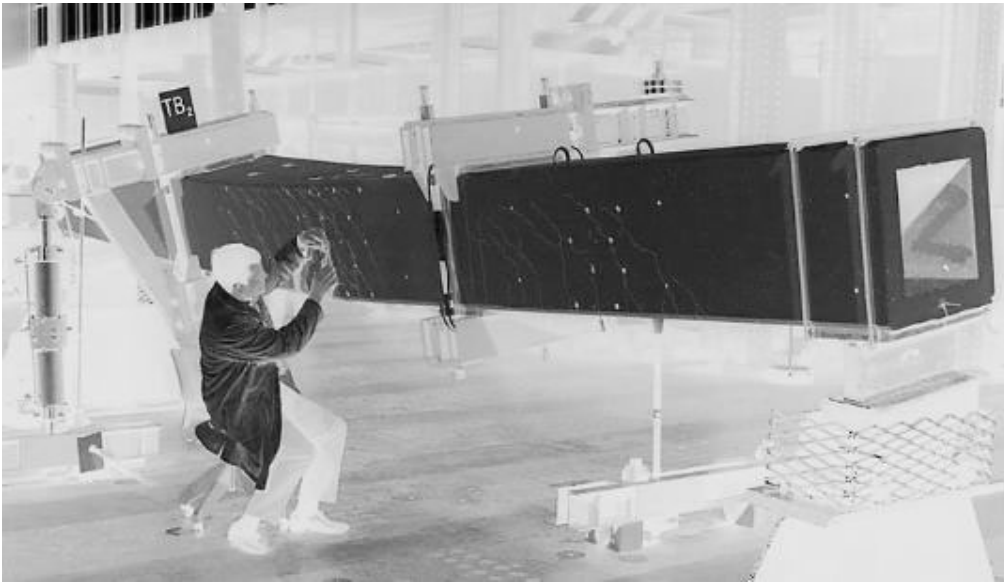


# 3.5 Torsion

## Torsion – Allgemeines



07.11.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

2

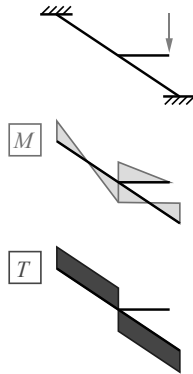
Torsionsversuch an einem Hohlkastenträger (Lampert und Thürlimann, Institut für Baustatik und Konstruktion, 1969)

# Torsion – Allgemeines

## Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion

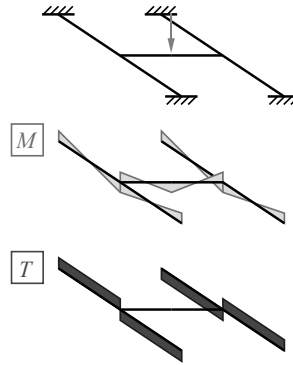
«Gleichgewichtstorsion»:

Torsion ist für Gleichgewicht erforderlich und unabhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :

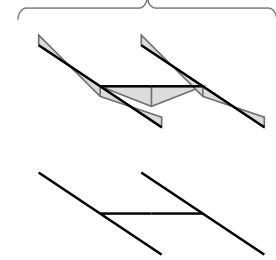


«Verträglichkeitstorsion»:

Torsion ist nicht für Gleichgewicht, sondern nur für die Verträglichkeit der Verformungen erforderlich und abhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :



Gleichgewicht kann mit  $T = 0$  erfüllt werden (Annahme  $GK = 0$ )



Bei einer Torsionsbeanspruchung kann man zwischen *Gleichgewichtstorsion* und *Verträglichkeitstorsion* unterscheiden.

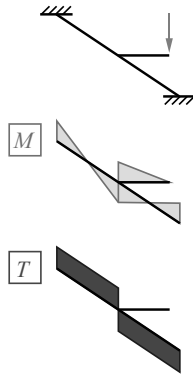
Die Unterscheidung ist relevant, da bei Verträglichkeitstorsion die Schnittkraftverteilung, und damit die Grösse der Torsionsbeanspruchung, vom Verhältnis der Torsionssteifigkeit  $GK$  zur Biegesteifigkeit  $EI$  abhängt. Da die Torsionssteifigkeit bei der Rissbildung wesentlich stärker abfällt als die Biegesteifigkeit, resultiert eine stark unterschiedliche Schnittkraftverteilung vor resp. nach der Rissbildung.

# Torsion – Allgemeines

## Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion

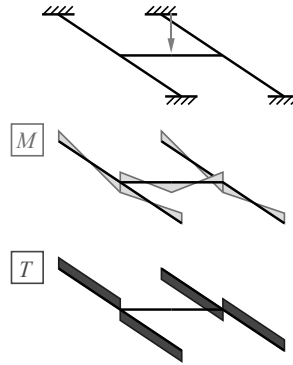
«Gleichgewichtstorsion»:

Torsion ist für Gleichgewicht erforderlich und unabhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :



«Verträglichkeitstorsion»:

Torsion ist nicht für Gleichgewicht, sondern nur für die Verträglichkeit der Verformungen erforderlich und abhängig von der Torsionssteifigkeit  $GK$ :



Massgebender Parameter: Verhältnis Torsions- zu Biegesteifigkeit  $(GK)/(EI)$

Im gerissenen Zustand ist

$$GK'' \approx 0.1GK', \quad EI'' \approx 0.3EI'$$

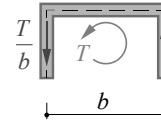
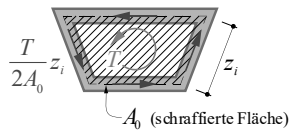
$$\rightarrow \frac{GK''}{EI''} \approx \frac{1}{3} \frac{GK'}{EI'}$$

Berücksichtigung z.B. durch Berechnung mit  $(EI', GK'/3)$

(Verformungen dann aber mit Faktor 3 zu erhöhen)

# Torsion – Allgemeines

## Umlauf- und Wölb torsion



### Umlauf torsion

Bei Vollquerschnitten und Hohlkastenträgern kann von Umlauf torsion mit geschlossenem Schubfluss ausgegangen werden.

### Wölb torsion

Bei offenen Querschnitten ergibt sich dagegen Wölb torsion.

Im Allgemeinen liegt gemischte Torsion mit Umlauf- und Wölb torsionsanteilen vor, siehe Vorlesung Baustatik III.

Die Schubflüsse aus Torsion in den einzelnen Querschnittsscheiben sind jenen aus Querkraft zu überlagern. Anstelle des Stegfachwerkmodells bei reiner Schubbeanspruchung resultiert für den gerissenen Zustand ein räumliches Fachwerkmodell resp. Spannungsfeld.

Eine weitere Unterscheidung betrifft die Aufnahme der Torsionsbeanspruchung in einem Querschnitt. Während Hohlkasten- und Vollquerschnitte eine Torsionsbeanspruchung primär durch *Umlauf torsion* aufnehmen, resultiert in offenen Querschnitten *Wölb torsion*. Im Allgemeinen liegt *gemischte Torsion* vor.

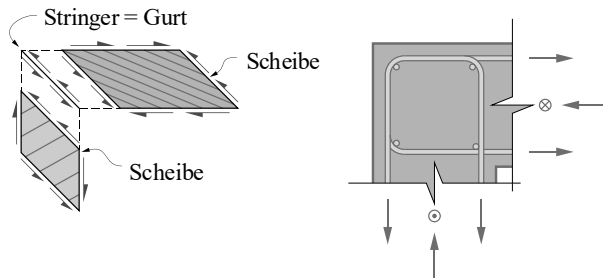
Der Abtrag der Torsionsbeanspruchung erfolgt in beiden Fällen über Schubflüsse in den einzelnen Scheiben des Querschnitts. Diese sind den Schubflüssen infolge Querkraft zu überlagern.

