

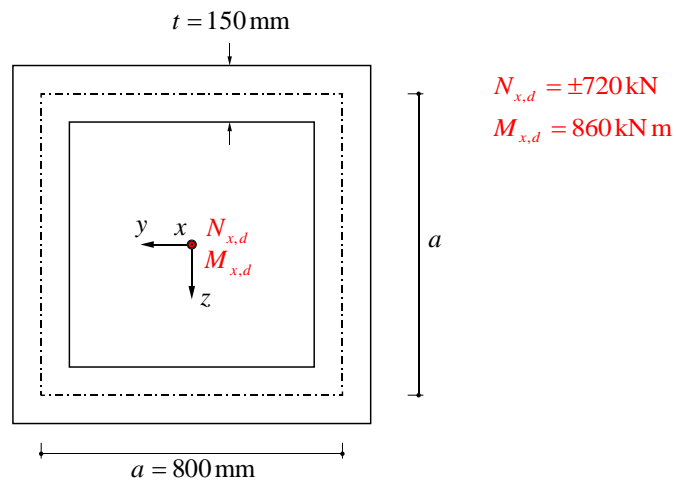
Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 1/6
Kolloquium 6	Musterlösung	an / 16.11.2022 amr / 16.11.2022

<u>Baustoffe</u>		SIA 262	
Beton	C30/37	$f_{cd} = 20 \text{ MPa} ; f_{cm} = 2.9 \text{ MPa}$ $E_{cm} = 33.6 \text{ GPa}$	Tab. 3, 8 3.1.2.3
Betonstahl	B500B	$f_{sk} = 500 \text{ MPa} ; f_{sd} = 435 \text{ MPa}$ $E_s = 205 \text{ GPa}$	Tab. 5, 9 3.2.2.4
Bewehrungsüberdeckung	R90	$\rightarrow c_{nom,R} = 30 \text{ mm}$	Tab.16
	XC1	$\rightarrow c_{nom,X} = 20 \text{ mm}$	Tab.18
		$\rightarrow c_{nom} = \max\{c_{nom,R}, c_{nom,X}\} = 30 \text{ mm}$	

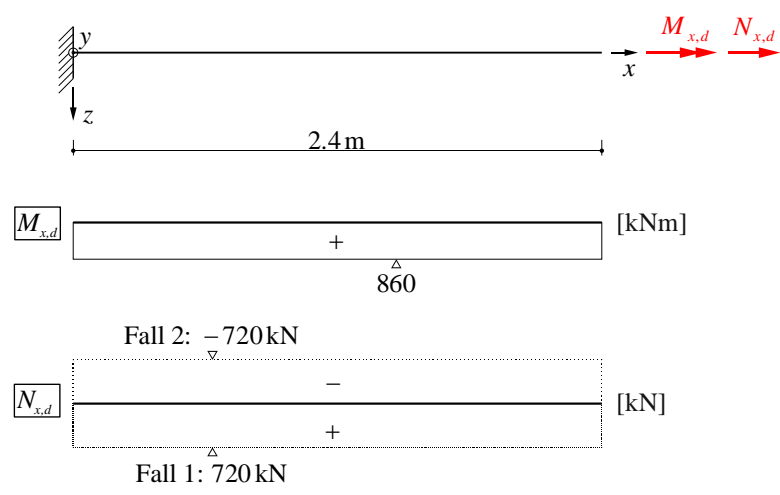
Aufgabe 1 – Fließregime von Scheiben

a) Einwirkungen

Trägerquerschnitt:

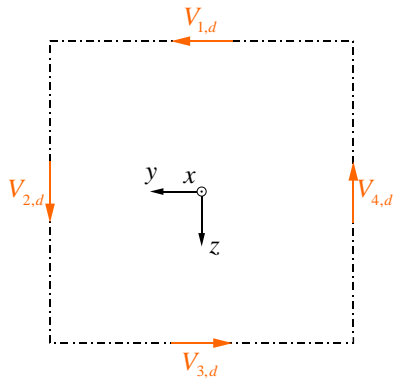


Statisches System und Einwirkung:



Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 2/6
Kolloquium 6	Musterlösung	an / 16.11.2022 amr / 16.11.2022

Umlauf torsion:



$$V_{i,d} = \frac{M_{x,d}}{2 \cdot A_0} \cdot z_i = 537.5 \text{ kN}$$

$$A_0 = a^2 = 640'000 \text{ mm}^2$$

$$z_i = a = 800 \text{ mm } \forall i$$

$$v_{i,d} = \frac{V_{i,d}}{a} = 672 \text{ kN/m}$$

$$\tau_{i,d} = \frac{V_{i,d}}{a \cdot t} = 4.48 \text{ MPa}$$

SIA 262

4.3.5.2

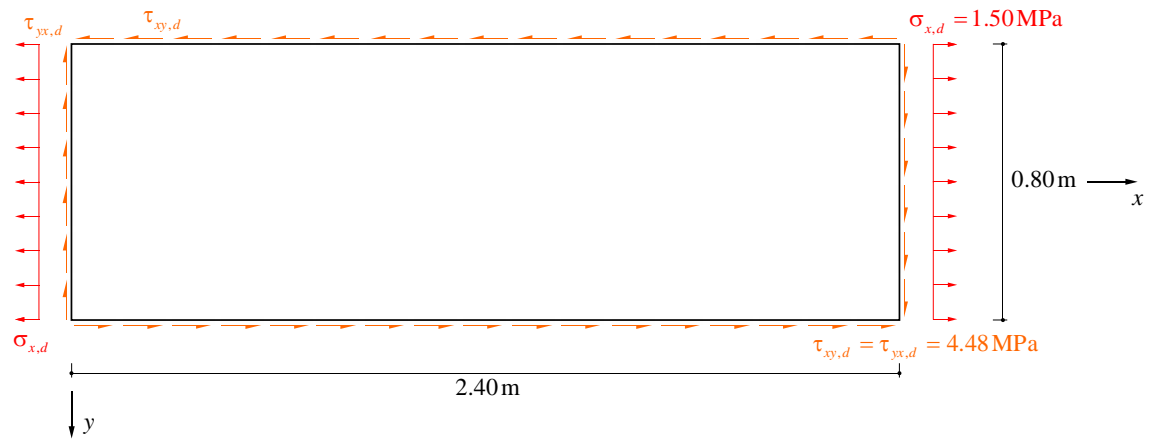
Normalkraftbeanspruchung:

$$N_{x,d} = \pm 720 \text{ kN}$$

$$\sigma_{x,d} = \frac{N_{x,d}}{A_c} = \frac{\pm 720'000}{4 \cdot 150 \cdot 800} = \pm 1.5 \text{ MPa}$$

$$n_{x,d} = \sigma_{x,d} \cdot t = \pm 1.5 \text{ MPa} \cdot 150 \text{ mm} = \pm 225 \text{ kN/m}$$

Schub- und Normalspannungen in der Wandscheibe 1 (Fall 1: Zug):



b) Fließregime 1

$$\text{Regime 1: } Y_1 = \tau_{xy}^2 - \underbrace{(\rho_x f_s - \sigma_x)}_{\sigma_{xc}} \cdot \underbrace{(\rho_y f_s - \sigma_y)}_{\sigma_{yc}} = 0$$

«Theorie des Plastischen Potentials»: Plastische Verzerrungszinkremente sind in jedem Punkt der Fließfläche $Y = 0$ proportional zu den Komponenten des nach aussen gerichteten Einheitsnormalenvektors:

$$\dot{\epsilon}_x = \Psi \cdot \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \Psi \cdot \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \Psi \cdot \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}}, \quad \Psi \geq 0: \text{Proportionalitätsfaktor}$$

