

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 1/6
Kolloquium 2	Musterlösung	an/13.11.2020 sk/08.10.2021(rev) amr/23.03.2023(rev)

Baustoffe

Beton C25/30 $f_{cd} = 16.5 \text{ MPa}; f_{cm} = 33 \text{ MPa}; f_{ctm} = 2.6 \text{ MPa}$
 $k_E = 10'000; E_{cm} = k_E \sqrt[3]{f_{cm}} = 32.08 \text{ GPa}$
 Betonstahl B500B $f_{sd} = 435 \text{ MPa}; E_s = 205 \text{ GPa}$
 Wertigkeit $n = \frac{E_s}{E_c} = 6.4$

SIA 262
 Tab. 8, Tab.3
 3.1.2.3.3
 Tab. 9
 3.2.2.4

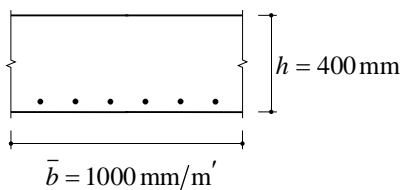
Geometrie

Allgemein $h = 400 \text{ mm} \quad l = 10 \text{ m}$
 Bewehrung $\varnothing = 20 \text{ mm} \quad s = 150 \text{ mm} \quad a_s = \frac{\varnothing^2 \cdot \pi}{4 \cdot s} = 2094 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}'} \quad c_{nom} = 30 \text{ mm}$

a) Einwirkungen

Sämtliche Lasten werden für einen 1 m breiten Streifen der Platte (m' für Laufmeter in Plattenbreite) formuliert. Die virtuelle «Breite» des betrachteten Ausschnitts beträgt somit $\bar{b} = 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}'}$, bzw. $\bar{b} = 1 \frac{\text{m}}{\text{m}'}$.

Querschnitt:



$$g_k = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot h \cdot \bar{b} = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m} \cdot \text{m}'}, \quad q_k = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m} \cdot \text{m}'}$$

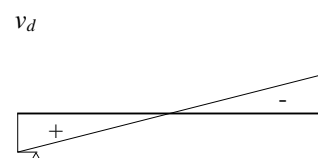
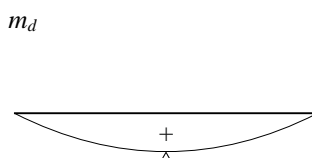
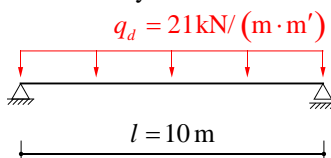
$$\gamma_G = 1.35, \quad \gamma_Q = 1.5$$

$$q_d = \gamma_G \cdot g_k + \gamma_Q \cdot q_k = 21 \frac{\text{kN}}{\text{m} \cdot \text{m}'}$$

SIA 261,
 Anhang A
 Tab. 28
 SIA 260,
 4.4.3
 Tab.1

b) Schnittgrößen und Biege­widerstand

Statisches System



$$m_d = \frac{q_d \cdot l^2}{8} = 262.5 \frac{\text{kNm}}{\text{m}'}, \quad v_d = \frac{q_d \cdot l}{2} = 105 \frac{\text{kN}}{\text{m}'}$$

Statische Höhe:

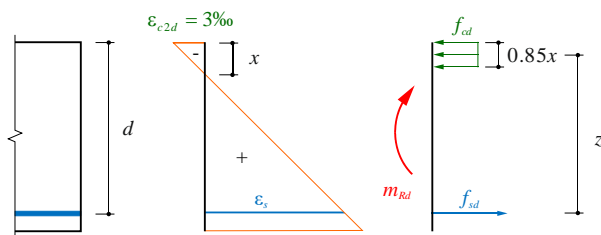
$$d = h - c_{nom} - \frac{\varnothing}{2} = 360 \text{ mm}$$

Höhe Rechteckspannungsb­lock:

$$0.85x = \frac{a_s \cdot f_{sd}}{b \cdot f_{cd}} = 55.2 \text{ mm}$$

Hebelarm der Inneren Kräfte:

$$z = d - \frac{0.85x}{2} = 332.4 \text{ mm}$$



SIA 262,
 Tab. 8 (ϵ_{c2d})

Biege­widerstand:

$$m_{Rd} = a_s \cdot f_{sd} \cdot z = 302.8 \frac{\text{kNm}}{\text{m}'} > m_d = 262.5 \frac{\text{kNm}}{\text{m}'} \rightarrow \text{i.O.}$$

Kontrolle Druckzonenhöhe:

$$\frac{x}{d} = \frac{55.2}{0.85 \cdot 360} = 0.18 \leq 0.35 \rightarrow \text{i.O.}$$

Es kann somit von einem ausreichend duktilen Verhalten ausgegangen werden.