### Ergänzende Bemerkungen

- Wird bei Vollquerschnitten von Umlauf torsion ausgegangen, ist der Bemessung ein fiktiver Hohlkastenquerschnitt zugrunde zu legen, mit Wandstärken der umlaufenden Schubwände von maximal etwa  $d/8$  ( $d$  = statische Höhe des Vollquerschnitts).
- Der Abtrag von Torsionsmomenten über Umlauf torsion ist insbesondere bei grösseren Trägerlängen (Torsionsspannweiten) wesentlich steifer als derjenige über Wölb torsion. Hauptgrund dafür ist, dass sich bei Umlauf torsion keine Gurtkräfte über die Länge der Torsionsspannweite aufbauen (die in Richtung der Trägerachse wirkenden Komponenten des Schubflusses infolge Torsion heben sich in jeder Querschnittskante auf).

# Torsion – Allgemeines

## Räumliches Spannungsfeld

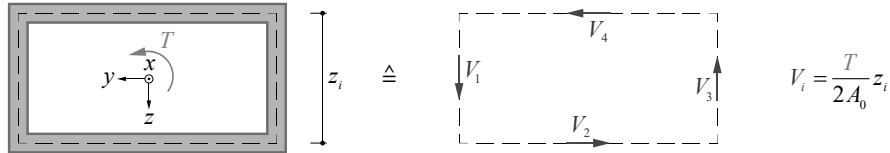


Die Sicherstellung des Schubflusses an den Kanten des Querschnitts erfordert eine entsprechende konstruktive Durchbildung, z.B. mit übergreifenden Steckbügel.

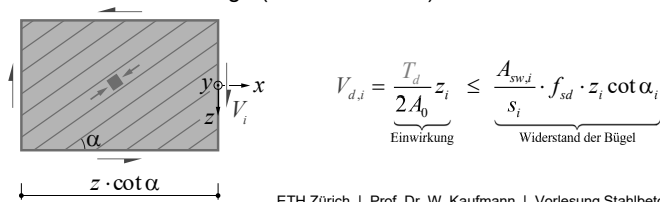
## Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw}/s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl}/u$



Die einzelnen Querschnittsscheiben erfahren eine Schubbeanspruchung; Schubkräfte und Torsionsbeanspruchung sind statisch äquivalent. In jeder Querschnittsscheibe stellt sich ein diagonales Druckfeld mit Neigung  $\alpha$  zur  $x$ -Achse ein → analog zur «Querschnittsbetrachtung» (siehe Querkraft):



07.11.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

7

Auf dieser und den beiden folgenden Folien wird der Torsionswiderstand eines Hohlkastenträgers für eine gegebene Bewehrung hergeleitet.

## Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw}/s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl}/u$

Setzt man die Druckfeldneigung in allen Scheiben gleich  $\alpha$ , folgt aus dem Widerstand der Bügelbewehrung

$$T_{Rd,Asw} = 2A_0 \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{sd} \cdot \cot \alpha$$

Infolge der Schubabtragung über ein diagonales Druckfeld resultiert in jeder Scheibe eine zusätzliche Längszugkraft von  $V_{di} \cdot \cot \alpha_i$  (analog zur Vergrößerung der Längszugkraft aus Biegung durch Querkraft):

$$F_{t,Td} = \sum V_{di} \cot \alpha_i = \frac{T_d}{2A_0} \cdot \sum z_i \cot \alpha_i \stackrel{\alpha_i = \alpha = const.}{=} \frac{T_d}{2A_0} \cdot u \cdot \cot \alpha \leq A_{sl} f_{sd}$$

$$\rightarrow T_{Rd,Asl} = 2A_0 \cdot \frac{A_{sl}}{u} \cdot f_{sd} \cdot \tan \alpha$$



## Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw}/s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl}/u$

Durch Gleichsetzen der Widerstände der Bügel und der Längsbewehrung resultiert die Druckfeldneigung, bei der Bügel- und Längsbewehrung voll ausgenutzt werden und der zugehörige Torsionswiderstand:

$$T_{Rd,Asw} = 2A_0 \cdot \frac{A_{sw}f_{sd}}{s} \cdot \cot \alpha = 2A_0 \cdot \frac{A_{sl}f_{sd}}{u} \cdot \tan \alpha = T_{Rd,Asl}$$

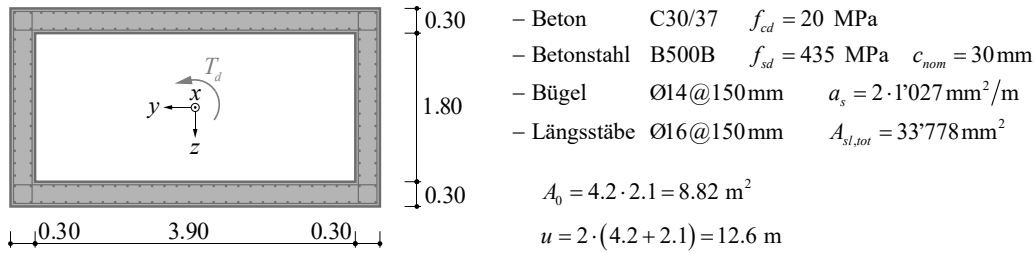
$$\rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{u}{A_{sl}} \quad \rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{u}{A_{sl}}} \quad \rightarrow T_{Rd} = T_{Rd,Asw} = T_{Rd,Asl} = 2A_0 f_{sd} \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{A_{sl}}{u}}$$

Zusätzlich müssen die Betondruckspannungen in den diagonalen Druckfeldern überprüft werden:

$$\frac{T_d}{2A_0 \cdot t} \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha) \leq k_c f_{cd} \quad \rightarrow \left( \frac{A_{sw}}{s} + \frac{A_{sl}}{u} \right) f_{sd} \leq k_c f_{cd} t$$

## Torsion – Torsionswiderstand Hohlkastenquerschnitte

### Beispiel: Torsionswiderstand eines Hohlkastenquerschnitts



$$T_{Rd} = 2 A_0 f_{sd} \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{A_{sl}}{u}} = 2 \cdot 8.82 \cdot 0.435 \cdot \sqrt{2 \cdot 1'027 \cdot \frac{33'778}{12.6}} = 18'006 \text{ kNm}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} \cdot \frac{u}{A_{sl}}} = \sqrt{2 \cdot 1'027 \cdot \frac{12.6}{33'778}} = 0.875 \rightarrow \alpha = 41.2^\circ$$

$$\sigma_c = \left( \frac{A_{sw}}{s} + \frac{A_{sl}}{u} \right) \frac{f_{sd}}{t} = \left( 2 \cdot 1'027 + \frac{33'778}{12.6} \right) \cdot \frac{435}{300} \cdot \frac{1}{1'000} = 6.9 \text{ MPa} < k_c f_{cd} = 0.55 \cdot 20.0 = 11.0 \text{ MPa}$$

Die Folie illustriert die Ermittlung des Torsionswiderstands eines Hohlkastenträgers an einem Beispiel.

## Torsion – Torsionsbemessung Hohlkastenquerschnitte

### Torsionsbemessung

- Konstante Wanddicke  $t$ , konstante Bügelbewehrung, gleichmässig über Umfang verteilte Längsbewehrung
- Annahme / Wahl von  $\alpha$  (Neigung des diagonalen Druckfelds)
- Bügelbewehrung  $A_{sw}$

$$T_{Rd, A_{sw}} = 2 \cdot A_0 \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{sd} \cdot \cot \alpha \rightarrow \frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{1}{f_{sd}} \cdot \frac{T_d}{2 \cdot A_0} \cdot \tan \alpha$$

