

3.4 Querkraft

Die Querkräfte sind für das Verständnis des Kraftflusses in Tragwerken von zentraler Bedeutung; ihr Vorzeichen gibt an, in welche Richtung die Kräfte in einem bestimmten Schnitt abgetragen werden.

Ein nochmals direkteres Verständnis des Kraftflusses erhält man, wenn anstelle von Querschnitten das gesamte Tragwerk betrachtet und der Lastabtrag mit Fachwerkmodellen resp. Spannungsfeldern visualisiert wird. Dieses Vorgehen ist für Stahlbetontragwerke besonders geeignet. Der Beton nimmt dabei die Druckkräfte auf, und die Bewehrung wird für die Beanspruchung der Zugstäbe bemessen.

In diesem Kapitel werden hauptsächlich das Verhalten und die Bemessung von Trägern (und in eine Richtung tragenden Plattenstreifen) unter Querkraftbeanspruchung erläutert. Ergänzend werden auch Fachwerkmodelle für häufige konstruktive Details und Scheiben angegeben.

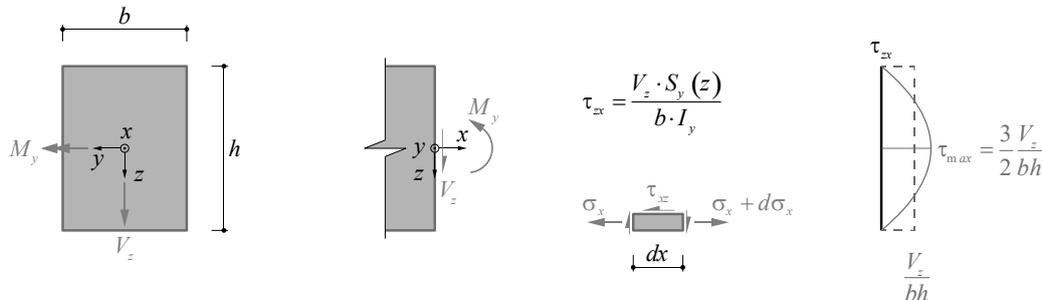
Das Verhalten und die Bemessung von Platten unter Querkraft (bis zum Herbstsemester 2015 ebenfalls in diesem Kapitel kurz behandelt) sind neu Gegenstand der Vorlesung Stahlbeton II, Kapitel Platten.

Querkraft – Einleitung

Klassische Balkentheorie – Einfluss der Querkraft

Klassische Balkentheorie:

- Querschnitte senkrecht zur Stabachse bleiben unverformt und senkrecht zur verformten Stabachse
- Schubverzerrungen vernachlässigt, aber Schubspannungen für Gleichgewicht benötigt
- Ermittlung durch Betrachtung zugeordneter Schubspannungen (Baustatik):



- Diese Betrachtung ist für Stahlbetonträger im gerissenen Zustand nur bedingt geeignet

Nach klassischer Balkentheorie sind die Schubspannungen zwar für das Gleichgewicht erforderlich, die zugehörigen Verformungen (Schubverzerrungen) werden jedoch, wie auch Spannungen und Dehnungen senkrecht zur Stabachse, vernachlässigt. Diese Annahmen sind für übliche Verhältnisse gerechtfertigt, da die Schubspannungen um eine, die Normalspannungen senkrecht zur Stabachse sogar um zwei Größenordnungen kleiner sind als die Normalspannungen in Richtung der Stabachse (siehe u.a. Marti, Baustatik). Daraus folgt die im Kapitel Biegung verwendete Annahme der klassischen Balkentheorie, dass zur Stabachse senkrechte Querschnitte eben und senkrecht zur verformten Stabachse bleiben. Die Schubspannungen folgen durch Gleichgewichtsbetrachtungen aus den Normalspannungen in Richtung der Stabachse (zugeordnete Schubspannungen). Für linear elastische Rechteckquerschnitte resultiert eine parabolische Schubspannungsverteilung.

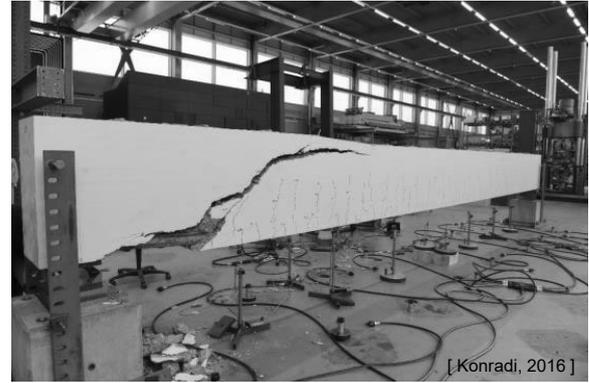
Im Stahlbetonbau ist eine analoge Behandlung grundsätzlich möglich. Dabei sind jedoch das asymmetrische (keine Zugspannungen) und nichtlineare Verhalten des Betons zu berücksichtigen, was die Ermittlung der Schubspannungen erschwert. Man geht daher in der Regel von über die Steghöhe konstanten Schubspannungen aus (in Abbildung rechts gestrichelt eingezeichnet). Um diese ohne Zugspannungen im Beton abtragen zu können, müssen im Steg zusätzlich Druckspannungen überlagert werden; näheres dazu siehe Folie 13 ff.

NB: Auch bei Stahlbetonbalken und -platten dominieren die Kräfte und Verformungen infolge der Biegebeanspruchung das Tragverhalten; die Schubverformungen sind ausser bei gedrunenen und stark profilierten Trägern vernachlässigbar. Die Querkraften können jedoch bei der Bemessung keineswegs vernachlässigt werden. Vielmehr verdient die Querkraftbemessung besondere Beachtung, da Versagen infolge Querkraft insbesondere bei fehlender oder sehr kleiner Schubbewehrung spröde sind. Während das Verhalten unter reiner Biegung mit den im Kapitel Biegung vorgestellten Modellen sehr genau vorhergesagt werden kann, bestehen bei der Querkraft wesentlich grössere Unsicherheiten. Dies insbesondere bei Trägern ohne Querkraftbewehrung. Auch bei Trägern mit Querkraftbewehrung kann der Bruchwiderstand weniger genau vorhergesagt werden, weshalb die Normen grössere Modellsicherheiten enthalten als bei Biegung.

Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

- Seit 1960 intensive Forschung insbesondere auch an der ETH Zürich.
- Diverse Grossversuche, zum Beispiel Marti/Beck/Konradi (2016), siehe Abbildungen
- 2 Versuchskörper ohne Querkraftbewehrung
- Plötzliches, schlagartiges Versagen



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

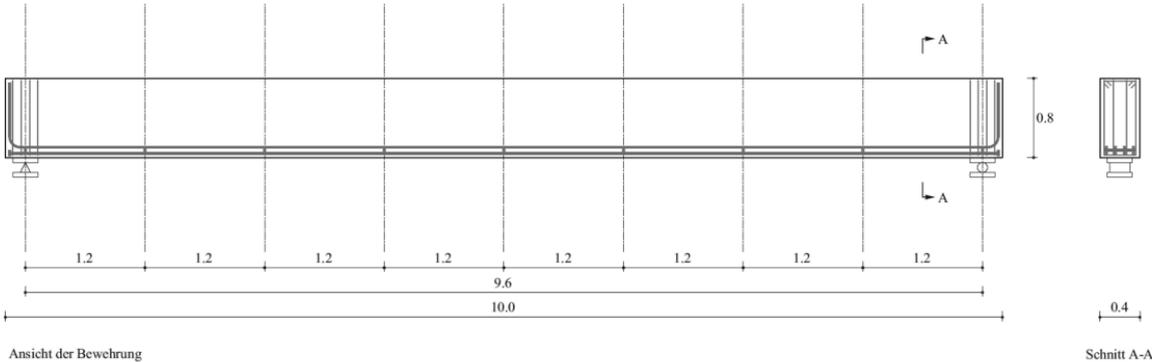
3

Träger ohne Querkraftbewehrung können sehr spröd versagen. Dies wird auf dieser und den folgenden Folien anhand eines Versuchs (Video) an der ETH Zürich illustriert.

Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

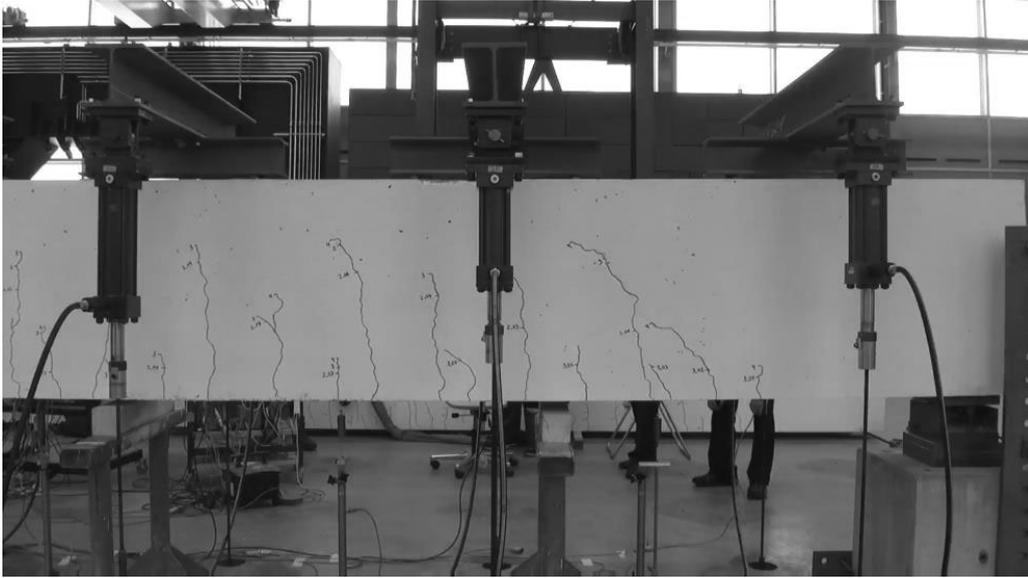
- nur Längsbewehrung auf Biegezugseite, keine Bügelbewehrung (ausser bei Auflager zur Lasteinleitung)



[Konradi, 2016]

Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft – Versuchskörper S2

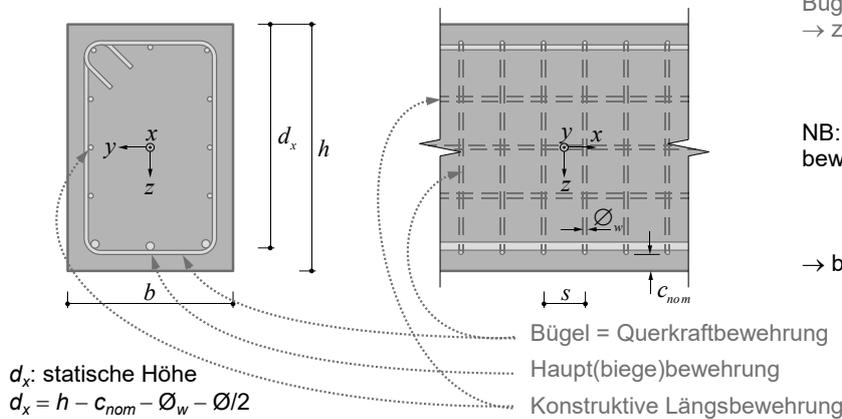


[Konradi, 2016]

Querkraft – Einleitung

Querkraftbewehrung zur Vermeidung spröder Querkraftversagen

- In Balken ist zwingend eine Querkraftbewehrung anzuordnen
- Bügel (Abstand $s < 25\varnothing$) müssen die Längszugbewehrung umfassen.
- Stösse (Bügel und Längsbewehrung): Stosslänge (ca. $50\varnothing$, siehe SIA 262, 5.2.5).



Bügelbewehrungsgehalt ρ_w minimal ca. 0.2%
 → zweischnittige Bügel:

$$\rho_w = \frac{\pi \cdot \varnothing^2}{2 \cdot b \cdot s} \geq 0.2\%$$

NB: nach SIA 262 (2013) sind Querkraftbewehrungsgehalte von ca. 0.1% ausreichend:

$$\rho_w \geq 0.1\% \sqrt{\frac{f_{ck}}{30} \frac{500}{f_{sk}}}$$

→ bei Neubauten eher 0.2% sinnvoll (Robustheit)

Um spröde Versagen infolge Querkraft zu vermeiden, ist in Balken stets eine Mindestquerkraftbewehrung («Verbügelung») vorzusehen. Ohne Querkraftbewehrung sollten nur dünne Platten ausserhalb der Einleitungsbereiche konzentrierter Lasten ausgeführt werden.

Mit einer ausreichenden Mindestbügelbewehrung wird ein duktiler Verhalten gewährleistet. Damit wird die Voraussetzung für eine Bemessung mit Modellen der Plastizitätstheorie (Fachwerkmodelle und Spannungsfelder) geschaffen, auf denen heute die Querkraftbemessung im Stahlbetonbau beruht.

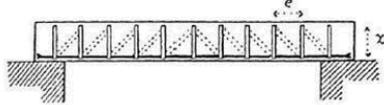
Nach der aktuellen Norm SIA 262 ist ein Bügelbewehrungsgehalt von mindestens 0.1% (für C30/37 und B500B) erforderlich. Derart geringe Bewehrungsgehalte reichen in der Regel aus, um ein Versagen bei Erstrissbildung zu verhindern, aber nicht, um ein (einigermassen) duktiler Versagen zu gewährleisten. Bei Haupttragelementen von Neubauten sollte daher, zur Gewährleistung der Robustheit, ein höherer Bewehrungsgehalt vorgesehen werden.

Bei der konstruktiven Durchbildung ist zu beachten, dass kleine Stababstände das Einbringen des Betons erschweren; dabei sind Übergreifungsstösse besonders zu beachten. Andererseits sind auch zu grosse Stababstände zu vermeiden. Detaillierte Angaben siehe [1], Seite 2.2ff, SIA 262, Ziff. 5; Balken Ziff. 5.5.2 (z.B. Unterzüge...) etc.

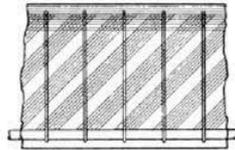
Querkraft – Einleitung

Verhalten von Stahlbetonträgern unter Querkraft

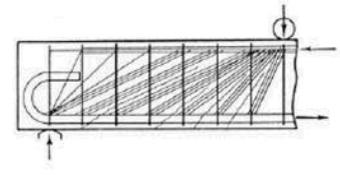
Frühe Fachwerkmodelle: Erklärung des Tragverhaltens (nicht für Bemessung verwendet)



K. W. Ritter, «Die Bauweise Hennebique» (1899)

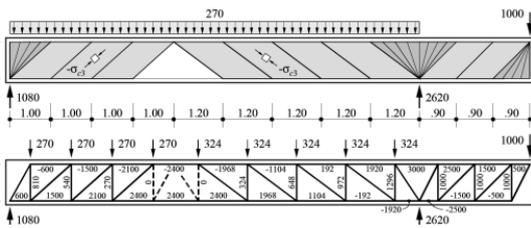


E. Mörsch, «Der Eisenbetonbau» (1908)



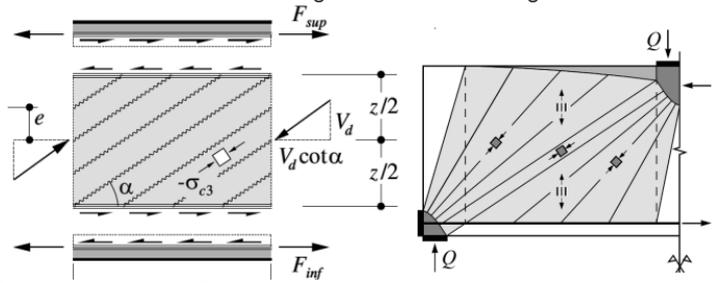
E. Mörsch, «Der Eisenbetonbau» (1922)

Heutige Fachwerkmodelle / Spannungsfelder: Plastizitätstheorie = konsistente Grundlage für die Bemessung



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I



9

Aus dem Rissbild und der Verformung von Versuchsträgern schloss man schon früh auf eine Fachwerkwirkung von Stahlbetonträgern. Bereits Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten die damaligen ETH-Professoren Karl Wilhelm Ritter und später Emil Mörsch erste Fachwerkmodelle, um die Tragwirkung von Stahlbetonträgern zu beschreiben. Diese wurden allerdings kaum für die Bemessung eingesetzt, da sie als unwissenschaftlich galten; vielmehr verwendete man an elastizitätstheoretischen Lösungen orientierte Nachweise («schiefe Hauptzugspannungen»). Auch viele Jahre später verfolgte man mit Fachwerkmodellen noch primär den globalen Kraftfluss; die Ausdehnung der Druckstreben war dabei sekundär. Solche Anwendungen haben sich bis heute gehalten («Stabwerkmodelle», z. B. Schlaich et al., 1984 resp. 1987)

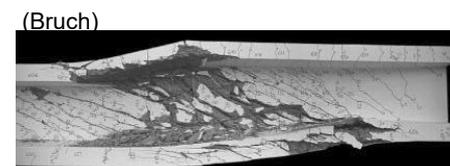
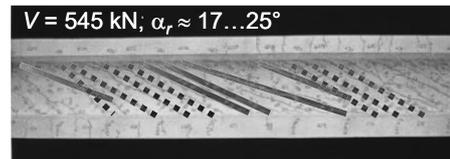
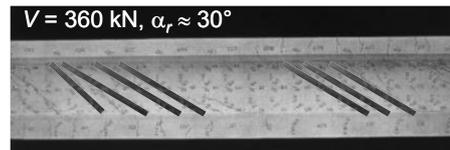
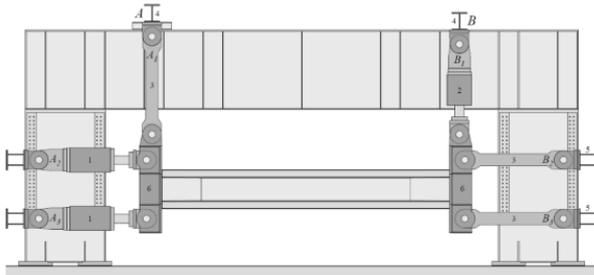
Seit etwa 1975 werden Fachwerkmodelle auf der Basis der Plastizitätstheorie, in Verbindung mit der Annahme einer endlichen Betondruckfestigkeit f_c , angewendet; die Abmessungen der Druckstreben und Knoten ergeben sich aus der Annahme von f_c . Die resultierenden Fachwerkmodelle sind statisch zulässige (diskontinuierliche) Spannungsfelder im Rahmen der statischen Methode der Plastizitätstheorie und beruhen somit auf einer klaren theoretischen Grundlage. Die darauf beruhenden einfachen, klaren Fachwerkmodellvorstellungen eignen sich hervorragend für die Bemessung von Neubauten. Nachdem sie anfänglich durch diverse empirische Modifikationen verunklärt wurden, setzten sie sich ab etwa 1980 auch international in den Normen durch (Basis: CEB-fip Model Code 1978).

In letzter Zeit ist leider eine gegenläufige Tendenz zu beobachten, ausgehend vom Bestreben, das Verhalten von Trägern ohne Querkraftbewehrung zu erfassen. Da bei Balken immer eine konstruktive Mindestschubbewehrung eingelegt wird, ist die Aufnahme solcher Bestimmungen in Bemessungsnormen nicht sinnvoll (siehe auch ergänzende Bemerkung zu Folie 18).

Querkraft – Einleitung

Verhalten von Bauteilen unter Querkraft

- Seit 1960 intensive Forschung insbesondere auch an der ETH Zürich.
- Zahlreiche Grossversuche, zum Beispiel Kaufmann (1995/96), siehe Abbildungen, bestätigen das Verhalten (Fachwerke / Spannungsfelder) bei Trägern mit Schubbewehrung.
- Rissneigung wird mit zunehmender Belastung immer flacher bis zum Stegdruckbruch.



Die Anwendung von Spannungsfeldern im Stahlbetonbau basiert wie viele andere Bemessungsverfahren (implizit oder explizit) auf der Plastizitätstheorie.

Bei der Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton spielte die ETH Zürich (Prof. Bruno Thürlimann und sein Nachfolger Prof. Peter Marti) eine Pionierrolle. Neben theoretischen Untersuchungen spielte dabei auch die Verifizierung der Modellvorstellungen mittels grossmassstäblicher Versuche eine wichtige Rolle.

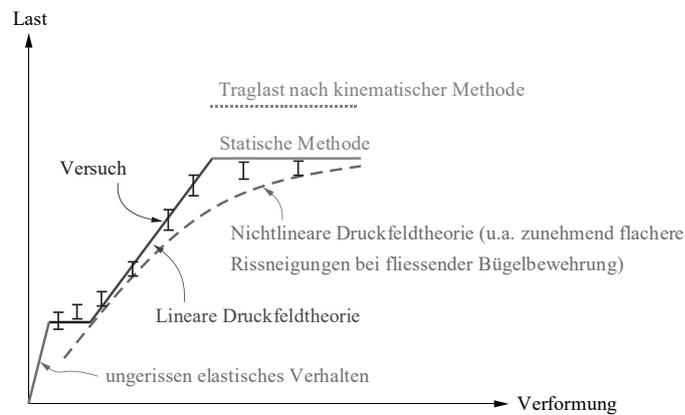
In Versuchen kann beobachtet werden, dass sich im Steg geneigte Risse einstellen. Dies ist in Übereinstimmung mit der Modellvorstellung, dass die Querkraft durch ein Druckspannungsfeld im Steg («Druckdiagonale») abgetragen wird. Wird vorausgesetzt, dass die Risse spannungsfrei sind, verlaufen diese in Richtung der Hauptdruckspannungen; senkrecht dazu ist der Beton spannungsfrei (Vernachlässigung der Zugfestigkeit des Betons).

Bei einer duktilen Bemessung erfolgt kein frühzeitiges Versagen durch Bruch des Stegbetons. Vielmehr erreichen nach der Rissbildung zuerst die Bügel die Fließgrenze. Ab diesem Moment stellen sich neue, flachere Risse ein. Durch die flachere Neigung des Druckfelds im Steg kann trotz fließender Bügelbewehrung die Querkraft weiter gesteigert werden, bis entweder die Biegebewehrung fließt oder der Stegbeton bricht.

Weitere Ausführungen dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Querkraft – Einleitung

Querkraft – Typisches Last-Verformungs-Diagramm



- Das typische Last-Verformungs-Diagramm eines Stahlbetonelements unter reiner Schubbeanspruchung zeichnet sich, wie bei Biege- und Normalkraftbeanspruchung, durch die drei Bereiche «ungerissen elastisches Verhalten» (Zustand I), «gerissen elastisches Verhalten» (Zustand II) und «Traglast» (Zustand III) aus.
- Das in Versuchen beobachtete Verhalten kann mit verschiedenen Modellvorstellungen erfasst werden.

Ähnlich wie für Normalkraft und Biegung kann auch das Verhalten unter Querkraft durch die drei charakteristischen Zustände I (ungerissen), II (gerissen elastisch) und III (plastisch resp. Traglast) beschrieben werden.

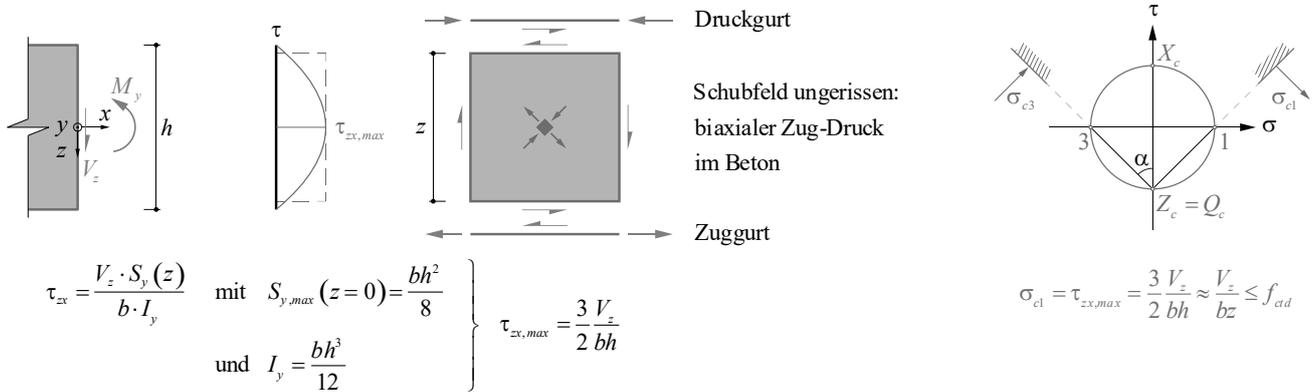
Das Verhalten von Stahlbetonscheiben kann mit sogenannten *Druckfeldmodellen* untersucht werden. Solche Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass das Tragverhalten von einem gegenüber den Bewehrungsrichtungen geneigten Druckspannungszustand im Beton dominiert wird.

Weitere Angaben siehe Kapitel *Scheibenelemente* und Vorlesung *Advanced Structural Concrete*.

