

# Scheibenelemente

In diesem Kapitel werden die Gleichgewichtsbedingungen für Scheibenelemente aufgestellt und die Fließbedingungen für orthogonal bewehrte Scheibenelemente hergeleitet.

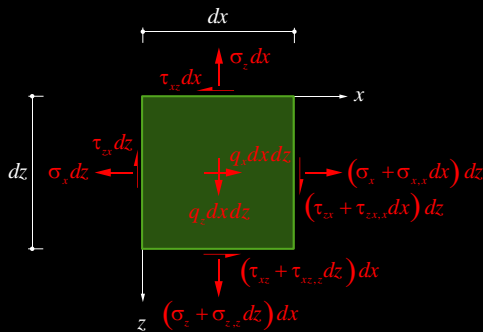
Dabei wird ein konstanter Wert der Betondruckfestigkeit (keine Abhängigkeit vom Verzerrungszustand) vorausgesetzt.

Angaben zu schief bewehrten Scheibenelementen und zur Berücksichtigung einer vom Verzerrungszustand abhängigen Betondruckfestigkeit sind Gegenstand der Vorlesung «Advanced Structural Concrete». Dort wird auch das Last-Verformungsverhalten von Scheibenelementen behandelt.

In der Vorlesung Stahlbeton I werden Scheiben in der Ebene  $(x, z)$  betrachtet, da dies der Situation eines Trägerstegs entspricht (Längsachse des Trägers in  $x$ -Richtung). Somit werden Spannungen  $\{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$  resp. Membrankräfte  $\{n_x, n_z, n_{xz}\} = h \cdot \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$  untersucht. Selbstverständlich können die Gleichgewichts- und Transformationsformeln auch für Scheiben in der Ebene  $(x, y)$  analog formuliert werden (Spannungen  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$  und Membrankräfte  $\{n_x, n_y, n_{xy}\} = h \cdot \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ ).

# Scheiben – Gleichgewicht

## Gleichgewichtsbedingungen



Positive Spannungen wirken an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Achsenrichtung  
 Positive Membrankräfte entsprechen positiven Spannungen  
 Indizes: 1-Richtung, 2-Normalenrichtung

Gleichgewicht in Richtungen x, z:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0$$

resp. in Membrankräften  
 ( $\sigma, \tau$  konstant über Scheibendicke  $h$ ):

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xz}}{\partial z} + h \cdot q_x = 0$$

$$\frac{\partial n_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial n_z}{\partial z} + h \cdot q_z = 0$$

$$(n_x = h\sigma_x \quad n_z = h\sigma_z \quad n_{xz} = h\tau_{xz})$$

mit (Momentenbedingung  $M_y = 0$ ):

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \text{resp.} \quad n_{zx} = n_{xz}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für Scheiben können in Spannungen  $\{\sigma\}$  oder in Membrankräften  $\{n\}$  formuliert werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Spannungen über die Scheibendicke  $h$  (oft auch mit  $t$  oder  $b_w$  bezeichnet) konstant sind. Somit gilt  $\{n\} = h \cdot \{\sigma\}$ . In den Vorlesungen Stahlbeton I/II und «Advanced Structural Concrete» gelten die Vorzeichenkonventionen gemäss Abbildung oben.

## Ergänzende Bemerkung

Für linear elastisches Verhalten können Scheibenprobleme analytisch mit der Airyschen Spannungsfunktion  $F = F(x, y)$  (G.B. Airy, 1862) untersucht werden. Mit dem Ansatz

$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial z^2} F, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} F$$

für die Spannungsfunktion  $F$  werden die Gleichgewichtsbedingungen identisch erfüllt, und mit der aus den Verträglichkeitsbedingungen für linear elastisches Verhalten resultierenden Potentialgleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_x + \sigma_z) = \Delta (\sigma_x + \sigma_z) \quad \left( \Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right): \text{Laplace-Operator}$$

folgt die Bipotentialgleichung

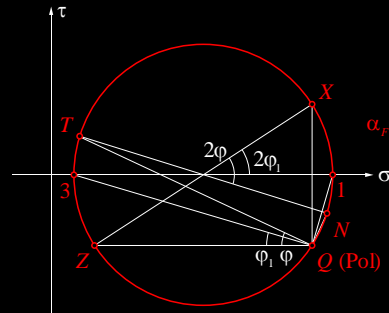
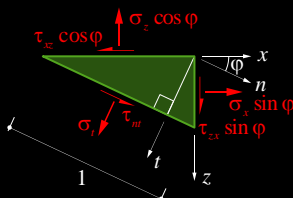
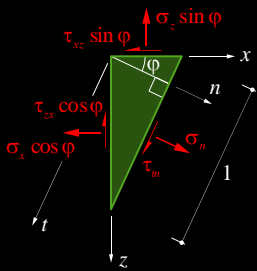
$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} F + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} F + \frac{\partial^4}{\partial z^4} F = \Delta \Delta F = 0$$

Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen, zum Beispiel erfüllen die Funktionen  $F = x, x^2, x^3, z, z^2, z^3, xz, x^2z, x^3z, xz^2, xz^3$  die Bedingung  $\Delta \Delta F = 0$ . Die Schwierigkeit besteht im Auffinden passender Lösungen, welche die Randbedingungen befriedigen; es existieren umfangreiche Tabellenwerke für Standardfälle.