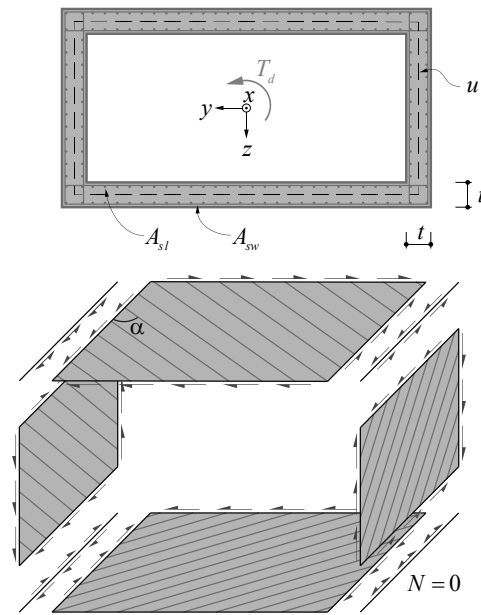
- Längsbewehrung  $A_{sl}$

$$T_{Rd, A_{sl}} = 2 \cdot A_0 \cdot \frac{A_{sl}}{u} \cdot f_{sd} \cdot \tan \alpha \rightarrow \frac{A_{sl}}{u} \geq \frac{1}{f_{sd}} \cdot \frac{T_d}{2 \cdot A_0} \cdot \cot \alpha$$

mit  $u$  = mittlerer Umfang; Stringerkräfte  $N = 0$

- Scheibendicke  $t$  (Beschränkung der Betondruckspannung)

$$t \geq \frac{1}{k_c \cdot f_{cd}} \cdot \frac{T_d}{2 \cdot A_0} \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha)$$



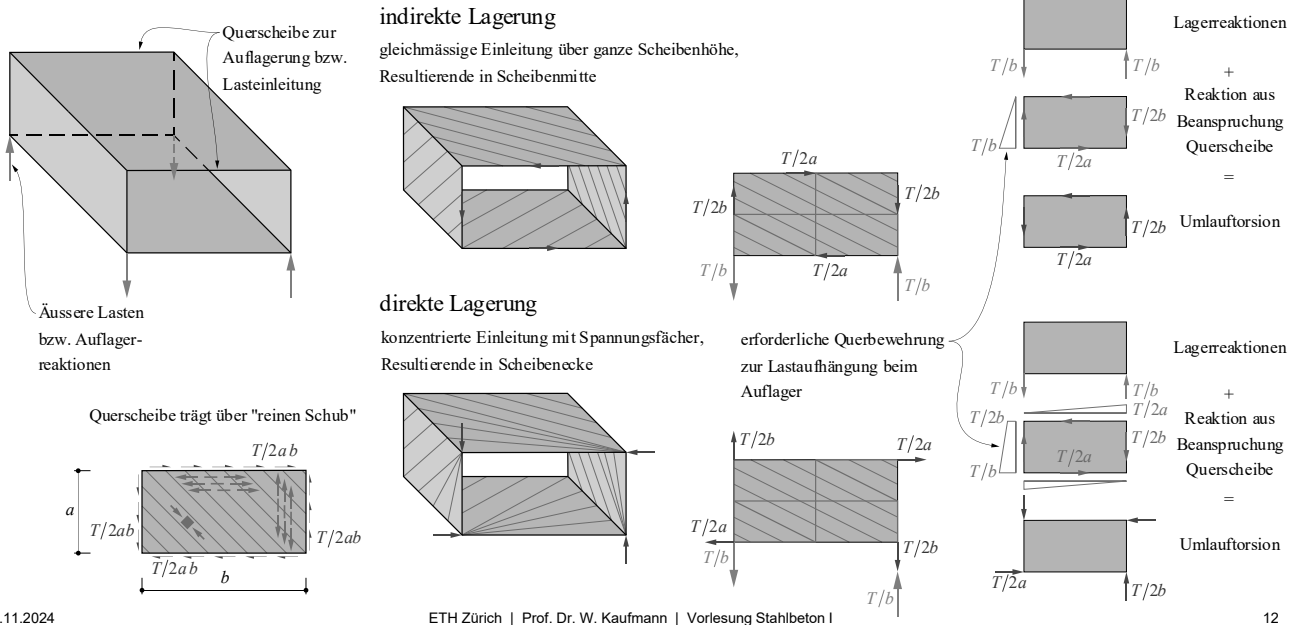
Einfacher als die Ermittlung des Torsionswiderstands bei gegebener Bewehrung ist die Bemessung der Bewehrung für eine gegebene Torsionsbeanspruchung: Jede Scheibe ist für eine Schubbeanspruchung  $V_i = T_d \cdot z_i / (2A_0)$  zu bemessen (gemäss Kapitel Querkraft).

Die Kräfte in den Eckstringern sind konstant (\*), da aus den zugehörigen Spannungsfeldern bzw. Fachwerkmodellen der einzelnen Scheiben jeweils Druck- und Zugkräfte in den Gurten resultieren, welche sich gerade aufheben.

(\*) Wird die Längszugkraft infolge Torsion durch eine in den Scheiben verteilte Längsbewehrung aufgenommen, sind die Eckstringern infolge Torsion unbelastet).

# Torsion – Torsionsbemessung Hohlkastenquerschnitte

## Lasteinleitung über Endträger / Querscheibe



Zur Einleitung der Auflagerreaktionen ist bei Torsionsbeanspruchung meist ein Endquerträger (auch Endquerscheibe genannt) erforderlich; bei grossen Torsionsbelastungen infolge äusserer Kräfte ist die Anordnung einer Querscheibe oft ebenfalls sinnvoll.

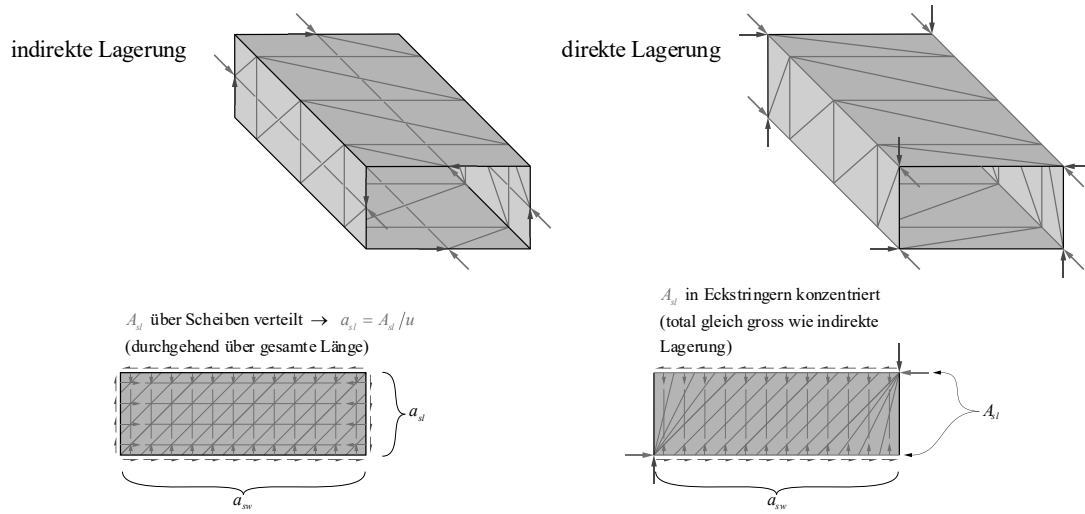
Im gezeigten Beispiel greifen die äusseren Kräfte (Auflagerreaktionen) an der Unterseite der Querscheibe an; im dargestellten Fall reiner Torsion handelt es sich um ein vertikales Kräftepaar. Der Hohlkastenträger trägt die Torsion dagegen als Umlauf torsion ab, also über vertikale und horizontale Schubkräfte in allen vier Scheiben des Querschnitts. Die Umlauf torsion im Träger und die Auflagerreaktionen sind zwar am Trägerende global im Gleichgewicht, die Schubkräfte in den einzelnen Scheiben des Trägers können jedoch durch das vertikale Kräftepaar nicht direkt aufgenommen werden. Es ist vielmehr eine Querscheibe erforderlich, welche den Kraftfluss zwischen den Schubkräften im Träger (Umlauf torsion) und den Auflagerkräften (vertikales Kräftepaar) sicherstellt. Die Belastung der Querscheibe besteht somit aus den Scheibenkräften (Umlauf torsion) aus dem Träger und den Auflagerreaktionen, was grundsätzlich einer reinen Schubbeanspruchung entspricht.

Damit die Querscheibe tatsächlich eine reine Schubbeanspruchung erfährt, müssen die Scheibenkräfte des Trägers resp. die Auflagerreaktionen entlang der Scheibenränder gleichmässig verteilt angreifen. Dazu sind vertikale und, je nach gewählter Lösung für den Kraftfluss am Trägerende, auch horizontale, konzentrierte Bewehrungen.