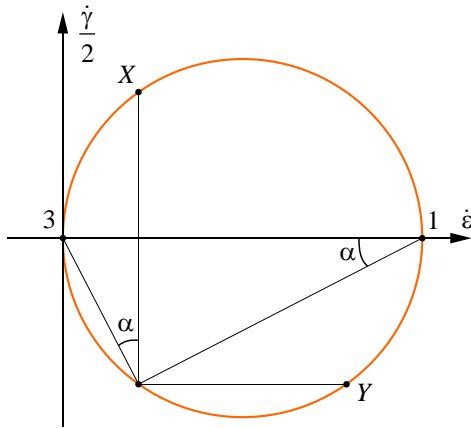
Für das Regime 1 resultiert:

$$\dot{\epsilon}_x = \Psi \cdot (\rho_y f_s - \sigma_y), \quad \dot{\epsilon}_y = \Psi \cdot (\rho_x f_s - \sigma_x), \quad \dot{\gamma}_{xy} = \Psi \cdot 2\tau_{xy}$$

$$\left(\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} \right)^2 = \Psi^2 \cdot \tau_{xy}^2 = \Psi^2 \cdot (\rho_y f_s - \sigma_y) \cdot (\rho_x f_s - \sigma_x) = \dot{\epsilon}_x \cdot \dot{\epsilon}_y$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 3/6
Kolloquium 6	Musterlösung	an / 16.11.2022 amr / 16.11.2022

Hauptverzerrungsincremente in der Stahlbetonscheibe (α gibt die Richtung der Betondruckdiagonalen an):



$$\dot{\epsilon}_{1,3} = \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2}\right)^2}$$

mit $\left(\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2}\right)^2 = \dot{\epsilon}_x \cdot \dot{\epsilon}_y \rightarrow \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_3 = 0$

Regime 1: Beide Bewehrungen fließen

$$\cot \alpha = \frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{\rho_x f_s - \sigma_x}{\rho_y f_s - \sigma_y}}$$

$$\rightarrow \cot^2 \alpha \cdot (\rho_y f_s - \sigma_y) = \rho_x f_s - \sigma_x$$

Eingesetzt in Fließbedingung:

$$Y_1 = \tau_{xy}^2 - \cot^2 \alpha \cdot (\rho_y f_s - \sigma_y)^2 = 0$$

$$Y_1 = \tau_{xy}^2 - \frac{1}{\cot^2 \alpha} \cdot (\rho_x f_s - \sigma_x)^2 = 0$$

Mit der Substitution $k = \cot \alpha$ ergibt sich die linearisierte Fließbedingung

$$\rho_x f_{sd} \geq \sigma_x + k \cdot |\tau_{xy}|$$

$$\rho_y f_{sd} \geq \sigma_y + \frac{1}{k} \cdot |\tau_{xy}|$$

Fall 1: Zugbeanspruchung $N_{x,d} = +720 \text{ kN}$

Zugehöriger Spannungszustand:

Äussere Beanspruchung: $\tau_{xy} = 4.48 \text{ MPa}, \sigma_x = 1.5 \text{ MPa}, \sigma_y = 0$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 5.29 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -3.79 \text{ MPa}$$

Linearisierte Fließbedingung mit $k = \cot \alpha = 1$ ($\alpha = 45^\circ$)

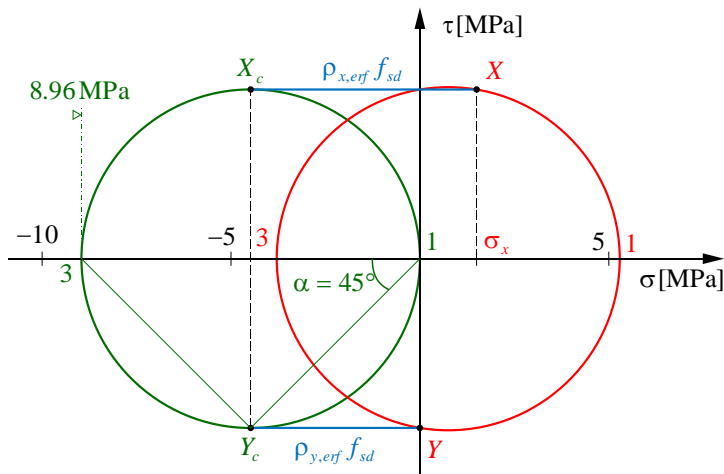
$$\rho_{x,erf} f_{sd} \geq \sigma_x + k \cdot |\tau_{xy}| = 5.98 \text{ MPa}$$

$$\rho_{y,erf} f_{sd} \geq \sigma_y + \frac{1}{k} \cdot |\tau_{xy}| = 4.48 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \rho_{x,erf} \geq \frac{5.98 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 1.37\% > \rho_{\min} = 0.2\%$$

$$\rho_{y,erf} \geq \frac{4.48 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 1.03\% > \rho_{\min} = 0.2\%$$

Mohr'scher Kreis: Äussere Beanspruchung in rot und Beanspruchung im Beton in grün.