Heute stehen leistungsfähige Computer und Programme zur Verfügung, welche eine numerische Approximation der linear elastischen Lösung nach der Methode der finiten Elemente ermöglichen. Die Anwendung der Airyschen Spannungsfunktion hat deshalb nur noch einen geringen Stellenwert.

# Scheiben – Spannungstransformation

## Spannungstransformation: Mohrscher Kreis



$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_z \sin^2 \varphi + 2\tau_{xz} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma_t = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_z \cos^2 \varphi - 2\tau_{xz} \sin \varphi \cos \varphi$$

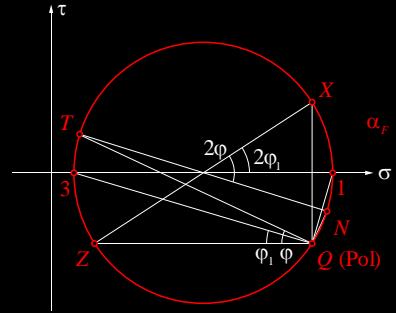
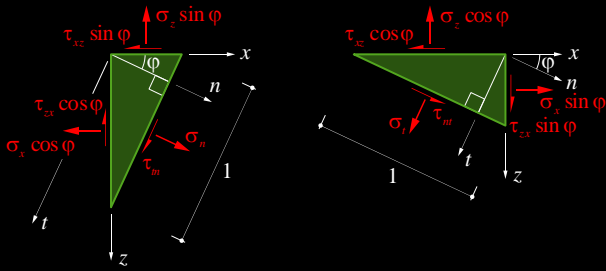
$$\tau_{nt} = (\sigma_z - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

## Wiederholung aus Mechanik und Baustatik

- Der Spannungszustand  $\{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$  kann in eine beliebige Richtung transformiert werden. Es existieren zwei *Hauptrichtungen*, in denen die Schubspannungen verschwinden und die Normalspannungen maximal resp. minimal werden. Die Transformation der Membrankräfte erfolgt analog (Faktor  $h$ ).
- Der Spannungszustand  $\{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$  resp. die Membrankräfte  $\{n_x, n_z, n_{xz}\} = h \cdot \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$  können mit einem Mohrschen Kreis dargestellt werden. Daraus können die Hauptspannungen und die Richtungen, in denen diese auftreten, ermittelt werden.
- Die Vorzeichenkonvention im Mohrschen Kreis weicht von der üblichen Vorzeichenkonvention ab (dies ist unumgänglich, da im Mohrschen Kreis die gemäss üblicher Vorzeichenkonvention gleiches Vorzeichen aufweisenden Schubspannungen ein unterschiedliches Vorzeichen haben). In den Vorlesungen Stahlbeton I/II und «Advanced Structural Concrete» gilt die angegebene Konvention (Schubspannung im Uhrzeigersinn positiv, d.h.  $\tau_{zx}$  hat das gleiche Vorzeichen wie nach üblicher Konvention,  $\tau_{xz}$  umgekehrtes Vorzeichen).

# Scheiben – Spannungstransformation

## Spannungstransformation: Mohrscher Kreis



$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

$$\tau_m = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xz} \cos 2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

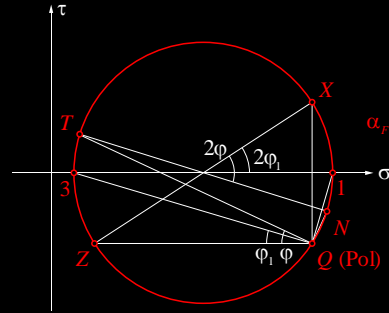
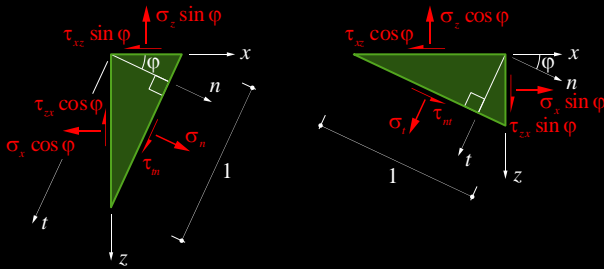
$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

*Wiederholung aus Mechanik und Baustatik*

Das gleiche in anderer Schreibweise.

# Scheiben – Spannungstransformation

## Spannungstransformation: Mohrscher Kreis



$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xz} \sin 2\varphi$$

$$\tau_m = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xz} \cos 2\varphi$$

$$\tau_{nt} = \tau_m = 0 \rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \right)$$

$$\sigma_{1,3} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}}_{\text{Mittelpunkt}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}}{2}}_{\text{Radius Mohrscher Kreis}}$$

## Wiederholung aus Mechanik und Baustatik

Ermittlung der Hauptrichtungen und der Hauptspannungen.

