung auftreten, ist für Untersuchungen der Rissbildung und Mindestbewehrung mit dem Zuggurtmodell nur der erste Bereich der starr-plastischen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung relevant (ohne Abfall der Verbundspannung bei Erreichen der Fliessgrenze).

Auf der Basis von Versuchen mit langer Verbundlänge, in denen ein Abfall der Verbundspannung im Bereich des Erreichens der Fliessgrenze der Bewehrung festgestellt wurde, schlugen Marti und Sigrist 1994 vor, vereinfachend eine starr-ideal plastische, abgetreppte Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung zu verwenden und begründeten damit das Zuggurtmodell. Durch die abschnittsweise konstante Grösse der Verbundspannung – resp. die im Gebrauchszustand nochmals einfachere, starr-ideal plastische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung – ist es möglich, den Verlauf der Spannungen in Beton und Bewehrung direkt aus Gleichgewichtsbeziehungen zu ermitteln. Dadurch wird die analytische Behandlung von Verbundproblemen ermöglicht, was ein direktes Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge ermöglicht (welche bei allgemeinen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen nicht wesentlich anders sind).

## Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_c$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\emptyset$  ([1], Seite 3.5f)



Gleichgewicht (Normalkraft über Länge des Zugglieds konstant, d.h.  $q_x = 0$ ):

$$N_r = A_c(1-\rho)f_{ctm} + \rho A_s n f_{ctm} = \rho A_s \sigma_{sr0}$$

(mit  $\rho = \emptyset^2 \pi / (4A_c)$  und  $n = E_s / E_c$ )

Stahlspannung im Riss bei Rissbildung

$$\sigma_{sr0} = f_{ctm} \left( \frac{1}{\rho} - 1 + n \right) \approx \frac{f_{ctm}}{\rho}$$

(gute Näherung für kleine  $\rho$ )

Maximaler Rissabstand

$$s_{r0} = \frac{\emptyset f_{ctm} (1-\rho)}{2\tau_{b0}\rho} = \frac{\emptyset}{4} \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) \approx \frac{\emptyset}{4\rho}$$

(mit  $\tau_{b0} = 2\tau_{b1} = 2f_{ctm}$ )

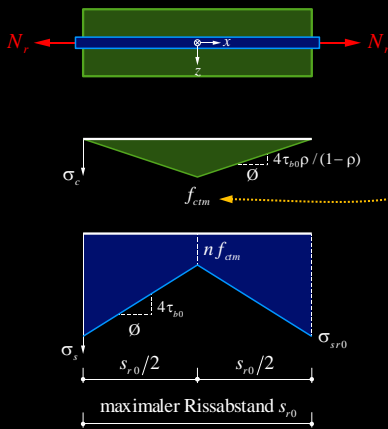
Ausgehend von den bekannten Spannungen im Riss – wo die gesamte Zugkraft durch die Bewehrung aufgenommen wird – kann der Verlauf der Spannungen im Beton und in der Bewehrung allein aus Gleichgewicht bestimmt werden, siehe Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds (Kapitel 2) ohne angreifende Längskraft: Sowohl die Steigung der Stahlspannungen,  $d\sigma_s/dx = 4 \cdot \tau_b / \emptyset$ , als auch der Betonspannungen,  $d\sigma_c/dx = 4 \cdot \tau_b \cdot \rho / [(1-\rho) \cdot \emptyset]$  resultieren ohne weiteres.

### Ergänzende Bemerkungen

- Streng genommen muss vorausgesetzt werden, dass zwischen Bewehrung und Beton über die gesamte Länge des Risselements Schlupf auftritt (in der rechten Hälfte positiv, in der linken Hälfte negativ). Dies trifft implizit zu, sofern der Rissabstand nicht grösser ist als der theoretisch maximale Rissabstand und die Zugkraft nicht kleiner ist als die Risszugkraft.
- Nach der Rissbildung wird die ganze Zugkraft im Riss durch die Bewehrung aufgenommen. Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen erhöht die Steifigkeit des Zuggurtes, nicht aber dessen Widerstand!

## Zuggurtmodell – Last – Rissbildung

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS  $A_c$ ), bewehrt mit Stab mit Durchmesser  $\emptyset$  ([1], Seite 3.5f)



Betonspannung in Mitte des Elements mit Länge  $s_{r0}$  ist  $\sigma_c = f_{ctm}$  d.h. dort könnte sich ein weiterer Riss bilden.

Somit ist der minimale Rissabstand:

$$s_{r,min} = s_{r0} / 2$$

Allgemein mit Parameter  $\lambda$ :

$$s_r = \lambda \cdot s_{r0} \quad \left( \frac{1}{2} < \lambda < 1 \right)$$

→ theoretische Grenzen der Rissabstände bei abgeschlossenem Rissbild!

NB: Bei Rissbildung stellt sich unter Last (theoretisch) schlagartig das abgeschlossene Rissbild ein.

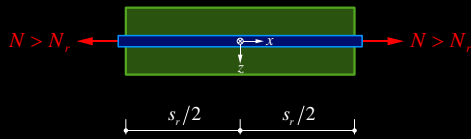
Im Falle des theoretisch maximalen Rissabstands (in der Abbildung dargestellter Fall) sind die Spannungen in der Mitte des Risselements gleich gross wie bei der Rissbildung ( $\sigma_c = f_{ctm}$  resp.  $\sigma_s = n \cdot f_{ctm}$ ). Es könnte sich somit gerade ein neuer Riss einstellen, wodurch der Rissabstand halbiert und die zugversteifende Wirkung des Betons stark reduziert würde.

Die Unsicherheit bezüglich des Rissabstands (Faktor 2) besteht auch bei «idealen Verhältnissen». Hinzu kommen diverse weitere Unsicherheiten (Streuung der Betonzugfestigkeit, der Verbundspannungen, ...). Die Berechnungen sind daher als Näherung zu betrachten. Andererseits relativiert sich durch diese Unsicherheiten (welche unabhängig des verwendeten Verbundgesetzes vorhanden sind) die «grössere Genauigkeit», welche mit allgemeinen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen erreicht wird, deren Anwendung zudem aufwändige numerische Berechnungen erfordert.

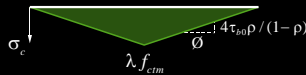
Rechnerisch kann der Einfluss des Rissabstands mit einem Parameter  $\lambda$  erfasst werden, welcher zwischen  $\lambda = 0.5$  (minimaler theoretischer Rissabstand) und  $\lambda = 1$  (maximaler theoretischer Rissabstand) liegt.

## Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung  $N > N_r$  ([1], Seite 3.5f)



Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant.  
Stahlspannungen steigen weiter.



Mittlere Betondehnung

$$\epsilon_{cm} = \frac{\int_{-s_r/2}^{s_r/2} \epsilon_c dx}{s_r} = \frac{\int_{-s_r/2}^{s_r/2} \frac{\sigma_c}{E_c} dx}{s_r} = \frac{\lambda \cdot f_{ctm}}{2E_c}$$



Verschiebung

$$u_c(x) = \int_0^x \epsilon_c(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma_c(x)}{E_c} dx$$

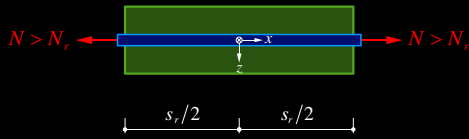
$$u_{cr} = u_c \left( x = \frac{s_r}{2} \right)$$

Da die Verbundspannungen, unabhängig von der Grösse des Schlupfs, für elastische Stahlspannungen konstant sind, bleiben die Spannungen im Beton nach Abschluss der Rissbildung konstant, die Betondehnungen ebenfalls.

Die «mittleren Betondehnungen» (über Länge des Risselements gemittelter Wert = Verlängerung des Betons über das Risselement dividiert durch die Länge des Risselements) können durch einfache Integration der linear verlaufenden Betondehnungen ermittelt werden. Wie die Betonspannungen sind diese nach der Rissbildung (solange die Stahlspannungen elastisch bleiben) konstant.

# Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

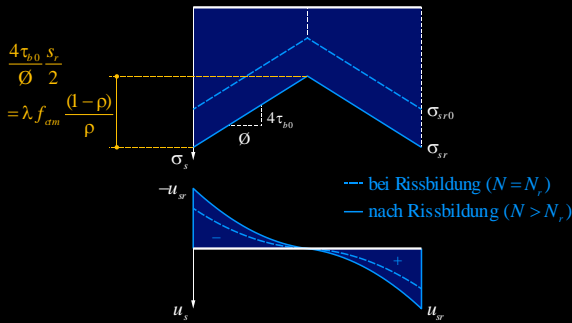
Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung  $N > N_r$  ([1], Seite 3.5f )



Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant.  
Stahlspannungen steigen weiter.

**Mittlere Stahldehnung = mittlere Dehnung**

Zugglied



$$\varepsilon_{sm} = \frac{\int_{-s_r/2}^{s_r/2} \frac{\sigma_s}{E_s} dx}{s_r} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing} \frac{s_r}{4E_s} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm} (1-\rho)}{2\rho E_s}$$

Verschiebung

$$u_s(x) = \int_0^x \varepsilon_s(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma_s(x)}{E_s} dx$$

$$u_{sr} = u_s \left( x = \frac{s_r}{2} \right)$$

Die «mittleren Stahldehnungen» (über Länge des Risselements gemittelter Wert = Verlängerung des Betonstahls über das Risselement dividiert durch die Länge des Risselements) können durch einfache Integration der linear verlaufenden Stahldehnungen ermittelt werden.

Die Verlängerung des Zugglieds (über Risselement gemittelt) entspricht der Verlängerung des Betonstahls, die «mittlere Dehnung» des Zugglieds somit der mittleren Stahldehnung.

Man erkennt, dass die mittlere Dehnung des Zugglieds derjenigen der nackten Bewehrung, abzüglich eines konstanten Terms, entspricht.

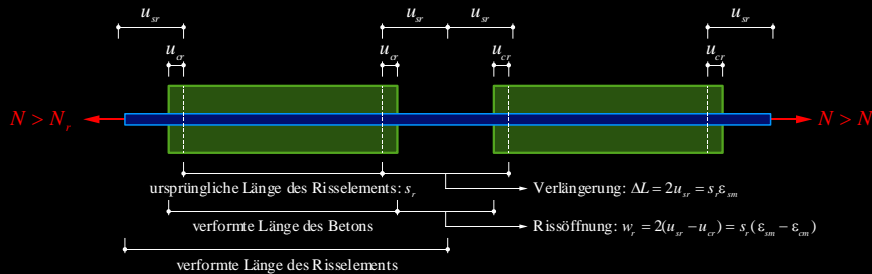
## Zuggurtmodell – Last – Rissbreiten

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung  $N > N_r$  ([1], Seite 3.5f)

Rissbreiten: Differenz der mittleren Stahl- und Beton-Dehnungen, multipliziert mit  $s_r$

$$w_r = s_r [\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}] = s_r \left[ \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{cm}(1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{cm}}{2E_c} \right] = \frac{\lambda s_{r0} (2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0})}{2E_s} \quad \text{mit } \sigma_{sr} = \frac{N}{A_s}$$

Grenzen für die Rissbreiten ( $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ ):  $\frac{s_{r0}}{2E_s} \left( \sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{4} \right) \leq w_r \leq \frac{s_{r0}}{E_s} \left( \sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{2} \right)$



18.09.2021

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

39

Die Rissbreite ergibt sich als Differenz zwischen der Längenänderung des Betonstahls und derjenigen des Betons (jeweils über ein Risselement integrierte Dehnungen, da je ein halbes Risselement beidseits des Risses zur Rissbreite beiträgt).

Mit den bekannten Werten für den maximalen und minimalen Rissabstand sowie der Stahlspannung im Riss bei Rissbildung kann die Rissbreite wie angegeben eingegrenzt werden. Im Vergleich mit dem Rissabstand (Faktor 2) reduziert sich die Unsicherheit etwas.

### Ergänzende Bemerkungen

- Die Betondehnungen sind im Vergleich zu den Stahldehnungen klein.
- Als grobe Näherung resp. Kontrollwert (obere Grenze für die Rissbreite) kann das Produkt aus Rissabstand und Stahldehnung im Riss verwendet werden. Bei hohen Stahlspannungen ist diese Näherung gut zutreffend.

## Zuggurtmodell – Last – Rissbreiten

### Im Rissbildungsprozess (Zwang, Rissbild nicht abgeschlossen, $N=N_r$ )

Rissbreiten: Differenz der mittleren Stahl- und Beton-Dehnungen, multipliziert mit  $s_r$

$$w_r = s_r [\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}] = s_r \left[ \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c} \right] = \frac{\lambda s_{r0}(2\sigma_{sr} - \lambda\sigma_{sr0})}{2E_s} \quad \text{mit } \sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$$

Grenzen für die Rissbreiten  $\left(\frac{1}{2} < \lambda < 1\right)$ :  $\frac{3}{8} \frac{s_{r0}}{E_s} \sigma_{sr0} \leq w_r \leq \frac{1}{2} \frac{s_{r0}}{E_s} \sigma_{sr0}$

...Rissabstand eingesetzt:  $\frac{3}{32} \frac{\emptyset(1-\rho)}{\rho E_s} \sigma_{sr0} \leq w_r \leq \frac{1}{8} \frac{\emptyset(1-\rho)}{\rho E_s} \sigma_{sr0}$

...d.h. für kleine  $\rho$  näherungsweise:  $\frac{3}{32} \frac{\emptyset}{\rho E_s} \sigma_{sr0} \leq w_r \leq \frac{1}{8} \frac{\emptyset}{\rho E_s} \sigma_{sr0}$

...d.h. mit  $\sigma_{sr0} \approx f_{ctm} / \rho$  d.h.  $\rho \approx f_{ctm} / \sigma_{sr0}$ :  $\frac{3}{32} \frac{\emptyset}{f_{ctm} E_s} \sigma_{sr0}^2 \leq w_r \leq \frac{1}{8} \frac{\emptyset}{f_{ctm} E_s} \sigma_{sr0}^2 \rightarrow \sigma_{sr0} \leq \sqrt{\frac{(8...11) f_{ctm} E_s w_r}{\emptyset}}, \rho \geq \sqrt{\frac{\emptyset f_{ctm}}{(8...11) E_s w_r}}$

Bei nicht abgeschlossenem Rissbild (oft bei Zwang) können die Beziehungen vereinfacht werden, da die maximale Normalkraft (= Risszugkraft) bekannt ist. Für übliche (d.h. kleine) Bewehrungsgehalte  $\rho$  kann damit die für eine bestimmte Rissbreite zulässige Spannung in der Bewehrung bei der Rissbildung angegeben werden.

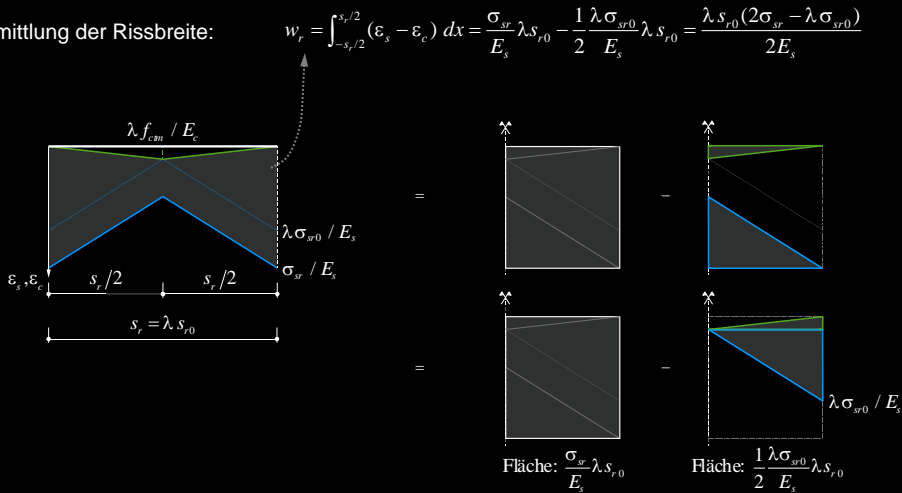
Dies ist die Grundlage der entsprechenden Beziehungen in der SIA 262 (Korrigenda 2017).



# Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung  $N > N_r$  ([1], Seite 3.5f)

Grafische Ermittlung der Rissbreite:

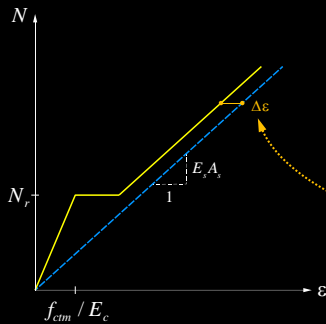


Die Rissbreite, als Differenz der Längenänderungen von Bewehrung und Beton und somit als Differenz der Integrale der Stahl- und Betondehnungen, kann wie dargestellt grafisch hergeleitet werden.

N.B.: Die gepunktete Linie ist eine Hilfslinie. Sie entspricht nicht der Dehnungsverteilung des Risselements.

# Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung  $N > N_r$  ([1], Seite 3.5f)



$N$ - $\epsilon$ - und  $\sigma_{sr}$ - $\epsilon$ -Diagramme: Reduktion der Dehnung des nackten Stahls um  $\Delta\epsilon$  ( $\Delta\epsilon$  bleibt bis Fließbeginn konstant).

NB: gute Näherung für  $w_r$  (kleine  $\rho$ )

$$\frac{\sigma}{4\rho} \left( \frac{N}{A_s} - \frac{f_{cm}}{4\rho} \right) \leq w_r \leq \frac{\sigma}{4\rho} \left( \frac{N}{A_s} - \frac{f_{cm}}{2\rho} \right)$$

Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant. Stahlspannungen steigen weiter.

Stahldehnung am Riss

$$\epsilon_{sr} = \sigma_{sr} / E_s$$

Mittlere Betondehnung

$$\epsilon_{cm} = \lambda f_{cm} / (2E_c)$$

Mittlere Stahldehnung

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{B0}}{\varnothing} \frac{s_r}{E_s} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{cm} (1-\rho)}{2\rho E_s}$$

Rissbreiten: Differenz der mittleren Stahl- und Betondehnungen, multipliziert mit  $s_r$  ( $\lambda = 0.5 \dots 1$ ):

$$w_r = s_r \left[ \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{cm} (1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{cm}}{2E_c} \right] = \frac{\lambda s_{r0} (2\sigma_{sr} - \lambda \sigma_{sr0})}{2E_s}$$

mit  $\sigma_{sr} = N / A_s$

$$\frac{s_{r0}}{2E_s} \left( \sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{4} \right) \leq w_r \leq \frac{s_{r0}}{E_s} \left( \sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{2} \right)$$

Die Betonspannungen und damit die Betondehnung bleiben nach der Rissbildung konstant, solange die Bewehrung nicht fließt. Somit entspricht die mittlere Dehnung des Zugglieds derjenigen der nackten Bewehrung abzüglich eines konstanten Terms  $\Delta\epsilon$ .

Man kann die angegebenen Beziehungen auch umformulieren, so dass für eine gegebene mittlere Dehnung die Spannung in der Bewehrung im Riss resultiert. Diese ist, solange die Bewehrung nicht fließt, um einen konstanten Wert  $\Delta\sigma$  höher als diejenige der nackten Bewehrung bei gleicher Dehnung (dies kann jedoch den unzutreffenden Anschein erwecken, dass der Beton den Widerstand erhöhe, weshalb es hier vermieden wird).

Die gezeichnete Last-Verformungs-Linie geht davon aus, dass sich beim Erreichen der Risslast schlagartig das abgeschlossene Rissbild einstellt; in Realität ist die Beziehung im Bereich der Risslast nicht horizontal, sondern leicht ansteigend (wegen Streuung der Zugfestigkeit etc.) resp. bei lastgesteuerten Versuchen «sägezahnartig» (siehe Zwangsbeanspruchung).

## Zuggurtmodell – Last – Beispiel

Anwendung des Zuggurtmodells auf Beispiel 1 ([1], Seite 3.6)

$$\rho = \frac{8 \cdot 13^2 \cdot \pi}{400^2} = 2.65\% \quad \text{und} \quad n = \frac{205}{33.6} = 6.1$$

Stahlspannung am Riss bei Rissbildung:

$$\sigma_{sr0} = 2.9 \left( \frac{1}{0.0265} - 1 + 6.1 \right) = 124 \text{ MPa} \quad (109 \text{ MPa})$$

Maximaler Rissabstand:

$$s_{r0} = \frac{26}{4} \left( \frac{1}{0.0265} - 1 \right) = 238 \text{ mm} \quad (\rightarrow \text{min. } 119 \text{ mm}) \quad (245 \text{ mm})$$

Rissbreiten:

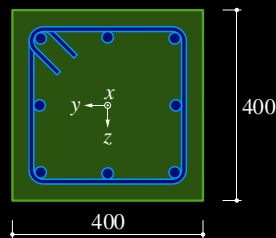
$$\lambda = 1/2 \rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.05 \text{ mm} \quad (0.05 \text{ mm})$$

$$\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.23 \text{ mm} \quad (0.24 \text{ mm})$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.07 \text{ mm} \quad (0.07 \text{ mm})$$

$$\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.43 \text{ mm} \quad (0.46 \text{ mm})$$

**NB:** Näherungen für Rissabstand und Rissbreiten stimmen trotz sehr grossem  $\rho$  sehr gut



Bügelbewehrung  $\varnothing 12$  ( $c_{nom} = 35 \text{ mm}$ )  
Längsbewehrung 8  $\varnothing 26$

Die Anwendung des Zuggurtmodells auf das bereits behandelte Beispiel illustriert den Einfluss verschiedener Parameter auf die Zugversteifung und gibt einen Eindruck über die zu erwartenden Rissbreiten.

Zu beachten ist, dass der Bewehrungsgehalt im Beispiel mit 2.65% relativ gross ist, weshalb die Rissbreiten bei Rissbildung entsprechend klein sind.

## Zuggurtmodell – Last – Beispiel

Anwendung des Zuggurtmodells auf Beispiel 1 ([1], Seite 3.6)

$$\rho = \frac{8 \cdot 13^2 \cdot \pi}{400^2} = 2.65\% \quad \text{und} \quad n = \frac{205}{33.6} = 6.1$$

Stahlspannung am Riss bei Rissbildung

$$\sigma_{sr0} = 2.9 \left( \frac{1}{0.0265} - 1 + 6.1 \right) = 124 \text{ MPa}$$

Maximaler Rissabstand

$$s_{r0} = \frac{26}{4} \left( \frac{1}{0.0265} - 1 \right) = 238 \text{ mm}$$

Rissbreiten

$$\begin{aligned} \lambda = 1/2 &\rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.05 \text{ mm} \\ &\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.23 \text{ mm} \\ \lambda = 1 &\rightarrow \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.07 \text{ mm} \\ &\rightarrow \sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = 0.43 \text{ mm} \end{aligned}$$

Grosse Bewehrungsgehalte  $\rho$  bedeuten kleinere Stahlspannungen beim Riss und kleinere Rissabstände, was anzahlmässig mehr, aber feinere Risse bedeutet.

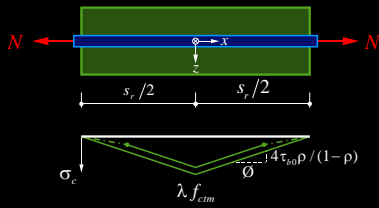
Grosse Stab-Ø bei gleichem Bewehrungsgehalt  $\rho$  bedeuten grössere Rissabstände, und somit weniger, aber breitere Risse → unschön, weniger dauerhaft

Günstiges Gebrauchsverhalten (viele Risse mit kleiner Rissbreite) erreichbar mit

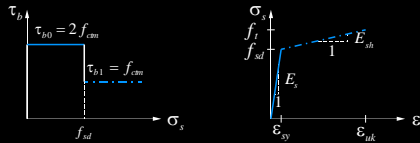
- hohem Bewehrungsgehalt (im Beispiel ist er sehr hoch >> Mindestbewehrung)
- kleinen Stabdurchmessern
- kleinen Stababständen (aus Zuggurtmodell nicht direkt ersichtlich)
- Querbewehrung (gibt Risse vor)

# Zuggurtmodell – Last – Duktilität

Verhalten nach Überschreiten der Fließgrenze

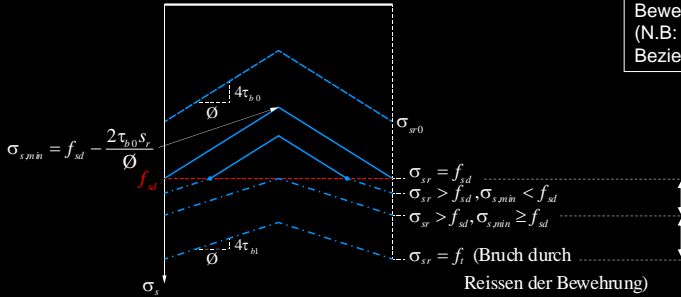


$$\sigma_{sr} > f_{sd} \rightarrow \tau_{b1} = \tau_{b0} / 2$$



Regimes:

Bewehrung in Rissnähe plastifiziert, dazwischen elastisch (N.B: bei kleiner Verfestigung Bruch in diesem Regime)  
Beziehung für  $\epsilon_{sm}$  kompliziert (aber geschlossen lösbar)



Bewehrung fließt im ganzen Risselement.  
 $\epsilon_{sm}$  analog wie im elastischen Bereich:  
 $\tau_{b1}$  statt  $\tau_{b0}$ , mit  $\tau_{b1} = \tau_{b0} / 2$   
$$\epsilon_{sm} = \frac{f_{sd}}{E_s} + \frac{\sigma_{sr} - f_{sd}}{E_{sh}} - \frac{\lambda f_{c,cm} (1 - \rho)}{4 \rho E_{sh}}$$
  
"nackter Stahl" "Delta epsilon\_1" =  $\Delta \epsilon \frac{1}{2} \frac{E_s}{E_{sh}}$

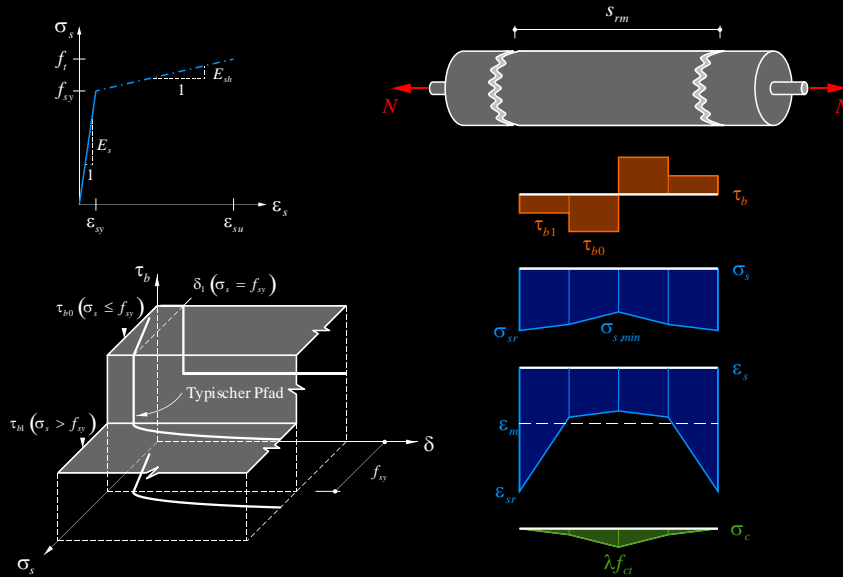
Die Zugversteifung spielt nicht nur im Gebrauchszustand eine grosse Rolle, sondern auch bei der Tragsicherheit. Hier wirkt sich ein guter Verbund nachteilig auf die Duktilität aus, was bei der Anwendung plastischer Berechnungsmethoden zu beachten ist. Um die Duktilität beurteilen zu können, muss eine Verfestigung des Betonstahls berücksichtigt werden. Vereinfachend wird hier ein bilineares Stoffgesetz verwendet, siehe Abbildung rechts.

Nach dem Überschreiten der Fließgrenze der Bewehrung nimmt die Verbundspannung nach dem Zuggurtmodell auf die Hälfte des Ausgangswerts ab. Da die Fließgrenze zuerst in den Rissen erreicht wird, wachsen die Bereiche mit reduzierter Verbundspannung sukzessive von den Rissen aus in Richtung «Mitte zwischen zwei Rissen» (teilplastifiziertes Risselement: in Rissnähe fließt die Bewehrung, dazwischen ist sie noch elastisch). Die Beziehungen für die mittleren Dehnungen in Funktion der Stahlspannung am Riss (und umgekehrt) sind in diesem Regime etwas komplizierter als für elastisches Verhalten.

Ab einer bestimmten Beanspruchung fließt die Bewehrung im ganzen Risselement (vollplastifiziertes Risselement). Die Beziehungen für die mittleren Dehnungen in Funktion der Stahlspannung am Riss (und umgekehrt) sind in diesem Regime analog wie im elastischen Bereich, einfach mit reduzierter Verbundspannung.

Für weitere Details siehe Vorlesung Stahlbeton III im Masterstudium.

## Zugurtmodell – Last – Duktilität



18.09.2021

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

46

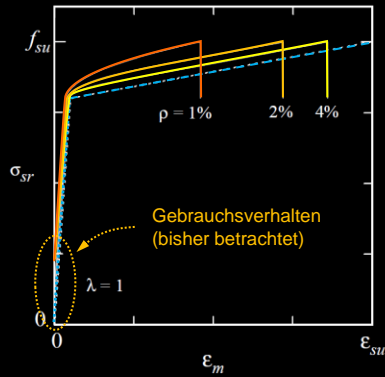
Die Abbildung zeigt nochmals die gleichen Punkte wie die vorhergehende Folie, in etwas anderer Darstellung, für das teilplastifizierte Regime.

Zusätzlich sind neben den Stahlspannungen auch die Stahldehnungen angegeben (in etwa massstäblich). Man erkennt, dass – obschon die Stahlspannungen weniger stark variieren – die Stahldehnungen im Bereich, wo die Bewehrung fließt (Rissnähe) wesentlich stärker anwachsen und der grösste Teil der Verlängerung des Zugglieds durch diese Dehnungen hervorgerufen wird. Dies, da die Steifigkeit der Bewehrung nach Fließbeginn drastisch abfällt (Verfestigungsmodul ist viel kleiner als Elastizitätsmodul).

## Zuggurtmodell – Last – Duktilität

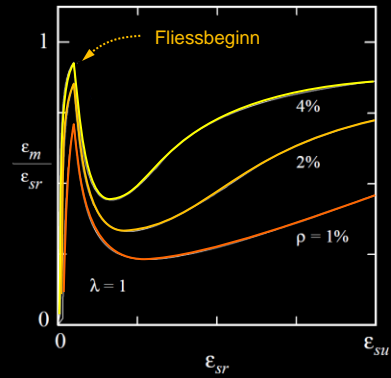
Last-Verformungsverhalten mit Berücksichtigung des Verbunds bei hoher Beanspruchung

- Kein Einfluss auf Zugwiderstand
- Steiferes Verhalten als nackter Stahl



Verhältnis mittlere Dehnungen zu maximaler Dehnung in den Rissen mit Berücksichtigung des Verbunds

- Starker Abfall nach Fließbeginn
- Einfluss auf Duktilität beachten!



18.09.2021

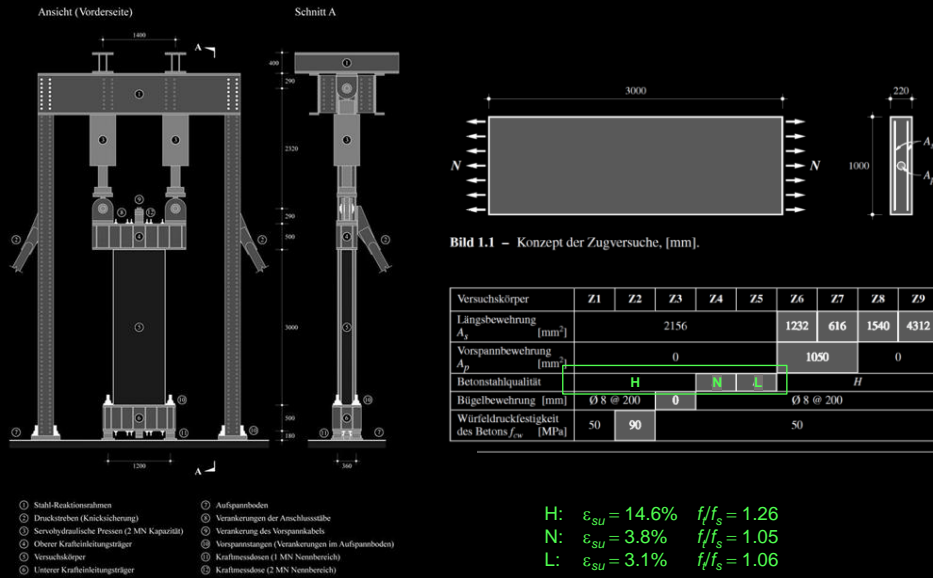
ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

47

Die Abbildung illustriert die Reduktion der Duktilität durch die Zugversteifung. Obschon die Berechnungen für verhältnismässig duktile Bewehrung und grosse Bewehrungsgehalte durchgeführt wurden, ist der Einfluss markant.