Dimensionierung der Bewehrung:

$$a_{sx,erf} = \rho_{x,erf} \cdot t \cdot 1'000 \text{ mm/m} = 2'062 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$a_{sy,erf} = \rho_{y,erf} \cdot t \cdot 1'000 \text{ mm/m} = 1'545 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

→ Wahl: x – Richtung : Ø12 @ 100, $a_{sx} = 2'261 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ (2 – schnittig)

y – Richtung : Ø10 @ 100, $a_{sy} = 1'570 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ (2 – schnittig)

Beitrag der Bewehrungen: $\rho_x f_{sd} = 1.51\% \cdot 435 \text{ MPa} = 6.56 \text{ MPa}$

$\rho_y f_{sd} = 1.05\% \cdot 435 \text{ MPa} = 4.55 \text{ MPa}$

Kontrolle der Betonspannungen: $|\sigma_{c3}| = (\rho_y f_{sd} - \sigma_y) + (\rho_x f_{sd} - \sigma_x) = 9.61 \text{ MPa}$

→ $|\sigma_{c3}| = 9.61 \text{ MPa} < k_c f_{cd} = 11.00 \text{ MPa} \rightarrow \text{i.O.}$

$k_c = 0.55$

NB: Der Nachweis der Tragsicherheit ist mit $a_s > a_{s,erf}$ und dem gezeichneten Mohr'schen Kreis erfüllt. Die Überprüfung der Betonspannungen für die gewählte Bewehrung stellt sicher, dass auch im Versagensfall mit Fließen der gewählten Bewehrung der duktile Mechanismus von Regime 1 auftritt.

Fall 2: Druckbeanspruchung $N_{x,d} = -720 \text{ kN}$ (Lösung mit der App, hier Rechenweg aufgezeigt)

Spannungszustand:

Äussere Beanspruchung: $\tau_{xy} = 4.48 \text{ MPa}$, $\sigma_x = -1.5 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 0$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 3.79 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -5.29 \text{ MPa}$$

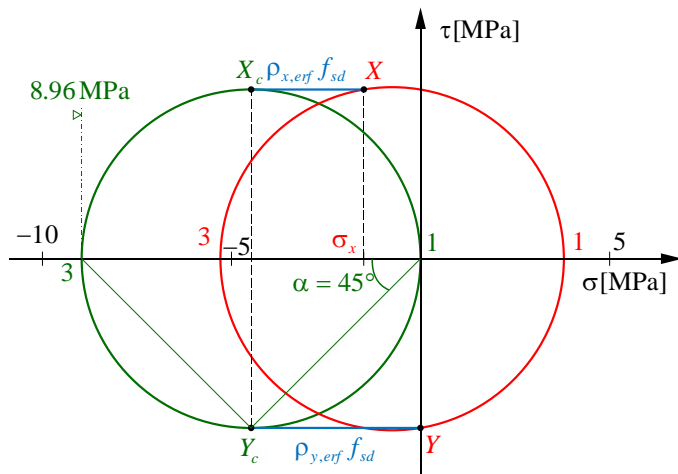
Linearisierte Fließbedingung: $\rho_{x,erf} f_{sd} \geq \sigma_x + k \cdot |\tau_{xy}| = 2.98 \text{ MPa}$

$$\rho_{y,erf} f_{sd} \geq \sigma_y + \frac{1}{k} \cdot |\tau_{xy}| = 4.48 \text{ MPa}$$

→ $\rho_{x,erf} \geq \frac{2.98 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 0.68\% > \rho_{\min} = 0.2\%$

$\rho_{y,erf} \geq \frac{4.48 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 1.03\% > \rho_{\min} = 0.2\%$

Mohr'scher Kreis: Äussere Beanspruchung in rot und Beanspruchung im Beton in grün.