Für den Kraftfluss am Trägerende gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Lösungen. Bei der *indirekten Lagerung* wird die Querkraft gleichmässig über die ganze Scheibenhöhe resp. Breite eingeleitet, so dass die Resultierende im Fachwerkmodell in Scheibenmitte liegt. Da die Auflagerkräfte an der Scheibenunterseite angreifen, muss im Beispiel die Zugkraft auf der linken Seite der Querscheibe bis zur Scheibenmitte verankert werden (lineare Abstufung bei Betrachtung mit Spannungsfeld). Bei der direkten Lagerung werden die Reaktionskräfte der Querscheibe vom Träger in den Scheibenecken aufgenommen, was im Beispiel eine zusätzliche konzentrierte Bewehrung erfordert (vertikal: auf der linken Seite verankerte Bewehrung von  $T/2b$  und lineare Abstufung von  $T/2b$  bei Spannungsfeld; horizontal:  $T/2a$  linear abgestuft oben und unten).

# Torsion – Torsionsbemessung Hohlkastenquerschnitte

## Lasteinleitung über Endträger / Querscheibe



**Indirekte Lagerung:** Die Einleitung der Scheibenkräfte in Scheibenmitte führt dazu, dass die Horizontalkomponente der ersten Druckdiagonale über eine Längsbewehrung verteilt über die Scheibenhöhe aufgenommen werden muss. Diese Längsbewehrung ist über den ganzen Umfang konstant und läuft über die Trägerlänge durch (bei konstanter Torsion).

**Direkte Lagerung:** Hier gestaltet sich die Lastabtragung wie bei einem aufgelagerten Steg, mit einem (punktzentrierten) Fächer bei der Einleitung der Schubkraft. Die Resultierende des Fachwerksmodells hat somit die zweifache Neigung wie das Parallefeld. Die zusätzliche horizontale Zugkraft wird in dieser Variante konzentriert in den Eckstringern aufgenommen.

## Torsion – Torsionssteifigkeit Hohlkastenquerschnitte

Voraussetzungen:

- Kastenquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$
- Reine Torsionsbeanspruchung
- Gleichmässige Bügelbewehrung in den Scheiben  $a_{sw} = A_{sw}/s$
- Gleichmässig über den Umfang  $u = \sum z_i$  verteilte Längsbewehrung  $a_{sl} = A_{sl}/u$

Ungerissene Steifigkeit:  
(siehe Baustatik I/II)

$$GK^I = \frac{4A_0^2 G_c}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4A_0^2 G_c}{\sum \frac{z_i}{t_i}} \quad G_c = \frac{E_c}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Gerissene Steifigkeit:

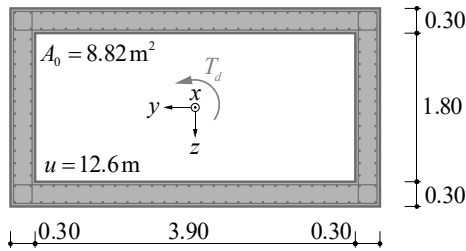
$$GK^{II} = \frac{4A_0^2 E_s \frac{t}{u}}{\frac{\cot^2 \alpha}{\rho_l} + \frac{\tan^2 \alpha}{\rho_w} + n \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha)^2}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_l} + n}{\frac{1}{\rho_w} + n}} \quad \rho_l = \frac{A_{sl}}{u \cdot t} \quad \rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot t} \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

Die Folie zeigt die Torsionssteifigkeit eines Hohlkastenträgers für eine gegebene Bewehrung (Herleitung siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete, Steifigkeit gerissen-elastischer Scheibenelemente).

## Torsion – Torsionssteifigkeit Hohlkastenquerschnitts

### Beispiel: Torsionssteifigkeit eines Hohlkastenquerschnitts



- Beton C25/30  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$   $E_c = 32 \text{ kN/mm}^2$   $\nu = 0.2$
- Betonstahl B500B  $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$   $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$
- Bügel  $\text{Ø}14@150 \text{ mm}$   $a_s = 2 \cdot 1'027 \text{ mm}^2/\text{m}$
- Längsstäbe  $\text{Ø}16@150 \text{ mm}$   $A_{st,tot} = 33'778 \text{ mm}^2$

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot t} = \frac{2 \cdot 1027}{300 \cdot 1000} = 0.684\% \quad \rho_l = \frac{A_{sl}}{u \cdot t} = \frac{33778}{12600 \cdot 300} = 0.894\% \quad n = \frac{205}{32} = 6.406$$

$$\tan \alpha = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{\rho_l} + n}{\frac{1}{\rho_w}}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{0.00894} + 6.406}{\frac{1}{0.00684}}} = 0.9384 \quad \rightarrow \alpha = 43.2^\circ$$

Diese und die folgende Folie illustrieren die Ermittlung der Torsionssteifigkeit eines Hohlkastenträgers an einem Beispiel.

## Torsion – Torsionssteifigkeit Hohlkastenquerschnitte

### Beispiel: Torsionssteifigkeit eines Hohlkastenquerschnitts

$$GK'' = \frac{4A_0^2 E_s \frac{t}{u}}{\frac{\cot^2 \alpha}{\rho_l} + \frac{\tan^2 \alpha}{\rho_w} + n \cdot (\tan \alpha + \cot \alpha)^2} = \frac{4 \cdot 8.82^2 \cdot 205 \cdot \frac{0.3}{12.6}}{\frac{1}{0.9384^2 \cdot 0.00894} + \frac{0.9384^2}{0.00684} + 6.406 \cdot \left(0.9384 + \frac{1}{0.9384}\right)^2}$$

$$GK'' = 5.40 \text{ GNm}^2$$

$$GK'' \triangleq 0.0546 \cdot GK^I$$

Zum Vergleich: Biegesteifigkeiten

$$EI^I = 105.2 \text{ GNm}^2$$

$$EI'' = 11.14 \text{ GNm}^2 \triangleq 0.106 \cdot EI^I$$

mit  $A_s = 21'715 \text{ mm}^2$ ,  $d = 1'783.3 \text{ mm}$ ,  $A_s' = 12'064 \text{ mm}^2$ ,  $d' = 150 \text{ mm}$   
 $b = 4'500 \text{ mm}$ ,  $n = 6.406 \rightarrow x = 296 \text{ mm}$

[GNm <sup>2</sup> ]	ungerissen		gerissen
$EI$	105.2	-89%	11.14
$GK$	98.8	-95%	5.40

d.h.  $\frac{EI''/EI^I}{GK''/GK^I} \approx 2$

→ Einfluss auf Schnittgrößen bei statisch unbestimmten Systemen (Verträglichkeitstorsion)

Wie einleitend bemerkt, fällt die Torsionssteifigkeit  $GK$  bei der Rissbildung stärker ab als die Biegesteifigkeit  $EI$ . Im Beispiel ist der Abfall sehr ausgeprägt, da die Bewehrung verhältnismässig schwach ist.