Der auf der rechten Seite dargestellte Wert  $\varepsilon_{sm}/\varepsilon_{SR}$  ist ein Mass dafür, inwieweit die Duktilität des nackten Betonstahls durch den Verbund vermindert wird.

# Zugversuche Dr. M. Alvarez – Versuchsanlage

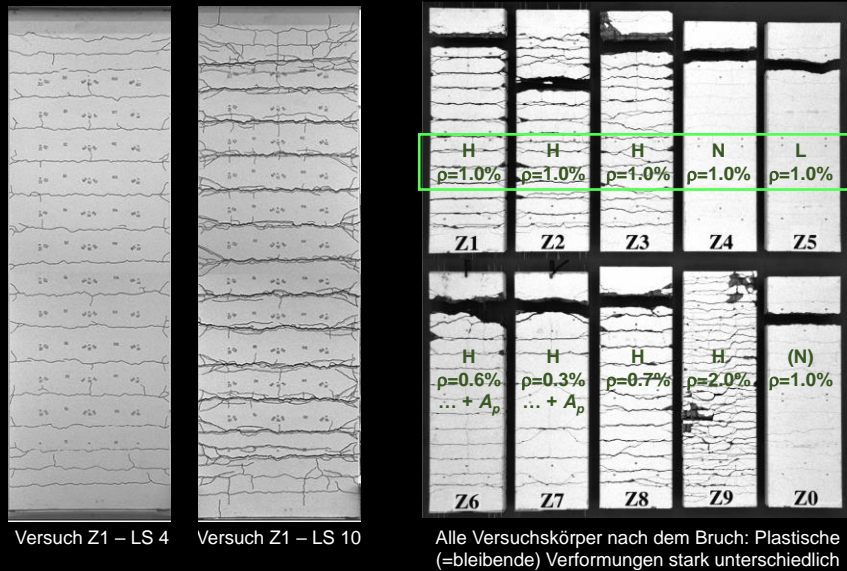


Die Abbildung zeigt den Versuchsaufbau und die Parameter der Versuche von Alvarez und Marti (1996), mit welchen die Duktilität von Stahlbeton unter Zugbeanspruchung untersucht wurde.

Hintergrund der Versuche waren mutmasslich ungenügende Duktilitätseigenschaften einiger der damaligen Betonstahl-Klassen (die Vermutung bestätigte sich in den Versuchen). Heute sind die Verhältnisse bei hochfesten Betonen mit entsprechend steifem Verbund ähnlich; die Duktilität des an sich als «duktil» geltenden Betonstahls B500B ist in solchen Fällen für plastische Umlagerungen nur knapp – wenn überhaupt – ausreichend (siehe Vorlesung Stahlbeton III im Masterstudium).



## Zugversuche – Dr. M. Alvarez – Rissbilder / Bruchverlängerung



Die Abbildung zeigt die Versuchskörper nach dem Bruch, mit den bleibenden (plastischen) Verformungen.

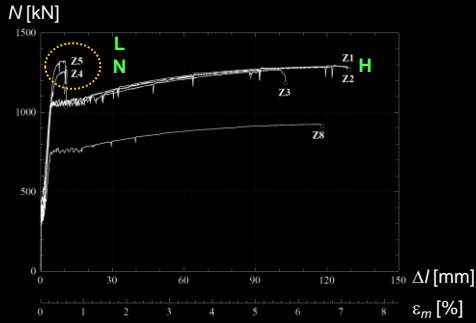
Die Versuchskörper Z1-Z5 wiesen den gleichen geometrischen Bewehrungsgehalt auf (1%), Versuch Z8 einen etwas geringeren (0.7%). In den Versuchskörpern Z1-Z3 und Z8 kam duktile Bewehrung zum Einsatz (damals «H» = hohe Duktilität), in Versuchskörper Z4 solche mit geringer Duktilität (damals «N» = normal duktil). In Versuchskörper Z5 wurde Bewehrung mit sehr niedriger Duktilität (damals «L» = low) eingesetzt.

Man erkennt in obigen Fotos die dramatischen Unterschiede in der plastischen Verformung der Versuchskörper. Auf den folgenden Seite sind die entsprechenden Versuchsergebnisse angegeben, welche diese Erkenntnis bestätigen.

# Zugversuche Dr. M. Alvarez – Versuchsergebnisse

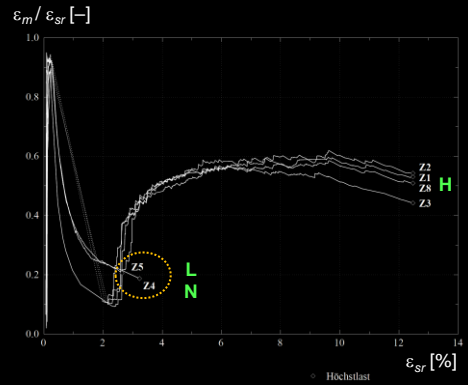
Last-Verformungsverhalten mit Berücksichtigung des Verbunds bei hoher Beanspruchung

→ Verformungsvermögen durch **Bewehrung mit zu geringer Duktilität** (Bruchdehnung und Verfestigung!) stark beeinträchtigt



Verhältnis mittlere Dehnungen zu maximaler Dehnung in den Rissen mit Berücksichtigung des Verbunds

→ gute Übereinstimmung mit Zuggurtmodell (bei Berücksichtigung der wirklichen Stahlkennlinie praktisch identisch)



## Zuggurtmodell – Weitere Anwendungen

Mit dem Zuggurtmodell kann das Verhalten von Stahlbetonbauteilen unter Zugbeanspruchung untersucht werden.

Neben dem bisher behandelten Verhalten schlaff bewehrter Stahlbeton-Zugglieder unter monoton zunehmender Normalkraft im Gebrauchs- und Bruchzustand kann damit insbesondere die Zwangsbeanspruchung durch aufgezwungene oder behinderte Verformungen an statisch unbestimmten Systemen untersucht werden:

→ Äusserer Zwang (behinderte Verkürzung bei Temperaturabfall, Auflagerverschiebung, ...)

→ Innerer Zwang (behinderte Schwindverkürzung des Betons)

Das Zuggurtmodell dient damit als Grundlage für Überlegungen zur Mindestbewehrung in Betonbauteilen und der entsprechenden Bestimmungen der Norm SIA 262 Ziff. 4.4.2.

Daneben existiert eine ganze Reihe von weiteren Anwendungen des Zuggurtmodells, wie zum Beispiel vorgespannte Zugglieder (siehe Stahlbeton II).

Das Zuggurtmodell dient auch als Grundlage des gerissenen Scheibenmodells (Cracked Membrane Model) für zweiachsige Beanspruchung (siehe Advanced Structural Concrete).

Nachfolgend wird das Zuggurtmodell auf Zwangsbeanspruchung und Mindestbewehrung angewendet.

Man unterscheidet zwischen äusserem Zwang (behinderte Verkürzung bei Temperaturabfall, Auflagerverschiebung, ...) und innerem Zwang (behinderte Schwindverkürzung des Betons). Das Zuggurtmodell eignet sich für die Untersuchung beider Fälle sehr gut.

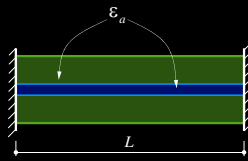
Eine weitere Unterscheidungsmöglichkeit bei Zwangsbeanspruchung ist diejenige zwischen «frühem Zwang» (abfliessende Hydratationswärme, Frühschwinden) und «spätem Zwang» (Schwinden, Temperatur). Diese Unterscheidung kann bei dicken Bauteilen sinnvoll sein. Beispielsweise entstehen in solchen Fällen oft Risse zu einem frühen Zeitpunkt («früher Zwang»), wenn die Zugfestigkeit des Betons noch relativ klein ist; dies wirkt sich günstig auf die Rissbreiten aus (da kleinere Rissbreiten resultieren). Das Zuggurtmodell wurde bisher nicht explizit für «frühen» Zwang angewendet; die Bewehrungsgehalte, die sich mit dem Zuggurtmodell ergeben decken den (kritischeren) Fall des «späten Zwangs» ab.