Dimensionierung der Bewehrung:

$$a_{sx,erf} = \rho_x \cdot t \cdot 1'000 \text{ mm/m} = 1'027 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$a_{sy,erf} = \rho_y \cdot t \cdot 1'000 \text{ mm/m} = 1'545 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

→ Wahl: x – Richtung : Ø10 @ 150, $a_{sx} = 1'047 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ (2 – schnittig)

y – Richtung : Ø10 @ 100, $a_{sy} = 1'570 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ (2 – schnittig)

Kontrolle mit der App: bei Eingabe der gewählten Bewehrung unter den gegebenen Normalspannungen im Reiter «Überprüfung» resultiert ein Versagen der Scheibe in Regime 1 bei $\tau_{xy} = 4.56 \text{ MPa} > 4.48 \text{ MPa}$, womit der «Nachweis» erbracht werden kann.

Beitrag der Bewehrungen: $\rho_x f_{sd} = 0.70\% \cdot 435 \text{ MPa} = 3.04 \text{ MPa}$

$\rho_y f_{sd} = 1.05\% \cdot 435 \text{ MPa} = 4.55 \text{ MPa}$

Kontrolle der Betonspannungen: $|\sigma_{c3}| = (\rho_y f_{sd} - \sigma_y) + (\rho_x f_{sd} - \sigma_x) = 9.09 \text{ MPa}$

→ $|\sigma_{c3}| = 9.09 \text{ MPa} < k_c f_{cd} = 11.00 \text{ MPa} \rightarrow \text{i.O.}$

$k_c = 0.55$

Der Unterschied der σ_{c3} im Mohr'schen Kreis und in der Kontrollberechnung liegt im unterschiedlichen Bewehrungsgehalt. Der Mohr'sche Kreis ist mit dem minimalen Bewehrungsgehalt gezeichnet, bei dem $\sigma_{c1} = 0$, während die Kontrolle der Betonspannungen mit dem tatsächlich gewählten Bewehrungsgehalt erfolgt.

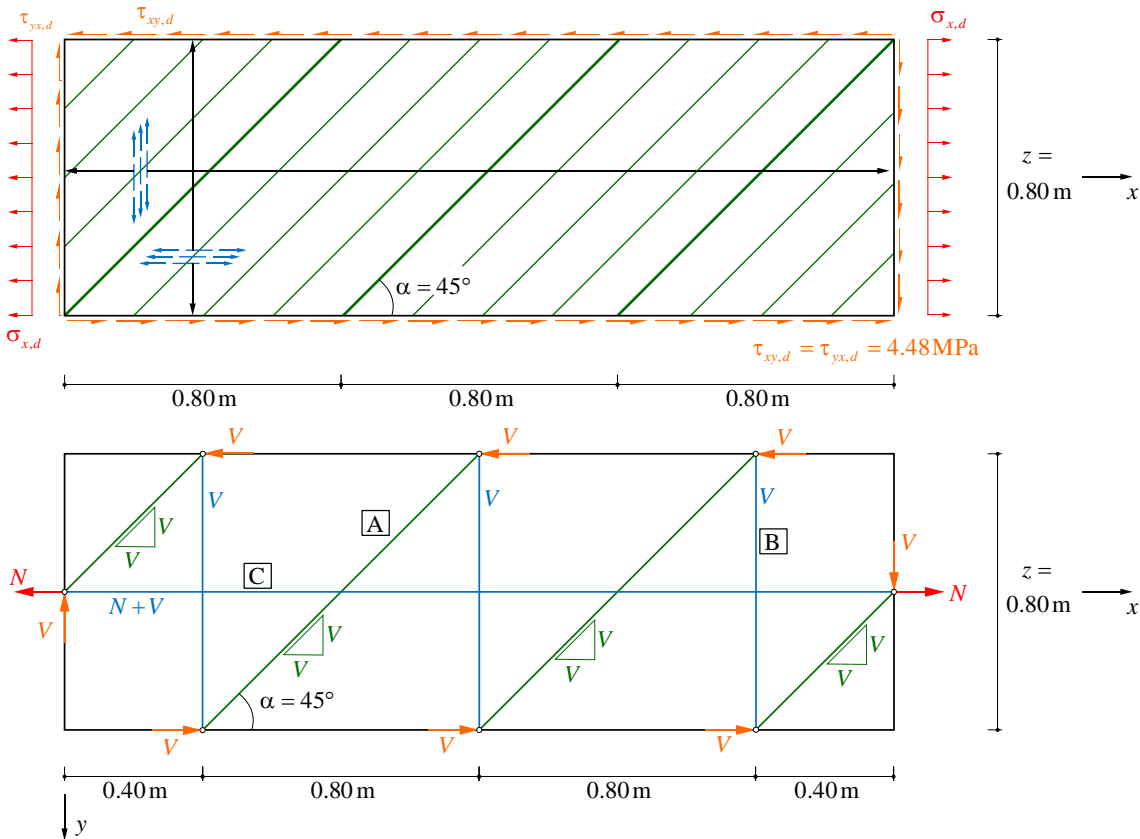
Fall 1 mit $N_{x,d} = +720 \text{ kN}$ wird massgebend für die Wahl der Bewehrung.