Querkraft – Ungerissenes ↔ gerissenes Verhalten

Ungerissenes Verhalten und Rissbildung

- Parabolische Schubspannungsverteilung (für linear elastisches Verhalten des Betons)
- Rissbildung, wenn Hauptspannung σ_{c1} im Beton die Zugfestigkeit erreicht → Umlagerung auf Bewehrung (nächste Folie)
- Bei fehlender oder zu schwacher Querkraftbewehrung sehr sprödes Zugversagen bei Rissbildung



Im ungerissenen Zustand kann in guter Näherung von einem isotropen, linear elastischen Verhalten des Stegbetons ausgegangen und die Bewehrung vernachlässigt werden.

Bei einem Träger mit Rechteckquerschnitt resultiert somit die in der Abbildung links dargestellte, parabolische Schubspannungsverteilung, die durch die Betrachtung zugeordneter Schubspannungen ermittelt werden kann. Idealisiert man den Querschnitt (Abtrag von Biegemomenten) durch zwei Stringer (Druck-/Zuggurt), erhält man eine über die Steghöhe konstante Schubspannung (Abbildung Mitte).

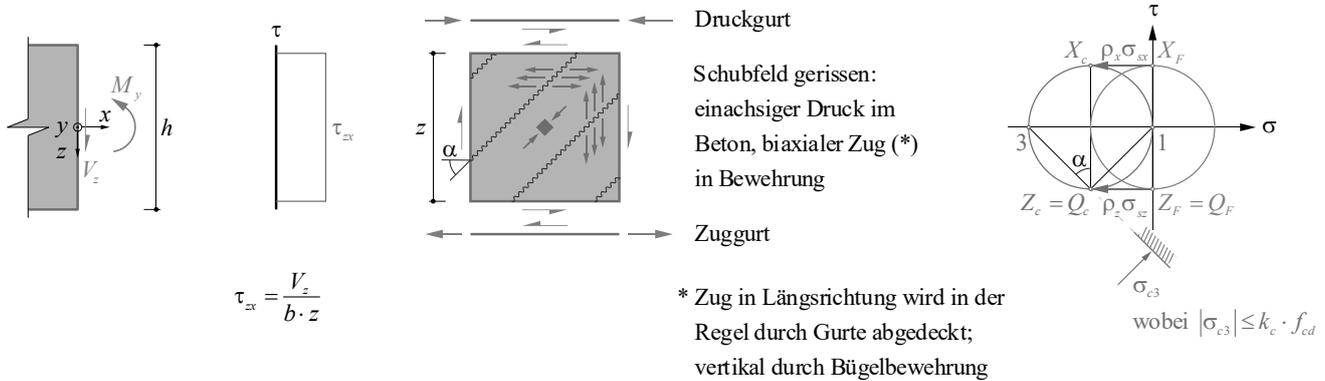
Für isotropes Verhalten resultiert im Steg (sofern keine Längsspannungen wirken, was an der Stelle der grössten Schubspannung = Neutralachse auch beim Rechteckquerschnitt der Fall ist) ein Zustand reinen Schubs, d.h. es herrschen Hauptzugspannungen vom gleichen Betrag wie die Schubspannung (Mohr'scher Kreis, Abbildung rechts).

Beim Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons bildet sich ein Riss senkrecht zur Hauptzugspannung (45° gegenüber der Stabachse geneigt). Bei fehlender Querkraftbewehrung führt dies, sofern sich kein alternativer Lastabtrag einstellen kann (siehe Platten, Stahlbeton II), zu einem sehr spröden Versagen.

Querkraft – Ungerissenes ↔ gerissenes Verhalten

Gerissenes Verhalten

- Annahme: Schubspannungen und Hauptspannungsrichtung über Steghöhe konstant → homogene Stegbeanspruchung
- Überlagerung Längsdruckspannungen im Steg → einachsiges Druckfeld σ_{c3} im Stegbeton (unter 45° : $\sigma_{c3} = -2 \tau_{xz}$)
- Versagen durch Fließen von Längs- und Bügelbewehrung oder Bruch des Stegbetons (Stegdruckbruch) (Druckfestigkeit des Stegbetons muss infolge Querkraft abgemindert werden, Faktor $k_c \approx 0.55$)



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

13

Nach der Rissbildung geht man in der Regel vereinfachend davon aus, dass die Querkraft durch über die Steghöhe konstante Schubspannungen abgetragen wird (Abbildungen links und Mitte). Diese Annahme trifft streng genommen nur für Träger ohne Längsbewehrung im Steg zu, deren Zug- und Druckgurt als Stringer idealisiert werden können (was sich durch die Betrachtung zugeordneter Schubspannungen einfach überprüfen lässt). Für andere Fälle ist diese Verteilung jedoch eine gute Näherung. Unter Vernachlässigung von Verbundspannungen der Bügelbewehrung (und im Steg angreifenden Lasten) ist auch die Hauptdruckspannungsrichtung im Steg konstant, d.h. der Stegbeton ist homogen beansprucht.

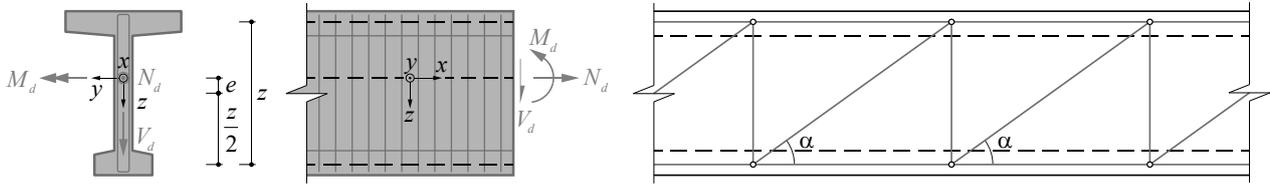
Um im Steg Schubspannungen abtragen zu können, ohne dass Zugspannungen im Beton wirken, müssen den Schubspannungen biaxiale Druckspannungen überlagert werden. In vertikaler Richtung werden diese Druckspannungen durch die Bügelbewehrung erzeugt (Druckspannungen im Stegbeton stehen mit Zugkräften in Bügeln im Gleichgewicht). In horizontaler Richtung werden die Druckspannungen durch die Gurte aufgenommen (Druckspannungen im Stegbeton stehen im Gleichgewicht mit einer Längszugkraft, die in den Gurten zusätzlich zu den Kräften infolge Biegung wirkt).

Dies kann mit Mohrschen Kreisen veranschaulicht werden (Abbildung rechts); dargestellt ist der Fall gleich grosser äquivalenter Bewehrungsspannungen in vertikaler und horizontaler Richtung, was einer Druckfeldneigung im Steg von 45° entspricht. Bei unterschiedlichen Bewehrungskräften (typischerweise weniger vertikale Bewehrung, mehr horizontale) resultieren andere Druckfeldneigungen. Die Druckspannung im Steg beträgt mindestens $\sigma_{c3} = -2 \cdot |\tau|$ (bei einer Druckfeldneigung von 45° ; bei flacheren oder steileren Neigungen ist die Druckspannung grösser). Näheres dazu siehe Kapitel *Scheibenelemente*.

Der Beton im Schubfeld ist zwar einachsiger auf Druck beansprucht, erfährt jedoch quer dazu «aufgezwungene» Zugdehnungen. Daher kann die einachsige Druckfestigkeit hier nicht ausgenutzt werden; vielmehr muss sie mit dem Beiwert k_c reduziert werden.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

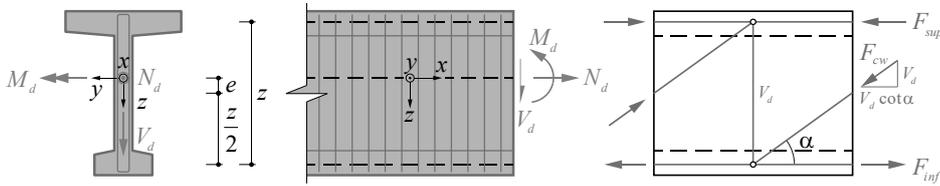
Fachwerkmodell mit variabler Diagonalleinigung



- Der Kraftfluss in einem parallelgurtigen Träger kann mit Fachwerkmodellen visualisiert werden.
- Das Fachwerk besteht aus Druck- und Zuggurt, Druckdiagonalen und vertikalen Fachwerkpfosten (resp. -ständern).
- Die Kräfte der Druckdiagonalen werden durch den Stegbeton aufgenommen; für die Aufnahme der Kräfte der Fachwerkpfosten ist eine Bügelbewehrung erforderlich.
- Die Neigung α der Druckdiagonalen kann (in gewissen Grenzen) frei gewählt werden.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

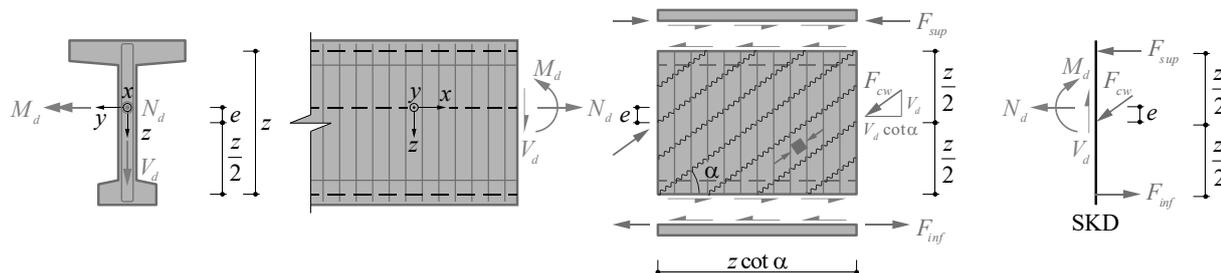
Fachwerkmodell mit variabler Diagonalleistung



- Legt man einen Schnitt in der Mitte zwischen zwei Fachwerkpfosten, können die Kräfte in den Gurten, den Betondruckdiagonalen und den Fachwerkpfosten aus den Schnittkräften (M, V, N) einfach ermittelt werden.
- Das Fachwerkmodell abstrahiert das tatsächliche Tragverhalten stark. Eine wirklichkeitsnähere Idealisierung erhält man, indem man die Druckdiagonalen als Resultierende eines parallelen Druckspannungsfelds im Steg, und die Fachwerkpfosten als Resultierende der Bügelkräfte über die Länge einer Fachwerkmasche ($z \cdot \cot \alpha$) auffasst.
- Diese verfeinerte Idealisierung als Spannungsfeld (nächste Folie) liegt der Bemessung nach SIA 262, 4.3.3.4 zugrunde. Dafür hat sich vereinfachend ebenfalls der Begriff «Fachwerkmodell mit variabler Diagonalleistung» etabliert.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Fachwerkmodell mit variabler Diagonallenneigung



- Der Hebelarm der inneren Kräfte z folgt aus der Biegebeanspruchung und kann näherungsweise als $z = 0.9d$ angenommen werden.
- Die Abtragung der Querkraft im diagonalen Druckfeld verursacht eine Längszugkraft $F_t(V_d)$, die hälftig vom Zug- und Druckgurt aufgenommen wird.

$$\sum M_{(z/2)^+} = 0: \quad M_d - F_{sup} \cdot z - N_d \cdot \left(\frac{z}{2} + e \right) - V_d \cot \alpha \cdot \frac{z}{2} = 0$$

$$F_{sup} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} - \frac{N_d}{2} - \frac{V_d \cdot \cot \alpha}{2}$$

$$\sum M_{(z/2)^-} = 0: \quad M_d - F_{inf} \cdot z + N_d \cdot \left(\frac{z}{2} - e \right) + V_d \cot \alpha \cdot \frac{z}{2} = 0$$

$$F_{inf} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot \cot \alpha}{2}$$

Gemäss der auf den vorhergehenden Folien eingeführten Modellvorstellung, die gut mit Beobachtungen in Versuchen übereinstimmt, erfolgt die Querkraftbemessung von Trägern mit Bügelbewehrung nach modernen Normen anhand eines «Fachwerkmodells mit variabler Diagonallenneigung». Dabei wird im Stegbeton ein einachsiges, unter dem Winkel α zur Stabachse geneigtes Druckspannungsfeld vorausgesetzt.

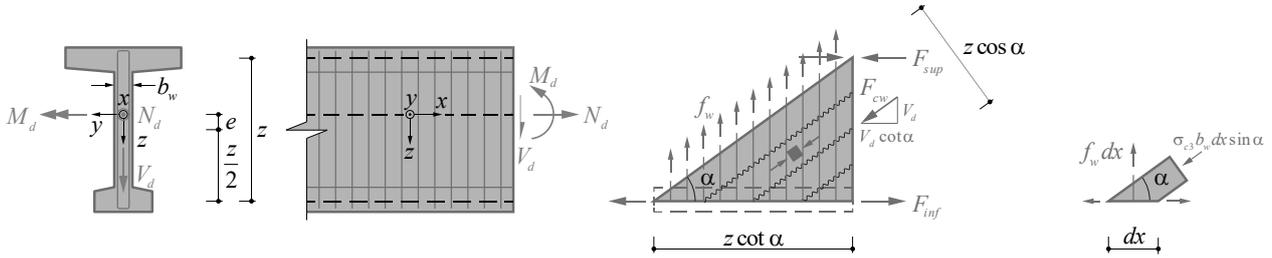
Damit erhält man durch Betrachtung geeigneter Schnittkörper die in der Folie angegebenen Beziehungen für die Gurtkräfte in einem bestimmten Querschnitt. Man erkennt, dass infolge Querkraft zusätzliche Gurtkräfte der Grösse $\frac{1}{2}V_d \cot \alpha$ resultieren, die vom Ober- und Untergurt aufzunehmen sind: Der Druckgurt wird entlastet, im Zuggurt ist zusätzliche Bewehrung erforderlich. Die resultierenden Beziehungen entsprechen den Nachweisen der Tragsicherheit nach SIA Norm 262. Zusätzlich ist auch angegeben, wie eine Normalkraft aufgenommen werden kann (statisch äquivalente Aufteilung auf Gurte).

NB1: Eigentlich ist eine Querschnittsbetrachtung für die Untersuchung des Querkraftwiderstands nicht ausreichend. Vielmehr muss eine gewisse Länge des Trägers untersucht werden, wie die Abbildung zeigt. Dennoch spricht man oft von einem «Querschnittsnachweis» (da der Bemessung die Schnittkräfte in einem bestimmten Querschnitt zugrunde gelegt werden).

NB2: Die Modellvorstellung des Fachwerkmodells (resp. des parallelen Druckspannungsfelds) basiert auf dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie. Nähere Angaben dazu siehe weiter hinten.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Fachwerkmodell mit variabler Diagonalleineigung



- Gleichgewicht am Schnittkörperdiagramm
 3. Abb. von links → Kraft in der Bewehrung [kN/m]: $f_w = \frac{V_d}{z \cot \alpha}$ resp. mit: $f_w \leq \frac{A_{sw}}{s} f_{sd}$ → $V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha$
 - Gleichgewicht am differentiellen Element in
 Abb. rechts → Betondruckspannung im Steg [N/mm²]: $\sigma_{c3} b_w dx \sin^2 \alpha = f_w dx$ mit: $f_w = \frac{V_d}{z \cot \alpha}$ → $\sigma_{c3} = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha}$
 resp. mit: $\sigma_{c3} \leq k_c f_{cd}$ → $V_{Rd,c} = b_w k_c f_{cd} z \sin \alpha \cos \alpha$
- oder aus SKD in 3. Abb. von links:
 (gleiches Ergebnis) $F_{cw} = \frac{V_d}{\sin \alpha}, \sigma_3 = \frac{F_{cw}}{b_w z \cos \alpha}$ → $\sigma_{c3} = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha}$

Neben der Ermittlung der zusätzlichen Anteile der Gurtkräfte infolge Querkraft liefert das Fachwerkmodell (einachsiges, paralleles Druckspannungsfeld im Steg) auch die Grösse der Druckspannungen im Steg und die Beanspruchung der Bügel. Die zur Ermittlung dieser Grössen geeigneten Schnittkörper sind in der Abbildung dargestellt. Man erkennt hier klar, dass es sich nicht um eine reine Querschnittsbetrachtung handelt: Die angegebenen Werte der Bügelbewehrung und der Druckspannungen im Steg gelten für den an den jeweiligen Querschnitt angrenzenden Bereich des Trägers, über die Länge $z \cdot \cot \alpha$.

Der Querkraftwiderstand ist dabei durch die Kapazität des Betons $V_{Rd,c}$ und diejenige der Bügelbewehrung $V_{Rd,s}$ begrenzt. Massgebend ist der kleinere Wert.

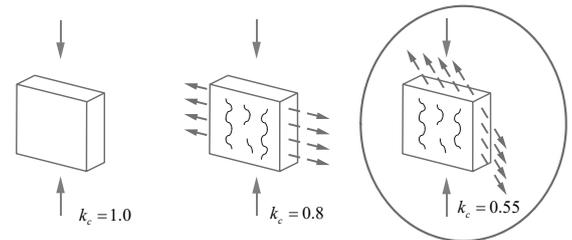
Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Fachwerkmodell mit variabler Diagonalleistung

- Modellvorstellung: Einachsiges Druckfeld im Stegbeton, mit variabler Neigung $\alpha = 30 \dots 45^\circ$, das in Kombination mit einem den Bügelkräften entsprechenden vertikalen Zugfeld den Kraftfluss gewährleistet («Fachwerkwirkung»)
- Der Querkraftwiderstand wird einerseits durch den Widerstand der vertikalen Bewehrung (Bügel) $V_{Rd,s}$ und andererseits durch den Widerstand des Betons $V_{Rd,c}$ begrenzt (Widerstand = kleinerer Wert von $V_{Rd,s}$ und $V_{Rd,c}$, **nicht** Summe!)
- Zusätzlich ist die Längszugkraft F_{tVd} je hälftig vom Druck- und vom Zuggurt aufzunehmen.
- Bei Auflagern ist die Querkraft in einem Schnitt im Abstand $z \cdot \cot \alpha$ vom Auflagerrand für die Bemessung massgebend

$$\begin{aligned}
 V_{Rd,s} &= \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \cot \alpha && \rightarrow V_{Rd} = \min \left(\begin{array}{l} V_{Rd,s} \\ V_{Rd,c} \end{array} \right) \\
 V_{Rd,c} &= b_w \cdot z \cdot k_c \cdot f_{cd} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\
 F_t(V_d) &= V_d \cdot \cot \alpha
 \end{aligned}$$

Abminderung der Betondruckfestigkeit infolge Schädigung durch Querkraft (Faktor $k_c \approx 0.55$):



- Formeln gültig für vertikale Bügel (geneigte Bügel → hinten)

Zusammenfassend resultiert für mit vertikalen Bügeln bewehrte Träger der in der Folie angegebene Querkraftwiderstand.

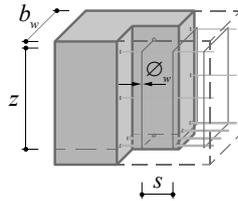
NB: Manche internationale Normen bezeichnen den Widerstand der Bügelbewehrung bei einer Druckfeldneigung von 45° als «Bewehrungsanteil» und den Querkraftwiderstand, welcher diesen Wert übersteigt, als «Betonanteil». Für letzteren werden dabei semi-empirische Beziehungen angegeben, die einer mechanischen Modellvorstellung weitgehend entbehren. Für diese beiden Anteile sind die gleichen Bezeichnungen gebräuchlich wie für wie für den gesamten Querkraftwiderstand nach SIA 262 – also « V_s » für den «Bewehrungsanteil» und « V_c » für den «Betonanteil». Der Gesamte Querkraftwiderstand beträgt nach solchen Normen $V_{Rd} = V_{sd} + V_{cd}$, im Gegensatz zur SIA 262, wonach $V_{Rd} = \min(V_{Rd,s}, V_{Rd,c})$ ist. Vorsicht Verwechslungsgefahr!

Aus Sicht der Plastizitätstheorie machen diese empirischen « $V_s + V_c$ -Modelle» keinen Sinn. Ein Grund dafür, dass sie nach wie vor existieren ist, dass sich mit dem «Betonanteil» ein Querkraftwiderstand ohne Bügelbewehrung aktivieren lässt, wodurch ein nahtloser Übergang zur Plattenbemessung (wo bei geringer Querkraft auch nach SIA 262 keine Querkraftbewehrung erforderlich ist) möglich ist. Manche Forscher erklären « V_c » in solchen Modellen auch als Querkraftwiderstand der Betondruckzone (Druckflansch), wobei aber meist übersehen wird, dass der Abtrag von Querkraften in einem Flansch eine Neigung der Druckresultierenden oder Flanschbiegemomente erfordert, wodurch der Querkraftwiderstand der Betondruckzone auf kleine Längen begrenzt ist. Die Berücksichtigung dieses Effekts macht allenfalls bei der Überprüfung der Tragsicherheit bestehender Bauwerke Sinn.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Beispiel: Querkraftwiderstand in Funktion der Druckfeldneigung / optimale Druckfeldneigung

Beton C30/37 $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$
 Betonstahl B500B $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$
 Querschnitt $b_w = 300 \text{ mm}$
 $z = 500 \text{ mm}$
 Bewehrung $\varnothing = 14 \text{ mm}, s = 200 \text{ mm}$
 $n_{\text{Schnitte}} = 2$



$$a_{sw} = \frac{n \cdot \pi \cdot \varnothing^2}{4 \cdot s} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 14^2}{4 \cdot 200} = 1'539 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Bewehrungsgehalt $\rho_w = \frac{a_{sw}}{b_w} = 0.513\%$, $\omega_w = \rho_w \frac{f_{sd}}{f_{cd}} = 0.112$

Längsdehnung $\varepsilon_{x,sup} = -0.5\%$

aus QS-Analyse $\varepsilon_{x,inf} = 2.0\%$

(Annahme typischer Werte) $\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{x,sup} + \varepsilon_{x,inf}}{2} = 0.75\%$

Querkraftwiderstand (kleinerer der beiden Werte):

Widerstand der vertikalen Bewehrung

$$V_{Rd,s}(\alpha) = a_{sw} f_{sd} z \cot \alpha$$

Widerstand der geneigten Betondruckdiagonalen

$$V_{Rd,c}(\alpha) = b_w z k_c f_{cd} \sin \alpha \cos \alpha \text{ für } \alpha \geq \alpha_{min}$$

mit: Minimale Druckfeldneigung α_{min}

Reduktionsbeiwert k_c

Optimale Druckfeldneigung α_{opt} , d.h. maximales V_{Rd} :

$$V_{Rd,s}(\alpha_{opt}) = V_{Rd,c}(\alpha_{opt})$$

$$a_{sw} f_{sd} z \cot \alpha = b_w z k_c f_{cd} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\rightarrow \sin \alpha_{opt} = \sqrt{\frac{a_{sw} f_{sd}}{b_w k_c f_{cd}}} = \sqrt{\frac{\omega_w}{k_c}}$$

Während man bei der Bemessung in der Regel eine Druckfeldneigung wählt und dann anhand der Beziehungen $V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$ und $V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$ die Stegabmessungen überprüft sowie die erforderliche Bügelbewehrung bestimmt, erfordert die Ermittlung des Querkraftwiderstands bei gegebenen Abmessungen und Bewehrung die gleichzeitige Betrachtung von $V_{Rd,c}$ und $V_{Rd,s}$.

$V_{Rd,s}$ nimmt für flachere Druckfeldneigungen zu, $V_{Rd,c}$ wird dagegen kleiner. Durch Gleichsetzen der beiden Widerstände ($V_{Rd,c} = V_{Rd,s}$) erhält man die optimale Druckfeldneigung, für die der maximale Querkraftwiderstand resultiert. Dabei sind zusätzlich die gemäss Norm einzuhaltenden Grenzen für die Druckfeldneigung zu beachten, die oft massgebend werden.