## Torsion – Gekrümmte Träger

### Statik gekrümmter Träger

- Betrachtet wird ein Element eines gekrümmten Trägers mit infinitesimaler Länge unter Gleichstreckenlast und Torsion
- Gleichgewicht am Schnittkörperdiagramm ergibt:

$$\sum F_z = 0 = -V + V + dV + q \cdot ds$$

$$q \cdot ds + dV = q \cdot r \cdot d\varphi + dV = 0 \rightarrow q = -\frac{dV}{rd\varphi}$$

$$\sum M_n = 0 = -M + (M + dM) \overset{\approx 1}{\cos d\varphi} + (T + dT) \overset{\approx d\varphi}{\sin d\varphi} - (V + dV) \cdot ds - q \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} + m_t \cdot ds \cdot \sin d\varphi$$

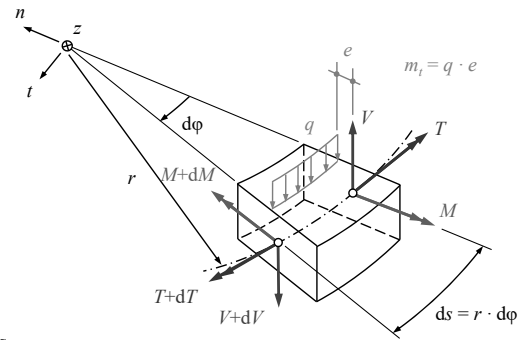
$$-V \cdot ds + dM + Td\varphi = -V \cdot r \cdot d\varphi + dM + Td\varphi = 0$$

$$\rightarrow \frac{dM}{rd\varphi} = V - \frac{T}{r}$$

$$\sum M_t = 0 = -T + (T + dT) \cos d\varphi - (M + dM) \sin d\varphi + (V + dV) \cdot ds \cdot \sin d\varphi + q \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} \sin d\varphi + m_t \cdot ds \cdot \cos d\varphi$$

$$m_t \cdot ds - Md\varphi + dT = m_t \cdot r \cdot d\varphi - Md\varphi + dT = 0$$

$$\rightarrow \frac{dT}{rd\varphi} = \frac{M}{r} - m_t$$



In der Praxis tritt (Gleichgewichts-)Torsion beispielsweise bei im Grundriss gekrümmten Trägern auf.

Auf dieser und der nächsten Folie wird die Differentialgleichung für das Gleichgewicht gekrümmter Träger hergeleitet.

# Torsion – Gekrümmte Träger

## Statik gekrümmter Träger

- Betrachtet wird ein Element eines gekrümmten Trägers mit infinitesimaler Länge unter Gleichstreckenlast und Torsion
- Gleichgewicht am Schnittkörperdiagramm ergibt:

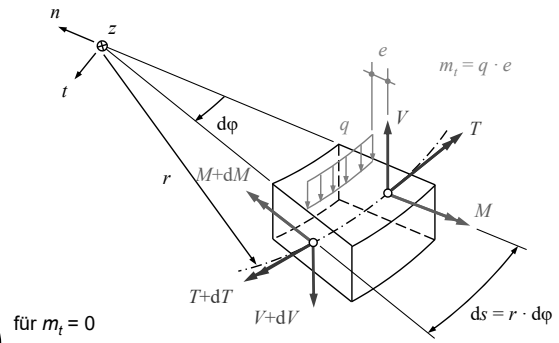
$$\begin{aligned}
 q &= -\frac{dV}{r \cdot d\varphi} & \frac{dM}{r \cdot d\varphi} &= V - \frac{T}{r} & \frac{dT}{r \cdot d\varphi} &= \frac{M}{r} - m_t \\
 q \cdot r &= -\frac{dV}{d\varphi} & \frac{dM}{d\varphi} &= V \cdot r - T & \frac{dT}{d\varphi} &= M - m_t \cdot r
 \end{aligned}$$

M und T sind gekoppelt

Bei einem geraden Balken ( $r \rightarrow \infty$ ) reduzieren sich die obigen Gleichungen zur bekannten Form:

$$\begin{aligned}
 q &= -\frac{dV}{ds} & \frac{dM}{ds} &= V & \frac{dT}{ds} &= -m_t
 \end{aligned}$$

M und T sind entkoppelt



für  $m_t = 0$

$$\frac{dT}{d\varphi} = M \rightarrow \Delta T = \int M d\varphi$$

d.h. die Variation des Torsionsmoments zwischen zwei Schnitten entspricht der Fläche des Biegemomentendiagramms (integriert über  $\varphi$ ) zwischen diesen beiden Schnitten

→ Wichtig bei Durchlaufträgern mit veränderlichem Vorzeichen des Biegemoments

# Torsion – Gekrümmte Träger

## Statik gekrümmter Träger

- Lösen des Differentialgleichungssystems:

$$q \cdot r = -\frac{dV}{d\varphi} \quad \frac{dM}{d\varphi} = V \cdot r - T \quad \frac{dT}{d\varphi} = M - m_t \cdot r$$

$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi}(V \cdot r - T) = -q \cdot r^2 - M + m_t \cdot r$$

..... für Kreisringträger ( $r = \text{const.}$ )

$$\rightarrow \frac{d^2 M}{d\varphi^2} + M = m_t \cdot r - q \cdot r^2$$

→ inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung;  
allgemeine Lösung für konstante Koeffizienten d.h.

$$m_t(\varphi) = m_t = \text{const. und } q(\varphi) = q = \text{const.},$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$M(\varphi) = c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi + m_t r - q r^2$$

Die Differentialgleichung lässt sich auch iterativ lösen. Das Vorgehen ist anschaulich und konvergiert für kleine Öffnungswinkel resp. grosse Radien sehr schnell.

1. Erste Näherung für  $M$ :

Gerader Träger mit Spannweite  $s = r \cdot \varphi$  unter Belastung  $q - \frac{m_t}{r}$

$$\frac{d^2 M}{ds^2} + M = m_t \cdot r - q \cdot r^2 \rightarrow \frac{d^2 M}{ds^2} = \frac{m_t}{r} - \frac{M}{r^2} - q \approx \frac{m_t}{r} - q$$

2. Iteration von (1) mit Belastung  $q + \frac{M}{r^2} - \frac{m_t}{r}$  bis Konvergenz erreicht ist

$$\text{(oft unnötig da } \left| \frac{M}{r^2} \right| \ll |q|)$$

3. Ermittlung von  $T$ :

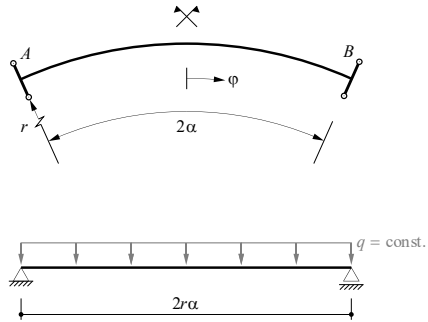
Gerader Träger mit Spannweite  $s = r \cdot \varphi$  unter Torsionsbelastung  $\frac{M}{r} - m_t$ :

$$\frac{dT}{d\varphi} = M - m_t \cdot r \rightarrow \frac{dT}{ds} = \frac{M}{r} - m_t$$

Anstatt die Differentialgleichung analytisch zu lösen, kann die Biegebeanspruchung  $M$  bei geringer Krümmung (kleiner Öffnungswinkel, grosser Radius) wie bei einem geraden Träger (Länge entsprechend abgewickelter Länge der Stabachse) erfolgen. Die Torsionsbeanspruchung kann in einem zweiten Schritt am gleichen, geraden Träger unter der Torsionsbelastung  $M/r$  ermittelt werden (siehe auch nachfolgende Folien zu Querbiegung).

## Torsion – Gekrümmte Träger

Beispiel:



- Träger mit gekrümmter Länge  $l = 2r\alpha$
- Konstante Streckenlast  $q = \text{const.}$
- Allgemeine Lösung:

$$M = c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi - qr^2$$

- Randbedingungen:

$$\bullet \left. \frac{dM}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

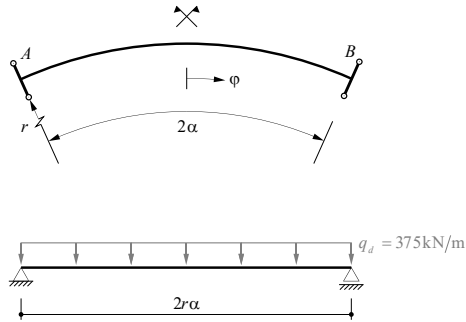
$$\bullet M|_{\varphi=\alpha} = 0 \rightarrow c_2 = \frac{qr^2}{\cos \alpha}$$

$$M = qr^2 \left( \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - 1 \right) \quad V = -qr\varphi \quad T = qr^2 \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha} - \varphi \right)$$

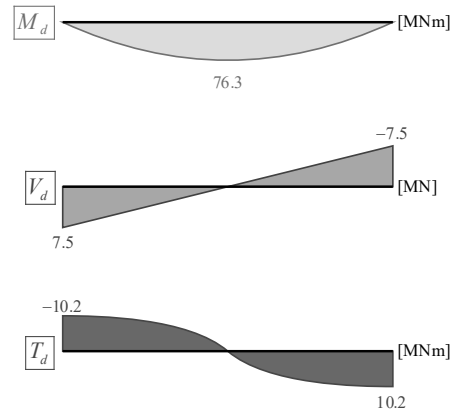
Auf dieser und der nächsten Folie wird die Anwendung der analytischen Lösung der Differentialgleichung sowie der Näherungslösung an einem Beispiel illustriert.