x : Ø12 @ 100, $a_{sx} = 2'261 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ (2 – schnittig)

y : Ø10 @ 100, $a_{sy} = 1'570 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ (2 – schnittig)

NB: Im Fall 1 mit Zugbeanspruchung ergeben sich höhere Hauptdruckspannungen im Beton als im Fall 2 mit Druckbeanspruchung! In den Mohr'schen Kreisen mit ρ_{erf} wird ersichtlich, dass der einzige Unterschied von der Druck- zur Zugbeanspruchung der Beitrag der Bewehrung in x -Richtung ist. Die Beanspruchungen im Beton mit der Mindestbewehrung sind dann genau identisch. Durch die unterschiedliche tatsächlich gewählte Bewehrung ρ ergeben sich unterschiedliche Mohr'sche Kreise im Beton und somit die höhere Hauptdruckspannung in Fall 1.

c) Fachwerkmodell und Spannungsfeld



$$N = \frac{720 \text{ kN}}{4} = 180 \text{ kN}$$

$$V = 538 \text{ kN}$$

Bemessung der Wandscheibe mit dem FWM:

Betondruckstrebe **A** : $\sigma_c = \frac{V}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{538 \text{ kN}}{150 \text{ mm} \cdot 800 \text{ mm} \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ} = 9.0 \text{ MPa}$ SIA 262 (45)

$\sigma_c = 9.0 \text{ MPa} < k_c f_{cd} = 11.0 \text{ MPa} \rightarrow \text{i.O.}$ $k_c = 0.55$

Mindestbewehrung Scheiben $a_{s,\min} = \rho_{\min} \cdot t \cdot 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}} = 300 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ SIA 262 (43)

Bewehrung in y-Richtung **B** : $a_{s,\text{erf}} = \frac{V}{z \cdot \cot \alpha \cdot f_{sd}} = \frac{538 \text{ kN}}{0.8 \text{ m} \cdot 1 \cdot 0.435 \text{ kN/mm}^2} = 1'545 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

$\rightarrow \text{Wahl: } \varnothing 10 @ 100 \text{ (2-schnittig), } a_s = 1'570 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} > a_{s,\min}$

Bewehrung in x-Richtung **C** : $a_{s,\text{erf}} = \frac{N+V}{f_{sd} \cdot z} = \frac{180 \text{ kN} + 538 \text{ kN}}{0.435 \text{ kN/mm}^2 \cdot 0.8 \text{ m}} = 2'062 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$

$\rightarrow \text{Wahl: } \varnothing 12 @ 100 \text{ (2-schnittig), } a_s = 2'261 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} > a_{s,\min}$

NB: Es ergibt sich die selbe Bewehrung wie mit der linearisierten Fließbedingung.

NB: Im Unterschied zum Nachweis mit der linearisierten Fließbedingung ist der Nachweis mit dem Fachwerkmodell ein reiner Tragsicherheitsnachweis, die Duktilität wird nicht berücksichtigt.