SIA 262,
 4.1.4.2.5

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 2/6
Kolloquium 2	Musterlösung	an/13.11.2020 sk/08.10.2021(rev) amr/23.03.2023(rev)

c) Rissmoment

Die Mindestbewehrung stellt sicher, dass beim Reißen des Betons in der Biegezugzone kein Spröbruch des Trägers auftritt → duktile Bauweise. Es muss folglich nachgewiesen werden, dass der Biegezugwiderstand des Querschnitts mit der gewählten Bewehrung grösser ist als das Rissmoment des Betons. Da sich ein hoher Wert der Betonzugfestigkeit für die Bestimmung der Mindestbewehrung ungünstig auswirkt (Zwangsbeanspruchungen), wird der Bemessungswert der Betonzugfestigkeit gemäss SIA 262, 4.4.1.4 bestimmt zu:

Betonzugfestigkeit: $f_{ctk,0.95} = 1.3 f_{ctm} = 3.4 \text{ MPa}$ SIA 262, (8)

$$k_t = \frac{1}{1 + 0.5 \cdot t} = \frac{1}{1 + 0.5 \cdot \frac{h}{3}} = 0.94$$
SIA 262, 4.4.1.3

$$f_{ctd} = k_t \cdot f_{ctk,0.95} = 3.2 \text{ MPa}$$
SIA 262, 4.4.1.4

Rissmoment des Betons: $m_r = \frac{\bar{b} \cdot h^2}{6} \cdot f_{ctd} = 84.5 \frac{\text{kNm}}{\text{m}'}$ $M_y = W_y \sigma_x$

$$m_r \leq m_{Rd} = 302.8 \frac{\text{kNm}}{\text{m}'} \rightarrow \text{i.O.}$$

d) Abstufen der Bewehrung

Da die Bewehrung für das maximale Biegemoment dimensioniert wird, wird sie bei den Auflagern nicht ausgenutzt. Es ist daher möglich in der Nähe der Auflagern eine geringere Bewehrung anzuordnen. Dabei ist darauf zu achten, dass an jedem Ort im Träger der Biegezugwiderstand höher ist als das Biegemoment. Der Nachweis erfolgt grafisch mit der Momentendeckungslinie. Gemäss SIA 262, 5.5.3.3 muss bei Platten mindestens die Hälfte der Feldbewehrung über den Auflagern verankert werden. Das Versatzmass wird erst im Kapitel «3.4 Querkraft» eingeführt. Aus diesem Grund wird es hier nicht berücksichtigt.

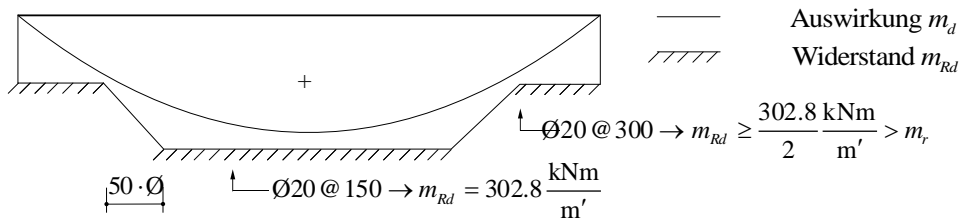
SIA 262, 5.5.3.3

Die Abstufung erfolgt, indem abwechslungsweise ein Stab bis an den linken und der nächste bis an den rechten Rand geführt wird. Somit ergibt sich in Feldmitte ein Stababstand von $s = 150 \text{ mm}$ und im Randbereich $s = 300 \text{ mm}$. Der Biegezugwiderstand im Randbereich wird dabei etwas grösser sein als $m_{Rd, \text{Feld}} / 2$

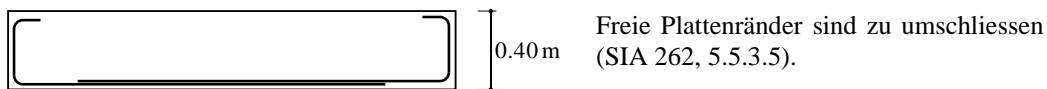
(und folglich auch grösser als m_r), da sich aufgrund der kleineren Druckzonenhöhe der Hebelarm der inneren Kräfte vergrössert.