## Torsion – Gekrümmte Träger

Beispiel:



$$r = 100\text{ m} \quad l = 40\text{ m} \quad \alpha = 0.2\text{ rad} (\approx 11.46^\circ) \quad q_d = 375\text{ kN/m}$$



NB: Näherung gerader Träger mit Spannweite  $2r\alpha = 40\text{ m}$

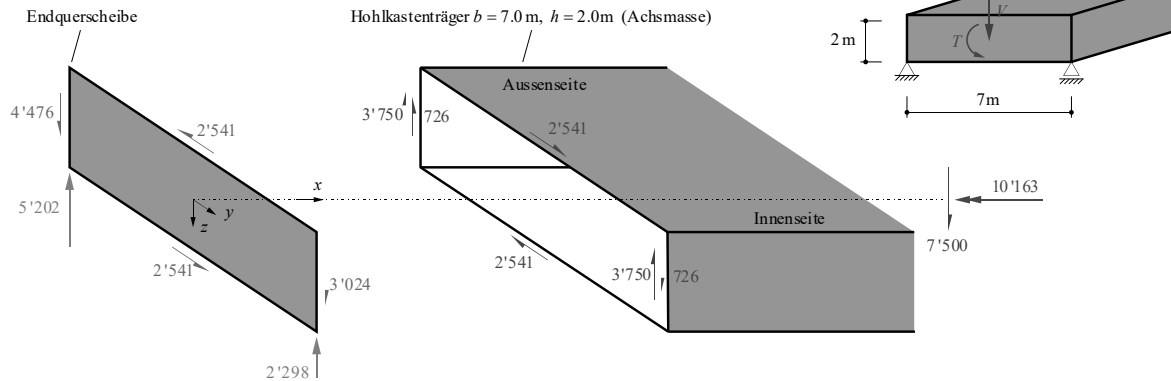
①  $M_d(q_d) = 75\text{ MNm}$  (parabolisch), ② Iteration unnötig da zusätzliche Belastung  $M_d(①)/r^2 = 7.5\text{ kN/m} = \text{nur } 2\% \text{ von } q_d$

③  $T_d$  unter parabolischer Torsionsbelastung  $M_d/r = 750\text{ kNm/m} \rightarrow T_d = 750 \cdot 20 \cdot 2/3 = 10.0\text{ MNm}$  in A resp. B  $\rightarrow 2\% \text{ weniger als exakte Lösung}$   
 (mit Iteration ②:  $M_d(①)/r^2 = 7.5\text{ kN/m}$  (parabolisch)  $\rightarrow \Delta M_d = 5/6 \cdot 7.5 \cdot 40^2/8 = 1.3\text{ MNm} \rightarrow M_d = 76.3\text{ MNm}$ ,  $T_d \approx 763 \cdot 20 \cdot 2/3 = 10.2\text{ MNm}$ )

Mit einer Iteration (Schritt 2) stimmen die Resultate praktisch überein (Moment in Feldmitte bei parabolischer Belastung:  $5/6$  der konstanten Belastung,  $5/6 \cdot 7.5 \cdot 40^2/8 = 1'250\text{ kNm}$ )

## Torsion – Krafteinleitung

**Beispiel Auflagerbereich A (Lager vertikal):**



Auflagerkräfte (vertikal):

$$A_{d,aussen} = \frac{10'163 \text{ kNm}}{7 \text{ m}} + \frac{7'500 \text{ kN}}{2} = 5'202 \text{ kN},$$

$$A_{d,innen} = -\frac{10'163 \text{ kNm}}{7 \text{ m}} + \frac{7'500 \text{ kN}}{2} = 2'298 \text{ kN}$$

Scheibenkräfte in Stegen infolge Umlauf torsion:

$$S_{d,vertikal} = \frac{10'163 \text{ kNm}}{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 7 \text{ m}} \cdot 2 \text{ m} = 726 \text{ kN},$$

$$S_{d,horizontal} = \frac{10'163 \text{ kNm}}{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 7 \text{ m}} \cdot 7 \text{ m} = 2'541 \text{ kN}$$

Scheibenkräfte in vertikalen Stegen total:

$$S_{d,aussen} = \frac{7'500 \text{ kN}}{2} + 726 \text{ kN} = 4'476 \text{ kN},$$

$$S_{d,innen} = \frac{7'500 \text{ kN}}{2} - 726 \text{ kN} = 3'024 \text{ kN}$$

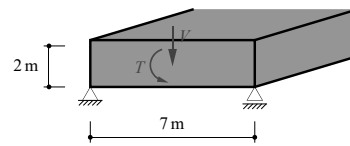
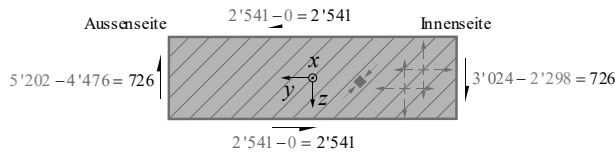
Am Trägerende muss das durch die verschiedenen Scheiben des Querschnitts aufgenommene Torsionsmoment in die Lager eingeleitet werden. Zu diesem Zweck ist in den meisten Fällen ein Endquerträger (auch Endquerscheibe genannt) unabdingbar.

Der Endquerträger ist auf der einen Seite durch die Scheibenkräfte, welche aus dem Träger ankommen, belastet. Auf der anderen Seite wirken auf ihn die Lagerkräfte, welche mit den Scheibenkräften aus dem Träger im Gleichgewicht stehen. Der Endquerträger wandelt also die Umlauf torsion und die Querkraft am Trägerende in zwei vertikale Kräfte (in der Achse der Auflagerkräfte) um.

Die Folie illustriert dies am Beispiel des gekrümmten Trägers (Beispiel auf vorhergehenden Seiten).

## Torsion – Krafteinleitung

Beispiel Endquerscheibe A (Lager vertikal):



- Die Endquerscheibe muss die Differenz zwischen den Scheibenkräften aus dem Träger und den Auflagerreaktionen aufnehmen  
→ reine Schubbeanspruchung, Schubfluss:  $726/2 = 2541/7 = 363 \text{ kN/m}$
- Die in den Flanschen und im inneren Steg verlaufenden geneigten Risse werden in der Endquerscheibe spiralförmig fortgesetzt.
- Der Schubfluss kann beispielsweise über ein unter  $45^\circ$  zur  $y$ -Achse geneigtes Druckfeld abgetragen werden. Dies erfordert gleichmässig verteilte Bewehrung in  $x$ - und  $y$ -Richtung mit einem Widerstand von je  $363 \text{ kN/m}$ .

$$a_{s,erf} = \frac{363}{0.435} = 834 \text{ mm}^2/\text{m} \rightarrow \text{beidseitig } \varnothing 10@150 \quad (a_s = 2 \cdot 523 = 1046 \text{ mm}^2/\text{m})$$