Grundsätzlich führt Schwinden auch bei nicht behinderter Verkürzung zu Spannungen im Beton und in der Bewehrung, da letztere die Verkürzung des Betons behindert. Die entsprechenden Spannungen sind jedoch gering (Zugspannung im Beton  $\sigma_c < n \cdot \rho \cdot E_c \cdot \epsilon_{cs}$ , Druckspannung in der Bewehrung  $|\sigma_s| < E_s \cdot \epsilon_{cs}$ ) und führen für sich alleine nicht zu einer Rissbildung des Betons. Ähnliche Effekte könnten grundsätzlich auch bei unterschiedlichen Temperaturexpansionskoeffizienten von Beton und Bewehrung entstehen (was bei neuen Arten von Bewehrung wie GFK, Bambus etc. zu beachten wäre).

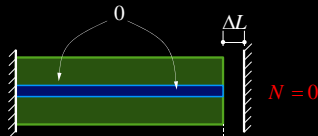
## Äusserer und innerer Zwang

**Äusserer Zwang** (z.B. aufgezwungene Längenänderung oder behinderte Verkürzung infolge Temperaturabfall)

Einwirkung:  
aufgezwungene Dehnung  
in Beton und Bewehrung  $\varepsilon_a$   
z.B. durch eine  
Temperaturänderung  $\alpha_T \Delta T$



**Gedankenmodell:**  
Schritt 1: freie Verkürzung  
 $\Delta L = \varepsilon_a L$



Schritt 2: Aufgezwungene  
Längenänderung  $\Delta L = \varepsilon_a L$



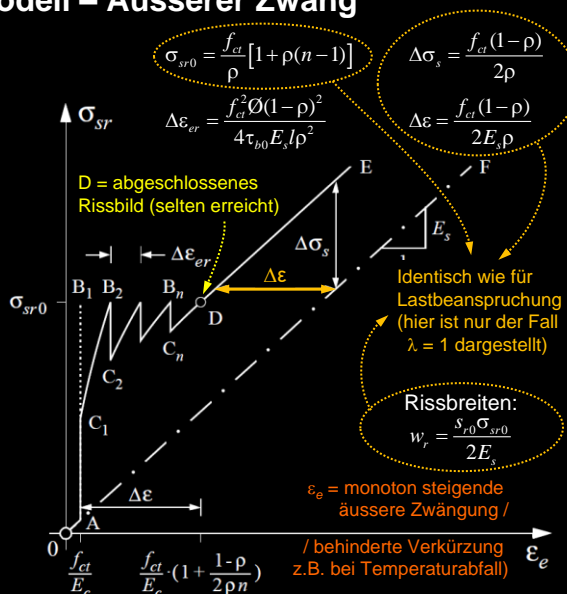
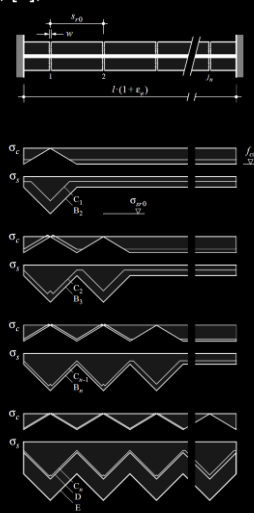
Analog wie Last mit Verformungssteuerung

Äusserer Zwang, in Form einer aufgezwungenen Längenänderung oder einer (vollständig) behinderten Verkürzung infolge eines Temperaturabfalls, führt zu einer Normalkraft im Zugglied.

Als Modellvorstellung kann man den Beton sich zuerst frei verkürzen lassen und dann, ähnlich einem verformungsgesteuerten Versuch, eine Verlängerung aufzwingen, sodass dass die Längenänderung wie gefordert 0 ist.

## Zuggurtmodell – Äusserer Zwang

- [1], Seite 3.7f; [5], Seite 160f



Die Zugkraft nimmt zunächst mit der Dehnung linear zu (entsprechend der ideellen Steifigkeit des ungerissenen Zugglieds).

Die Abbildung rechts zeigt die Stahlspannung im Riss in Funktion der aufgezwungenen Dehnung (resp. der behinderten Verkürzung). Die Stahlspannungen wachsen zunächst linear an ( $\sigma_s = E_s \epsilon_e$ ) und nehmen bei der Rissbildung schlagartig zu. Beim Erreichen der Risszugkraft wird jedoch, im Gegensatz zur Lastbeanspruchung, die Spannung  $\sigma_{sr0}$  (Punkt B1) nicht erreicht, da die Steifigkeit, und damit die Zwangsnormalkraft, beim Erstriss schlagartig absinkt. Anschliessend nimmt die Kraft, und damit die Spannung im Erstriss, wieder zu; unmittelbar vor der Bildung des nächsten Risses wird im Erstriss  $\sigma_{sr0}$  (Punkt B2) erreicht. Bei weiterer Erhöhung der aufgezwungenen Dehnung entstehen sukzessive weitere Risse, bis das abgeschlossene Rissbild erreicht ist. A diesem Moment (Punkt D) nimmt die Zugkraft, und damit die Stahlspannung in den Rissen, über den Wert  $\sigma_{sr0}$  hinaus mit zunehmender aufgezwungener Dehnung linear zu. Die Dehnungsdifferenz  $\Delta\epsilon$  zwischen der tatsächlichen Kennlinie und derjenigen des nackten Betonstahls, und damit der Verlauf der Stahlspannungs-Dehnungs-Kurve, ist identisch mit dem Wert für Lastbeanspruchung.

Die Spannungen in der Bewehrung bei der (Zweit-)Rissbildung  $\sigma_{sr0}$  und die Rissbreiten  $w_r$  stimmen mit denjenigen unter Lastbeanspruchung überein.

Zu beachten ist, dass für übliche Verhältnisse unter äusserem Zwang selten ein abgeschlossenes Rissbild erreicht wird, die Stahlspannungen im Riss also auf  $\sigma_{sr0}$  begrenzt bleiben. Höhere Stahlspannungen resultieren beispielsweise in verformungsgesteuerten Zugversuchen.

## Beispiel äusserer Zwang

Beispiel 2 ([1], Seite 3.8): Wand  $b = 300$  mm, an den Enden unverschieblich gehalten, erfährt eine Abkühlung um  $30^\circ\text{C}$  ( $\alpha_s = \alpha_c = 10^{-5}/^\circ\text{C}$ )

Beton C30/37  $\rightarrow f_{ctm} = 2.9$  MPa,  $E_c = 33.6$  GPa

Betonstahl B500B  $\rightarrow E_s = 205$  GPa

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 150^2} = 0.894\%$$

Maximaler Rissabstand

$$s_{r,0} = \frac{16}{4} \left( \frac{1}{0.00894} - 1 \right) = 444 \text{ mm} \quad (\rightarrow \text{minimal } 222 \text{ mm})$$

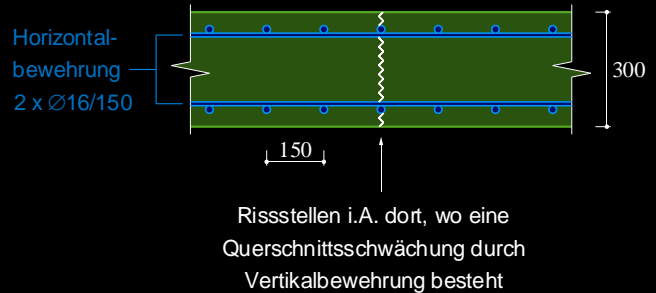
Stahlspannung am Riss

$$\sigma_{sr,0} = 2.9 \left( \frac{1}{0.00894} - 1 + 6.1 \right) = 339 \text{ MPa}$$

Rissbreiten mit  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr,0}$

$$\lambda = 1 \rightarrow w_r = 0.37 \text{ mm}$$

$$\lambda = 1/2 \rightarrow w_r = 0.28 \text{ mm}$$



## Beispiel äusserer Zwang

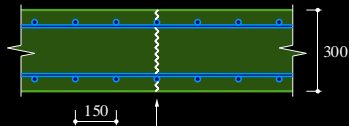
Beispiel 2 ([1], Seite 3.8), Rissbild nicht abgeschlossen, da  $\Delta\varepsilon_r < f_{ct}/E_c + \Delta\varepsilon$ :