## Scheiben – Gleichgewicht

### Gleichgewicht («Stahlbeton = Beton + Bewehrung»)

Orthogonal bewehrtes Element (Bewehrungsrichtungen  $x, z$ ):

- Beton homogen und isotrop, nimmt Druckspannungen  $\leq f_c$  in beliebige Richtung auf aber keine Zugspannungen
- Bewehrung nimmt nur Kräfte in Stabrichtung auf, bis maximal zum Betrag  $f_s$  und ist so verteilt und verankert, dass mit äquivalenten Spannungen gerechnet werden kann
- Starrer Verbund zwischen Beton und Bewehrung

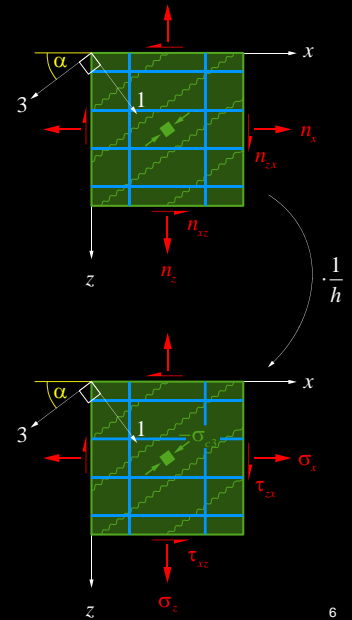
In Membrankräften:

$$\begin{aligned} n_x &= n_{xc} + n_{xs} = n_{xc} + a_{sx} \sigma_{sx} \\ n_z &= n_{zc} + n_{zs} = n_{zc} + a_{sz} \sigma_{sz} \\ n_{xz} &= n_{xzc} + n_{xzs} = n_{xzc} \\ (n_x = h \sigma_x \quad n_z = h \sigma_z \quad n_{xz} = h \tau_{xz}) \end{aligned}$$

In äquivalenten Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xc} + \rho_x \sigma_{sx} \\ \sigma_z &= \sigma_{zc} + \rho_z \sigma_{sz} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xzc} \end{aligned}$$

(Bewehrungsgehalte  $\rho_x = a_{sx}/h$ ,  $\rho_z = a_{sz}/h$ )



04.12.2020

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

6

## Kräfte in orthogonal bewehrten Stahlbetonscheiben

### Annahmen

- Der Beton verhält sich homogen und isotrop. Er kann Druckspannungen der Grösse  $f_c$  in eine beliebige Richtung übertragen (jedoch keine Zugspannungen).
- Die Bewehrung verläuft in Richtung der Koordinatenachsen  $x$  und  $z$  übernimmt nur Kräfte in Stabrichtung bis zu einem Betrag von  $f_s$ .
- Die Dehnungen von Beton und Bewehrung sind gleich gross (starrer Verbund).
- Die Spannungen in Beton sind über die Scheibendicke konstant, und die Kräfte in der Bewehrung werden als äquivalente, über die Scheibendicke konstante Spannungen betrachtet.

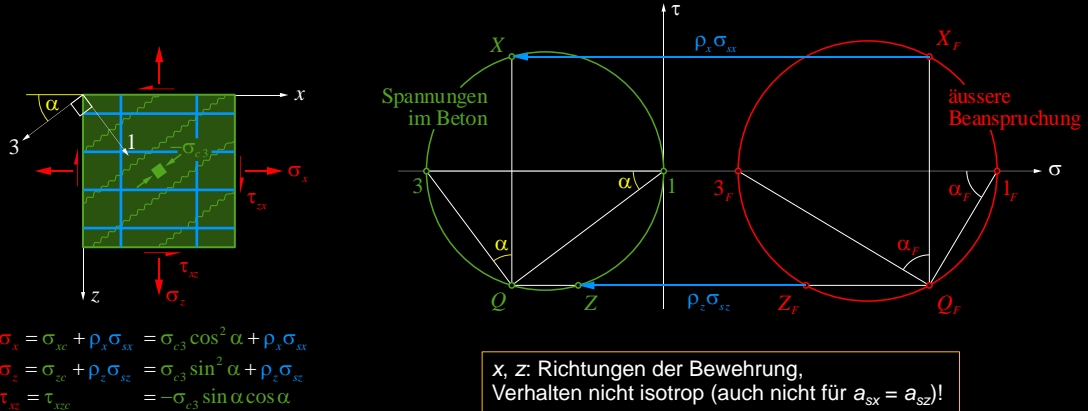
Die aufgebrachte Beanspruchung  $\{n_x, n_z, n_{xz}\} = h \cdot \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$  muss der Summe der Kräfte im Beton  $\{n_x, n_z, n_{xz}\}_c = h \cdot \{\sigma_{xc}, \sigma_{zc}, \tau_{xzc}\}$  und in der Bewehrung  $\{n_x, n_z, 0\} = h \cdot \{\rho_x \sigma_{sx}, \rho_z \sigma_{sz}, 0\}$  entsprechen, wobei für orthogonale Bewehrung (nur Kräfte in Stabrichtung)  $n_{xzs} = 0$  gilt.

## Scheibenelemente – Gleichgewicht

### Gleichgewicht («Stahlbeton = Beton + Bewehrung»)

Orthogonal bewehrtes Element (Bewehrungsrichtungen  $x, z$ ):

Darstellung mit Mohrschen Kreisen (bei orthogonaler Bewehrung einfach, da  $\tau_{xz} = 0$ ):



04.12.2020

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

7

## Kräfte in orthogonal bewehrten Stahlbetonscheiben

Da die Bewehrung keinen Anteil an die Membranschubkraft  $n_{xz}$  (resp. an die Schubspannung  $\tau_{xz}$ ) leistet, resultiert mit Ausnahme des Spezialfalls  $n_{xz} = \tau_{xz} = 0$  ein gegenüber den Bewehrungsrichtungen geneigtes Druckfeld im Beton (Neigung  $\alpha$  gegenüber  $x$ -Achse).