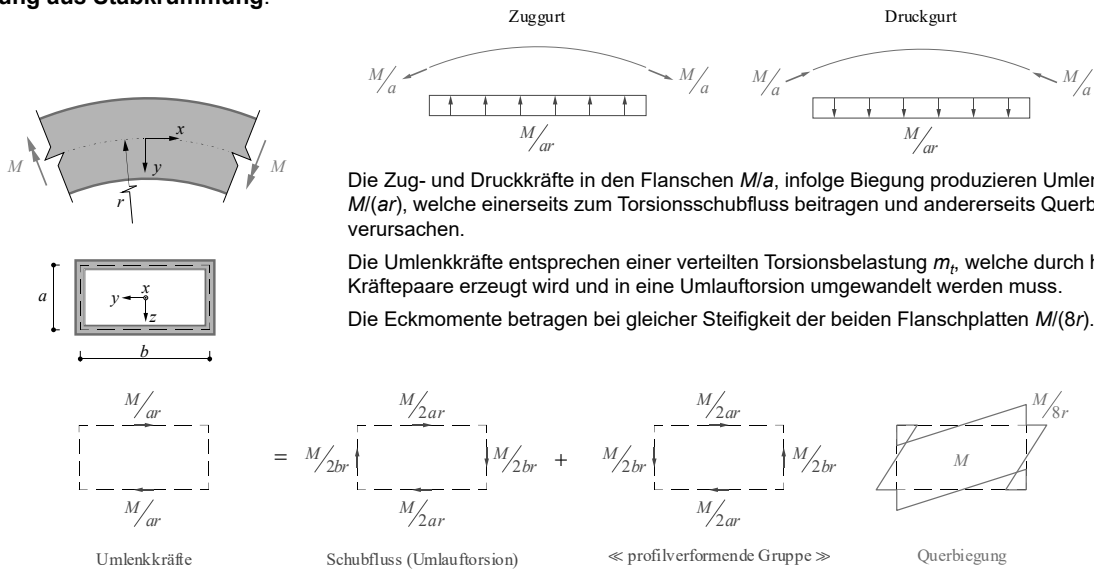
- Die Betondruckspannungen betragen mit einer Scheibenstärke von  $t = 200 \text{ mm}$

$$\sigma_c = \frac{726}{200 \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ \cos 45^\circ} = 3.63 \text{ N/mm}^2$$

**NB:** Normalerweise ist in den Endquerträgern eine Öffnung vorzusehen (Zugang für Unterhalt, Werkleitungen). Die Bemessung erfolgt mit Spannungsfeldern / Fachwerkmodellen, siehe Vorlesung Stahlbeton III.

# Torsion – gekrümmte Träger

## Querbiegung aus Stabkrümmung:



Die Zug- und Druckkräfte in den Flanschen  $M/a$ , infolge Biegung produzieren Umlenkkräfte  $M/ar$ , welche einerseits zum Torsionsschubfluss beitragen und andererseits Querbiegung verursachen.

Die Umlenkkräfte entsprechen einer verteilten Torsionsbelastung  $m_t$ , welche durch horizontale Kräftepaare erzeugt wird und in eine Umlauf torsion umgewandelt werden muss.

Die Eckmomente betragen bei gleicher Steifigkeit der beiden Flanschplatten  $M/(8r)$ .

Mit der Idealisierung eines Trägers als einzelner Stab können nicht alle relevanten Effekte direkt untersucht werden. Insbesondere kann damit die Beanspruchung des Trägers in Querrichtung nicht erfasst werden.

Infolge der Stabkrümmung resultieren Querbiegemomente, da die aus der Biegebeanspruchung resultierende Torsionsbelastung  $M/r$  (siehe Näherungsverfahren) primär durch horizontale Ablenkkräfte (Umlenkung der Gurtkräfte in den Kastenplatten) hervorgerufen, jedoch durch Umlauf torsion abgetragen wird. In jedem Querschnitt des gekrümmten Trägers wirkt ein horizontales Kräftepaar  $[kN/m]$  in der oberen und unteren Kastenplatte = Querschnittsscheibe, welches mit der daraus resultierenden Umlauf torsion «global» im Gleichgewicht steht. Das «lokale» Gleichgewicht der Scheibenkräfte ist jedoch nicht gewährleistet; vielmehr besteht zwischen den Scheibenkräften eine Differenz. Diese Differenzkräfte werden als «profilverformende Gruppe» bezeichnet, da sie durch den Querschnitt aufzunehmen sind und, sofern keine Aussteifung vorhanden ist, zu einer Verformung des Querschnitts (des «Profils») führen.

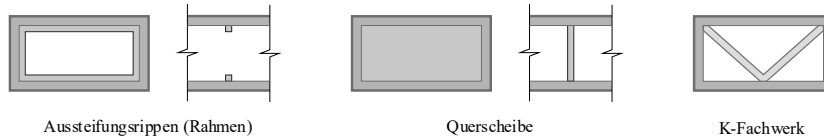
Die durch die profilverformende Gruppe (also die Einleitung der Torsionsmomente infolge Trägerkrümmung) verursachten Querbiegemomente müssen durch eine entsprechende Bewehrung aufgenommen werden. Zudem ist ihre Interaktion mit den Scheibenkräften infolge Tragwirkung in Längsrichtung zu berücksichtigen, insbesondere in den Stegen (Beanspruchung durch Querkraft und Torsion).



# Torsion – gekrümmte Träger

## Querbiegung aus Stabkrümmung

Die Querbiegemomente infolge Stabkrümmung können als verteilte Beanspruchungen (kNm/m) grundsätzlich durch den Querschnitt selber aufgenommen werden (Plattenbiegung und -querkräfte in Querrichtung). Bei starker Krümmung wird die Beanspruchung der Stege und Flansche resp. die Querschnittsverwölbung zu gross, so dass zur Aufnahme der Querbiegemomente Aussteifungsrippen oder Querscheiben angeordnet werden müssen («Feldquerträger»). Alternativ können beispielsweise K-Fachwerke vorgesehen werden (analog wie im Stahlbau).



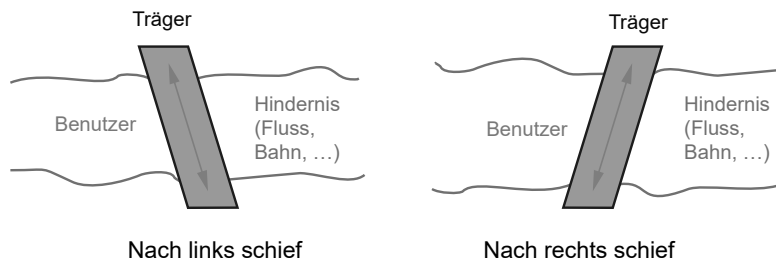
Durch vertikale Lasten resp. Reaktionen erzeugte Torsionsbelastungen werden – auch bei geraden Trägern – analog behandelt. Verteilte Torsionsbelastungen (z.B. infolge verteilter Verkehrslasten) können meist ohne aussteifende Elemente aufgenommen resp. eingeleitet werden.

Bei konzentrierten Lastenleitungen, insbesondere Auflagern, sind aussteifende Elemente («Stützenquerträger», «Endquerträger») oft unvermeidbar. Werden konzentrierte Torsionsbelastungen (z.B. infolge Achslasten) ohne aussteifende Elemente eingeleitet, ist die Breite, über welche die resultierenden Querbiegemomente verteilt werden, mit Bedacht festzulegen.

**NB:** Querscheiben behindern das Vorschieben der Innenschalung → bei Einsatz von Vorschubgerüsten Feldquerträger nach Möglichkeit vermeiden, Stützenquerträger als Rahmen oder Fachwerk ausbilden.