Horizontale Länge der  $\sigma_{sr}$ - $\varepsilon$ -Kurve mit  $\lambda=1$  und  $\tau_{b0} = 2f_{ctm}$ :

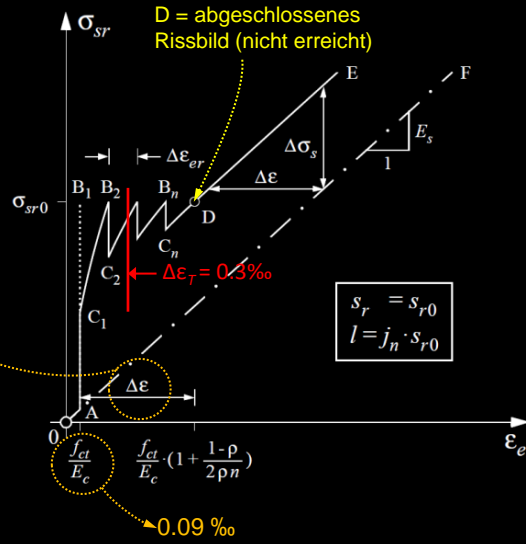
$$\Delta\varepsilon = \frac{f_{ct}(1-\rho)}{2E_s\rho} = \frac{2.9(1-0.00894)}{2 \cdot 205'000 \cdot 0.00894} = 0.78\%$$

Zwängung aus Temperaturänderung:

$$\Delta\varepsilon_r = \Delta T \cdot \alpha_c = 30^\circ\text{C} \cdot \frac{10^{-5}}{^\circ\text{C}} = 0.3\%$$



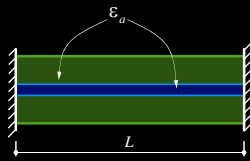
Rissstellen i.A. bei Querbewehrungsstäben



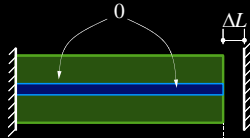
# Äusserer und innerer Zwang

**Äusserer Zwang** (z.B. aufgezwungene Längenänderung oder behinderte Verkürzung infolge Temperaturabfall)

Einwirkung:  
aufgezwungene Dehnung in Beton und Bewehrung  $\varepsilon_a$  z.B. durch eine Temperaturänderung  $\alpha_T \Delta T$



**Gedankenmodell:**  
Schritt 1: freie Verkürzung  $\Delta L = \varepsilon_a L$

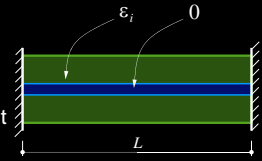


Schritt 2: Aufgezwungene Längenänderung  $\Delta L = \varepsilon_a L$

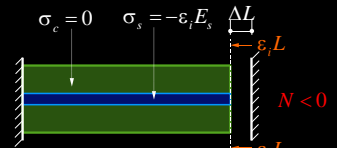


**Innerer Zwang** (z.B. Schwinden)

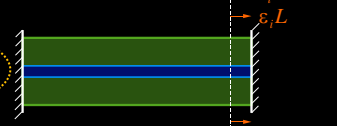
Einwirkung:  
Dehnung im Beton  $\varepsilon_i$  z.B. durch Schwinden, Bewehrung schwindet nicht



**Gedankenmodell:**  
Schritt 1: Aufgezwungene Verkürzung  $\Delta L = \varepsilon_i L$



Schritt 2: Aufgezwungene Längenänderung  $\Delta L = \varepsilon_i L$



Analog wie Last mit Verformungssteuerung

Schwindet der Beton (innerer Zwang), resultiert wie bei äusserem Zwang eine Zugkraft, da sich das Zugglied nicht verkürzen kann. Im Unterschied zum äusseren Zwang gibt es vor der Rissbildung keine Spannungen im Stahl, da keine Dehnung des Zugglieds auftritt und die Bewehrung, anders als beim äusseren Zwang, keine (behinderte) Dehnung erfährt.

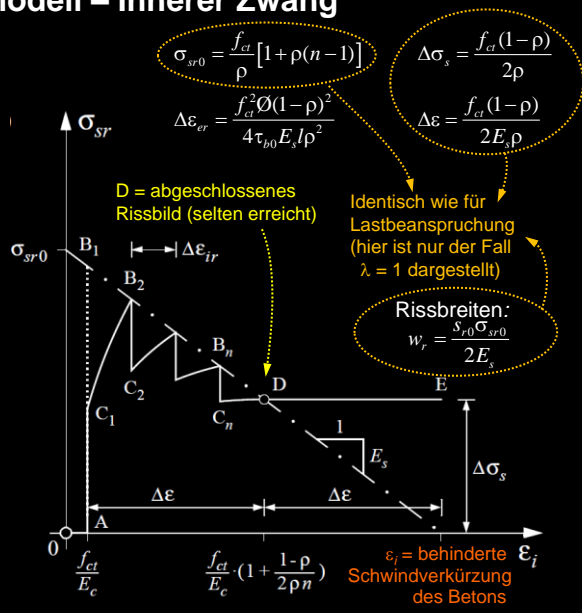
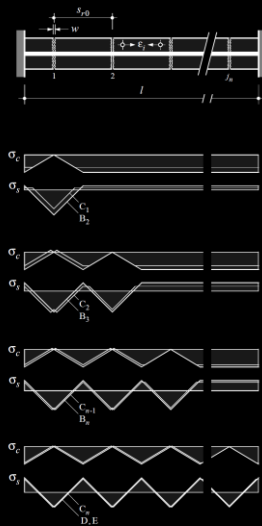
Zwingt man dem Zugglied in Gedanken eine Verkürzung um  $\varepsilon_i$  auf, weist die Bewehrung bei  $\varepsilon_i$  eine Druckspannung  $-E_s \varepsilon_i$  auf (und der Beton ist bei  $\varepsilon_i$  spannungsfrei, da  $\varepsilon_i$  dem Schwindmass und damit der freien, unbehinderten Betonverkürzung entspricht). Wird das Zugglied nun wieder um  $\varepsilon_i$  verlängert (so dass die Längenänderung wie gefordert = 0 ist), entspricht dies einer äusseren Zwangsbeanspruchung des Betrags  $\varepsilon_a = \varepsilon_i$ , wobei die Zugspannungen in der Bewehrung nicht von 0, sondern ausgehend vom Wert  $-E_s \varepsilon_i$  ansteigen, also entsprechend geringer sind als für äusseren Zwang.

NB. Um die Dehnungs-Spannungs-Beziehungen für zunehmende Grösse des inneren resp. äusseren Zwangs zu erhalten, muss obiges Gedankenexperiment «punktweise» durchgeführt werden, also jeweils die einer angenommenen Grösse des Zwangs entsprechende Verkürzung zulassen resp. aufzwingen und dann die ursprüngliche Länge wieder herstellen.