SIA 262, Tab.19:
 $l_{bd, \text{net}} = 50\emptyset$

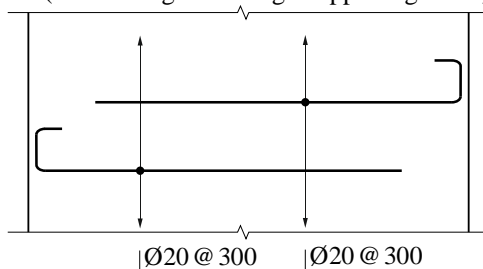
Freie Bewehrungsenden müssen genügend verankert sein, bevor sie die volle Kraft aufnehmen können. In der SIA 262, 5.2.5 wird die Verankerungslänge eingeführt, über welche der Widerstand durch Verbund auf der Länge $50\emptyset$ linear aufgebaut wird (vgl. zum Zuggurtmodell).



Längsschnitt (überhöhte Darstellung):

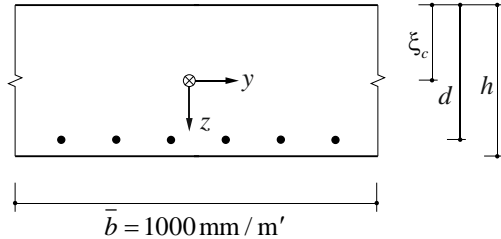


Grundriss (Bewehrung wird umgeklappt dargestellt):



e) Gebrauchstauglichkeit

1) Ideelle Querschnittswerte und Biegesteifigkeiten eines Streifens mit 1 m Breite:



$$a_c = \bar{b} \cdot h = 0.4 \text{ m}^2 / \text{m}'; \quad a_s = 2094 \text{ mm}^2 / \text{m}'$$

$$a_i = a_c + a_s \cdot (n-1) = 0.4113 \text{ m}^2 / \text{m}'$$

$$\xi_c = \frac{a_c \cdot \frac{h}{2} + a_s \cdot (n-1) \cdot d}{a_i} = 204.4 \text{ mm}$$

Ungerissene Biegesteifigkeit:

$$I_{yi} = \frac{h^3 \cdot \bar{b}}{12} + \left(\xi_c - \frac{h}{2} \right)^2 \cdot a_c + (d - \xi_c)^2 \cdot a_s \cdot (n-1) = 5.61 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 / \text{m}'$$

$$EI_y^I = E_c \cdot I_{yi} = 180.08 \text{ MNm}^2 / \text{m}'$$

Gerissene Biegesteifigkeit:

$$\rho = \frac{a_s}{d} = 0.58\% \quad (\text{Bemerke Unterschied zur Definition von } \rho \text{ bei reinem Zug in K.1)}$$

$$x = d \cdot \left(\sqrt{(\rho \cdot n)^2 + 2 \cdot \rho \cdot n} - \rho \cdot n \right) = 85.69 \text{ mm}$$

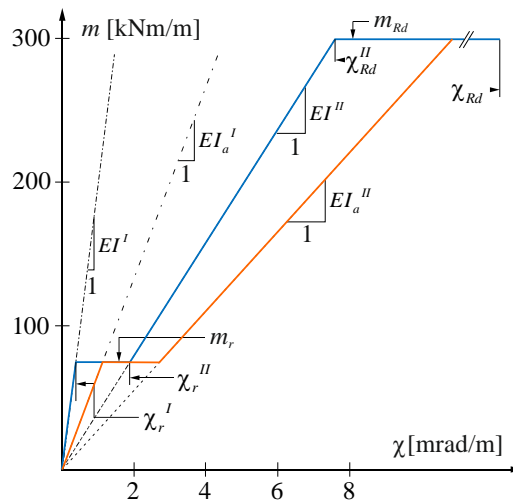
$$EI_y^{II} = a_s \cdot E_s \cdot (d - x) \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right) = 39.03 \text{ MNm}^2 / \text{m}'$$

2) Langzeitwerte

Langzeiteffekte werden durch eine Abminderung des Beton-E-Moduls modelliert: $E_{ca} = \frac{E_c}{1 + \phi}$

Durch erneutes Berechnen der obigen Parameter mit $E_{ca} = \frac{E_c}{1 + 2}$ ergeben sich folgende Resultate:

ϕ	0	2	[-]
E_{ca}	32.08	10.67	[kN/mm ²]
n	6.39	19.21	[-]
a_i	0.41	0.44	[m ² /m']
ξ_c	204.4	213.9	[mm]
I_{yi}	5.61	6.27	[10 ⁹ mm ⁴ /m']
EI_y^I	180.08	66.88	[MN m ² /m']
x	85.69	134.68	[mm]
EI_y^{II}	39.03	30.48	[MN m ² /m']



Das Rissmoment, berechnet mit f_{ctm} , beträgt $m_r = \frac{I_{yi}}{h - \xi_c} \cdot f_{ctm} = 74.6 \frac{\text{kNm}}{\text{m}'}$.

$$\chi_r^I = \frac{m_r}{EI^I} = 0.41 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\chi_{Rd}^{II} = \frac{m_{Rd}}{EI^{II}} = 7.76 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\chi_r^{II} = \frac{m_r}{EI^{II}} = 1.91 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

$$\chi_{Rd} = \frac{3\text{‰}}{x} = 46.18 \frac{\text{mrad}}{\text{m}}$$

Eigentragheit der Stäbe vernachlässigt

VL, S. 51

VL, S. 52

$W = I/z$

$x_{Rd} = 64.96 \text{ mm}$
(S. 1)

3) Durchbiegungen und Nachweis der Gebrauchstauglichkeit

Mittendurchbiegung am einfachen Balken: $w = \frac{5ql^4}{384EI}$

Gerissene Durchbiegungen kurzfristig und langfristig:

$w_{\varphi=0/2}^{II}$	$EI^{II} = 39.03 \text{ MNm}^2/\text{m}' \quad EI_a^{II} = 30.48 \text{ MNm}^2/\text{m}'$	
$g_k = 10 \text{ kN/m}^2$	33.36 mm	42.71 mm
$q_k = 5 \text{ kN/m}^2$	16.68 mm	(21.36 mm) ¹

¹ Im Allgemeinen ist nur der quasi-ständige Teil der Nutzlast kriechwirksam.

Nachweis «Aussehen» (Durchbiegung infolge quasi-ständigem Lastfall mit Berücksichtigung Langzeitwirkungen):

$$w = w_{gk,a} + \psi_2 \cdot w_{qk,a} = 42.71 + 0.6 \cdot 21.36 = 55.52 \text{ mm} \geq \frac{l}{300} = 33.33 \text{ mm} \rightarrow \text{nicht i.O.}$$

Nachweis «Komfort» (Durchbiegung infolge veränderlicher Einwirkungen, häufiger Lastfall):

$$w = \psi_1 \cdot w_{qk} = 0.7 \cdot 16.68 = 11.68 \text{ mm} \leq \frac{l}{350} = 28.57 \text{ mm} \rightarrow \text{i.O.}$$

Die Platte ist etwas zu weich. In einer späteren Projektphase ist eine Überhöhung für ständige Lasten zu prüfen. Wegen der vielen Unsicherheiten bei Durchbiegungsabschätzungen (Nutzlast, Biegesteifigkeiten, Zugfestigkeit) ist dabei grosse Vorsicht geboten.

SIA 260
4.4.4.4
Annahme:
Kat. D
SIA 260,
Tab.2+3

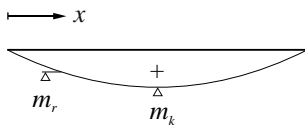
4) Ungerissene kurzfristige Durchbiegungen

$w_{\varphi=0}^I$	$EI^I = 180.08 \text{ MNm}^2/\text{m}'$
$g_k = 10 \text{ kN/m}^2$	7.23 mm
$q_k = 5 \text{ kN/m}^2$	3.62 mm

Das Feldmoment aus den Einwirkungen auf k-Niveaubeträgt: $m_k = \frac{(q_k + g_k) \cdot l^2}{8} = 187.5 \text{ kNm/m}'$.

Das Rissmoment (mit f_{ctm}) wird bei $x = \frac{l}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m_r}{m_k}} \right) = 5 \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{74.6}{187.5}} \right) = \begin{pmatrix} 1.12 \text{ m} \\ 8.88 \text{ m} \end{pmatrix}$, also

jeweils 1.12 m neben den Auflagern erreicht (Parabelgleichung). Innerhalb dieser Punkte ist der Querschnitt gerissen, weshalb die Annahme «ungerissen» nicht plausibel ist.



$$m(x) = \frac{4}{l} \cdot m_k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

$$\rightarrow x(m = m_r) = \frac{l}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m_r}{m_k}} \right)$$