Die Koordinatenrichtungen wurden so gewählt, dass sie mit den Bewehrungsrichtungen übereinstimmen (meist  $x$ -Achse in Richtung der stärkeren Bewehrung). Dies ist in den Vorlesungen Stahlbeton I/II und «Advanced Structural Concrete» stets der Fall.

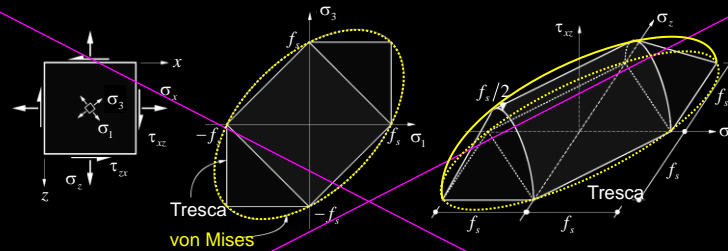
Das Verhalten ist auch bei «isotroper Bewehrung» (gleiche Bewehrung in beide Richtungen) keineswegs isotrop, wie folgende einfachen Beanspruchungszustände (bei isotroper Bewehrung  $\rho_x = \rho_z = \rho$ ) illustrieren:

- Eine reine Schubbeanspruchung  $\tau$  bezüglich der Bewehrungsrichtungen ( $\sigma_x = \sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau$ ) führt zu Zugspannungen in beiden Bewehrungen ( $\sigma_{sx} = \sigma_{sz} = \tau / \rho$ ) und einem unter  $45^\circ$  geneigten Druckfeld  $\sigma_{c3} = -2\tau$  im Beton
- Eine reine Schubbeanspruchung unter  $45^\circ$  zu den Bewehrungsrichtungen ( $\sigma_x = -\sigma_z = \tau, \tau_{xz} = 0$ ) entspricht Zugspannungen  $\sigma_{sx} = \tau / \rho$  in der  $x$ -Bewehrung, während in der  $z$ -Richtung Druckspannungen im Beton  $\sigma_{c3} = -\tau / (1 + n\rho)$  und in der Bewehrung  $\sigma_{sz} = -\tau \cdot n / (1 + n\rho)$  auftreten.

Anders als bei isotropen Baustoffen kann der Widerstand im Stahlbeton daher aufgrund der Grösse der einwirkenden Hauptspannungen (Hauptmembrankräfte) nicht beurteilt werden. Vielmehr ist es wichtig, in welche Richtung (bezüglich der Bewehrungsrichtungen) diese Hauptspannungen wirken. «Schub» ist im Stahlbeton stets auf die Richtung der Bewehrung bezogen!

## Scheibenelemente– Fließbedingungen

Fließbedingungen von Tresca und v. Mises für ebenen Spannungszustand  
 (für Stahlbeton nicht geeignet, auch nicht bei «isotroper Bewehrung»!)



Tresca

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) - f_s = 0$$

- Hauptspannungsebene: Sechseck
- Raum: zwei elliptische Kegel und verbindender elliptischer Zylinder

v. Mises

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{xz}^2 - f_s^2 = 0$$

- Hauptspannungsebene: dem Tresca-Sechseck umschriebene Ellipse
- Raum: Der Fließbedingung von Tresca umschriebenes Ellipsoid

04.12.2020

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

8

Fließbedingungen für isotrope Materialien (Stahl: Tresca, von Mises) können nicht auf Stahlbeton angewendet werden, auch nicht für die Bemessung der Bewehrung und selbst dann nicht, wenn diese «isotrop» (gleicher Bewehrungsgehalt in beide Richtungen) ist. Die Anwendung kann auf der sicheren oder unsicheren Seite liegen.

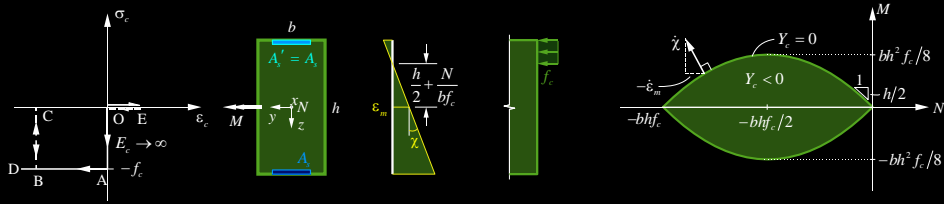
Ein offensichtlicher Unterschied besteht beispielsweise im Zug-/Druckwiderstand: Eine Beanspruchung in eine Bewehrungsrichtung beeinflusst den Widerstand der Bewehrung in der anderen Bewehrungsrichtung nicht; nach Tresca / von Mises wird der Druckwiderstand in eine Richtung dagegen durch eine senkrecht dazu wirkende Zugbeanspruchung reduziert (und umgekehrt). Andererseits hat ein Material mit Fließbedingungen nach Tresca / von Mises einen Schubwiderstand, eine orthogonale (isotrope) Bewehrung dagegen nicht.



# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung

(1) Beton allein



$$\text{Druckzone oben: } N_c = -\left(\frac{h}{2} - \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right)$$

$$\text{Druckzone unten: } N_c = -\left(\frac{h}{2} + \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad -M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right)$$

$$\text{Fließfunktion: } Y_c = \pm M_{yc} + N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2b f_c}\right) = 0$$

$$\text{Fließgesetz: } \pm \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}} = \frac{h}{2} + \frac{N_c}{b f_c} = \frac{\partial Y_c / \partial N_c}{\partial Y_c / \partial M_{yc}}$$

→ **Aplastischer** Bereich  $Y_c < 0$ , begrenzt durch **Fließgrenze**  $Y_c = 0$  (besteht aus **zwei Parabeln**)

→ **Plastische Verzerrungsincremente** sind **orthogonal zur Fließgrenze**, nach aussen gerichtet (Fließgesetz, allgemein  $\dot{\epsilon} = \kappa \cdot \text{grad} Y$ )

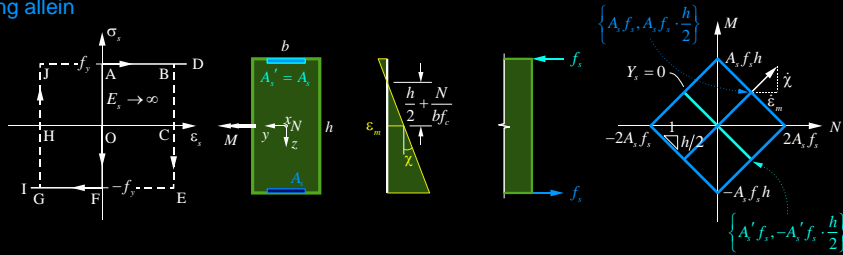
## Wiederholung aus Kapitel Biegung und Normalkraft (resp. Baustatik)

- Interaktionsdiagramme von Stahlbetonträgern unter Biegung und Normalkraft können, für ideal plastisches Verhalten, durch eine grafische Linearkombination der aplastischen Bereiche von Beton und Bewehrung ermittelt werden.

## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung,  $A_s = A'_s$

(2) Bewehrung allein



- **Aplastischer** Bereich  $Y_s < 0$  ist bei zwei Bewehrungslagen ein **Parallelogramm** (bei symmetrischer Bewehrung  $A_s = A'_s$  Rhombus), das durch die den beiden Bewehrungslagen entsprechenden Vektoren aufgespannt wird
- Kombination der beiden Bewehrungslagen grafisch durch geometrische Linearkombination (siehe Kombination von Beton und Bewehrung)
- Eckpunkte: beide Bewehrungen fließen, Seiten: eine Bewehrung fließt
- **Plastische Verzerrungsincremente** sind **orthogonal zur Fließgrenze**  $Y_s = 0$ , **nach aussen gerichtet** (Fließgesetz)

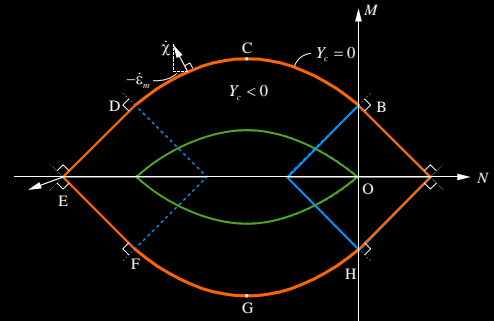
Wiederholung aus Kapitel Biegung und Normalkraft (resp. Baustatik)

## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung,  $A_s = A'_s$

(3) Stahlbeton = Beton + Bewehrung

- **Fliessfigur des Stahlbetons** durch geometrische Linearkombination der Fließgrenzen  $Y_c = 0$  und  $Y_s = 0$
- **Vorgehen:** Fließgrenze ( $Y_c = 0$ ) rein translatorisch mit ihrem Ursprung entlang Fließgrenze ( $Y_s = 0$ ) bewegen (oder umgekehrt  $Y_s = 0$  entlang  $Y_c = 0$ )
- Resultierender Bereich  $Y < 0$  entspricht dem **aplastischen Bereich** des Stahlbetonquerschnitts, mindestens schwach konvex, Fließgesetz (Orthogonalität der plastischen Verzerrungsinkremente bezüglich Fließgrenze) gilt weiterhin
- Entlang gerader Stücke der Fließgrenze bleibt eine Bewehrung elastisch (starr)
- Vorgehen auf beliebige Bauteile und Beanspruchungen übertragbar



*Wiederholung aus Kapitel Biegung und Normalkraft (resp. Baustatik)*

# Scheibenelemente – Fließbedingungen

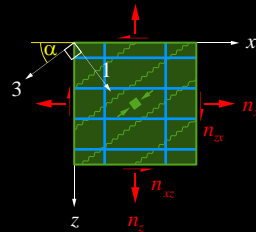
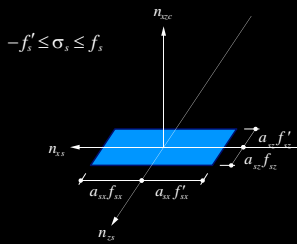
Fließbedingung für orthogonal bewehrte Scheiben  
 («Stahlbeton = Beton + Bewehrung»):

Scheibendicke  $h$

Beton und Stahl ideal plastisch, starrer Verbund

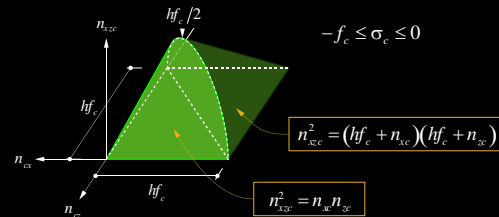
Bezeichnungen  $f_c$  und  $f_y$  (Zug) resp.  $f'_y$  (Druck) bei Bemessung ersetzen durch  $\bar{f}_c = k_c f_{cd}$  und  $\bar{f}_y = -f'_y = f_{sd}$