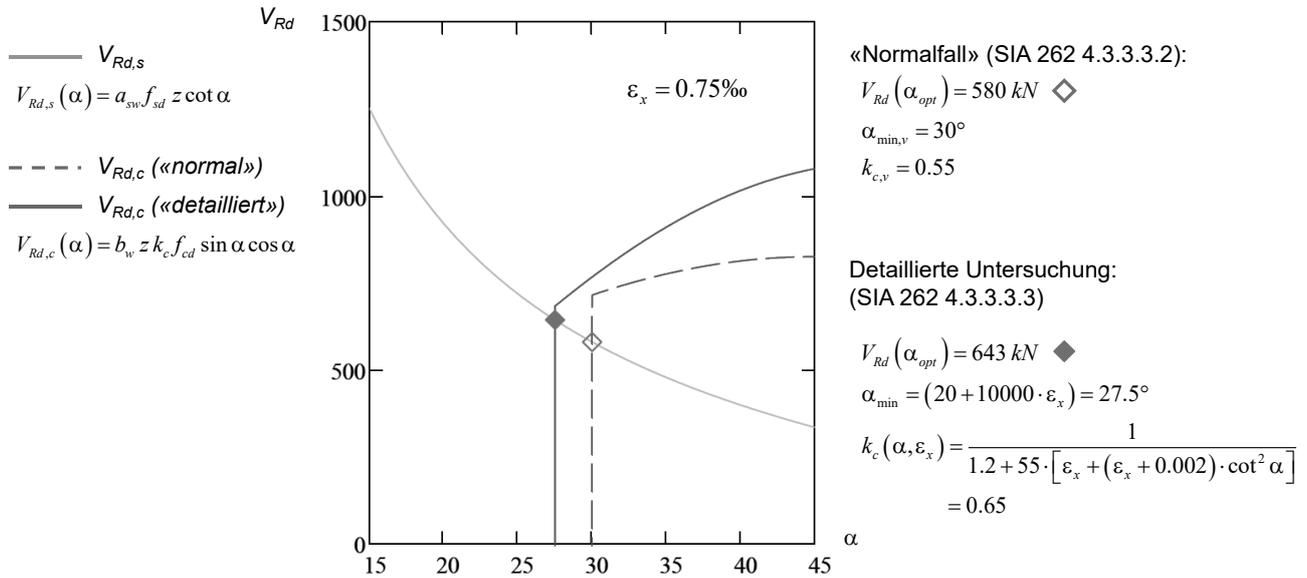
Das Vorgehen wird auf dieser und der nächsten Folie an einem Beispiel erläutert. Dabei wird neben dem vereinfachten Vorgehen nach SIA 262, Ziffer 4.3.3.3.2 (Begrenzung der Druckfeldneigung auf 30° , Beiwert $k_c = 0.55$) auch eine detailliertere Untersuchung nach SIA 262, Ziffer 4.3.3.3.3 durchgeführt. Bei letzterer werden die Druckfeldneigung und der Beiwert k_c aufgrund des Verzerrungszustands im Steg festgelegt, der auf Basis der Längsdehnung ε_x in Stegmitte und der Druckfeldneigung α abgeschätzt werden kann, wenn man annimmt, dass der Beton gerade die Druckstauchung von -0.002 erreicht:

$$k_c = \frac{1}{1.2 + 55 \cdot \varepsilon_1} = \frac{1}{1.2 + 55 \cdot [\varepsilon_x + (\varepsilon_x + 0.002) \cdot \cot^2 \alpha]}$$

Näheres dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Beispiel: Querkraftwiderstand in Funktion der Druckfeldneigung / optimale Druckfeldneigung



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

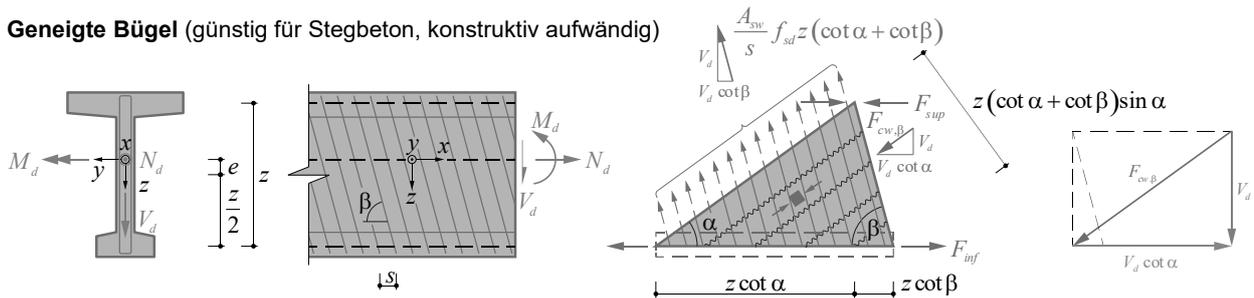
20

Im Beispiel wird aufgrund der relativ grossen Stegbreite in beiden Fällen (normales Vorgehen resp. detaillierte Untersuchung) die untere Grenze für die Druckfeldneigung nach SIA 262 massgebend.

Der Unterschied zwischen normalem Vorgehen und detaillierter Untersuchung beträgt rund 10%. Mit einer Druckfeldneigung von 45° würde dagegen nur etwa 50% des Querkraftwiderstands resultieren ($V_{Rd,s}$ wäre massgebend = limitierend).

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Geneigte Bügel (günstig für Stegbeton, konstruktiv aufwändig)



- Widerstand der Bügelbewehrung $V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z (\cot \alpha + \cot \beta) \sin \beta$ $\left(= \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha \right)$
- Widerstand des Betondruckfelds $V_{Rd,c} = b_w k_c f_{cd} z (\cot \alpha + \cot \beta) \sin^2 \alpha$ $\left(= b_w k_c f_{cd} z \sin \alpha \cos \alpha \right)$
 $= b_w k_c f_{cd} z \cos \alpha \sin \alpha (1 + \cot \beta \tan \alpha)$ ↑ Vertikale Bügel: $\beta = \frac{\pi}{2}$

NB: $V_{Rd,c}$ ist für $\beta < 90^\circ$ stets grösser als bei $\beta = 90^\circ$; $V_{Rd,s}$ ist ebenfalls grösser (ausser für sehr flache α).

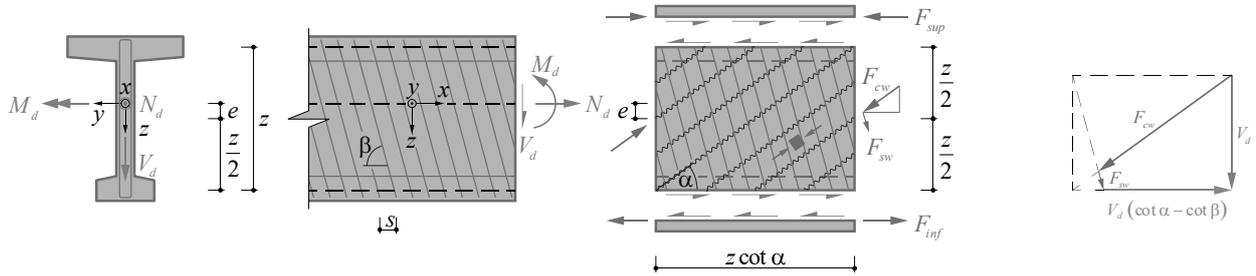
Für geneigte Bügelbewehrung ist bei stetigen Verhältnissen ebenfalls ein «Querschnittsnachweis» mittels Fachwerkmodell mit variabler Druckdiagonalenennung möglich. Die zur Ermittlung der gesuchten Grössen geeigneten Schnitte sind in der Abbildung dargestellt.

Für vertikale Bügel ($\alpha = 90^\circ$) resultieren natürlich die gleichen Beziehungen wie vorne angegeben.

Da sich geneigte Bügel (vorausgesetzt, sie sind in die «richtige» Richtung geneigt!) am Lastabtrag beteiligen, kann der Querkraftwiderstand bei gegebener Stegbreite durch den Einsatz geneigter Bügel deutlich erhöht werden (für gleiches k_c maximal um den Faktor 2).

Querkraft – «Querschnittsnachweis»

Geneigte Bügel (günstig für Stegbeton, konstruktiv aufwändig)



$$F_{sup} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} - \frac{N_d}{2} - \frac{V_d \cdot (\cot \alpha - \cot \beta)}{2}$$

$$F_{inf} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot (\cot \alpha - \cot \beta)}{2}$$

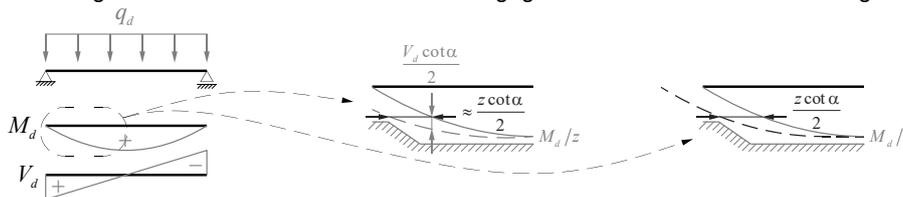
Die zusätzlichen Anteile der Gurtkräfte infolge Querkraft sind bei geneigten Bügeln kleiner als bei vertikalen Bügeln (Horizontalkomponente der geneigten Bügelkraft im vertikalen Schnitt kompensiert einen Teil der Horizontalkomponente der geneigten Druckkraft).

Querkraft – Versatzmass

Aufnahme der Längszugkraft $F_{tvd} \rightarrow$ Versatzmass

- Die Kraft im Zuggurt F_t wird durch die Fachwerkwirkung um den Betrag $V_d \cdot \cot(\alpha)/2$ vergrößert $\rightarrow F_t = \frac{M_d}{z} + \frac{V_d \cot \alpha}{2}$
- Graphisch kann die um den Betrag $V_d \cdot \cot(\alpha)/2$ vergrößerte M_d/z -Linie durch eine horizontale Verschiebung der M_d/z -Linie um $z \cdot \cot(\alpha)/2$ angenähert werden. (Die beiden Ansätze werden im nachfolgenden Rechenbeispiel verglichen.)
- Die Steigung der M_d/z -Linie beträgt $\frac{d}{dx} \left(\frac{M_d}{z} \right) = \frac{1}{z} \cdot \frac{dM_d}{dx} = \frac{V_d}{z}$
 \rightarrow Die vertikale Verschiebung um $V_d \cdot \cot(\alpha)/2$ kann linear approximiert werden durch eine horizontale Verschiebung um:

$$\frac{V_d \cot \alpha}{2} \Big/ \frac{V_d}{z} = \frac{z \cot \alpha}{2}$$
- Ein ausreichender Zuggurtwiderstand ist vorhanden, wenn die Zugkraftdeckung der Bewehrung gegenüber der verschobenen M_d/z -Linie nachgewiesen werden kann (Widerstand an jeder Stelle \geq Gurtkraft).
- Die horizontale Verschiebung wird als Versatzmass bezeichnet. Sie erfolgt bei positiven Momenten in Richtung des Schubflusses und bei negativen Momenten dem Schubfluss entgegen und beeinflusst die Abstufung der Längsbewehrung.



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

23

Wie aus dem Fachwerkmodell ersichtlich ist, resultieren infolge Querkraft zusätzliche Gurtkräfte der Grösse $\frac{1}{2} V_{Ed} \cot \alpha$ (Zugkräfte), welche vom Ober- und Untergurt aufzunehmen sind. Im Zuggurt ist daher eine zusätzliche Bewehrung erforderlich.

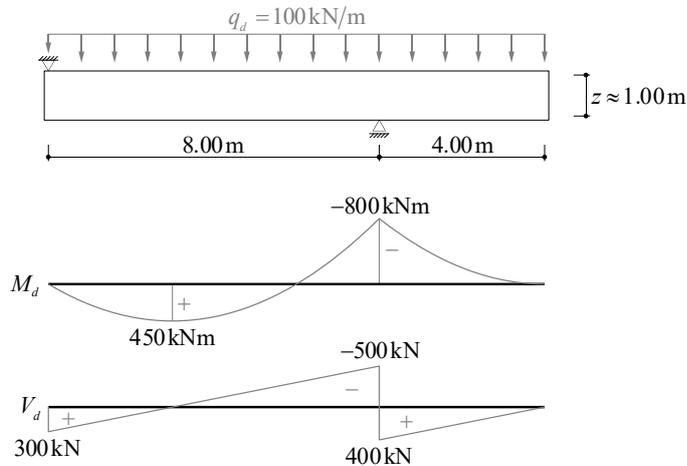
Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Biegemomenten und Querkraften (Querkraft = Ableitung des Biegemoments) kann die erforderliche Zugkraft grafisch approximiert werden, indem die **Zugkraftlinie** (M/z) um das **Versatzmass** $\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot \alpha$ horizontal verschoben wird. Die resultierende Kurve entspricht in guter Näherung der Zugkraft, die vom Zuggurt aufgenommen werden muss. Die horizontale Verschiebung um das Versatzmass (lineare Approximation) ist für übliche Fälle aus der Baupraxis ausreichend genau.

Die Dimensionierung der Zugbewehrung («Biegebewehrung» inkl. Anteil aus Querkraft), resp. die Überprüfung einer ausreichenden Bewehrung, kann damit ebenfalls grafisch erfolgen, indem die **Zugkraftdeckungslinie** ($A_s \cdot f_{sd}$) ins gleiche Diagramm eingetragen wird. Dabei sind die Verankerungslängen zu beachten (ohne Endhaken: lineare Zunahme des verfügbaren Zugwiderstands über die Verankerungslänge des jeweiligen Bewehrungsstabs).

Dieses bereits vor vielen Jahrzehnten etablierte Vorgehen, und die Begriffe **Zugkraftlinie**, **Versatzmass** und **Zugkraftdeckungslinie**, sind in der Praxis auch im Zeitalter nichtlinearer FE-Berechnungen noch geläufig. Dies insbesondere, da damit ein sehr anschauliches, übersichtliches Vorgehen bei der Bemessung, resp. der Überprüfung bestehender Tragwerke, möglich ist. Die Zugkraftlinie wird dabei beispielsweise mit einem Stabstatikprogramm mittels einer Grenzwertermittlung der maximalen resp. minimalen Biegemomente aus den relevanten Laststellungen und -kombinationen im Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 ermittelt und der Zugkraftdeckungslinie gemäss Bewehrungsplänen gegenübergestellt.

Querkraft – Versatzmass

Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung – Versatzmass



Beton C30/37 $\rightarrow f_{cd} = 20 \text{ MPa}$
 Betonstahl B500B $\rightarrow f_{sd} = 435 \text{ MPa}$

Rechteckquerschnitt:

$b_w = 400 \text{ mm}$
 $a_{sw} = 1'131 \text{ mm}^2/\text{m}$ (2Ø12@200)
 $A_s = 1'257 \text{ mm}^2$ (4Ø20)
 $A'_s = 2'124 \text{ mm}^2$ (4Ø26)

Auf den folgenden Folien wird das Vorgehen bei der Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern, sowie die Zusammenhänge zwischen diesen Ansätzen, anhand eines einfachen Beispiels erläutert. Zum Vergleich wird auch die Bemessung mittels «Querschnittsnachweisen» durchgeführt.

Das Beispiel ist ein einfacher Balken mit einer Auskragung (mit halber Länge wie die Spannweite), der durch eine gleichmässig verteilte Linienlast belastet ist (Eigengewicht + Nutzlast). Die resultierenden Schnittkräfte sind oben dargestellt.

Querkraft – Versatzmass

Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung

- Biegung über Auflager: $M'_{Rd} = A'_s f_{sd} z = 2'124 \cdot 0.435 \cdot 1.0 = 924 \text{ kNm} \geq M_d = 800 \text{ kNm}$
- Biegung im Feld: $M_{Rd} = A_s f_{sd} z = 1'257 \cdot 0.435 \cdot 1.0 = 547 \text{ kNm} \geq M_d = 450 \text{ kNm}$

- Querkraft:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha = 2 \cdot 565 \cdot 0.435 \cdot 1 \cdot \cot(45^\circ) = 492 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,c} = b_w z k_c f_{cd} \sin \alpha \cos \alpha = 400 \cdot 1'000 \cdot 0.55 \cdot 0.02 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \cos(45^\circ) = 2'200 \text{ kN}$$

- Versatzmass:



Das Versatzmass ist bei der Abstufung der Biegebewehrung zu beachten.

Die maximalen Zuggurkräfte werden dadurch aber nicht vergrößert.

Bei der Bemessung mittels «Querschnittsnachweisen» erfolgt zunächst die Schnittkraftberechnung (Stabstatik).

Mit den maximalen Biegemomenten in Feldmitte für positive Momente und über dem Auflager für negative Momente kann direkt die Biegetragsicherheit überprüft (oder die Bewehrung bemessen) werden. Bei der Abstufung der Biegebewehrung und deren Verankerung bei den Auflagern ist die zusätzliche Zugkraft $\frac{1}{2} V_{Ed} \cot \alpha$ in den Gurten zu berücksichtigen (entspricht in guter Näherung dem Versatzmass).

Der Querkraftnachweis kann aufgrund der Querkräfte aus der Stabstatikberechnung erfolgen. Massgebend ist nach der Norm SIA 262 der Schnitt in einem Abstand $z \cdot \cot \alpha$ vom jeweiligen Auflager.

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle ↔ Plastizitätstheorie

- Das Fachwerkmodell mit variabler Druckdiagonalenneigung erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen, und die Fließbedingungen werden nirgends verletzt (*).
- Die resultierende Traglast (Querkraftwiderstand) entspricht somit einer Lösung nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie:

«Jede Belastung, zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fließbedingung nicht verletzt, liegt nicht höher als die Traglast»

- Die Bemessung mit dem Fachwerkmodell liefert also auf der sicheren Seite liegende Resultate (**).

(*) Diese Bedingung wird erfüllt, indem die Gurt- und Bügelbewehrungen für die Aufnahme der resultierenden Zugkräfte dimensioniert werden und die Stegdicke so festgelegt, dass die Druckspannungen vom Beton – mit der um den Beiwert k_c reduzierten Betonfestigkeit – aufgenommen werden können.

(**) Sofern keine vorzeitigen Versagen infolge begrenzter Duktilität auftreten (Annahme der Plastizitätstheorie: ideal plastisches Verhalten mit unbegrenzter Duktilität) → vorsichtiger Wert der Betondruckfestigkeit, Beiwert k_c .

Wiederholung aus Baustatik: Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie

Unterer Grenzwertsatz: Jede Belastung, zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fließbedingung nicht verletzt, liegt nicht höher als die Traglast.

Oberer Grenzwertsatz: Jede Belastung, die aus der Gleichsetzung der Arbeit der äusseren Kräfte bei einem kinematisch zulässigen Verformungszustand mit der zugehörigen Dissipationsarbeit resultiert, liegt nicht tiefer als die Traglast.

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle ↔ Kraftfluss

- Mit Fachwerkmodellen kann nicht nur der Querkraftwiderstand in einem Querschnitt ermittelt werden. Vielmehr können Fachwerkmodelle dazu verwendet werden, um den Kraftfluss in ganzen Tragwerken zu visualisieren und, darauf basierend, die Abmessungen festzulegen und die Bewehrung zu konstruieren.
- Dabei werden die Druckkräfte (Druckstreben resp. Druckfelder) durch den Beton aufgenommen; die Abmessungen (in der Fachwerkebene und senkrecht dazu) sind genügend gross zu wählen, um die Kräfte aufnehmen zu können. Für die Zugkräfte (Zugstreben) wird eine Bewehrung entsprechend der Lage und Grösse der Zugkräfte eingelegt.
- Solche Fachwerkmodelle sind ein äusserst leistungsfähiges Hilfsmittel für die Tragwerksbemessung. Die Anwendung kann entweder händisch erfolgen (was insbesondere in Verbindung mit grafischer Statik sehr hilfreich für das Verständnis des Kraftflusses ist), oder mittels spezieller Computerprogramme (siehe Notizen).
- Die auf allgemeinen Fachwerkmodellen basierende Bemessung liefert – unter den gleichen Voraussetzungen wie für das Fachwerkmodell mit variabler Druckdiagonalenneigung erläutert – auf der sicheren Seite liegende Resultate.
- Für jede Problemstellung (Tragwerk mit gegebener Geometrie und Einwirkungen / Lasten) gibt es mehrere mögliche Lösungen, d.h. verschiedene Fachwerkmodelle, die den Kraftfluss gewährleisten und untere Grenzwerte der Traglast liefern. Die Ingenieurin / der Ingenieur konzipiert das am besten geeignete Fachwerkmodell und konstruiert die Bewehrung entsprechend.

Ergänzende Bemerkungen: Geschichtlicher Hintergrund

- Fachwerkmodelle werden seit der Anfangszeit des Stahlbetons verwendet (siehe Folie 9).
- Vor der Verbreitung der Plastizitätstheorie wurde primär der globale Kraftfluss verfolgt, die Ausdehnung der Druckstreben war dabei sekundär ("Stabwerkmodelle", z. B. Schlaich et al.). Seit etwa 1975 werden Fachwerkmodelle in Verbindung mit der Annahme einer endlichen Betondruckfestigkeit f_c angewendet; die Abmessungen der Druckstreben und Knoten ergeben sich aus der Annahme von f_c . Solche Lösungen sind in den vorliegenden Unterlagen mit «Fachwerkmodell» gemeint, sofern nicht anders erläutert.
- Bei den genannten Entwicklungen spielte die «Zürcher Schule» um Prof. Thürlimann und Prof. Marti an der ETH Zürich eine Pionierrolle.

Ergänzende Bemerkungen: Computergestützte Spannungsfelder und Fachwerkmodelle

- Es gibt heute Computerprogramme, mit denen Fachwerkmodelle und Spannungsfelder entwickelt werden können. Bis vor Kurzem waren diese Programme nicht genügend benutzerfreundlich, um eine weite Verbreitung in der Praxis zu finden. Eine Hauptschwierigkeit ist dabei die Berücksichtigung der Druckfestigkeit des Betons, welche von den jeweiligen Verhältnissen abhängt (und deren händische Erfassung entsprechend Normvorgaben problematisch ist).
- Vor kurzem wurde durch die Professur für Massiv- und Brückenbau am IBK, gemeinsam mit einem Industriepartner (Idea Statica Detail), ein Programm entwickelt, das diese Schwierigkeiten mit einem neuen Lösungsansatz auf Basis kontinuierlicher, verträglicher Spannungsfelder überwindet. Diese Software wird in der Vorlesung Advanced Structural Concrete eingeführt.

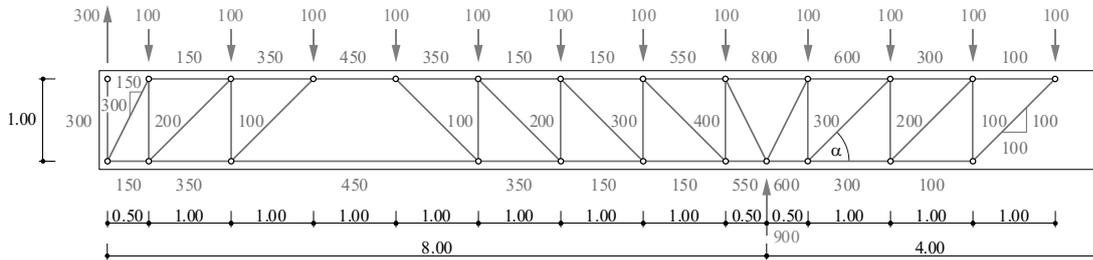
Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Übersicht über den Inhalt der folgenden Folien

- Nachfolgend werden zunächst Fachwerkmodelle mit konzentrierten Stäben (Wirkungslinien der Kräfte) für parallelgurtige Träger anhand eines Beispiels untersucht. Solche Fachwerke werden auch als Stabwerkmodelle bezeichnet. Mit diesen kann zwar der Kraftfluss einfach visualisiert werden, sie abstrahieren das tatsächliche Verhalten jedoch sehr stark.
- Anschliessend werden diese Fachwerkmodelle im gleichen Beispiel zu Spannungsfeldern entwickelt, mit denen verteilte Bewehrungen und die Druckfestigkeit des Betons untersucht werden können.
- Sodann werden die nach diesen Modellen erforderlichen Gurt- und Bügelbewehrungen mit den Resultaten einer «Querschnittsbemessung» (Fachwerkmodell mit variabler Druckdiagonalenneigung, Anwendung des Versatzmasses) für parallelgurtige Träger verglichen.
- Schliesslich werden Diskontinuitäten in Spannungsfeldern erläutert und Spannungsfelder und Fachwerkmodelle für einige typische konstruktive Details und Tragwerkselemente diskutiert.

Querkraft – Fachwerkmodelle

Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung (linkes Auflager als Aufhängung ausgebildet) [alle Masse in kN, resp. m]



$$\tan \alpha = 1$$

$$\text{erforderlicher Widerstand der Bügelbewehrung } V_{Rd,s} = \frac{400 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 400 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\text{An den Enden zu verankernde Zugkraft } F_{Vd,sup} = 100 \text{ kN (Obergurt)}$$

$$F_{Vd,inf} = 150 \text{ kN (Untergurt)}$$

Bei der Entwicklung von Fachwerkmodellen für ganze Träger empfiehlt es sich, zuerst die Reaktionen und die Querkraftnullpunkte zu bestimmen (im Beispiel sind dies die Auflager und das Kragarmende sowie zusätzlich der Querkraftnullpunkt in Feldmitte, der aus der linearen Verteilung der Querkräfte einfach ermittelt werden kann). Bei statisch unbestimmter Lagerung können grundsätzlich beliebige Reaktionen gewählt werden, die das Gleichgewicht gewährleisten; üblicherweise werden sie in Anlehnung an elastische Lösungen festgelegt, um den Umlagerungsbedarf zu begrenzen.

Anschliessend legt man die Fachwerkgeometrie fest, wobei abschnittsweise konstante Neigungen der Druckdiagonalen zu empfehlen sind. Verteilte Belastungen werden durch statisch äquivalente Einzellasten in den Knoten ersetzt (ideales Fachwerk); bei der Festlegung der Fachwerkgeometrie ist darauf zu achten, dass alle Lasten statisch äquivalent eingeführt werden können (siehe ergänzende Bemerkungen). Die Abmessungen der Druckstreben müssen vorerst angenommen werden (Hebelarm der Gurtkräfte folgt aus Biegenachweis für maximales Moments).

Es gibt grundsätzlich unendlich viele Lösungsmöglichkeiten, die nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie zulässig sind (sofern Gleichgewicht eingehalten ist und die Widerstände der Gurte, Pfosten und Diagonalen genügend gross sind). In der Abbildung ist eine einfache Lösung dargestellt, mit einer Druckdiagonalenneigung von 45° .