## Zuggurtmodell – Innerer Zwang

- [1], Seite 3.9; [5], Seite 161ff



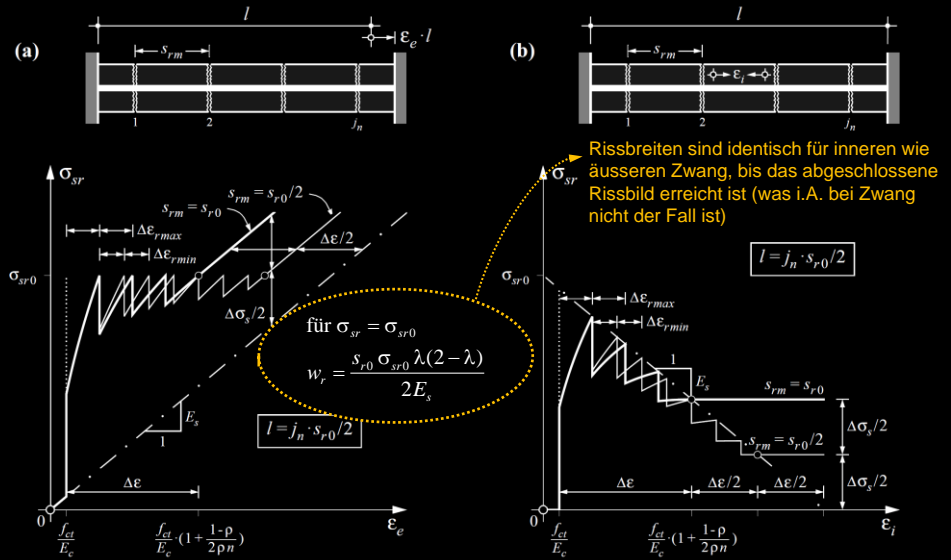
Beim Erreichen der Risszugkraft wird wie bei äusserem Zwang die Spannung  $\sigma_{sr0}$  (Punkt B1) nicht erreicht, da die Steifigkeit, und damit die Zwangsnormalkraft, beim Erstriss schlagartig absinkt. Sodann nimmt die Kraft, und damit die Spannung im Erstriss, wie bei äusserem Zwang wieder zu; die Spannungen sind jedoch bei gleicher Dehnung um den Betrag  $E_s \epsilon_i$  kleiner als bei äusserem Zwang, da die Steifigkeit des Zugglieds mit jedem Riss abnimmt, d.h. der Zwang sich abbaut. Anschaulich kann die Differenz  $E_s \epsilon_i$  (für einen bestimmten Wert von  $\epsilon_i$ ) mit der Modellvorstellung auf der vorherigen Seite hergeleitet werden.

Zwischen den Rissen erfährt die Bewehrung Druckspannungen (womit gewährleistet ist, dass die Längenänderung der Bewehrung insgesamt verschwindet). Wenn sich das abgeschlossene Rissbild eingestellt hat (Punkt D) bleiben die Stahlspannungen in den Rissen gleich (Verbundspannungen konstant); die Rissbreiten nehmen weiter zu, da sich der Beton zwischen den Rissen weiter verkürzt.

Zu beachten ist, dass für übliche Verhältnisse auch unter innerem Zwang kaum jemals ein abgeschlossenes Rissbild erreicht wird. Die Annahme einer Stahlspannungen im Riss von  $\sigma_{sr0}$  (wie bei äusserem Zwang resp. Last) liegt somit zumindest bei längeren Bauteilen nicht allzu stark auf der sicheren Seite. Die Rissbreiten  $w_r$  stimmen mit denjenigen unter Lastbeanspruchung sowie unter äusserem Zwang überein: Zwar nehmen die Stahlspannungen im Riss (und damit die Verlängerung der Bewehrung) mit zunehmendem innerem Zwang ab, der Beton zwischen den Rissen verkürzt sich jedoch, (während er sich bei äusserem Zwang und Last etwas verlängert), wodurch insgesamt die gleiche Rissbreite resultiert.

## Zugurtmodell – Innerer / äusserer Zwang

- [5], Seite 163, Bild 6.9



Bis zum Abschluss des abgeschlossenen Rissbildes (welches in der Regel nicht erreicht wird) kann für die Rissbreiten die gleiche Beziehung verwendet werden wie für die Lastbeanspruchung.

## Zuggurtmodell – Mindestbewehrung

Eine Mindestbewehrung ([1], Seite 3.10f) ist vorzusehen, um

- einen **Sprödbruch** beim Auftreten des ersten Risses zu vermeiden (SIA 262, Fig. 31 und Tab. 17), also  $\sigma_{sr0} < f_{sd}$ , mit  $\sigma_{sr0}$  = Stahlspannung im Riss bei Rissbildung:

$$\sigma_{sr0} = f_{ctd} \left( \frac{1}{\rho} - 1 + n \right) \leq f_{sd} \rightarrow \rho_{min} = \frac{f_{ctd}}{f_{sd} - f_{ctd}(n-1)} \text{ mit } f_{ctd} = \text{ Bemessungswert von } f_{ct}$$

Nachweis nach SIA 262 Ziff. 4.4.1 → je nach Fall nach Ziff. 4.4.1.3 und 4.4.1.4:

Normalfall:  $f_{ctd} = k_t f_{ctm}$ , mit  $k_t = \frac{1}{1+0.5t}$  (t: Bauteilabmessung in m)

Zwang (\*):  $f_{ctd} = k_t f_{ctk0.95}$ , mit  $f_{ctk0.95} = 1.3 f_{ctm}$  = oberer charakteristischer Wert von  $f_{ct}$

(\*) wenn ein hoher Wert von  $f_{ct}$  eines Bauteils ungünstig für angrenzende Bauteile ist

- ein ausreichendes **Verformungsvermögen** sicherzustellen  
→ Regeln für die konstruktive Durchbildung (maximale Stababstände etc.)
- die **Rissbreiten** auf akzeptable Werte zu beschränken  
→ Begrenzung von  $\sigma_{sr}$  (SIA 262 Korrigenda C1, Fig. 31 / Tab. 17 oder direkt mit Zuggurtmodell)

NB: Der Effekt der feineren Rissverteilung bei Verwendung kleiner Durchmesser der Bewehrung ist in der SIA 262 seit der Korrigenda C1 (2017) erfasst, dafür wird der aus dem Zuggurtmodell nicht direkt ersichtliche Einfluss des Abstands der Bewehrungsstäbe seither nicht mehr berücksichtigt.

### Ergänzende Bemerkungen

- Mit einer ausreichenden Mindestbewehrung wird insbesondere die Voraussetzung für die Anwendung plastischer Berechnungsverfahren geschaffen (siehe Querkraft, Fachwerkmodelle und Spannungsfelder sind liefern nur dann einen unteren Grenzwert für die Traglast, wenn keine spröden Versagensarten auftreten).
- Die Begrenzung der Rissbreiten ist vor allem für die Dauerhaftigkeit von Stahlbetontragwerken relevant. Die in den Normen vorgegebenen Überdeckungen sind nur dann ausreichend, wenn keine grossen Risse vorhanden sind (durch welche insbesondere Chloride viel schneller zur Bewehrung vordringen können als durch den Überdeckungsbeton).

## Normalkraft – Zusammenfassung

1. Die Ermittlung des Bruchwiderstands unter Normalkraft ist sehr einfach. Der Zugwiderstand entspricht demjenigen des Betonstahls (Gleichgewicht im Riss,  $\sigma_c = 0$ ), der Druckwiderstand der Summe der Widerstände von Beton und Betonstahl.
2. Mit einer Umschnürungsbewehrung können der Druckwiderstand und insbesondere die Duktilität bei Druckbeanspruchung signifikant erhöht werden. Eine Umschnürungsbewehrung ist etwa doppelt so wirksam wie eine Druckbewehrung.
3. Bei Zugbeanspruchung unterscheidet man «Zustand I» (ungerissen), «Zustand II» (gerissen elastisch) und «Zustand III» (plastische Verformungen). Diese Unterscheidung findet auch bei Biegung Anwendung.
4. Das Verhalten im Zustand I, und näherungsweise für mässige Druckbeanspruchung, kann mit der Wertigkeit  $n = E_s/E_c$ ,  $\sigma_s = n\sigma_c$  («n-Theorie») untersucht werden.
5. Das Verhalten im Zustand II kann mit dem Zuggurtmodell analytisch (und somit sehr anschaulich) mit ausreichender Genauigkeit untersucht werden, wobei der Fall Zwang sehr praxisrelevant ist. Folgerungen:
  - kleine Rissweiten resultieren für kleine  $\emptyset$ , grosse  $\rho$  und kleine  $f_{ct}$  (hohe  $f_{ct}$  ungünstig!)
  - Rissweiten sind für inneren und äusseren Zwang bei  $\varepsilon_r = \varepsilon_\phi$  identisch
  - unter äusserem Zwang wird das abgeschlossene Rissbild selten erreicht (möglich z. Bsp. bei grossen Setzungen eines Auflagers), unter innerem Zwang praktisch nie.
5. Das Verhalten im Zustand III, insbesondere die Duktilität, kann ebenfalls mit dem Zuggurtmodell untersucht werden. Folgerungen:
  - (zu) guter Verbund wirkt sich ungünstig auf die Duktilität aus
  - Betonstahl mit zu geringer Duktilität beeinträchtigt das Verformungsvermögen stark

NB: Es wurden ausschliesslich Zug- und Druckglieder mit symmetrischer Bewehrung untersucht. Das Verhalten bei nicht symmetrischer Bewehrung ist komplizierter. Es kann analog zu «Biegung und Normalkraft» (mit  $M = 0$ ) untersucht werden.