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 5/6
Kolloquium 2	Musterlösung	an/13.11.2020 sk/08.10.2021(rev) amr/23.03.2023/(rev)

5) Durchbiegung am teilweise gerissenen System, Vergleich

Zusammenstellung der totalen charakteristischen kurzfristigen Durchbiegungen $w_{tot} = w_{gk} + w_{qk}$:

Ungerissen: $w_{tot} = 7.23 + 3.62 = 10.85 \text{ mm}$

Gerissen: $w_{tot} = 33.36 + 16.68 = 50.04 \text{ mm}$

App: $w_{tot} = 49 \text{ mm}$

In der App wird die Durchbiegung des Trägers unter Berücksichtigung der gerissenen und ungerissenen Bereiche berechnet. Es zeigt sich, dass bezüglich der Durchbiegung in Trägermitte der Unterschied zwischen den Berechnungsmethoden „App“ und „Gerissen“ in diesem Fall vernachlässigbar ist. Die Herleitung der Durchbiegungen des teilweise gerissenen Systems ist im App-Anwendungsbeispiel „Gerissene Biegung / Biegeträger“ auf der Website zu finden.

Nomenklatur

<i>Parameter</i>	<i>Einheit</i>	<i>Beschreibung</i>
<i>Querschnittsbetrachtung</i>		
c_{nom}	mm	<i>Bewehrungsüberdeckung</i>
h	mm	<i>Höhe des Querschnitts</i>
d	mm	<i>Statische Höhe: Abstand der Biegebewehrung zum oberen Rand des QS (resp. unteren, je nach betrachteter Bewehrungslage)</i>
x	mm	<i>Druckzonenhöhe</i>
z	mm	<i>Hebelarm der inneren Kräfte</i>
ξ_c	mm	<i>Schwerpunkt des ideellen Querschnitts</i>
i	-	<i>Subskript für ideellen Querschnitt (A_b, I_{yi} etc.)</i>
ρ	%	<i>Biegebewehrungsgehalt: $\rho = a_s/d$, resp. $A_s/(bd)$. Bemerke Unterschied zur Definition des Bewehrungsgehalts bei reinem Zug in K.1</i>
χ	mrad / m	<i>Krümmung des Querschnitts</i>
<i>Nachweis der Tragsicherheit</i>		
k	-	<i>Subskript für charakteristische Werte</i>
d	-	<i>Subskript für Dimensionierungswerte</i>
M_d	kNm	<i>Einwirkendes Moment auf d-Niveau</i>
M_r	kNm	<i>Rissmoment</i>
V_d	kN	<i>Einwirkende Querkraft auf d-Niveau</i>
M_{Rd}	kNm	<i>Momentenwiderstand auf d-Niveau</i>
m_d	kNm/m'	<i>Einwirkungsmoment pro Laufmeter auf d-Niveau</i>
m_r	kNm/m'	<i>Rissmoment pro Laufmeter</i>
v_d	kN/m'	<i>Einwirkungsquerkraft pro Laufmeter auf d-Niveau</i>
m_{Rd}	kNm/m'	<i>Widerstandsmoment pro Laufmeter auf d-Niveau</i>
<i>Nachweis der Gebrauchstauglichkeit</i>		
ϕ	-	<i>Kriechzahl nach SIA 262</i>
a	-	<i>Subskript für Langzeitwerte, Abminderung des E-Moduls mit ϕ</i>
I	-	<i>Superskript für ungerissenes Verhalten</i>
II	-	<i>Superskript für elastisch-gerissenes Verhalten</i>

Stahlbeton I	Herbstsemester	Seite 6/6
Kolloquium 2	Musterlösung	an/13.11.2020 sk/08.10.2021(rev) amr/23.03.2023/(rev)

Nomenklatur Träger ↔ Platte

<i>Parameter</i>	<i>Notation Träger</i>		<i>Notation Platte</i>	
<i>Querschnittsbreite</i>	<i>b</i>	mm	\bar{b}	1000mm/m'
<i>Brutto-Betonfläche</i>	<i>A_c</i>	mm ²	<i>a_c</i>	mm ² /m'
<i>Bewehrungsfläche</i>	<i>A_s</i>	mm ²	<i>a_s</i>	mm ² /m'
<i>Verteilte Last</i>	<i>q</i>	kN/m	<i>q</i>	kN/(m·m')
<i>Biegemoment</i>	<i>M</i>	kNm	<i>m</i>	kNm/m'
<i>Querkraft</i>	<i>V</i>	kN	<i>v</i>	kN/m'