Fließbedingung Bewehrung:  
 (nimmt nur Kräfte in Stabrichtung auf)



Fließbedingung Beton:  
 (homogen, isotrop, mit  $f_{ct} = 0$ )

$$\begin{aligned} n_x &= n_{xc} + n_{xs} = n_{xc} + a_{sx} \sigma_{sx} \\ n_y &= n_{yc} + n_{ys} = n_{yc} + a_{sy} \sigma_{sy} \\ n_{xz} &= n_{xcz} + n_{xzs} = n_{xcz} \end{aligned}$$



Analog zur Konstruktion von Interaktionsdiagrammen für Biegung und Normalkraft können die Fließbedingungen orthogonal bewehrter Scheibenelemente unter Membranbeanspruchung durch eine grafische Linearkombination der applastischen Bereiche von Beton und Bewehrung ermittelt werden.

Da es sich um eine dreiparametrische Beanspruchung handelt, können die Fließbedingungen im Raum  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}\}$  resp.  $\{n_x, n_y, n_{xz}\} = h \cdot \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}\}$  dargestellt werden.

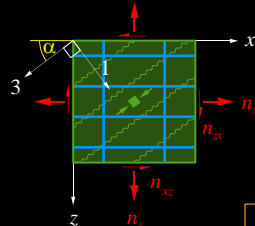
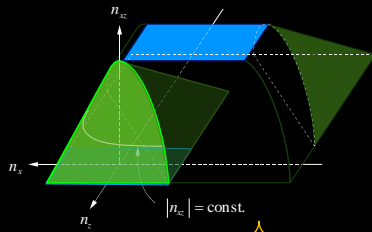
Der applastische Bereich jeder Bewehrungslage ist eine achsparallele Gerade. Diese beiden Geraden können zu einem Rechteck in der Ebene  $n_{xz} = \tau_{xz} = 0$  kombiniert werden.

Der applastische Bereich des Betons besteht aus zwei elliptischen Kegeln. Auf der Mantelfläche des vorderen Kegels erfolgt der Bruch, da die grösste Hauptspannung  $\sigma_{c1} = 0$  ist, auf der Mantelfläche des hinteren Kegels, da die kleinste Hauptspannung  $\sigma_{c3} = -f_c$  beträgt.

# Scheibenelemente – Fließbedingungen

## Fließbedingung für orthogonal bewehrte Scheiben

Geometr. Linearkombination Beton + Bewehrung

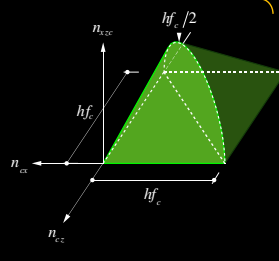
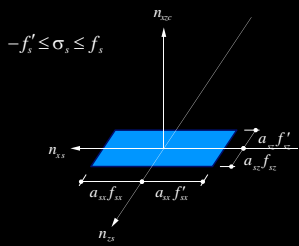


$$n_x = n_{xc} + n_{xs} = n_{xc} + a_{sx} \sigma_{sx}$$

$$n_z = n_{zc} + n_{zs} = n_{zc} + a_{sz} \sigma_{sz}$$

$$n_{xz} = n_{xzc} + n_{xzs} = n_{xzc}$$

**Vorgehen:**  
 Fließgrenze  $Y_c = 0$  rein translatorisch mit ihrem Ursprung entlang der Fließgrenze  $Y_s = 0$  bewegen (oder umgekehrt  $Y_s = 0$  entlang  $Y_c = 0$ )



# Scheibenelemente – Fließbedingungen

## Fließbedingung / Fließregimes Stahlbeton

Linearkombination der Fließbedingungen, d.h. verschieben der Fließbedingung des Betons (Ursprung) entlang der Fließbedingung der Bewehrung

«Stahlbeton = Stahl + Beton»

$$Y_1 = n_{xz}^2 - (a_{sx} f_{sx} - n_x)(a_{sz} f_{sz} - n_z) = 0$$

$$Y_2 = n_{xz}^2 - (hf_c - a_{sz} f_{sz} + n_z)(a_{sz} f_{sz} - n_z) = 0$$

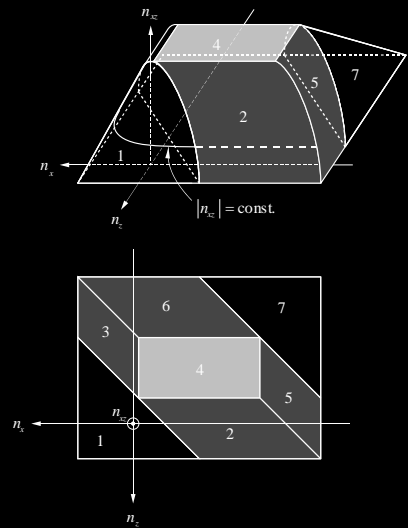
$$Y_3 = n_{xz}^2 - (a_{sx} f_{sx} - n_x)(hf_c - a_{sx} f_{sx} + n_x) = 0$$

$$Y_4 = n_{xz}^2 - (hf_c/2)^2 = 0$$

$$Y_5 = n_{xz}^2 + (a_{sx} f'_{sx} + n_x)(hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x) = 0$$

$$Y_6 = n_{xz}^2 + (hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z)(a_{sz} f'_{sz} + n_z) = 0$$

$$Y_7 = n_{xz}^2 - (hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x)(hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z) = 0$$