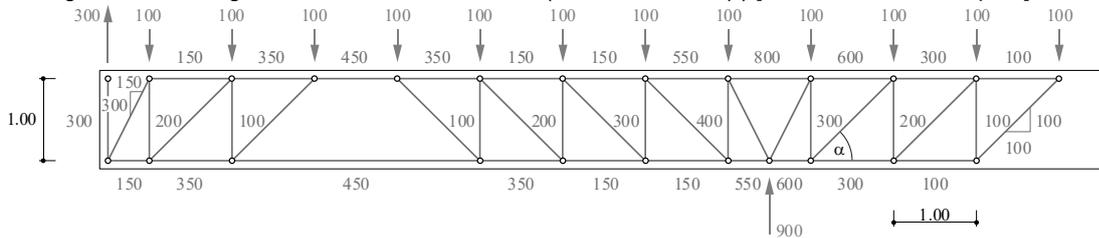
Ergänzende Bemerkungen

- Damit bei ausserhalb der Auflagerbereiche konstanter Neigung der Druckstreben der Ersatz gleichmässig verteilter Lasten durch statisch äquivalente Einzellasten gelingt, müssen die jeweils ersten Streben bei den Auflagern, wie im Beispiel, die doppelte Steigung ($\tan \alpha$) aufweisen wie die anschliessenden Druckstreben.
- Eine steilere Neigung der Druckstreben bei den Auflagern empfiehlt sich auch im Hinblick auf die zu verankernde Längszugkraft, die bei steiler Neigung kleiner ist.

Querkraft – Fachwerkmodelle

Beispiel

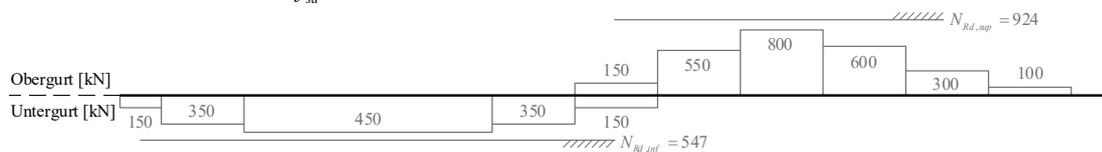
Bemessung der Bewehrung mit Fachwerkmodell $\alpha = 45^\circ$ ($z = 1 \text{ m}$, $\cot\alpha = 1$) [alle Masse in kN, resp. m]



$$\text{Bügelbewehrung: } a_{s,erf} = \frac{F_{sw}}{z \cdot \cot \alpha \cdot f_{sd}} = \frac{400}{0.435} = 920 \text{ mm}^2/\text{m} \rightarrow 2\text{-schnittige Bügel } \varnothing 10 @ 150, a_s = 1'047 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\text{Obergurt: } A_{s,erf} = \frac{F_{s,sup}}{f_{sd}} = \frac{800}{0.435} = 1'839 \text{ mm}^2 \rightarrow 4\varnothing 26, A_s = 2'124 \text{ mm}^2 \rightarrow N_{Rd,sup} = A_s \cdot f_{sd} = 924 \text{ kN}$$

$$\text{Untergurt: } A_{s,erf} = \frac{F_{s,inf}}{f_{sd}} = \frac{450}{0.435} = 1'034 \text{ mm}^2 \rightarrow 4\varnothing 20, A_s = 1'257 \text{ mm}^2 \rightarrow N_{Rd,inf} = A_s \cdot f_{sd} = 547 \text{ kN}$$



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

30

Mit dem Fachwerkmodell kann der Verlauf der Bügelkräfte abschnittsweise ermittelt werden. Die Zugkraft in jedem Pfosten des Fachwerks [kN] wird dabei durch statisch äquivalente verteilte Bügelkräfte [kN/m] ersetzt, woraus die erforderliche Bügelbewehrung [mm²/m] durch Division durch den Bemessungswert der Fließgrenze der Bügelbewehrung [kN/mm²] folgt. Es resultiert ein stufenförmiger Verlauf mit abschnittsweise konstanten Bügelkräften resp. Bewehrungsquerschnitten, was für die konstruktive Durchbildung günstig ist (siehe Abbildung auf nächster Folie).

Zur Aufnahme der Reaktion beim linken Auflager ist eine konzentrierte *Aufhängebewehrung* erforderlich (kann nicht über die Trägerlänge verteilt werden wie die Kräfte in den anderen Pfosten, da links kein Platz für eine statisch äquivalente Ausbreitung vorhanden ist und die Lagerkraft konzentriert angreift).

Auch die Gurtkräfte folgen direkt aus dem Fachwerkmodell. Der Verlauf ist, entsprechend der Diskretisierung der Streben, ebenfalls abgetrept.

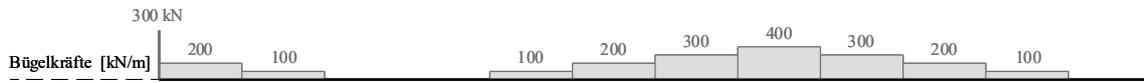
Ergänzende Bemerkung

- Im Beispiel variieren die Bügelkräfte stufenweise; bei einer konstanten Querkraft (und konstanter Druckfeldneigung) wären sie über die gesamte Länge konstant.

Querkraft – Fachwerkmodelle

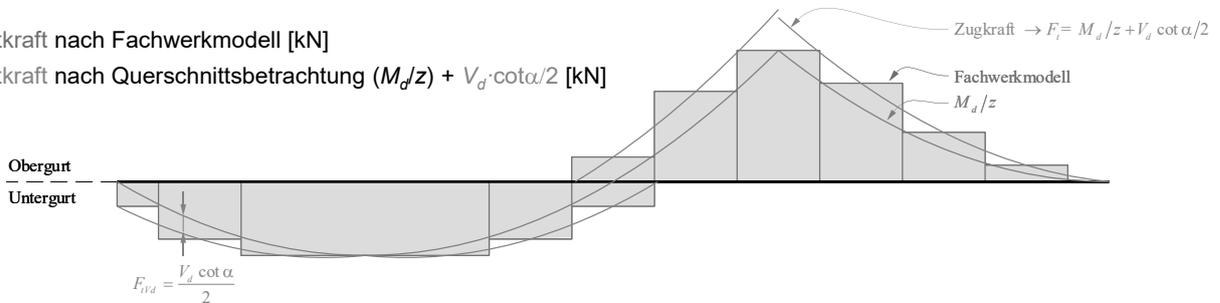
Beispiel

Bügelkräfte [kN/m] und konzentrierte Aufhängebewehrung [kN] beim linken Auflager:



Zuggurtkraft nach Fachwerkmodell [kN]

Zuggurtkraft nach Querschnittsbetrachtung ($M_d/z + V_d \cdot \cot \alpha / 2$) [kN]



- Die Kraft im Zuggurt wird sowohl mit dem Fachwerkmodell als auch mit der vertikal verschobenen M_d/z -Linie korrekt erfasst. Die einzige Ausnahme bildet die Kräfteinleitung beim Auflager. In diesem Bereich überschätzt die vertikal verschobene M_d/z -Linie die Kraft im Zuggurt.
- In der Mitte zwischen Pfosten (= vertikale Stäbe) des Fachwerks, wo bei nicht konstanter Querkraft die abschnittsweise konstanten Bügelkräfte springen, stimmen Fachwerkmodell und vertikal verschobene M_d/z -Linie überein.

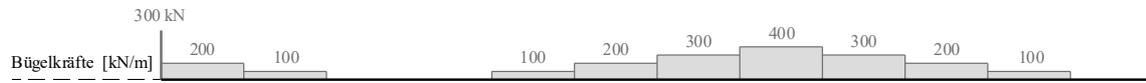
Vergleich der Gurtkräfte gemäss Querschnittsbemessung und Fachwerkmodell:

- Der mit dem Fachwerkmodell ermittelte, abgetrepte Gurtkraftverlauf ist der Linie M_d/z umschrieben.
- An den Stellen, wo die Bügelkräfte (bei nicht konstanter Querkraft) springen, stimmt die Gurtkraft aus dem Fachwerkmodell mit der um $\frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$ verschobenen Linie M_d/z (Zugkraftlinie $M_d/z + \frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$) überein.

Querkraft – Fachwerkmodelle

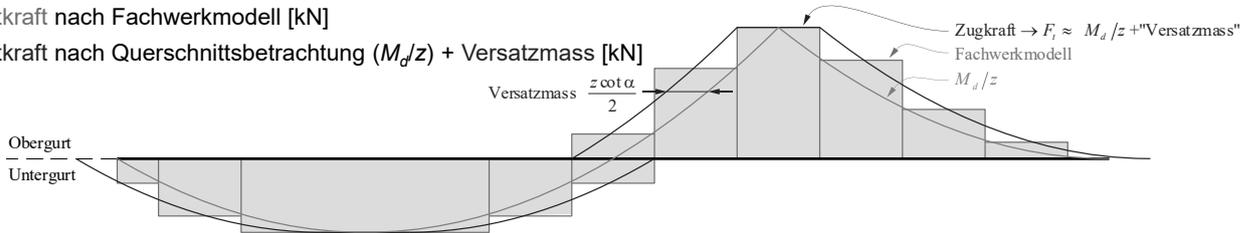
Beispiel

Bügelkräfte [kN/m] und konzentrierte Aufhängebewehrung [kN] beim linken Auflager:



Zuggurtkraft nach Fachwerkmodell [kN]

Zuggurtkraft nach Querschnittsbetrachtung (M_d/z) + Versatzmass [kN]

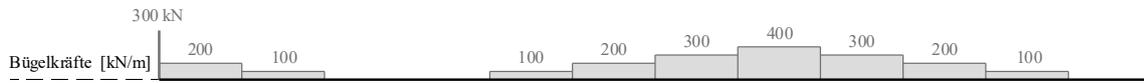


- Die maximale Kraft im Zuggurt und die zu verankernde Kraft über dem Auflager und bei der Kräfteinleitungsstelle werden sowohl mit dem Fachwerkmodell als auch mit der horizontal verschobenen M_d/z -Linie gut erfasst.

Querkraft – Fachwerkmodelle

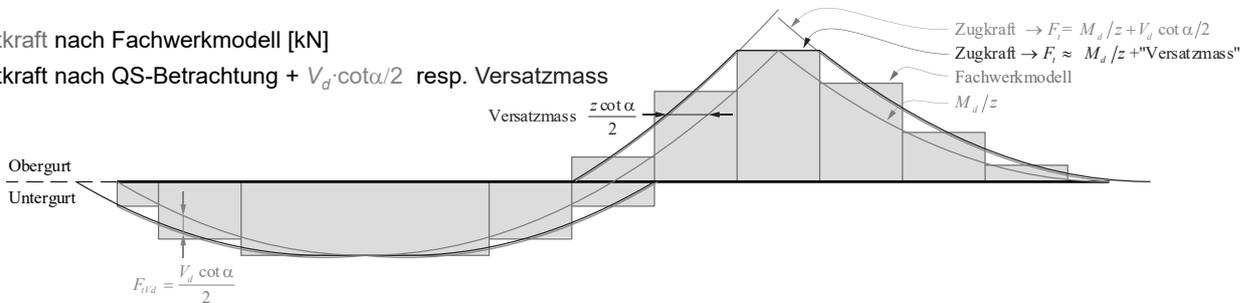
Beispiel

Bügelkräfte [kN/m] und konzentrierte Aufhängebewehrung [kN] beim linken Auflager:



Zuggurtkraft nach Fachwerkmodell [kN]

Zuggurtkraft nach QS-Betrachtung + $V_d \cdot \cot \alpha / 2$ resp. Versatzmass



- Die Kraft im Zuggurt wird sowohl mit dem Fachwerkmodell als auch mit der vertikal verschobenen M_d/z -Linie korrekt erfasst. Die einzige Ausnahme bildet die Kräfteinleitung beim Auflager. In diesem Bereich überschätzt die vertikal verschobene M_d/z -Linie die Kraft im Zuggurt.
- In der Mitte zwischen Pfosten (= vertikale Stäbe) des Fachwerks, wo bei nicht konstanter Querkraft die abschnittsweise konstanten Bügelkräfte springen, stimmen Fachwerkmodell und vertikal verschobene M_d/z -Linie überein.

Vergleich der Gurtkräfte gemäss Querschnittsbemessung und Fachwerkmodell:

- Der mit dem Fachwerkmodell ermittelte, abgetreppte Gurtkraftverlauf ist der Linie M_d/z umschrieben.
- An den Stellen, wo die Bügelkräfte (bei nicht konstanter Querkraft) springen, stimmt die Gurtkraft aus dem Fachwerkmodell mit der um $\frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$ verschobenen Linie M_d/z (Zuggurftlinie $M_d/z + \frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$) überein.

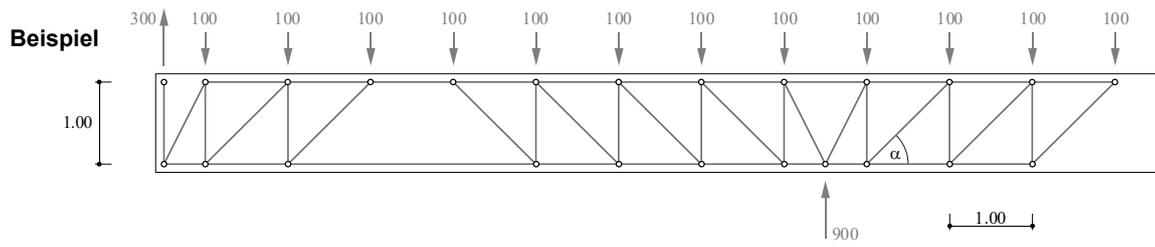
Querkraft – Spannungsfelder

Fachwerkmodelle ↔ Spannungsfelder

- Fachwerkmodelle mit konzentrierten Stäben (Wirkungslinien der Kräfte) werden auch als Stabwerkmodelle bezeichnet. Mit diesen kann zwar der Kraftfluss einfach visualisiert werden, sie abstrahieren das tatsächliche Verhalten jedoch sehr stark. Solche Stabwerkmodelle eignen sich daher nur bedingt zur Überprüfung der Betondruckfestigkeit und zeigen nicht direkt auf, ob eine Bewehrung verteilt werden kann oder konzentriert einzulegen ist.
- Eine wirklichkeitsnähere Idealisierung erhält man, indem man die Stabwerkmodelle zu Spannungsfeldern verfeinert. Dabei werden den Fachwerkstäben finite Abmessungen in der Fachwerkebene zugewiesen. Aus den Druckstäben des Fachwerks werden dadurch *parallele Druckfelder* (konstante Breite) oder *Fächer* (variable Breite), und die Zugstäbe können durch eine über eine bestimmte Breite verteilte Bewehrung resp. *Zugfelder* aufgenommen werden.
- Solche Spannungsfelder sind strenge Lösungen nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie (was bei Stabwerkmodellen nicht generell zutrifft).
- Das Vorgehen beim Übergang von Stabwerkmodell zu Spannungsfeld wird auf den folgenden Folien am Beispiel des Einfeldträgers mit Kragarm illustriert.

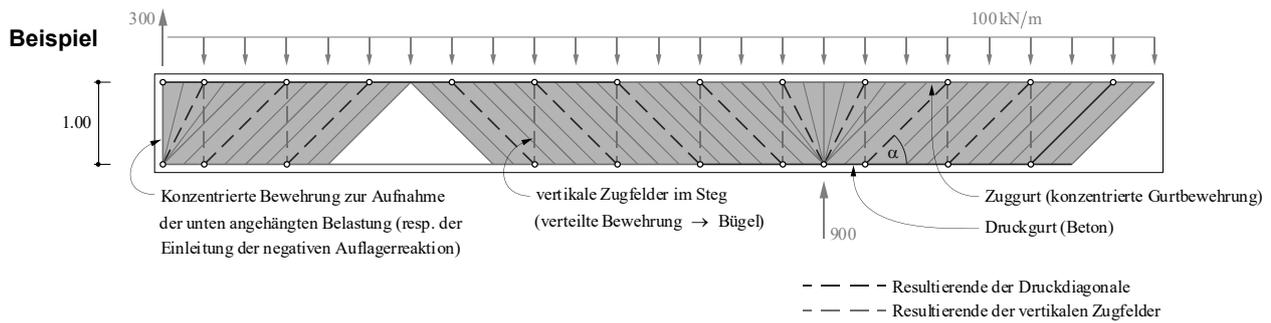
NB: Der Übergang gelingt nur so problemlos wie im Beispiel, wenn im Stabwerkmodell genügend Platz für die Druckstreben vorgesehen wurde; andernfalls muss die Fachwerkgeometrie iterativ angepasst werden.

Querkraft – Spannungsfelder



Diese und die folgenden Folien illustrieren den Übergang von einem Stabwerkmodell (auf Wirkungslinien der Stabkräfte reduziertes Fachwerkmodell) zu einem Spannungsfeld anhand des gleichen Beispiels, an welchem das Stabwerkmodell eingeführt wurde.

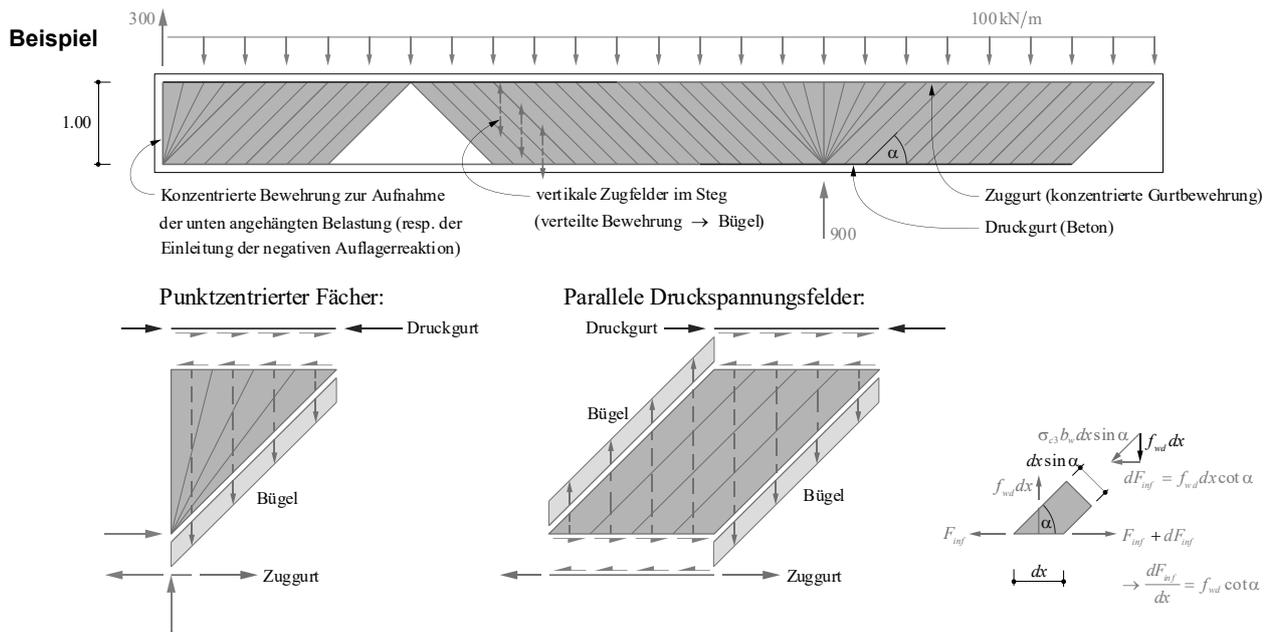
Querkraft – Spannungsfelder



Jeder Fachwerkstab wird dabei durch ein statisch äquivalentes Spannungsfeld ersetzt:

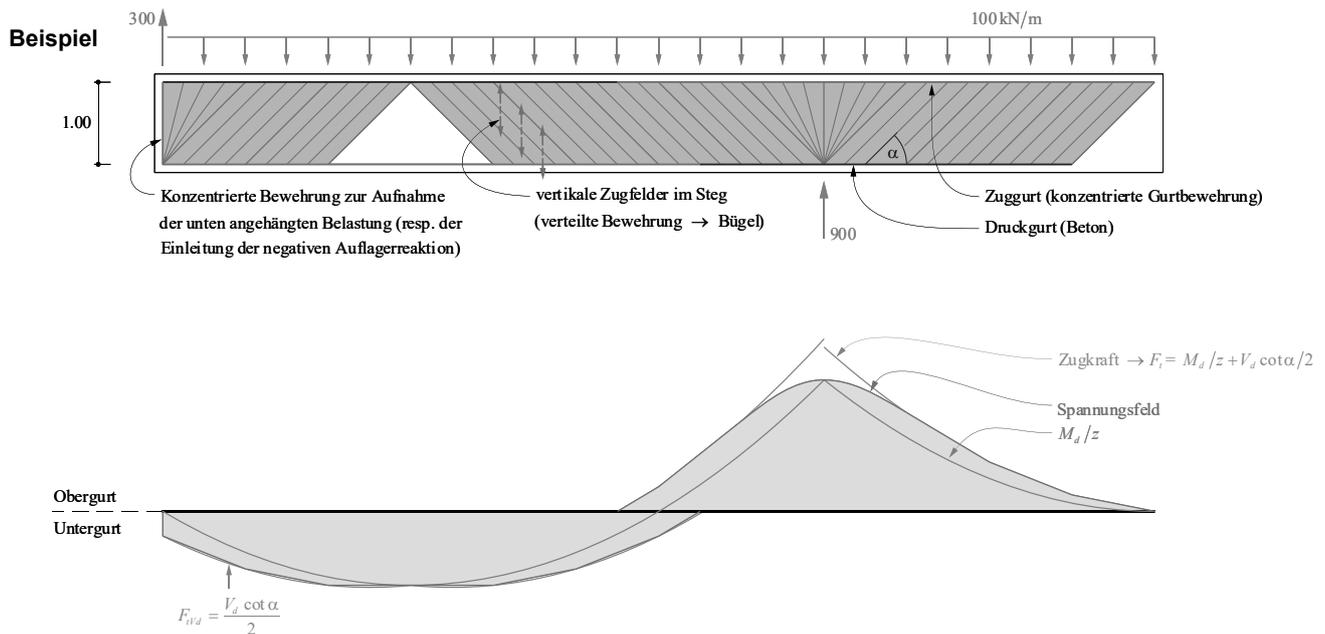
- Pfosten (konzentrierte Bügelkräfte) werden zu vertikalen Zugfeldern (verteilte Bügelkräfte).
- Druckdiagonalen werden zu parallelen Druckfeldern (in Bereichen mit konstanter Neigung der Druckdiagonalen) resp. Fächern (bei variabler Druckdiagonalenneigung und bei der Einleitung von Einzellasten, beispielsweise bei den Auflagern).
- Einzelne Fachwerkstäbe können nicht über eine grössere Breite verteilt resp. ausgebreitet werden (im Beispiel die vertikale Bewehrung am linken Trägerende, welche die Reaktion vom oberen Trägerrand an den unteren übertragen muss. Solche Fachwerkstäbe erfordern eine konzentrierte Bewehrung (Zug) resp. ausreichend grosse Abmessungen (Druck).
- Ein Ersatz von verteilten Belastungen durch statisch äquivalente Einzellasten ist nicht nötig resp. nicht sinnvoll, da die Spannungsfelder verteilte Lasten aufnehmen.

Querkraft – Spannungsfelder



Für die Bemessung können punktzentrierte Fächer bei den Einzellasten und Auflagern verwendet werden (wie dargestellt), obschon die Druckspannungen in den Ecken, wo die Trajektorien zusammenlaufen, theoretisch unendlich gross werden. Voraussetzung ist, dass die Abmessungen der Knotenbereiche (Lagerplattenbreite, Höhe) ausreichend gross gewählt werden (gleich gross wie beim statisch äquivalenten Fachwerkmodell). Nähere Angaben dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Querkraft – Spannungsfelder



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

38

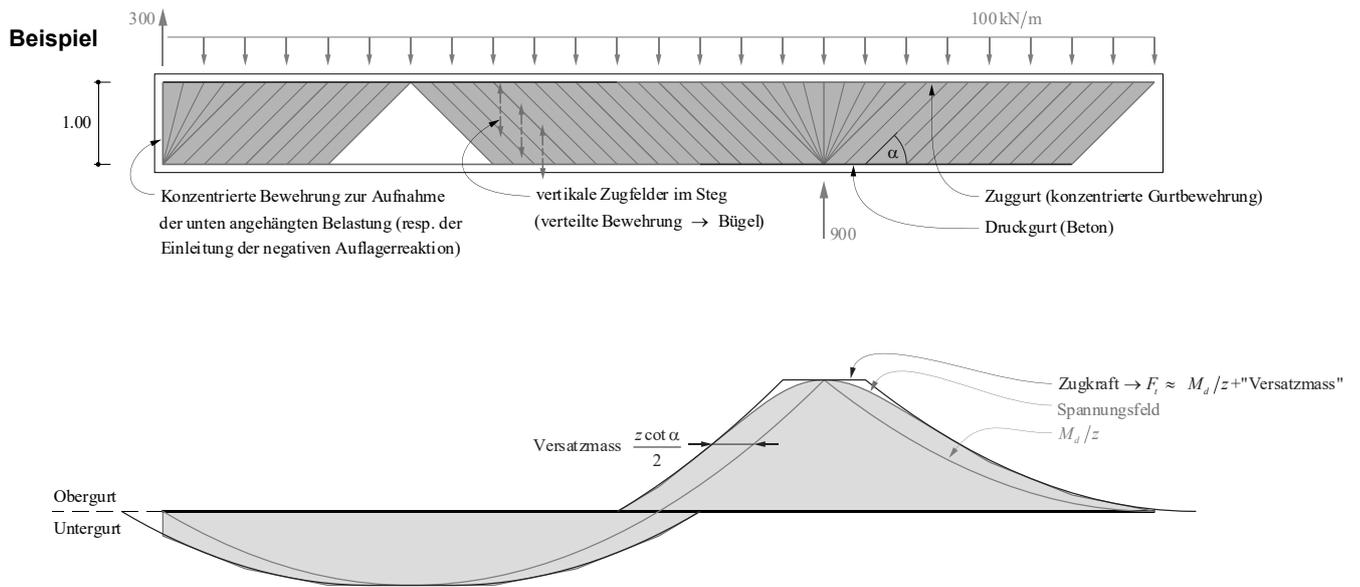
Während die Bügelkräfte weiterhin abgetrept verlaufen (abschnittsweise konstante Kräfte entsprechend der Kräfte in den Zugpfosten), verlaufen die Gurtkräfte nun kontinuierlich, da die Druckdiagonalen nicht mehr konzentrierte Horizontalkräfte an die Gurte abgeben.