## Torsion – schief gelagerte Träger

### Typisierung



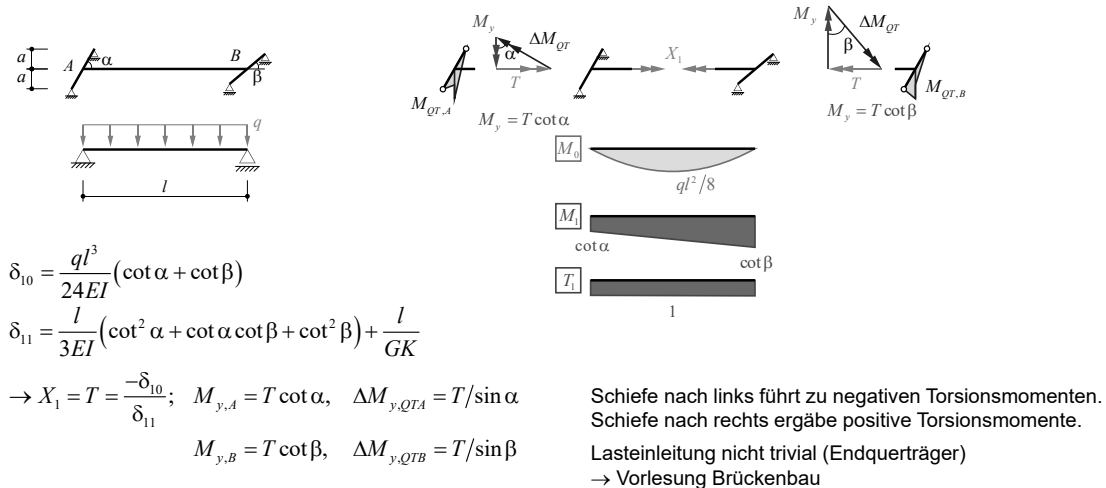
Aus der Sicht des Benutzers können «nach links» und «nach rechts schiefe» Träger unterschieden werden.

Neben gekrümmten Trägern sind schief gelagerte Brücken ein weiteres praktisches Beispiel für eine Torsionsbeanspruchung.

## Torsion – schief gelagerte Träger

### Behandlung mit Kraftmethode

Der nach links schiefe Träger AB mit  $EI = \text{const.}$  und  $GK = \text{const.}$  ist über starre, um ihre Achse drehbare, Endquerträger gelagert und durch  $q = \text{const.}$  belastet.



Diese Folie illustriert die Schnittkraftermittlung an einem an beiden Enden schief gelagerten Träger.

Ist der Träger an beiden Enden auf je zwei Lagern abgestützt, ist das System einfach statisch unbestimmt. Bei der Berechnung ist zu beachten, dass die Endquerträger keine Torsionsmomente um ihre Achse aufnehmen können (da sie bei den Lagern um ihre Achse frei drehbar gelagert sind). Somit muss die Resultierende aus dem Biege- und Torsionsmoment an den Trägerenden senkrecht zum jeweiligen Endquerträger sein.

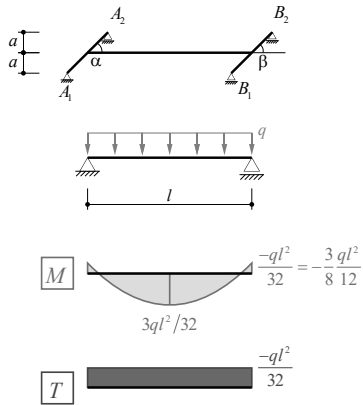
Als Überzählige Grösse wird im Beispiel die Torsion im Träger eingeführt; alternativ kann beispielsweise die Resultierende aus dem Biege- und Torsionsmoment an einem der Trägerenden eingeführt werden.

### Ergänzende Bemerkung

- Sind die Trägerenden nicht auf Lagern frei drehbar gelagert, sondern wie beispielsweise bei Rahmenbrücken elastisch eingespannt, muss die Resultierende aus dem Biege- und Torsionsmoment an den Trägerenden natürlich nicht mehr senkrecht zum jeweiligen Endquerträger sein (da dieser nun auch «Torsionsmomente» = Biegung in den Rahmenstielen abtragen kann). Bei sehr steifen Rahmenstielen resultiert praktisch eine volle Einspannung, und die Torsionsmomente im Träger sind deutlich kleiner als im Fall mit drehbar gelagertem Endquerträger.

## Torsion – schief gelagerte Träger

Beispiel:



- Beispiel mit  $\alpha = \beta = 45^\circ$
- $l = 8a$
- $EI / GK = 5/3$

$$\delta_{10} = \frac{ql^3}{12EI} \quad \delta_{11} = \frac{l}{EI} + \frac{l}{GK}$$

$$X_1 = T = M_{y,A} = M_{y,B} = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-\frac{ql^3}{12EI}}{\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK}\right)} = -\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{1}{1 + \frac{EI}{GK}}$$

Volle Einspannung
Reduktion da  $GK < \infty$

$$A_{1,2} = \frac{ql}{4} \pm \frac{X_1}{2a} = \frac{ql}{4} \mp \frac{ql^2}{24a \cdot \left(1 + \frac{EI}{GK}\right)}$$

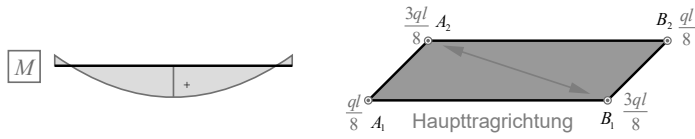
$$\rightarrow A_1 = \frac{ql}{8} \quad A_2 = \frac{3ql}{8}$$

Die Folie illustriert die Schnittkraftverteilung an einem Beispiel.

Man erkennt, dass die schiefe Lagerung eine (teilweise) Einspannung des Trägers an seinen Enden bewirkt.

## Torsion – schief gelagerte Träger

Erkenntnis:



- Schiefe Lagerung von Trägern wirkt ähnlich wie eine Einspannung der Trägerenden.
- Die lastnahen Lager  $A_2$  und  $B_1$  erfahren grössere Auflagerkräfte als die lastfernen Lager  $A_1$  und  $B_2$ . Man erkennt, dass derartige Platten über die stumpfen Ecken tragen. Bei grosser Schiefe können die spitzen Ecken abheben d.h. sie müssen nach unten gehalten werden.

## Torsion – Zusammenfassung

1. Grundsätzlich sind Fälle von
  - Gleichgewichtstorsion ( $T$  für Gleichgewicht notwendig, unabhängig von  $GK$ ) und
  - Verträglichkeitstorsion ( $T$  abhängig von  $GK$ , Gleichgewicht ohne  $T$  möglich) zu unterscheiden.
2. Im Allgemeinen liegt gemischte Torsion (Umlauf torsion und Wölb torsion) vor.
3. Torsion tritt in der Regel kombiniert mit anderen Beanspruchungen auf. Die Schubflüsse aus Torsion sind jenen aus Querkraft zu überlagern.
4. Für den Grenzzustand der Tragsicherheit können räumliche Fachwerkmodelle und entsprechende Spannungsfelder entwickelt werden.
5. Zur Sicherstellung des Schubflusses an Querschnittskanten ist eine entsprechende konstruktive Durchbildung, z.B. mit übergreifenden Bügeln erforderlich.
6. Bei fließender Längs- und Bügelbewehrung ist der Torsionswiderstand wie der Querkraftwiderstand proportional zum geometrischen Mittel der Längs- und Bügelbewehrungsgehalte.
7. Die Torsionssteifigkeit nimmt vom ungerissenen zum gerissenen Zustand meist viel ausgeprägter ab als die Biegesteifigkeit. Dies kann man in der statischen Berechnung z.B. dadurch berücksichtigen, dass man mit  $E''$  und  $GK''/3$  rechnet (Verformungen aber mit  $E''$  und  $GK''$  ermitteln, Kriechen berücksichtigen).

## Torsion – Zusammenfassung

8. Zur Einleitung konzentrierter Torsionsmomente in Träger, insbesondere bei End- und Zwischenauflagern, sind im Allgemeinen Querscheiben erforderlich (zum Beispiel Umwandlung vertikales Kräftepaar in Umlauf torsion) .
9. Stabkrümmungen und verteilte Torsionsbelastungen (infolge horizontaler oder vertikaler Lasten) verursachen Querbiegung der Stabquerschnitte. Gegebenenfalls sind zur Aufnahme der Querbiegemomente Aussteifungsrippen oder Querscheiben bzw. Ausfachungen anzuordnen. Dabei ist zu beachten, dass solche Elemente den Bauablauf (Vorschieben der Innenschalung) behindern.
10. Schiefe Lagerung von Trägern wirkt ähnlich wie eine Einspannung der Trägerenden. Die Grösse der Einspannwirkung ist vom Verhältnis  $GK/EI$  abhängig.
11. Schief gelagerte Platten tragen über die stumpfen Ecken. Gegebenenfalls müssen die spitzen Ecken nach unten verankert werden (negative Auflagerreaktionen).