NB: Bewehrungsflächen je Längeneinheit in x- und z-Richtung  $a_{sx} = A_{sx}/s_x$   $a_{sz} = A_{sz}/s_z$

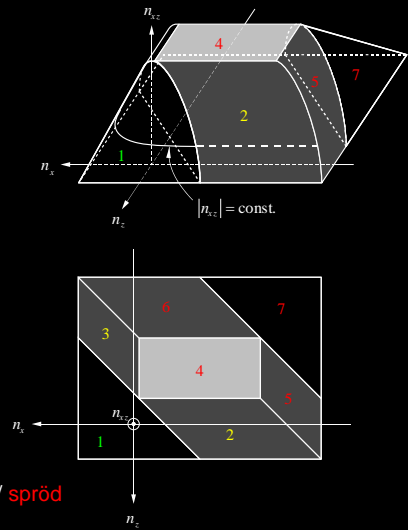
Die sieben Bruchregimes können auch analytisch hergeleitet werden.

## Scheibenelemente – Fließbedingungen

### Fließbedingung / Fließregimes Stahlbeton

- Y<sub>1</sub>: Beide Bewehrungen fließen auf Zug  
 ( $\sigma_{sx} = f_{sx}, \sigma_{sz} = f_{sz}, 0 \geq \sigma_{c3} \geq -f_c$ )
- Y<sub>2</sub>: z-Bewehrung fließt auf Zug, Beton bricht  
 ( $\sigma_{sz} = f_{sz}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{sx}$ )
- Y<sub>3</sub>: x-Bewehrung fließt auf Zug, Beton bricht  
 ( $\sigma_{sx} = f_{sx}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{sz}$ )
- Y<sub>4</sub>: Beton bricht  
 ( $\sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{sx}, -f'_{sz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{sz}$ )
- Y<sub>5</sub>: x-Bewehrung fließt auf Druck, Beton bricht  
 ( $\sigma_{sx} = -f'_{sx}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{sz}$ )
- Y<sub>6</sub>: z-Bewehrung fließt auf Druck, Beton bricht  
 ( $\sigma_{sz} = -f'_{sz}, \sigma_{c3} = -f_c, -f'_{sx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{sx}$ )
- Y<sub>7</sub>: Beide Bewehrungen fließen auf Druck, Beton bricht  
 ( $\sigma_{sx} = -f'_{sx}, \sigma_{sz} = -f'_{sz}, \sigma_{c3} = -f_c$ )  
 (mittlere Betonhauptspannung ebenfalls negativ)

NB: Bruchart: **sehr duktil** / **duktil** (ausser bei sehr flachen Druckfeldneigungen) / **spröd**



Von den sieben Bruchregimes sind drei duktil (Versagen durch Fließen beider Bewehrungen oder Betonbruch, während eine Bewehrung fließt). Bei der Bemessung sollten die anderen (spröden) Regimes vermieden werden.

## Scheibenelemente – Fließbedingungen

### Verzerrungsinkremente und Hauptdruckrichtung

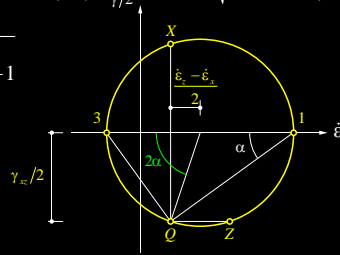
Verzerrungsinkremente sind proportional zu den Komponenten der äusseren Normalen auf die Fließfläche (Gradient) im jeweiligen Punkt der Fließfigur ( $\kappa \geq 0$ : beliebiger Faktor):

$$\dot{\epsilon}_x = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_x}, \quad \dot{\epsilon}_z = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_z}, \quad \dot{\gamma}_{xz} = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_{xz}}$$

Neigung  $\alpha$  der Hauptdruckrichtung 3 bez. x-Achse folgt mit Mohrschem Kreis aus plastischen Dehnungsincrementen (Hauptverzerrungsrichtung = Hauptdruckspannungsrichtung Beton):

$$\cot 2\alpha = \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}} \quad \text{mit} \quad \cot \alpha = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{\sin(2\alpha)} = \cot(2\alpha) + \sqrt{\frac{\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}}\right)^2 + 1}$$



$$\left. \begin{aligned} Y_1 : \cot^2 \alpha &= (a_{sx} f'_{sx} - n_x) / (a_{sz} f'_{sz} - n_z) \\ Y_2 : \cot^2 \alpha &= (hf_c - a_{sz} f'_{sz} + n_z) / (a_{sz} f'_{sz} - n_z) \\ Y_3 : \cot^2 \alpha &= (a_{sx} f'_{sx} - n_x) / (hf_c - a_{sx} f'_{sx} + n_x) \\ Y_4 : \cot^2 \alpha &= 1 \\ Y_5 : \cot^2 \alpha &= -(a_{sx} f'_{sx} + n_x) / (hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x) \\ Y_6 : \cot^2 \alpha &= -(hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z) / (a_{sz} f'_{sz} + n_z) \\ Y_7 : \cot^2 \alpha &= (hf_c + a_{sz} f'_{sz} + n_z) / (hf_c + a_{sx} f'_{sx} + n_x) \end{aligned} \right\}$$

Wie bei Fließbedingungen nach Plastizitätstheorie üblich, sind in jedem Punkt der Fließfläche die zugehörigen plastischen Verzerrungsincrementen als äussere Normale bekannt (an Kanten und in Ecken nicht eindeutig).