Über parallelen Druckfeldern verläuft die Gurtkraft linear (da jede infinitesimale Strebe des parallelen Druckfelds die gleiche Änderung der Gurtkraft bewirkt), über zentrierten Fächern parabolisch (da die Horizontalkomponente der infinitesimalen Druckstreben von ihrem Neigungswinkel abhängt und die Vertikalkomponente pro Längeneinheit konstant ist). Näheres dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Vergleich der Gurtkräfte gemäss Querschnittsbemessung und Spannungsfeld:

- Der mit dem Spannungsfeld ermittelte Gurtkraftverlauf stimmt praktisch überall mit der Zugkraft $M_d/z + \frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$ gut überein. *Abweichung:* Der Verlauf aus dem Spannungsfeld verläuft in den Bereichen konstanter Bügelkräfte abschnittsweise linear (anstatt parabolisch). Zudem nähert sich über dem rechten Auflager (wegen dem Fächer) die Gurtkraft nach dem Spannungsfeld parabolisch an der maximalen Gurtkraft M_d/z an.
- Die beim Auflager zu verankernde Zugkraft kann entweder aus der Zugkraftlinie oder dem Fachwerkmodell (Horizontalkomponente der Fächerresultierenden, siehe vorne) ermittelt werden; beide Modelle liefern den gleichen Wert, sofern die Druckfeldneigung übereinstimmend festgelegt wurde. Siehe dazu auch konstruktive Durchbildung von Knoten.

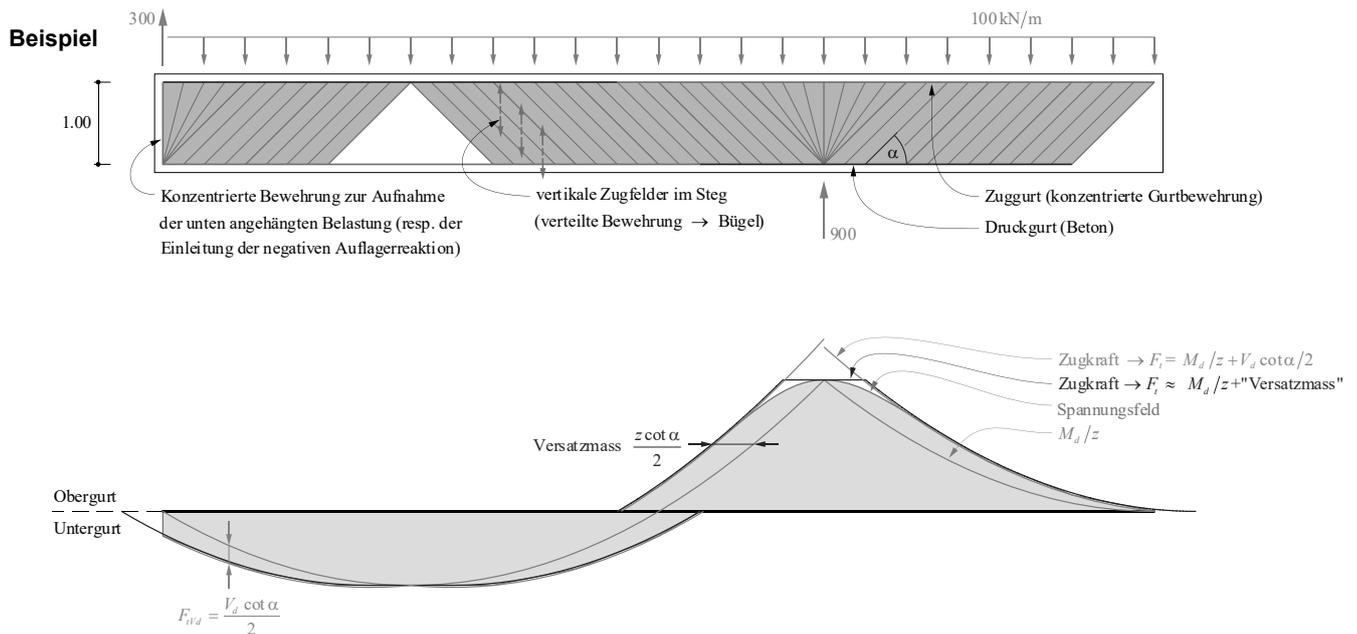
Querkraft – Spannungsfelder



Vergleich der Gurtkräfte gemäss Querschnittsbemessung und Spannungsfeld:

- Der mit dem Spannungsfeld ermittelte Gurtkraftverlauf kann gut mit der um das Versatzmass $\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot \alpha$ verschobenen Linie M_d/z (Zugkraftlinie $M_d/z + \text{«Versatzmass»}$) angenähert werden.

Querkraft – Spannungsfelder



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

40

Während die Bügelkräfte weiterhin abgetrept verlaufen (abschnittsweise konstante Kräfte entsprechend der Kräfte in den Zugpfosten), verlaufen die Gurtkräfte nun kontinuierlich, da die Druckdiagonalen nicht mehr konzentrierte Horizontalkräfte an die Gurte abgeben.

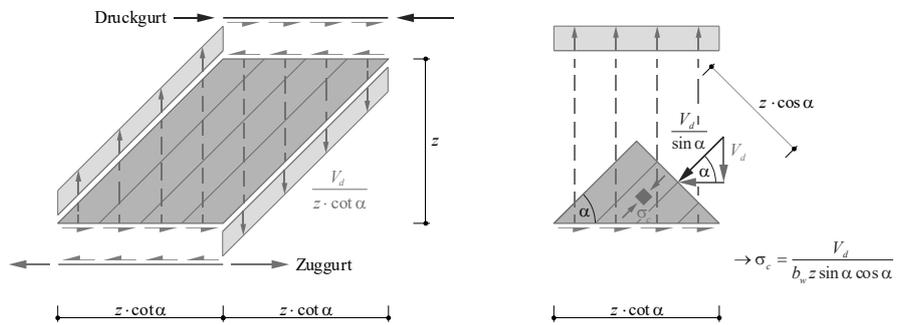
Über parallelen Druckfeldern verläuft die Gurtkraft linear (da jede infinitesimale Strebe des parallelen Druckfelds die gleiche Änderung der Gurtkraft bewirkt), über zentrierten Fächern parabolisch (da die Horizontalkomponente der infinitesimalen Druckstreben von ihrem Neigungswinkel abhängt und die Vertikalkomponente pro Längeneinheit konstant ist). Näheres dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Vergleich der Gurtkräfte gemäss Querschnittsbemessung und Spannungsfeld:

- Der mit dem Spannungsfeld ermittelte Gurtkraftverlauf stimmt praktisch überall mit der Zugkraft $M_d/z + \frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$ gut überein. *Abweichung:* Der Verlauf aus dem Spannungsfeld verläuft in den Bereichen konstanter Bügelkräfte abschnittsweise linear (anstatt parabolisch). Zudem nähert sich über dem rechten Auflager (wegen dem Fächer) die Gurtkraft nach dem Spannungsfeld parabolisch an der maximalen Gurtkraft M_d/z an.
- Die beim Auflager zu verankernde Zugkraft kann entweder aus der Zugkraftlinie oder dem Fachwerkmodell (Horizontalkomponente der Fächerresultierenden, siehe vorne) ermittelt werden; beide Modelle liefern den gleichen Wert, sofern die Druckfeldneigung übereinstimmend festgelegt wurde. Siehe dazu auch konstruktive Durchbildung von Knoten.

Querkraft – Spannungsfelder

Zusammenhang Spannungsfelder - Querschnittsbetrachtung

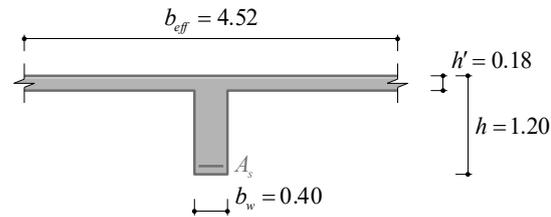


- Die «Querschnitts»-Nachweise nach SIA 262 (eigentlich keine reine Querschnittsbetrachtung) folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen am Schnittkörper eines parallelen Druckspannungsfelds.

Die «Querschnittsnachweise» nach SIA 262 («Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenneigung») entsprechen der Betrachtung mit einem parallelen Druckfeld.

Querkraft – Beispiel

Beanspruchung (Fortsetzung von [1] Beispiel 2.9 / 4.1, Seite 4.7)



Plattenbalken:

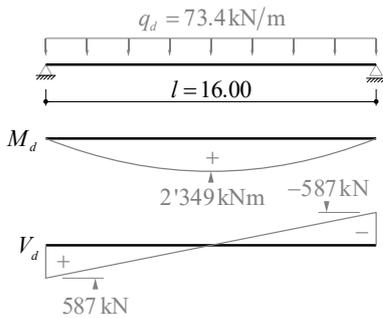
$$b_{eff} = 4.52 \text{ m}$$

$$b_w = 0.40 \text{ m}$$

$$h = 1.20 \text{ m}$$

$$h' = 0.18 \text{ m}$$

$$l = 16.00 \text{ m}$$



Gewählte Hauptbiegebewehrung:

$$7\text{Ø}30 \rightarrow z = 1.11 \text{ m} \quad (\text{vgl. Biegung Teil 2, Folie 41})$$

Querkraftbewehrung:

$$\rho_{min} = 0.2\%$$

$$a_{s,min} = \rho_{min} \cdot b_w = 0.002 \cdot 400 \text{ mm} \cdot 1'000 \text{ mm/m} = 800 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\rightarrow 2\text{Ø}8@125, a_s = 2 \cdot 402 = 804 \text{ mm}^2/\text{m}$$

2-schnittige Bügel!

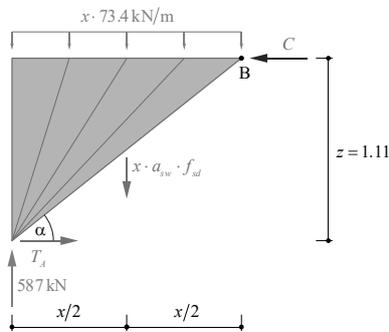
Auf dieser und den folgenden Folien wird die Querkraftbemessung am Beispiel eines Plattenbalkens illustriert (anhand des bereits im Kapitel «Biegung» behandelten Beispiels). Neben der Querkraft (vertikale Schubbeanspruchung im Steg) wird dabei auch die Ausbreitung der Druckkraft in den Flansch (horizontale Schubbeanspruchung im Flansch) und deren Interaktion mit der Plattenbiegung quer zur Achse des Plattenbalkens untersucht.

Querkraft – Beispiel

Zentrierter Fächer beim Auflager

Anstelle wie beim Beispiel «einfacher Balken mit Kragarm» die Druckfeldneigung α vorzugeben, kann auch eine andere Wahl getroffen werden.

Beispiel: Gegebene Bügelbewehrung voll ausnützen, Länge x und somit Druckfeldneigung α daraus bestimmen:



$$a_{sw} \cdot f_{sd} = 804 \cdot 0.435 = 349.7 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow 587 - 73.4 \cdot x - 349.7 \cdot x = 0$$

$$\rightarrow x = 1.387 \text{ m}$$

$$\rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1.11}{1.387}\right) = 38.7^\circ \quad (\tan \alpha = 0.8003)$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow T_A \cdot 1.11 + 349.7 \cdot \frac{1.387^2}{2} + 73.4 \cdot \frac{1.387^2}{2} = 587 \cdot 1.387$$

$$\rightarrow T_A = 367 \text{ kN}$$

oder: Gleichgewicht der Horizontalkräfte am Auflagerknoten:

$$\rightarrow T_A = 587 \frac{\cot \alpha}{2} = 367 \text{ kN}$$

Die Druckfeldneigung kann bei der Bemessung frei gewählt werden (innerhalb der durch die Norm vorgegebenen Grenzen).

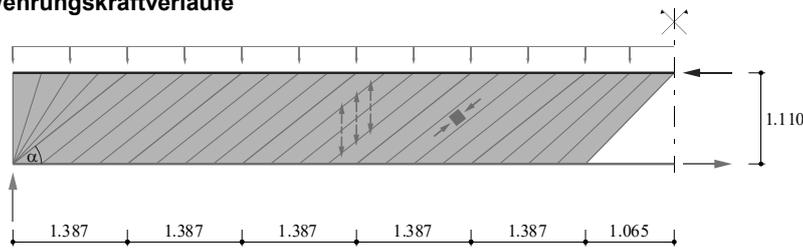
Im Beispiel wird sie so gewählt, dass die gegebene Bügelbewehrung gerade voll ausgenützt ist. Der Nachweis erfolgt gemäss Norm SIA 262 im Schnitt, welcher den Obergurt (wo die Last angreift) im Abstand $z \cdot \cot \alpha$ schneidet. Die über diese Länge angreifende Last muss nicht mit den Bügeln aufgehängt werden, was aus dem Spannungsfeld ersichtlich ist.

Die hinter dem Auflager zu verankernde Gurtkraft kann direkt aus der Auflagerreaktion ermittelt werden, da die Resultierende der Fächerdruckspannungen gerade die doppelte Neigung aufweist wie dessen flachste Trajektorie (stimmt beim punktzentrierten Fächer mit vertikaler erster Trajektorie exakt, allgemein ist es eine gute Näherung).

Hier wird angenommen, dass die Betondruckspannungen nicht massgebend werden; Kontrolle (Nachweis) siehe Folie 46.

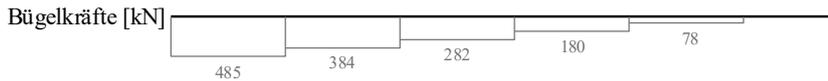
Querkraft – Beispiel

Relevante Bewehrungskraftverläufe



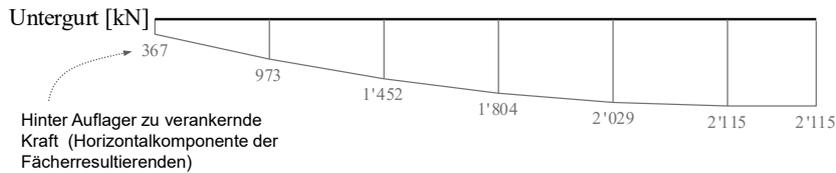
Die grösste Bügelkraft beträgt 485 kN und muss über eine Länge von 1.387 m von der Bewehrung aufgenommen werden:

$$2 \cdot 402 \cdot 0.435 \cdot 1.387 = 485 \text{ kN, i.O.}$$



Die Längsbewehrung muss im Maximum 2'115 kN abdecken ($z = 1.11 \text{ m}$).

$$7 \cdot 707 \cdot 0.435 = 2'153 \text{ kN, i.O.}$$



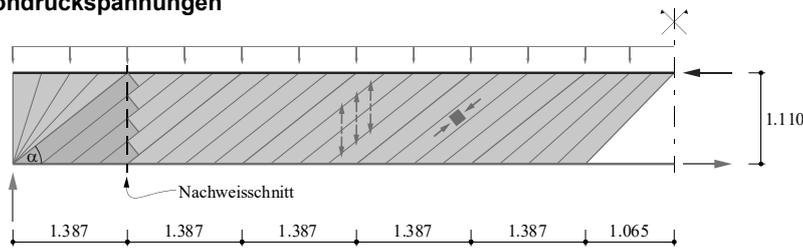
Die Abstufung kann gemäss Verlauf der Untergurtkraft erfolgen. Hinter dem Auflager ist eine Kraft im Zuggurt von 367 kN zu verankern.

Ergänzende Bemerkungen

- Die grösste Bügelkraft entspricht gerade dem Widerstand der Bügelbewehrung (was nicht weiter überrascht, da die Druckfeldneigung entsprechend festgelegt wurde)
- Die hinter dem Auflager zu verankernde Gurtkraft entspricht ebenfalls dem auf der ersten Folie des Beispiels ermittelten Wert.

Querkraft – Beispiel

Relevante Betondruckspannungen



N.B.:

Massgebend ist die Querkraft im Abstand $z \cdot \cot \alpha$ vom Auflagerend (SIA 262, 4.3.3.4.1).

$$\sigma_c = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{587 - 73.4 \cdot 1.387}{400 \cdot 1.11 \cdot \sin(38.6^\circ) \cdot \cos(38.6^\circ)} = 2.24 \text{ N/mm}^2 \leq k_c f_{cd} = 0.55 \cdot 16.5 = 9.1 \text{ N/mm}^2, \text{ i.O.}$$

Es wird damit die Druckstrebe unmittelbar neben dem Fächer nachgewiesen.

Die Betondruckspannungen werden im an den Fächer angrenzenden Parallelfeld überprüft. Im Fächer wären sie (beim Auflager) theoretisch unendlich gross, man kann jedoch zeigen, dass dies nicht massgebend wird, sofern der Auflagerknoten richtig dimensioniert wird (siehe Abschnitt Knoten und Advanced Structural Concrete).

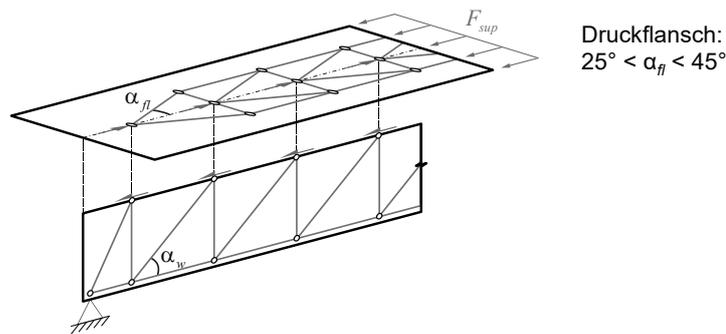
Mit dem Nachweis der Betondruckspannungen im Steg ist die Bemessung des Trägers «in Längsrichtung» abgeschlossen. Die Bewehrung kann entsprechend der Resultate konstruiert werden.

Zusätzlich ist jedoch die Lastausbreitung der Druckkraft im Obergurt zu beachten.

Querkraft – Schubanschluss

Anschluss Steg – Flansch

- Im Grenzzustand der Tragsicherheit ist der Schubanschluss der Flanschplatten an den Steg zu berücksichtigen (SIA 262, 4.3.4.1.1).
- Einleitung von Zug-/Druckkräften in die Flansche (Gurte) erzeugt Schubkräfte im Übergang zwischen Steg und Flansch sowie Querkug- und Druckkräfte in den Flanschen.
- Die Querkug- und Querkdruckkräfte sind mit den Kräften aus Querbiegung zu superponieren.

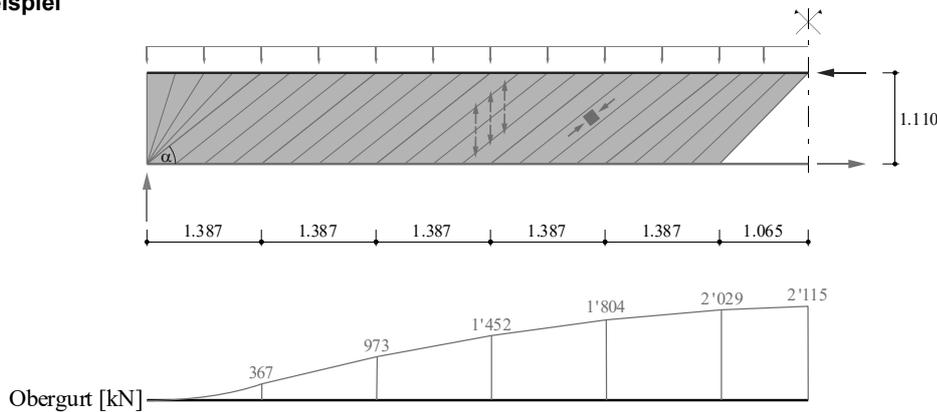


Die Ausbreitung der Druckgurtkraft in den Oberflansch bewirkt eine Querkugkraft im Flansch und erfordert eine entsprechende Bewehrung («Spreizbewehrung» resp. Horizontalschub im Flansch). Die Querbewehrung, welche im Anschluss der Druckplatte an den Steg verläuft, muss also nicht nur die «lokale» Biegung (Tragwirkung des Flanschs als Platte zwischen den Längsträgern) aufnehmen, was im Kapitel Biegung untersucht wurde, sondern auch diese Querkugkraft.

Am einfachsten ist es, die Bewehrungen aus Biegung und die für die Aufnahme der Querkugkräfte erforderliche Bewehrung zu superponieren. Dies ist jedoch unwirtschaftlich, da ein Teil der Querkugkraft durch eine Reduktion der Biegedruckkraft aus lokaler Biegung aufgenommen werden kann. Eine genauere Betrachtung kann mit einem Nachweis für Biegung mit (Zug-)Normalkraft erfolgen.

Querkraft – Schubanschluss

Beispiel



Der maximale Schubfluss zwischen Steg und Flansch tritt bei $x = z \cdot \cot \alpha$ auf (bei der letzten Strebe des Fächers beim Auflager tritt die grösste Änderung der Obergurtkraft pro Länge auf). Er beträgt:

$$s_{\max} = \frac{dF_{\text{sup}}}{dx} = \frac{d(M_d/z)}{dx} = \frac{V_d}{z} = \frac{587}{1.110} = 533 \text{ kN/m}$$

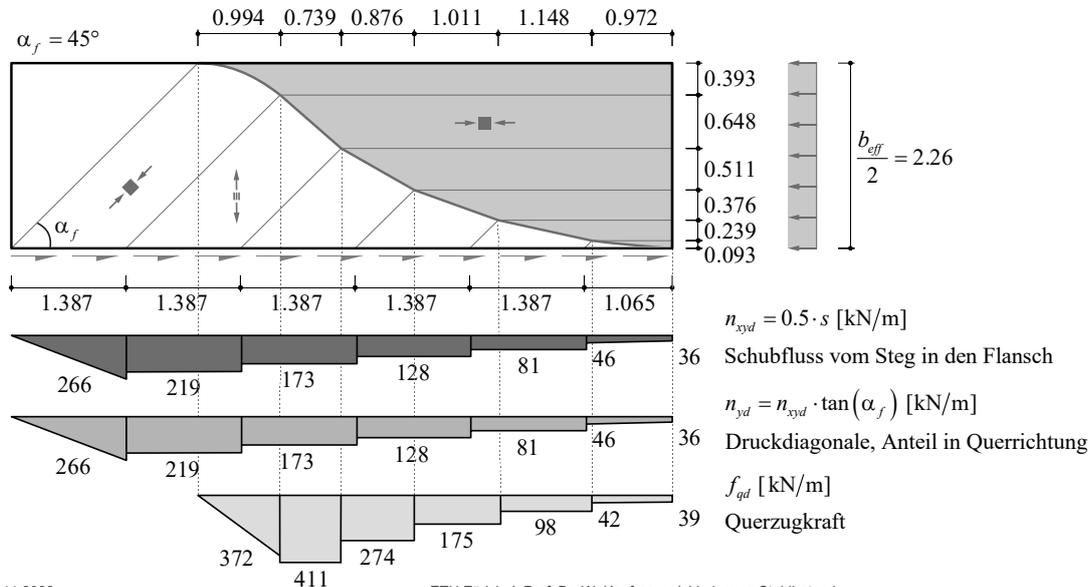
Die Querkraftbeanspruchung resultiert aus der Einleitung der Längsschubkraft zwischen Steg und Flansch. Diese Längsschubkraft entspricht der Änderung der Obergurtkraft, welche (entsprechend $dM/dx = V$) direkt mit dem Verlauf der Querkraft zusammenhängt (Horizontalanteil der geneigten Druckstreben im Spannungsfeld bzw. Fachwerkmodell).

Ergänzende Bemerkungen

Um für Biegung die ganze Flanschbreite aktivieren zu können (was in Querschnittsnachweisen meist vorausgesetzt wird), muss die in der Stegachse eingeleitete Längskraft gespreizt werden. Das Stabmodell, an dem üblicherweise die Schnittkräfte ermittelt werden, ist eine Idealisierung, aus welcher solche Effekte nicht ersichtlich sind. Mit der «effektiven Breite» kann die für übliche Verhältnisse mögliche Spreizung berücksichtigt werden, und darauf basierend kann die erforderliche Querbewehrung ermittelt werden.

Querkraft – Schubanschluss

Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

49

- An der Stelle des maximalen Moments wird auf der ganzen Breite die Betondruckfestigkeit f_{cd} angesetzt (Biegetragsicherheit ausgeschöpft, resp. effektive Flanschbreite entsprechend gewählt). Die Schubkräfte, welche aus dem Steg eingeleitet werden, werden über Druckdiagonalen in den Flansch ausgebreitet. Der Winkel, mit welchem die Gurtkraft in den Flansch ausgebreitet wird, kann grundsätzlich – genau wie die Druckfeldneigung – frei gewählt werden. Unter Berücksichtigung der vorhandenen Geometrie sollte jedoch überprüft werden, ob genügend Platz für die Druckdiagonalen sowie für die verteilte Bügelbewehrung vorhanden ist. Eine massstäbliche Konstruktion des Spannungsfelds ist daher stets zu empfehlen.
- Durch die Ausbreitung der Gurtkraft wird in Feldmitte eine grössere Breite als Druckzone aktiviert als in Auflagernähe. Die Breite der Druckzone stimmt daher nur in Feldmitte mit der «effektiven Breite» des Flanschs überein, und auch dies nur, sofern mit der Ausbreitung unter dem gewählten Winkel diese ganze Breite aktiviert werden kann. Andernfalls ist der Winkel der Ausbreitung (und damit die Spreizbewehrung) zu erhöhen, sofern in Feldmitte die ganze effektive Breite für den Biegenachweis angesetzt werden soll.

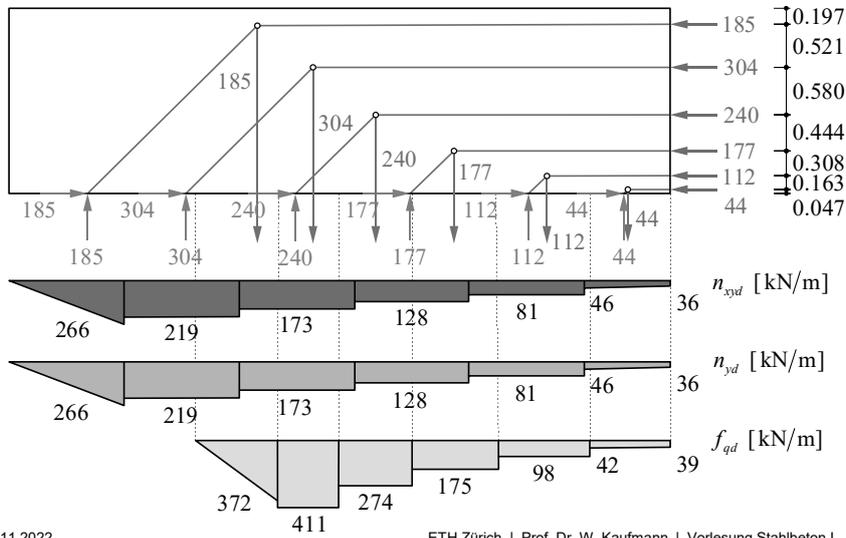
Ergänzende Bemerkungen

- In der Praxis beschränkt man sich meist darauf, die maximale Querbewehrung zu ermitteln; diese wird dann über die ganze Länge (allenfalls mit 1-2 Abstufungen) eingelegt.
- In der Folie ist ein Spannungsfeld dargestellt, welches keine Kreuzung von diagonalen und achsparallelen Druckfeldern erfordert. Dadurch resultieren relativ grosse Querkzugkräfte (pro m), da die Querkzugbewehrung erst in einem grösseren Abstand vom Auflager wirksam ist. Grundsätzlich sind auch Spannungsfelder möglich, bei welchem die in Auflagernähe ankommende Längskraft auf eine kleinere Breite gespreizt wird als in Feldmitte. Damit kann eine auflagernahe Querkzugbewehrung ausgenützt werden, und es resultieren kleinere Querkzugkräfte (pro m). Dabei kreuzen sich aber diagonale und achsparallele Druckfelder, wodurch die Überprüfung der Druckfestigkeit erschwert wird (bei Ansatz von f_c in Längsrichtung wäre die Druckspannung im Kreuzungsbereich $>f_c$).

Querkraft – Schubanschluss

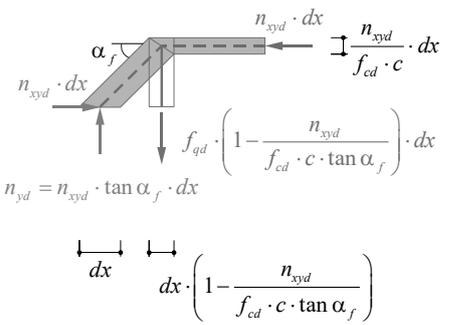
Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens

... zugehöriges Fachwerkmodell



$$f_{qd} = n_{xyd} \cdot \tan \alpha_f \cdot \left(1 - \frac{n_{xyd}}{f_{cd} \cdot c \cdot \tan \alpha_f} \right)^{-1}$$

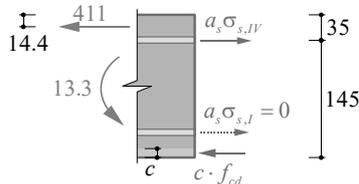
Allgemein:



Querkraft – Schubanschluss

Beispiel

Kräfte im Längsschnitt durch den Flansch des Plattenbalkens (Stegrand):



$$\Sigma M = 0 \rightarrow -13.3 \cdot 10^3 - 411 \cdot (35 - 14.4) + 16.5 \cdot c \cdot \left(145 - \frac{c}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow c = 9.4 \text{ mm} \rightarrow c \cdot f_{cd} = c \cdot 16.5 = 155.1 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma H = 0 \rightarrow 411 + 155.1 - a_s \sigma_{s,IV} = 0$$

$$\rightarrow a_s \sigma_{s,IV} = 566.1 \text{ kN/m}$$

$$\text{gewählt: } a_s \cdot f_{sd} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} \cdot 0.435 = 583 \text{ kN/m} > 566.1 \text{ kN/m, i.O.}$$

- Die Querkraft wirkt im Schwerpunkt der Druckresultierenden, d.h. in der Mitte der Druckzone aus Biegung in Längsrichtung (siehe Biegung, Folie 84)

$$0.425x = \frac{7 \cdot 707 \cdot 435}{2 \cdot 4520 \cdot 16.5} = 14.4 \text{ mm}$$

- Die Querkraft muss mit dem Querbiegemoment superponiert werden (siehe Biegung, Folie 81)

$$m_d = 13.3 \text{ kNm/m}$$

- Die Gleichgewichtsbedingungen am Schnittkörperdiagramm liefern die Druckkraft und die Kraft in der vierten Bewehrungslage (1. Lage vernachlässigt):

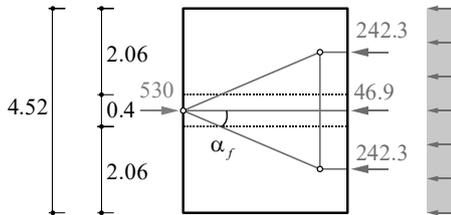
Die ursprünglich gewählte Plattenbewehrung von $\text{Ø}10@200$ reicht nicht aus, um die Kräfte aus Querbiegung und Querkraft aufzunehmen. Sie wird auf $\text{Ø}16@150$ ($a_s = 1'340 \text{ mm}^2/\text{m}$) verstärkt.

In der Abbildung wird die erforderliche Bewehrung zur Aufnahme der «lokalen» Biegung (Tragwirkung des Flanschs als Platte zwischen den Längsträgern) und der Querkraft exakt ermittelt.

Der Nachweis wäre wesentlich einfacher, wenn der Hebelarm der inneren Kräfte bei der Längsbemessung so gewählt worden wäre, dass die Druckgurtkraft in der Mitte des Hebelarms der lokalen Biegebeanspruchung in Querrichtung angreift (was im vorliegenden Fall aufgrund des kleineren Hebelarms der inneren Kräfte für «globale» Biegung in Längsrichtung eine rund 8% grössere Längsbewehrung erfordert hätte). Da die Querkraft auf gleicher Höhe angreift wie die resultierende Obergurtkraft, könnte man die Querkraft in diesem Fall zu je 50% auf die obere Bewehrung und die Druckzone aufteilen. Sofern die Druckzone dadurch nicht dekomprimiert (üblicherweise bleibt sie überdrückt) müsste also einfach der Widerstand der oberen Querbewehrung um die Hälfte der Querkraft erhöht werden.

Querkraft – Schubanschluss

Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens (vereinfachtes Modell)



Vereinfachend kann die Querkraft anhand der grössten einzuleitenden Gurtkraft (maximale Änderung der Gurtkraft pro Länge) mit einem einfachen Stabwerkmodell ermittelt werden.

- Von der Schubkraft bleibt ein Anteil direkt über dem Steg und muss nicht in die Platte ausgebreitet werden:

$$s_w = s_{\max} \cdot \frac{b_w}{b_{\text{eff}}} = 530 \cdot \frac{0.4}{4.52} = 46.9 \text{ kN/m}$$

- Der Anteil, welcher ausgebreitet werden muss beträgt:

$$s_f = s_{\max} \cdot \frac{b_{\text{eff}} - b_w}{2b_{\text{eff}}} = 530 \cdot \frac{4.52 - 0.4}{2 \cdot 4.52} = 242.3 \text{ kN/m}$$

- Mit $\alpha_f = 25^\circ$ folgt die Querkraft

$$t_s = \tan \alpha_f \cdot s_f = \tan 25^\circ \cdot 242.3 = 113.0 \text{ kN/m}$$

Diese Querkraft kann mit der Biegebewehrung (Querbiegung) nach dem gleichen Vorgehen überlagert werden wie bei der Betrachtung mit dem Spannungsfeld.

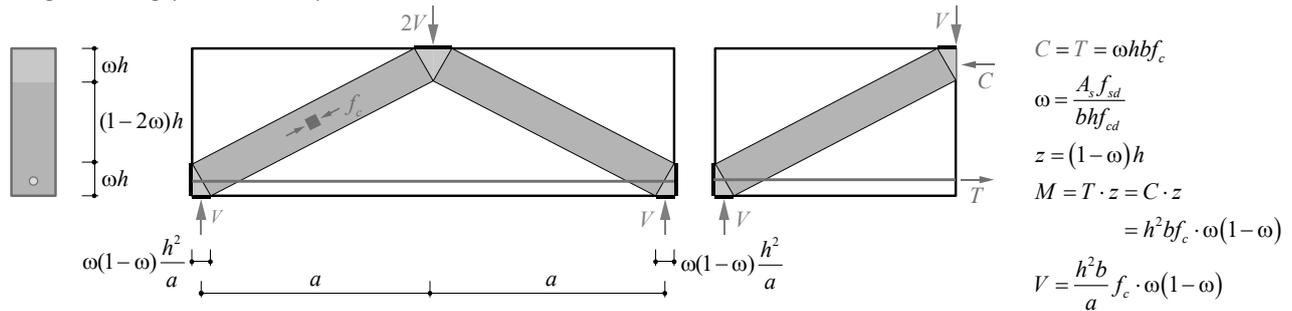
Ergänzende Bemerkungen

- Der Winkel, mit welchem die Gurtkraft in den Flansch ausgebreitet wird, kann grundsätzlich – genau wie die Druckfeldneigung – frei gewählt werden. In Anlehnung an das elastische Verhalten unter solchen Verhältnissen sind hier jedoch flachere Neigungen (im Bereich von $\cot \alpha = 0.5$) sinnvoll; mit einer Annahme $\cot \alpha = 45^\circ$ würden unrealistisch grosse Spreizkräfte resultieren.

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

- Fachwerkmodelle und Spannungsfelder sind, wie auf den vorangehenden Folien gezeigt, ein leistungsfähiges Hilfsmittel für die (Querkraft-)bemessung von Trägern.
- Sie eignen sich auch für die Bemessung scheibenförmiger Bauteile (Wände, hohe Abfangträger, Querscheiben, ...) und insbesondere für Diskontinuitätsbereiche, für welche die Anwendung querschnittsbasierter Bemessungsmethoden nicht möglich ist (Querschnittssprünge, Rahmenecken, hohe Einzellasten, Knotenbereiche, ...).
- Nachfolgend werden exemplarisch einige Fachwerkmodelle und Spannungsfelder für solche Fälle aufgezeigt. Als Einstieg dient der Lastabtrag in einer hohen Scheibe über Strebenwirkung (siehe unten, direkte Abstützung), resp. Fächer- und Bogenwirkung (nächste Folie).



Die Abbildung zeigt ein sehr einfaches Fachwerkmodell für eine symmetrische Scheibe mit Rechteck-Querschnitt unter einer Einzellast $2V$. Diese Last wird über zwei Betondruckstreben direkt zu den Auflagern abgetragen, wo sie im Gleichgewicht mit der Auflagerkraft V und der im horizontalen Zugstab wirkenden Kraft T steht. Die Einleitung und Umlenkung der Last und der Auflagerkraft erfordert Knotenbereiche (siehe dazu auch Folie 60 ff.). Die erforderlichen Abmessungen der Lasteinleitungs-, Auflager- und Verankerungsplatten und somit jene der Knotenbereiche ergeben sich aus der Bedingung, dass an ihren Rändern die Betondruckfestigkeit ausgenutzt ist. Folglich herrscht in den Knotenbereichen ein zweiachsiger, gleichförmiger Druckspannungszustand ($\sigma_{c1} = \sigma_{c3} = -f_c$). Jede Druckstrebe besteht aus parallelen, einachsig mit $-f_c$ beanspruchten Spannungstrajektorien («Fachwerkstäbe» mit verschwindender Abmessung) und ist also ein paralleles Druckspannungsfeld.

Das gewählte, als «direkte Abstützung» oder «Strebenwirkung» bezeichnete Gleichgewichtsmodell ist eine grobe Idealisierung des Tragverhaltens. Das Modell erfordert keinerlei vertikalen Zugelemente (keine Schubbewehrung). Dafür muss die ganze (maximale) im horizontalen Zugstab T auftretende Bewehrungskraft hinter dem Auflager verankert werden.

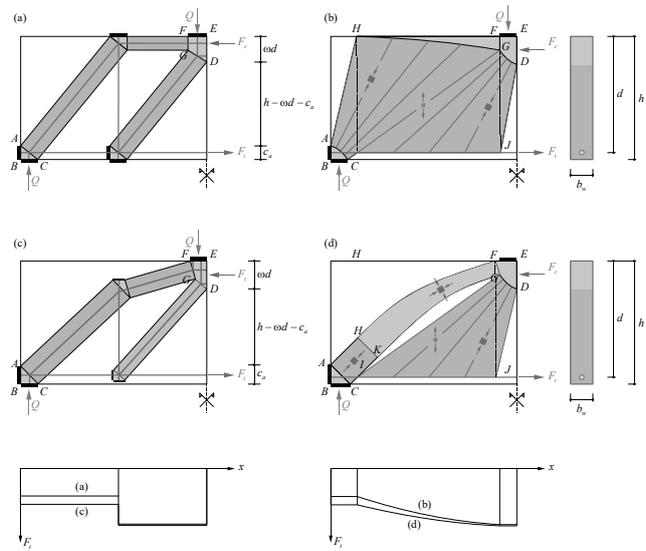
Da in einem entsprechend dieses Modells bemessenen Träger die Mindestbewehrung in vertikaler Richtung fehlt, ist mit einem spröden Verhalten bei Rissbildung zu rechnen, und die Anwendung der Plastizitätstheorie ist grundsätzlich nicht gerechtfertigt. Auch wenn ein statisch zulässiger Spannungszustand vorliegt, liefert dieser daher keinen unteren Grenzwert der Traglast wenn frühzeitige, spröde Versagensarten auftreten. Modelle mit direkter Abstützung sind daher nur bei kleiner Schubschlankheit ($a/d < \text{ca. } 1.5$) sinnvoll.

Weitere Angaben dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

- Während mit der auf der vorhergehenden Folie dargestellten direkten Abstützung (Strebenwirkung) keine vertikale Bewehrung benötigt wird, kann mit den auf dieser Folie gezeigten Modellen eine solche Bewehrung (die als Mindestbewehrung ohnehin vorhanden ist) ausgenutzt werden.
- Die Abbildungen (a) und (c) zeigen Fachwerkmodelle, deren Strebenabmessungen (im Gegensatz zu «Stabwerkmodellen») aufgrund der Druckfestigkeit des Betons festgelegt wurden (→ strenge Lösungen nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie).
- Ausgehend von den einfachen Fachwerkmodellen (a) und (c), mit denen der Kraftfluss festgelegt wird, können die Abmessungen der Knotenbereiche abgeschätzt und entsprechende konstruktive Details ausgearbeitet werden. Bei Bedarf können die Spannungsfelder verfeinert werden (siehe (b), (d)).
- Weiterführende Angaben siehe Advanced Structural Concrete.



29.11.2022

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

55

Ergänzende Bemerkungen

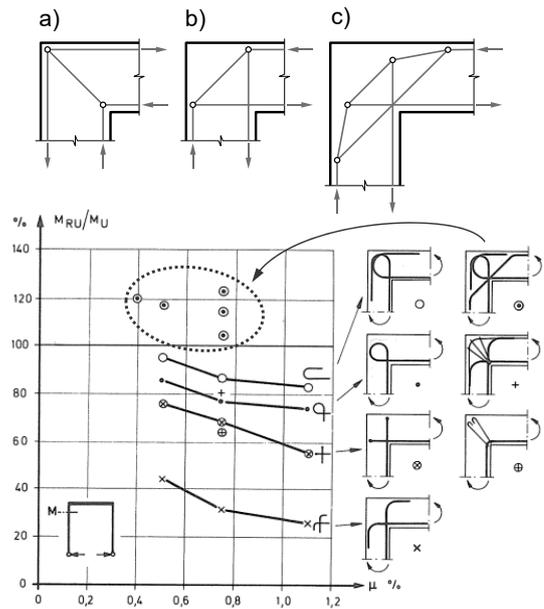
- Weitere Angaben zu Fachwerkmodellen für Träger und Scheiben siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Rahmenecken unter reiner Biegung

- (a) schliessendes, (b) öffnendes Moment
- vor allem öffnende Rahmenecken heikel und konstruktiv sehr anspruchsvoll
- diagonale Bewehrung (c) ist vorteilhaft für Verankerung der Bewehrungskräfte (aber Kräfte grösser als in (b), Hebelarm!)
- Biegebestand der angeschlossenen Bauteile in Regel trotzdem nicht voll ausnutzbar, da Verankerung / Umlenkung der Kräfte im Eckbereich Reduktion des Hebelarms im Vergleich mit (a), (b) bewirkt
- Versuche z.B. von Nilsson (1973) bestätigen die gemachten Aussagen
- Bewehrungsseisen mit Verankerungsköpfen für Rahmenecken gut geeignet
- Beispiele für Rahmenecken mit verteilter Bewehrung, kombinierter Beanspruchung etc. siehe z.B. [5]



Fachwerkmodelle eignen sich hervorragend zur Modellierung und Bemessung von Tragwerkselementen mit statischen / geometrischen Diskontinuitäten (d.h. zum Beispiel grosse Einzellasten, sprunghaft ändernde Abmessungen, Knicke, Aussparungen, etc.).

Die Abbildung zeigt ein typisches Beispiel: Rahmenecken mit öffnendem und schliessendem Moment. Insbesondere bei öffnendem Moment ist eine Verankerung der Zugkräfte «hinter» den Knoten auch mit konstruktiven Lösungen, wie sie im Abschnitt Knoten gezeigt wurden, nicht möglich (kein «Lagerüberstand» wie bei einem Endauflager). Der Platz für die Verankerung der Hauptbewehrung kann aber durch die Zulage einer diagonalen Bewehrung geschaffen werden. Diese Lösung ist die einzige, mit welcher annähernd der volle Widerstand der angeschlossenen Rahmenriegel resp. Stiele übertragen werden kann (siehe Versuchsergebnisse in der Abbildung).

Weitere Details dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Ausgeklinkte Träger (d), (e), (f), (g)

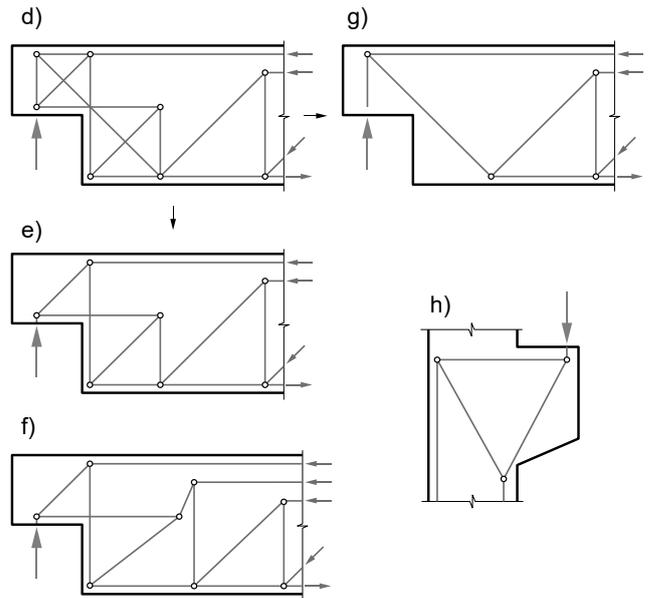
- (d), (e), (f), (g) mögliche Streben-Stab-Modelle
- Diagonalbewehrung analog wie bei den Rahmenecken günstig, Überlagerung der Modelle (Anteil der Last wählbar)

Konsolen (h)

- (h) Grundfall
- Verschiedene andere Modelle möglich, siehe z.B. [5]

Generelle Bemerkungen

- Spannungsfelder für Tragwerkselemente mit statischen / geometrischen Diskontinuitäten optimal geeignet
- Illustration hier nur an einfachen Streben-Stab-Modellen
- Verfeinerung durch Einführung von Fächern, Bogen, Zug-/Druckbändern etc. ermöglicht Erfassung der flächigen Tragwirkung des Betons und der verteilten Bewehrung



Ein weiteres typisches Tragwerkselement, für dessen Bemessung sich Fachwerkmodelle gut eignen, sind ausgeklinkte Trägerenden (siehe linke Abbildungen; ähnliches Tragverhalten wie öffnende Rahmenecken). Mit zwei ausgeklinkten Trägerenden kann ein «Gerbergelenk» konstruiert werden.

Auch bei ausgeklinkten Trägern ist die Zulage einer diagonalen Bewehrung sehr vorteilhaft. Dies insbesondere auch hinsichtlich des Verhaltens im Gebrauchszustand: kleinere Rissbreiten in der einspringenden Ecke.

Fachwerkmodelle können auch statisch unbestimmt sein (d). Durch die Bildung von Nullstäben ergeben sich die beiden statisch bestimmten Extremfälle (e) und (g).

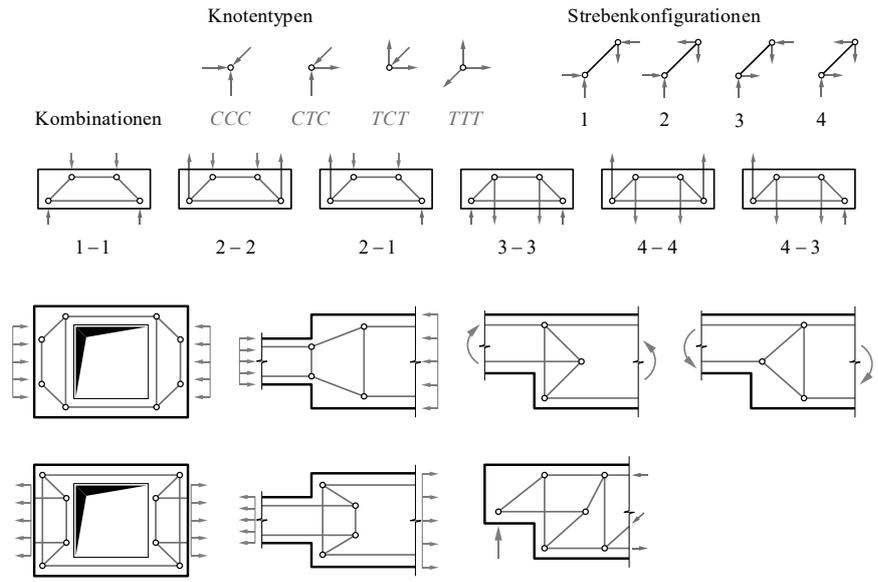
Konsolen (Abbildung rechts) sind ein typisches Beispiel einer direkten Abstützung, welche trotz fehlender vertikaler Mindestbewehrung im Konsolbereich funktioniert (da die Schubschlankheit a/d klein ist).