Damit kann beispielsweise die Richtung des Druckfelds im Beton bestimmt werden.



# Scheibenelemente – Fließbedingungen

## Bemessung der Bewehrung

**Bemessungspraxis: in der Regel Regime 1** (duktile Bruchart; Fließen der beiden Bewehrungen vor Betonbruch, Beton bleibt intakt).

Fließbedingung für Regime 1 in Parameterform (→ direkte Bemessung):

$$Y_1 = n_x^2 - (a_{sx}f_{sx} - n_x)(a_{sz}f_{sz} - n_z) = 0$$

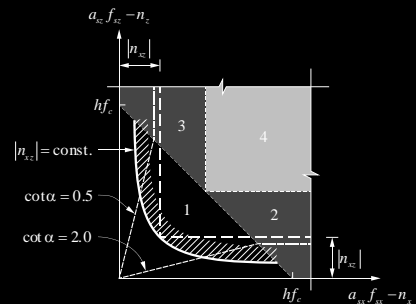
$$k = \cot \alpha \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_{sx}f_{sx} &\geq n_x + k|n_z| \\ a_{sz}f_{sz} &\geq n_z + k^{-1}|n_x| \end{aligned}$$

Bedingung, damit Fließregime 1 massgebend wird (kein Betonbruch):

$$hf_c \geq a_{sx}f_{sx} + a_{sz}f_{sz} - (n_x + n_z)$$

NB:

- Grösse von  $f_c$  siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete». Näherung gemäss SIA 262 :  $f_c = k_c f_{cd}$  (mit  $k_c = 0.55$ )
- Neigung des Betondruckfelds im Regime 1 folgt aus:  $\cot^2 \alpha = (a_{sx}f_{sx} - n_x) / (a_{sz}f_{sz} - n_z)$
- Wert  $k = \cot \alpha$  theoretisch frei wählbar, in Bemessungsnormen oft Bedingung  $0.5 \leq k \leq 2$
- Verwendung von  $k = 1$ , d.h.  $\alpha = 45^\circ$ : «linearisierte Fließbedingungen», in vielen FE-Programmen implementiert. Sichere Bemessung, aber nur eine von vielen Möglichkeiten (bei separater Grenzwertbildung für  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  u.U. stark auf sicherer Seite)



Bei der Bemessung strebt man üblicherweise ein duktiler Verhalten an. Im Regime 1 (Versagen durch Fließen beider Bewehrungen) ist dies gewährleistet.

Die Fließbedingung für Regime 1 lässt sich in parametrisierter Form angeben. Die resultierenden Beziehungen können direkt als Bemessungsgleichungen verwendet werden, da jede der Gleichungen den in einer Richtung erforderlichen Bewehrungsgehalt für eine gegebene Beanspruchung angibt.

In der Praxis wird oft eine Druckfeldneigung von  $\alpha = 45^\circ$  ( $k = 1$ ) verwendet. Die damit resultierenden «linearisierten Fließbedingungen» sind in vielen FE-Programmen implementiert. Sie liefern die minimale Bewehrungsmenge (sofern in beide Richtungen eine Bewehrung erforderlich ist).

## Scheibenelemente – Fließbedingungen

### Stegdruckbruch (Regime 2)

Ist die Bedingung  $hf_c \geq a_{sx}f_{sx} + a_{sz}f_{sz} - (n_x + n_z)$  nicht eingehalten, liegt eine Bruchart vor, bei welcher der **Beton auf Druck versagt**.

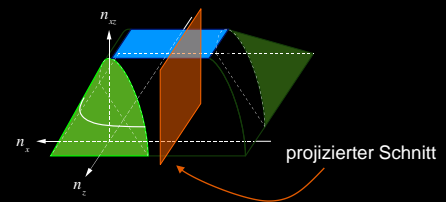
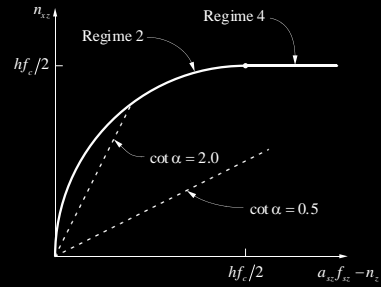
Praktisch relevant ist insbesondere bei Trägern das Regime 2, welches in Fällen mit  $a_{sx}f_{sx} - n_x > a_{sz}f_{sz} - n_z$  vorliegt.

→ Bruchart: Fließen der z-Bewehrung mit gleichzeitigem Betondruckbruch heisst **Stegdruckbruch** («web crushing»)

→ Schubwiderstand des Scheibenelements lässt sich als Viertelkreisbogen darstellen

→ Begrenzungen für  $\cot \alpha$  entsprechen im Diagramm Geraden

NB: Darstellung rechts = Projektion der Fließfigur in die Ebene  $(n_x, n_z)$ , um Betrag  $a_{sz}f_{sz}$  verschoben ( $n_x$  = verallgemeinerte Reaktion)



Auch in Regime 2 (und 3, welches analog zu Regime 2 ist, wenn die stärkere Richtung in z-Richtung liegt) ist das Versagen ausreichend duktil, da die schwächere Bewehrung (in Regime 2 die z-Bewehrung) fließt, bevor der Beton bricht.

Diese Versagensart wird als «Stegdruckbruch» bezeichnet.