Weitere Details dazu siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Typisierung

- Fachwerkmodelle und Spannungsfelder können aus wenigen Grundelementen zusammengesetzt werden.
- Die Abbildung zeigt Grundtypen von Strebenkonfigurationen und Knoten, sowie deren mögliche Kombinationen. Damit ist eine Typisierung möglich.
- Ausgehend von den dargestellten Stabwerkmodellen können Fachwerkmodelle entwickelt werden, deren Strebenabmessungen aufgrund der Druckfestigkeit des Betons festgelegt werden (→ strenge Lösungen nach unterem Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie).



Mit Stabwerkmodellen lässt sich der Kraftfluss in Stahlbetontragwerken verfolgen. Diese sind jeweils an die vorliegenden Verhältnisse (Geometrie, Belastung etc.) anzupassen; es kommen jedoch oft sehr ähnliche Konfigurationen vor. Wird genügend Platz für die Druckstreben vorgesehen, lassen sich die Stabwerkmodelle einfach in Fachwerkmodelle (strenge Lösungen nach unterem Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie) entwickeln, siehe Beispiel Träger.

Die Abbildung zeigt einige typische Konfigurationen von Fachwerkmodellen, welche ausgehend von einer Typologisierung der Knoten (C = Compression = Druck, T = Tension = Zug) entwickelt werden.

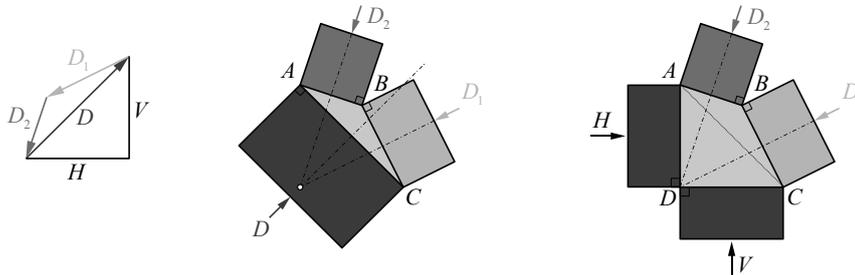
Im Rahmen der Vorlesungen Stahlbeton I-II und Advanced Structural Concrete wird dabei stets die gleiche Farben-Konvention verwendet:

- Grün = Druck (Beton)
- Blau = Zug (Bewehrung)
- Rot = Einwirkungen

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche

Wegen der endlichen Betonfestigkeit ergeben sich bei Fachwerkmodellen, deren Abmessungen aufgrund der Betondruckfestigkeit festgelegt werden, nicht wie in Stabwerkmodellen punktförmige Knoten, sondern Knotenbereiche:



Der Einfachheit halber wird meist für alle Streben die gleiche Druckspannung gewählt. Die Streben schliessen in diesem Fall rechtwinklig an den Fachwerkknoten an, d.h. die Knotengeometrie ist geometrisch ähnlich zum (um 90° gedrehten) Krafteck. Im Knoten herrscht ein zweiachsiger («hydrostatischer») Druckspannungszustand.

Werden für die verschiedenen Streben unterschiedliche Druckspannungen gewählt, sind die Ränder des Knotenbereichs i.a. nicht mehr orthogonal zu den Streben und die maximale Druckspannung im Knoten wird unter Umständen wesentlich grösser als in den angeschlossenen Streben (Untersuchung mit Mohr'schen Kreisen und Diskontinuitätslinien, siehe Advanced Structural Concrete).

Knotenbereiche – Allgemein / Kraftfluss

Geht man von einem Fachwerkknoten aus, in welchem drei oder mehr Druckstreben, welche im Gleichgewicht sind, zusammentreffen, kann grundsätzlich für beliebige Abmessungen der Streben (mit unterschiedlicher, jeweils einachsiger Druckspannung pro Strebe) ein Knotenbereich konstruiert und der Spannungszustand in diesem ermittelt werden. Eine genauere Untersuchung (siehe Vorlesung «Advanced Structural Concrete») zeigt, dass die grösste Druckspannung im Knoten höher ist als die grösste Druckspannung in den Streben, ausser die Knotenberandung steht senkrecht auf die Strebe mit der grössten Druckspannung. Solche allgemeine Knoten werden hier nicht weiter untersucht.

Wesentlich einfacher und praxisrelevanter sind die oben und auf der folgenden Seite gezeigten Knoten mit gleicher Spannung in allen Streben. Die Knotenberandung ist in diesem Fall senkrecht zu den Streben, und die Knotengeometrie ist geometrisch ähnlich zum Polygon der Strebenkräfte. In den Knoten herrscht ein zweiachsig gleichförmiger (der Kürze wegen oft unpräzise als «hydrostatisch» bezeichneter) Spannungszustand, $\sigma_1 = \sigma_2 = f_c$ (natürlich ist der Spannungszustand nicht hydrostatisch, da die Spannung senkrecht zur Scheibenebene $\sigma_3 = 0$ ist).

Wird die eine Strebe (von links unten angreifende Strebe in der linken Abbildung) durch zwei statisch äquivalente Streben ersetzt (horizontale und vertikale Strebe in Abbildung rechts), ändert lediglich der Verlauf der Knotenberandung innerhalb der ursprünglichen Strebe; die Knotenpunkte A, B, und C bleiben erhalten.

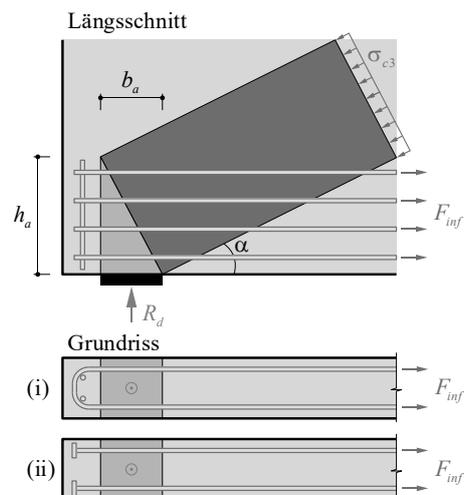
Dies ist insbesondere bei der Betrachtung von fächerartigen Spannungsfeldern nützlich (Knotenabmessungen können anhand der Resultierenden der Fächerspannungen resp. am einfachen Fachwerkmodell überprüft werden, der genaue Verlauf der Berandung ist unwichtig).

Zugkräfte können durch Ankerplatten hinter dem Knotenbereich verankert werden und wirken dann wie eine Druckkraft auf den Knoten. Dies ist jedoch unüblich (siehe folgende Seite).

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)

- Sorgfältige konstruktive Durchbildung wichtig!
- Einfachste Lösung: Knoten mit $s_h = s_v$ (oft als «hydrostatisch» bezeichnet, jedoch ist $s_1 = 0$)
- Ankerplatten sind unüblich, zur Verankerung grosser Zugkräfte manchmal aber unabdingbar.
- Alternative (i): Steckbügel resp. "Haarnadeln" anzuordnen, siehe Bilder unten. Lokales Spannungsfeld → Überdeckungsбетon nur durch Zugfestigkeit Beton aktivierbar.
- Alternative (ii): Bewehrungsstäbe mit Verankerungsköpfen (zum Beispiel «Ancofix»): Tellerdurchmesser $\approx 3\varnothing$, experimentell verifizierte Verankerung auf sehr kurzer Länge ($< 10\varnothing$) → Achtung, Spreizkräfte beachten!



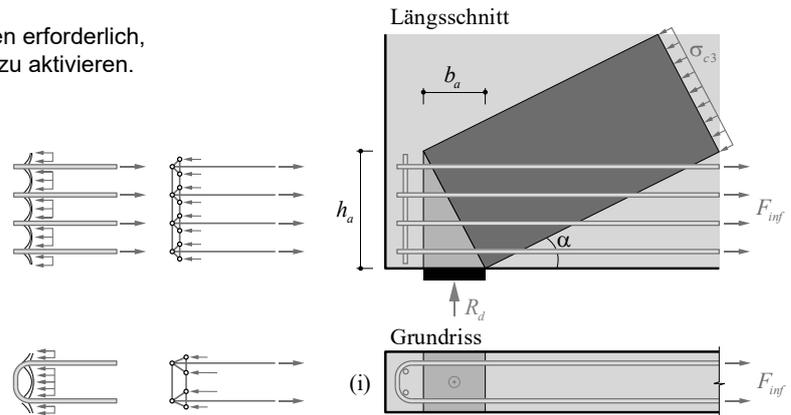
Knotenbereiche – Konstruktive Durchbildung

Bei der konstruktiven Durchbildung sind die Knotenbereiche mit besonderer Sorgfalt zu behandeln. Ankerplatten sind in der Praxis unüblich; zur einwandfreien Verankerung grosser Zugkräfte bilden sie jedoch manchmal die einzige Möglichkeit. Üblicher sind die dargestellten konstruktiven Ausbildungen der Verankerung der Bewehrung mit (i) liegenden Steckbügeln hinter dem Knotenbereich eines Endauflagers, welche auch als «Haarnadel»-Bewehrung bezeichnet wird oder (ii) mit Tellerankerungen (Bewehrungsstäbe mit Verankerungsköpfen).

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)

- Streng genommen sind Betonzugspannungen erforderlich, beispielsweise um den Überdeckungsbeton zu aktivieren.

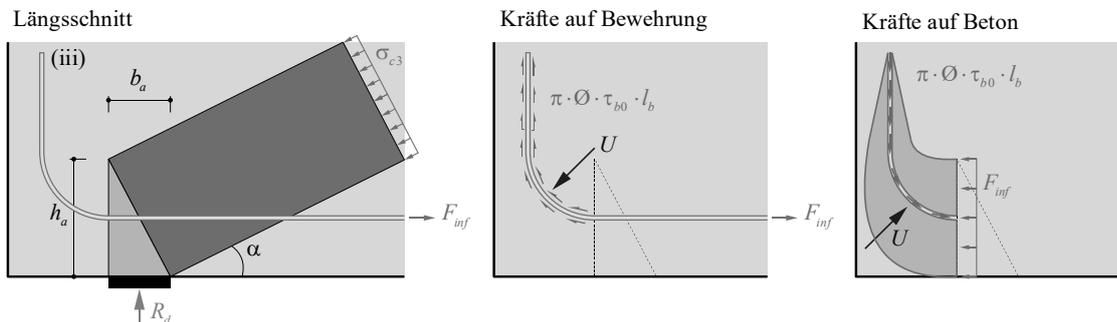


Knotenbereiche – Konstruktive Durchbildung

Die Übertragung der am vertikalen Knotenrand wirkenden verteilten Druckspannungen auf die aus Einzelstäben mit Endschlaufen bestehende Bewehrung wird von Druckschalen gewährleistet, die sich im Beton ausbilden und auf die Schlaufenabbiegungen abstützen. Diese Tragwirkung lässt sich mit Spannungsfeldern oder entsprechenden Fachwerkmodellen nachbilden, siehe Abbildungen auf der rechten Seite. Man sieht, dass Betonzugspannungen erforderlich sind, um die Übertragung der Kräfte vom Beton auf die Bewehrung zu gewährleisten. Die Anordnung von Dübelstäben an den Abbiegestellen unterstützt die Übertragung und gleichmässige Verteilung der Betondruckkraft auf die Bewehrung.

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)



- Lösung (iii): Aufgebogene Bewehrung kann aktiviert werden, wenn genügend Überstand vorhanden ist, um diese hinter dem Auflager zu verankern («Druckbanane» im Beton mit Ablenkraft U).



Knotenbereiche – Konstruktive Durchbildung

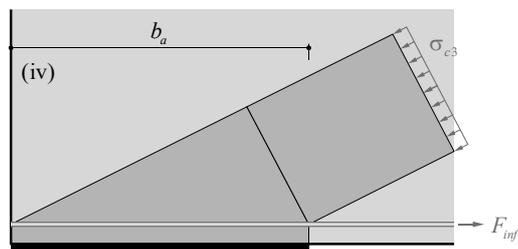
Eine oft verwendete Alternative (iii) besteht in der vertikalen Abbiegung der Biegebewehrung mit genügender Verankerungslänge, so dass hinter dem Auflager insgesamt die benötigte Zugkraft (gem. Spannungsfeld/ Fachwerkmodell, mindestens aber 25% der im Feld erforderlichen Gurtbewehrung) verankert ist (Ziff. 5.5.2.5. SIA 262:2013).

Querkraft – Scheiben und Diskontinuitätsbereiche

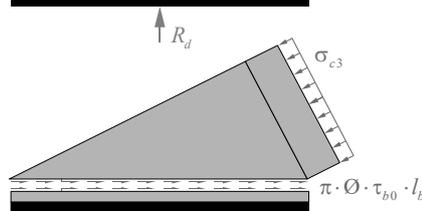
Knotenbereiche (siehe [4] p. 64)

- Alternative (iv): Spannungsfelder mit kontinuierlichem Aufbau der Zugkraft durch Verbundschubspannungen.
- Benötigt grössere Knotenabmessungen (Verankerungslänge = Knotenbreite, trotz günstigem Querdruck lang).

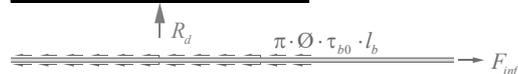
Längsschnitt



Kräfte auf Beton



Kräfte auf Bewehrung



Knotenbereiche – Konstruktive Durchbildung

Alternative (iv): Spannungsfelder mit kontinuierlichem Aufbau der Zugkraft durch Verbundschubspannungen.

- Benötigt grössere Knotenabmessungen (Verankerungslänge = Knotenbreite, trotz günstigem Querdruck lang)

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Hinweise für die Anwendung

- Die Beachtung folgender Grundsätze führt zu einer wirtschaftlichen Bemessung:
 - Einfachheit (statisch bestimmte Fachwerke, keine kreuzenden Stäbe etc.)
 - Steifigkeit (kurze Zugstreben) (folgt aus Minimum der Komplementärenergie)
 - Effizienz (Mindestbewehrung ausnützen)
- Aus praktischen Gründen sollte in der Regel eine zu den Rändern parallele Bewehrung gewählt werden. Somit sind Zugstreben üblicherweise horizontal / vertikal anzuordnen, wogegen Druckstäbe grundsätzlich in jeder Richtung möglich sind.
- Die effektive Betondruckfestigkeit ist vorsichtig anzusetzen ($f_c = k_c \cdot f_{cd}$, SIA 262, 4.2.1.7 → Betonabmessungen).
- In jedem Fall sollte eine ausreichende Mindestbewehrung angeordnet werden ($\rho = 0.1 \dots 0.3\%$, je nach Anwendung).
- Weist man den einzelnen Streben Steifigkeiten zu, können auch Verformungen mit Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern abgeschätzt werden (mit kontinuierlichen Spannungsfeldern sogar wirklichkeitsnah).
- Das Vorgehen bei der Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern ist iterativ:
 1. Ermittlung der auf das betrachtete Bauteil wirkenden Kräfte (Reaktionen resp. auf Schnittkörper wirkende Kräfte) und, wo sinnvoll, Unterteilung in Teilsysteme (Querkraftnullpunkte)
 2. Erstes Fachwerk mit grober Geometrie (aufgrund geschätzter Abmessungen der Druckstreben etc.) annehmen
 3. Ungefähre Kräfte bestimmen, darauf basierend Abmessungen (und wo nötig Fachwerkgeometrie) anpassen
 4. Sukzessive verbessern, u.a. durch Verfeinerung mit Spannungsfeldern unter Ausnutzung der Mindestbewehrung

Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder – Ergänzungen (I)

- Bei der Verfeinerung von Fachwerkmodellen zu Spannungsfeldern sind meist verschiedene Lösungen möglich. Umgekehrt kann jedem Spannungsfeld genau ein Fachwerkmodell (Stabwerkmodell) zugeordnet werden, dessen Stäbe den Resultierenden der einzelnen Teile des Spannungsfeldes entsprechen.
- Vollständige Spannungsfelder werden selten benötigt. Meist ist es ausreichend, kritische Bereiche und wichtige Details eines Tragwerks mit Fachwerkmodellen detailliert zu untersuchen (übrige Bereiche: Querschnittsnachweise oder einfache Stabwerkmodelle).
- Die Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern ist Erfahrungs- und Übungssache. Bei fehlender Erfahrung kann man sich an «Musterlösungen» für Standardprobleme (immer wieder ähnlich auftretende Fälle) orientieren, siehe Folien 54 - 58.

In [1] finden sich weitere Beispiele von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern; zusätzliche Inspirationsquellen:

- Muttoni, A., Schwartz, J., Thürlimann, B., "Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern", Birkhäuser, Basel, 1997
- Schlaich, J., Schäfer, K., "Konstruieren im Stahlbetonbau", Beton-Kalender 2001, pp.311-492 (→ zahlreiche Beispiele von Stabwerkmodellen, als Anhaltspunkt für globalen Kraftfluss gut geeignet, für Kontrolle kritischer Abmessungen nur bedingt, da nicht konsequent auf unterem Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie aufgebaut).

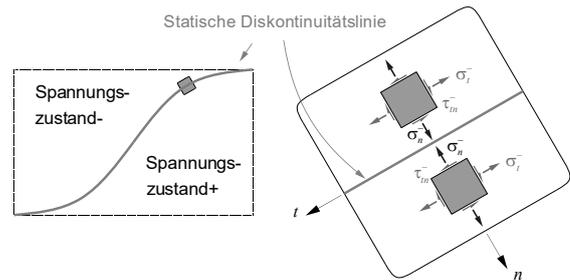
Querkraft – Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder – Ergänzungen (II)

- In klassischen (von Hand entwickelten) Spannungsfeldern sind die Druckspannungen im Beton an vielen Stellen unstetig (unterschiedlich grosse Druckspannungen in angrenzenden Parallelfeldern, spannungsfreier Beton unmittelbar neben den druckbeanspruchten Elementen des Spannungsfelds, etc.).
- Es handelt sich damit um diskontinuierliche Spannungsfelder.
- Damit Gleichgewicht erfüllt ist, müssen an einer statischen Diskontinuitätslinie (Grenze zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichem Spannungszustand) allgemein folgende Bedingungen erfüllt sein:

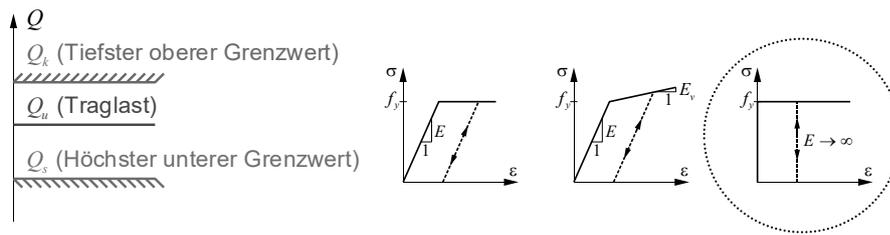
→ Normalspannungen parallel zur statischen Diskontinuitätslinie dürfen unstetig sein (Sprung $\sigma_t^- \neq \sigma_t^+$ ist zulässig)

→ Normalspannungen senkrecht zur statischen Diskontinuitätslinie und Schubspannungen müssen kontinuierlich sein ($\sigma_n^- = \sigma_n^+$, $\tau_{nt}^- = \tau_{nt}^+$ muss erfüllt sein)



Querkraft – Bruchmechanismen

Grundlagen



- Unterer (statischer) Grenzwertsatz: Jede Belastung Q_s , zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fließbedingungen nirgends verletzt, liegt nicht höher als die Traglast Q_u . (statisch zulässig: Gleichgewichtsbedingungen und stat. Randbedingungen erfüllt)
- Oberer (kinematischer) Grenzwertsatz: Jede Belastung Q_k , welche aus der Gleichsetzung der Arbeit der äusseren Kräfte bei einem kinematisch zulässigen Verformungszustand mit der zugehörigen Dissipationsarbeit resultiert, liegt nicht tiefer als die Traglast Q_u . (kinematisch zulässig: kinemat. Relationen und kinemat. Randbedingungen erfüllt)
- Verträglichkeitssatz: Jede Belastung Q_u , zu der eine vollständige Lösung angegeben werden kann, ist eine Traglast. (vollständige Lösung: stat. zulässiger Spannungszustand, der die Fließbedingungen nirgends verletzt, und mit diesem nach der Theorie des plastischen Potentials verträglicher, kinematisch zulässiger Verformungszustand)

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder stellen eine direkte Anwendung des unteren (statischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie dar. Sie führen deshalb zu einer sicheren Bemessung beziehungsweise zu einer auf der sicheren Seite liegenden Abschätzung der Traglast bestehender Tragwerke.

Durch die Betrachtung von Bruchmechanismen, welche einer Anwendung des oberen (kinematischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie entsprechen, können obere Grenzwerte der Traglast ermittelt werden. Damit können die Tragsicherheitsreserven einer anhand eines Spannungsfelds durchgeführten Bemessung abgeschätzt werden. Zudem können mit Bruchmechanismen Bewehrungsgehalte, Betonabmessungen und wichtige konstruktive Details selbst in komplizierten Fällen mit relativ geringem rechnerischem Aufwand überprüft werden.

Nachfolgend werden die Grundlagen für die Untersuchung von Bruchmechanismen für Scheiben und Träger behandelt und an einzelnen Beispielen illustriert. Weiterführende Angaben siehe Advanced Structural Concrete.

Querkraft – Bruchmechanismen

Bruchmechanismen für Scheiben und Träger (oberer Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie)

- Anwendung in der Praxis vor allem für die Beurteilung der Tragsicherheit bestehender Bauwerke und die Überprüfung von (zum Beispiel) mit FE-Berechnungen ermittelten Bewehrungslayouts.
- Die Entwicklung eines statisch zulässigen Spannungszustandes ist in solchen Fällen aufwändig (Flie遥bedingungen durch bestehende Konstruktion und Bewehrung gegeben). Mit Bruchmechanismen können wichtige Details und Abmessungen dagegen selbst in komplizierten Fällen mit relativ geringem rechnerischem Aufwand überprüft werden.

Vorgehen

- Annahme kinematisch verträglicher Bruchmechanismen
- Berechnung der zugehörigen Arbeit W der äusseren Kräfte sowie der Dissipationsarbeit D (Dissipation in beim Kollaps flie遥ender Bewehrung und im Beton entlang Diskontinuitäten)
- Ermittlung der Kollapslast aus der Bedingung $W(Q) = D \rightarrow Q_u \leq Q$ für jeden Mechanismus
- Massgebend ist der Mechanismus mit dem tiefsten Verhältnis D/W (= kleinste Kollapslast)
- Dissipation in flie遥ender Bewehrung kann sehr einfach berechnet werden; Dissipation im Beton (Diskontinuitäten) ist etwas aufwendiger zu ermitteln.

Bei der Anwendung des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie wird für einen gewählten Bruchmechanismus die Arbeit der äusseren Kräfte W mit der entlang der Gleitlinien (auch Bruchlinien genannt) dissipierten Arbeit D verglichen.

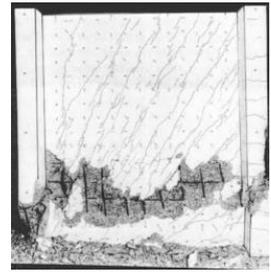
Letztere setzt sich zusammen aus Anteilen infolge Flie遥en der Bewehrung und Anteilen infolge plastischer Verzerrungen im Beton; die Dissipation in der flie遥enden Bewehrung lässt sich sehr einfach berechnen, während die Dissipation im Beton einer etwas eingehenderen theoretischen Betrachtung bedarf. Der massgebende Mechanismus ist derjenige, welcher das tiefste Verhältnis D/W beziehungsweise den tiefsten oberen Grenzwert für die Traglast ergibt.

Querkraft – Bruchmechanismen



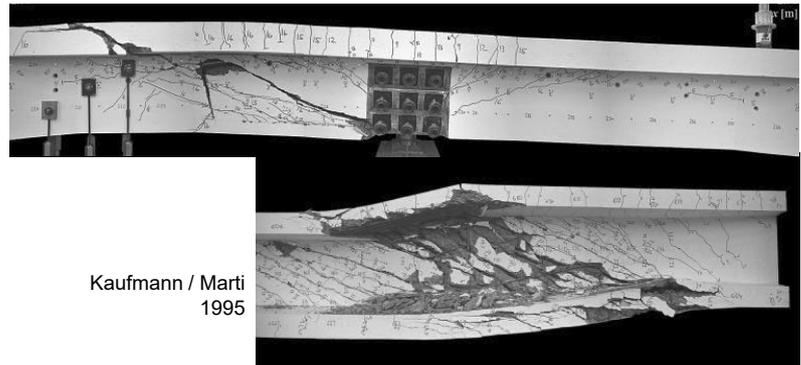
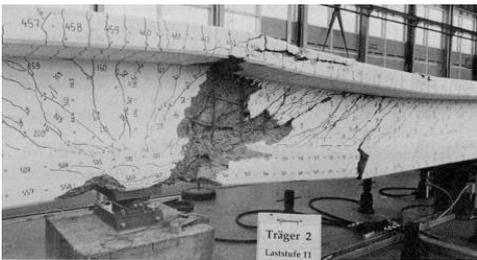
Bachmann / Thürlimann
1965

Maier / Thürlimann
1985



Stoffel / Marti
1995

Sigrist / Marti
1992



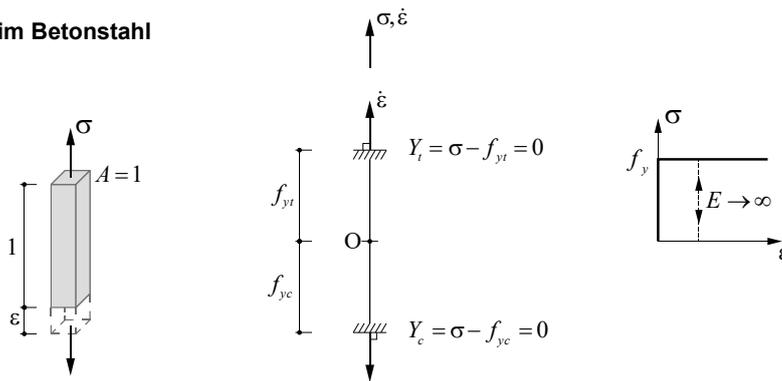
Kaufmann / Marti
1995

Die bei der Anwendung des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie untersuchten Bruchmechanismen entsprechen nicht direkt tatsächlich auftretenden Versagensmechanismen. Vielmehr handelt es sich um abstrahierte Bruchmechanismen, welche die Voraussetzungen der Traglastverfahren der Plastizitätstheorie erfüllen.

Dennoch stimmen die massgebenden Bruchmechanismen (welche den tiefsten oberen Grenzwert nach Plastizitätstheorie ergeben) in vielen Fällen gut mit in Versuchen beobachteten Versagensmechanismen überein (Abbildung: Beispiele grossmassstäblicher Versuche an der ETH Zürich, durchgeführt zur Validierung konsistenter mechanischer Modelle). Dies zeigt, dass die Voraussetzungen der Traglastverfahren das wirkliche Verhalten gut erfassen.

Querkraft – Bruchmechanismen

Dissipation im Betonstahl



Allgemeine Dissipation pro Volumeneinheit: $dD_s = \sigma_s \cdot \dot{\epsilon}_s$

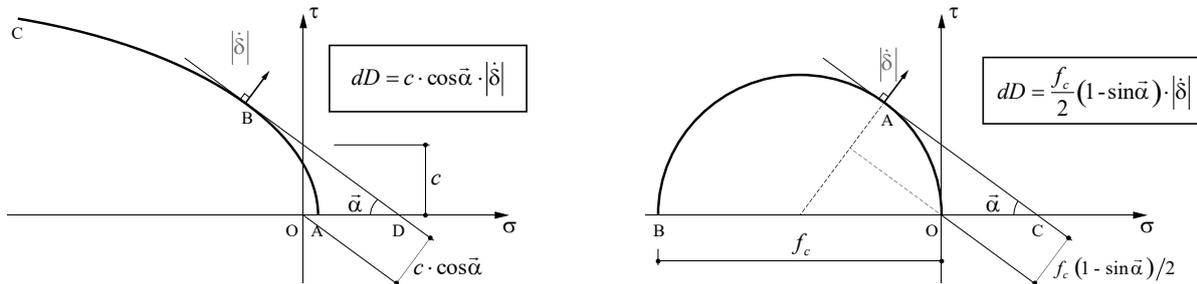
d.h. mit starr – ideal plastischem Materialverhalten beträgt die Dissipationsarbeit in einem Stab mit Querschnittfläche A , der sich um δ verlängert:

$$D_s = A_s \cdot f_{sd} \cdot \dot{\delta}$$

Die Dissipation in der Bewehrung (schlaaffe Bewehrung und Vorspannung) kann – unter der Annahme, dass diese nur Kräfte in ihrer Richtung übernimmt – sehr einfach aus dem Produkt $A_s \cdot f_s \cdot \Delta L_s$ («Fliezzugkraft·Verlängerung») ermittelt werden. Da nicht Verschiebungen, sondern plastische Verschiebungsinkremente (unter konstanter Kraft) betrachtet werden, ist – im Gegensatz zur linear elastischen Formänderungsenergie – kein Faktor $\frac{1}{2}$ einzusetzen.

Querkraft – Bruchmechanismen

Gleitlinien und Dissipation in Beton



- Für eine allgemeine Mohrsche Hüllkurve beträgt die Dissipation pro Einheitsfläche der Diskontinuität, bezogen auf eine Einheitsverschiebung $dD = c \cdot \cos \bar{\alpha}$
- Für die quadratische Fließbedingung folgt $dD = \frac{f_c}{2} \cdot (1 - \sin \bar{\alpha})$
- Für $\bar{\alpha} = \pi/2$ resultiert keine Dissipation im Beton: sogenannter Kollapsriss

Die Ermittlung der Dissipation im Beton kann anhand der Untersuchung einer Gleitlinie (Diskontinuität im Verschiebungsfeld) ermittelt werden, wobei angenommen wird, dass der Beton neben den Gleitlinien starr bleibt. Dies wird in der Vorlesung Advanced Structural Concrete näher untersucht.

Einfacher kann die Dissipation im Beton für eine mittels einer Mohrschen Hüllkurve beschreibbare Bruchbedingung ermittelt werden wenn man beachtet, dass bei verträglichen Mechanismen (nur solche kommen für eine vollständige Lösung in Frage) die Neigung α des Sprungvektors zur Gleitlinie dem Reibungswinkel φ entsprechen muss, $\alpha = \varphi$ (siehe Abbildung). Dies aufgrund der vorausgesetzten Orthogonalität der plastischen Verzerrungsinkremente zum aplastischen Bereich.

Die Dissipation pro Einheitsfläche einer Gleitlinie, welche eine Einheitsverschiebung (Relativverschiebung des Betrags 1) im Winkel α zu ihrer Richtung erfährt, beträgt somit allgemein:

$$dD = \frac{f_c}{2} (1 - \sin \bar{\alpha}) \cdot |\dot{\delta}|$$

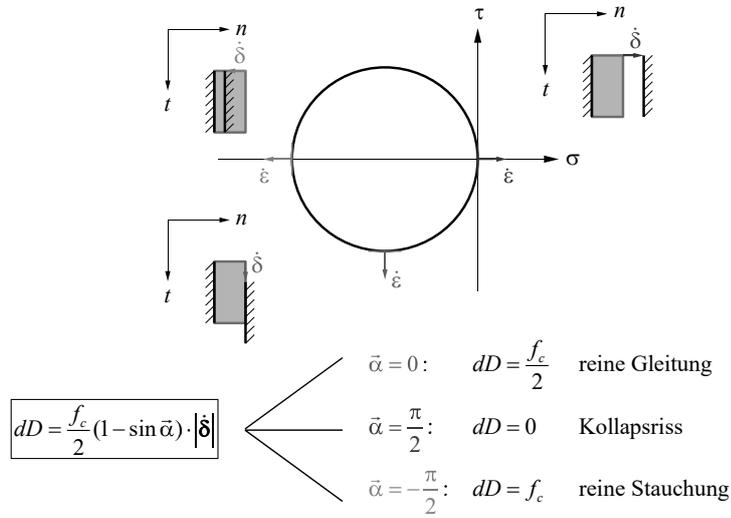
Die Dissipation in einer Gleitlinie resultiert durch Multiplikation von dD mit der Fläche der Gleitlinie (d.h. «Gleitlinienlänge · Scheibendicke = $l \cdot b_w$ »).

Ergänzende Bemerkung

- Wurde dD für eine Einheitsverschiebung berechnet, ist die Dissipation in der Gleitlinie noch mit dem Betrag der Relativverschiebung im betrachteten Mechanismus zu multiplizieren.

Querkraft – Bruchmechanismen

Gleitlinien und Dissipation in Beton



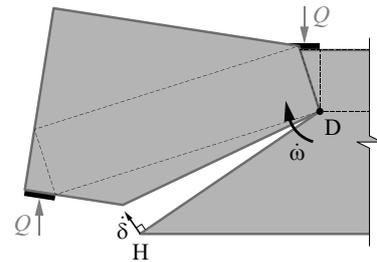
Die Abbildung veranschaulicht die Dissipation im Beton für spezielle Verschiebungsrichtungen.

Querkraft – Bruchmechanismen

Scheibe ohne Vertikalbewehrung unter Einzellast

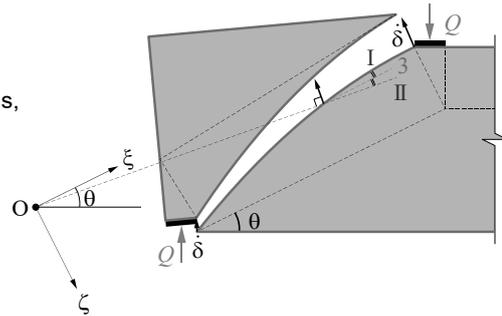
Biegemechanismus

- Kollapsriss D-H (Verschiebung senkrecht zur Gleitlinie, $\bar{\alpha} = \pi/2$, keine Dissipation im Beton)
- Traglast ist unabhängig von der Neigung des Kollapsrisses und identisch mit derjenigen des Translationsmechanismus und des Fachwerkmodells (vollständige Lösung)
- Bestätigt, dass Längsbewehrung (ohne Bügel) nicht abgestuft werden kann



Rotationsmechanismus

- Gleitlinie: Hyperbel im Koordinatensystem (ξ, ζ)
- Degeneriert für grossen Abstand $O \rightarrow \infty$ zu Translationsmechanismus, gleiche Traglast



Die Abbildung zeigt zwei mögliche Bruchmechanismen für eine Scheibe ohne Bügelbewehrung unter Einzellast, die den gleichen Wert der Traglast liefern.

Beim in der oberen Abbildung dargestellten Rotationsmechanismus handelt es sich um einen sogenannten *Kollapsrissmechanismus*, bei welchem sich die Gleitlinie DH senkrecht öffnet (Verschiebungsrichtung $\bar{\alpha} = \pi/2$), so dass in dieser Gleitlinie (= Kollapsriss) keine Dissipation in der Gleitlinie resultiert. Dissipation im Beton resultiert bei diesem Mechanismus dagegen in der Druckzone, welche gestaucht wird (Gleitlinie mit Verschiebungsrichtung ($\bar{\alpha} = -\pi/2$)).

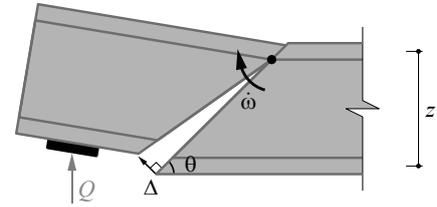
Beim in der unteren Abbildung dargestellten Rotationsmechanismus ist die Gleitlinie für den massgebenden Mechanismus eine Hyperbel ($\xi \cdot \zeta = \text{const.}$). Dies, da bei der vollständigen Lösung die Richtung der kleinsten Hauptverzerrung (also die Winkelhalbierende zwischen der Richtung der Gleitlinie und der Normalen zum Verschiebungsvektor) in jedem Punkt der Gleitlinie mit der Hauptdruckspannungsrichtung zusammenfallen muss. Daraus kann die Richtung der Gleitlinie in jedem Punkt aus der Beziehung $d\xi/d\zeta = -\xi/\zeta$ bestimmt werden, mit der Lösung $\xi \cdot \zeta = \text{const.}$

Querkraft – Bruchmechanismen

Kollapsrissmechanismen in Scheiben mit horizontaler und vertikaler Bewehrung

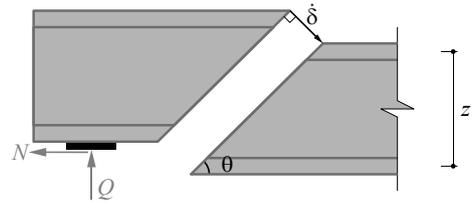
Rotationsmechanismus (Biegeschubbruch)

- Kollapsriss (Verschiebung senkrecht zur Gleitlinie, $\bar{\alpha} = \pi/2$, keine Dissipation im Beton)
- Dissipation in Längsbewehrung und Bügelbewehrung (Relativverschiebung in Bewehrungsrichtung · Fließzugkraft)
- Vollständige Lösungen: $\beta =$ Druckfeldneigung
- Massgebende Mechanismen: Kollapsrisse unmittelbar neben Bügeln, Abstufungen der Längsbewehrung oder Querschnittsprüngen
- Senkrechter Kollapsriss: «Biegemechanismus»



Translationsmechanismus

- Selten massgebend, möglich bei Zugnormalkraft (N leistet Arbeit)



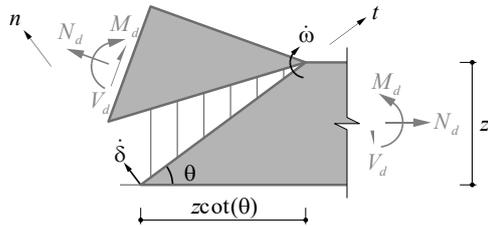
Die Abbildung zeigt zwei mögliche Kollapsrissmechanismen (Bruchmechanismen ohne Dissipation in den Gleitlinien, da sich diese senkrecht öffnen) für Scheiben mit Längs- und Bügelbewehrung. Diese werden massgebend, wenn ein Träger «unterbewehrt» ist, d.h. das Versagen tritt nicht durch Bruch des (Steg-) Betons ein.

Obere Grenzwerte für die Traglast können in Abhängigkeit der Neigung β der Kollapsrisse ermittelt werden. Bei vollständigen Lösungen stimmt der optimale Winkel β mit der Neigung des entsprechenden parallelen Druckbandes im Spannungsfeld überein. Die massgebenden Mechanismen ergeben sich allgemein, wenn die Kollapsrisse derart gewählt werden, dass ihre Enden bei einem Bügel resp. einer Abstufung der Bügelbewehrung oder aber an Stellen, wo die Längsbewehrung abgestuft ist, zu liegen kommen.

Herkömmliche Biegebruchmechanismen (die bei Biegenachweisen an einem Querschnitt üblicherweise betrachtet werden) sind nichts anderes als Kollapsrissmechanismen mit vertikaler Gleitlinie.

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Biegeschubbruch



- Längsbewehrung A_s
- Bügelbewehrung a_{sw} (gleichmässig verteilt)
- $\bar{\alpha} = \pi/2$: $D_c = 0$, keine Dissipation im Beton

- Arbeit der Schnittgrössen:

$$W = V \cdot z \cdot \cot \theta \cdot \dot{\omega} + M \cdot \dot{\omega} + N \cdot \frac{z}{2} \cdot \dot{\omega} = \dot{\omega} \cdot \left[M + N \cdot \frac{z}{2} + Vz \cot \theta \right]$$

- Dissipationsarbeit:

$$D = D_s + D_c = A_s \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \dot{\omega} + a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cot \theta \cdot \frac{\dot{\omega} \cdot z \cot \theta}{2} = \dot{\omega} \cdot \left[A_s f_{sd} z + a_{sw} f_{sd} \frac{(z \cot \theta)^2}{2} \right]$$

Auf dieser und der folgenden Folie wird ein Biegeschubbruchmechanismus untersucht. Dabei werden Druck- und Zuggurt als Stringer idealisiert.

Es resultieren die gleichen Beziehungen für die Traglast in Funktion der Bügelbewehrung resp. der Gurtkräfte nach dem unteren Grenzwert der Plastizitätstheorie (Spannungsfeld).

Es handelt sich somit bei $V_{Rd,s}$ und den Beziehungen für die Gurtkräfte um vollständige Lösungen (bei Versagen durch Fließen der Gurt- und Bügelbewehrung).

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Biegeschubbruch

- Gleichsetzen:
$$M = A_s f_{sd} z + a_{sw} f_{sd} z^2 \frac{\cot^2 \theta}{2} - N \frac{z}{2} - Vz \cot \theta$$

$$\frac{dM}{d \cot \theta} = a_{sw} f_{sd} z^2 \cot \theta - Vz = 0 \rightarrow \boxed{V = a_{sw} f_{sd} z \cot \theta}$$

resp. $\cot \theta = \frac{V}{z a_{sw} f_{sd}}$

- Rückeinsetzen:
$$\frac{M}{z} + \frac{N}{2} + V \cot \theta = A_s f_{sd} + \underbrace{a_{sw} f_{sd} z \frac{\cot^2 \theta}{2}}_{\frac{V}{2} \cot \theta}$$

$$\rightarrow \boxed{A_s f_{sd} = \frac{M}{z} + \frac{N}{2} + \frac{V \cot \theta}{2}}$$

Gleichungen entsprechen den Beziehungen aus dem Spannungsfeld
 Unterer und oberer Grenzwert fallen zusammen → vollständige Lösung!

Bruchmechanismen

Stegdruckbruchmechanismen

Stegdruckbruch mit diskreter Bruchlinie

- bei grossen Längsbewehrungsgehalten massgebend (Bruchverschiebung vertikal, d.h. keine Dissipation in Längsbewehrung)
- Beton versagt auf Druck, Bügelbewehrung fliesst, Längsbewehrung bleibt elastisch
- Obere Grenzwerte für die Traglast in Abhängigkeit der Neigung $\bar{\alpha}$ der Bruchlinie:

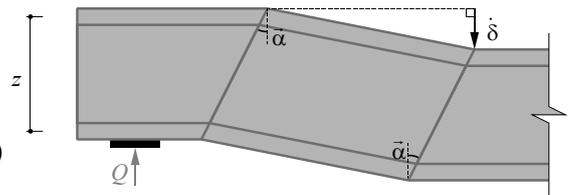
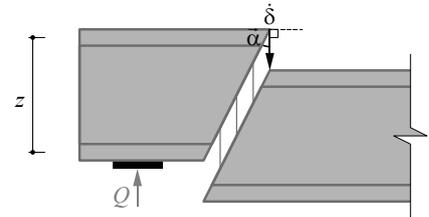
τ = nominelle Schubspannung

ω_v = mechanischer Bügelbewehrungsgehalt

$$\omega_v = a_{sw} f_s / (b_w f_c)$$

Stegdruckbruch mit Bruchzone

- In Schubversuchen oft beobachtet, kann als Serie von Bruchlinieninterpretiert werden (gleiche Traglast)
- Berücksichtigung der Dissipation in den Flanschen (plast. Gelenke) möglich; bei diskreter Gleitlinie wäre Abscheren nötig.



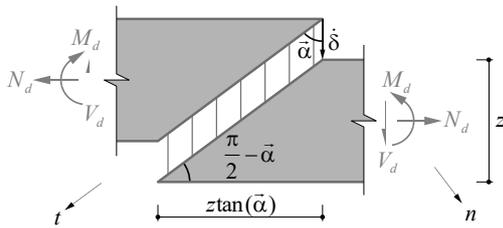
Für grosse Längsbewehrungsgehalte tritt der Bruch durch Stabdruckbruchversagen ein, das heisst durch Versagen des Betons auf Druck bei gleichzeitigem Fließen der Bügelbewehrung, ohne dass die Längsbewehrung ihre Fließgrenze erreicht. Entsprechende Bruchmechanismen sind oben dargestellt.

Da die Längsbewehrung nicht fließt, erfolgt die Bruchverschiebung in vertikaler Richtung.

In Versuchen wird meist ein Stabdruckbruch mit Bruchzone (untere Abbildung) beobachtet. Dieser liefert den gleichen oberen Grenzwert wie der oben dargestellte Mechanismus.

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Stegdruckbruch



- Bügelbewehrung a_{sw} (gleichmässig verteilt)
- $\bar{\alpha}$ variabel: Dissipation im Beton von $\bar{\alpha}$ abhängig.

- Arbeit der Schnittgrössen: $W = V \cdot \dot{\delta}$

- Dissipationsarbeit: $D = D_s + D_c = \dot{\delta} \cdot a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \tan \bar{\alpha} + \dot{\delta} \cdot \frac{b_w \cdot z}{\cos \bar{\alpha}} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \cdot (1 - \sin \bar{\alpha})$

Auf dieser und der folgenden Folie wird ein Stegdruckbruchmechanismus untersucht.

Es resultieren die gleichen Beziehungen für die Traglast in Funktion der Betondruckfestigkeit resp. der Bügelbewehrung wie nach dem unteren Grenzwert der Plastizitätstheorie (Spannungsfeld).

Es handelt sich somit bei $V_{Rd,s}$ und $V_{Rd,c}$ den Beziehungen für die Gurtkräfte um vollständige Lösungen (bei Versagen durch Fließen der Bügelbewehrung und Stauchung des Stegbetons).

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Stegdruckbruch

- Gleichsetzen:

$$V = a_{sw} f_{sd} z \tan \bar{\alpha} + b_w z \frac{f_{cd}}{2} \frac{1 - \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha}}$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{a_{sw} f_{sd} z}{\cos^2 \bar{\alpha}} - b_w z \frac{f_{cd}}{2} \frac{1}{\sin \bar{\alpha} + 1} = 0 \quad \rightarrow \quad \sin \bar{\alpha} = 1 - 2\omega_w \quad \text{mit} \quad \omega_w = \frac{a_{sd} f_{sd}}{b_w f_{cd}}$$

- Rückeinsetzen:

$$V = \omega_w b_w f_{cd} z \tan \bar{\alpha} + b_w f_{cd} z \frac{\omega_w}{\cos \bar{\alpha}} = b_w f_{cd} z \omega_w \left(\tan \bar{\alpha} + \frac{1}{\cos \bar{\alpha}} \right)$$

$$\underbrace{\left(\tan \bar{\alpha} + \frac{1}{\cos \bar{\alpha}} \right)}_{\frac{1}{\sqrt{\omega_w - \omega_w^2}}}$$

$$= b_w z f_{cd} \cdot \sqrt{\omega_w - \omega_w^2}$$

Querkraft – Bruchmechanismen

Beispiel Stegdruckbruch

- Vergleich mit unterem Grenzwertsatz:

$$\begin{aligned}V_{Rd,s} &= a_{sw} f_{sd} z \cot \alpha & V_{Rd,c} &= f_{cd} b_w z \sin \alpha \cos \alpha \\V_{Rd,s} &= V_{Rd,c} & \rightarrow & \frac{a_{sw} f_{sd}}{b_w f_{cd}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cot \alpha} = \sin^2 \alpha \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\omega_w} \\V_{Rd,s} &= V_{Rd,c} = f_{cd} b_w z \cdot \sqrt{\omega_w} \cdot \underbrace{\cos(\arcsin(\sqrt{\omega_w}))}_{\sqrt{1-\omega_w}} \\ & & & \boxed{= b_w z f_{cd} \cdot \sqrt{\omega_w - \omega_w^2}}\end{aligned}$$

Unterer und oberer Grenzwert fallen zusammen → vollständige Lösung!

Querkraft – Zusammenfassung

1. Das Tragverhalten von Trägern wird meist von den Kräften und Verformungen infolge Biegemomenten dominiert. Bei gedrungenen und stark profilierten Trägern können die Querkkräfte und die zugehörigen Verformungen jedoch relativ gross sein.
2. In der Regel ist zur Querkraftabtragung eine zur Trägerachse senkrechte oder geneigte Bügelbewehrung sowie eine – im Vergleich zu der zur Aufnahme der Biegemomente und Normalkräfte erforderlichen Bewehrung – erhöhte Längsbewehrung anzuordnen.
3. Der Anteil der zur Querkraftabtragung erforderlichen Bewehrung an der gesamten Bewehrung ist relativ klein.
4. Das Tragverhalten von bügelbewehrten Balken und Platten im gerissenen Zustand wird zweckmässigerweise mit Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern untersucht.
5. Fachwerkmodelle sind diskretisierte Spannungsfelder. Bei ihrer iterativen Entwicklung ist das zugeordnete Spannungsfeld (bestehend aus Zuggliedern, Knoten, Druckstreben, Fächern und Druckfeldern) zu berücksichtigen, um strenge Lösungen nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie zu gewährleisten (sichere Bemessung gewährleisten).

Querkraft – Zusammenfassung

6. In einfachen Fällen ist eine auf der Fachwerkmodellvorstellung beruhende Querschnittsbetrachtung möglich. Dabei kann die infolge Querkraft erforderliche Verstärkung der Biegebewehrung mit einer Verschiebung der M_d/z -Linie um das sogenannte Versatzmass $z \cdot \cot \alpha / 2$ ermittelt werden.
7. Mit geneigten Bügeln kann die Gefahr eines Stegdruckbruchs in speziellen Fällen deutlich reduziert werden. Allerdings sind die baupraktischen Schwierigkeiten bei der Verwendung geneigter Bügel nicht zu unterschätzen.
8. Geneigte Zug- bzw. Druckgurte sowie Spannglieder können einen wesentlichen Anteil der Querkräfte übertragen. Fachwerkmodelle oder Spannungsfelder erlauben eine sichere Erfassung der entsprechenden Tragwirkungen, siehe Vorspannung / Stahlbeton II.
9. Mit der Bemessung für Querkraft sind duktile Biegebrüche oder Biegeschubbrüche sicherzustellen; spröde Stegzugbrüche resp. relativ spröde Stegdruckbrüche sind durch die Anordnung einer vertikalen Mindestbewehrung resp. die vorsichtige Festlegung der Stegdicke (reduzierte Betondruckfestigkeit) zu vermeiden.
10. Verformungen infolge Querkraften können aufbauend auf Fachwerkmodellvorstellungen abgeschätzt werden, siehe Scheiben / Advanced Structural Concrete.