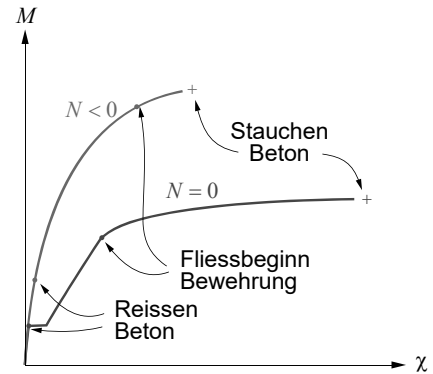


## **3.3 Biegung und Normalkraft / Druckglieder**

# Biegung und Normalkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen unter Biegung und Normalkraft

- Biegemomente in Kombination mit Normalkräften treten in Stützen, Bogentragwerken, vorgespannten Trägern etc. auf
- Normalkräfte beeinflussen den Biege- und Verformungsverhalten, d.h. das gesamte Momenten-Krümmungs-Diagramm
- Diagramm: Einfluss einer Druckkraft  $N = \text{const.} < 0$  auf das typische Verhalten kreisrunder Stützen oder Pfähle:
  - Rissmoment wird erhöht
  - Nichtlineares Verhalten schon vor Fließbeginn der Bewehrung
  - Verformungsvermögen wird reduziert
- Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens allgemein: siehe Biegung
- In der Praxis mit Hilfe von Computerprogrammen, Plausibilitätskontrolle von Hand durch Anwender!



Biegung in Kombination mit Normalkraft tritt in vielen Bauteilen auf.

Das Trag- und Verformungsverhalten kann grundsätzlich wie für reine Biegung ermittelt werden; anstelle der Beziehung «Druck = Zug» ( $N = 0$ ) tritt die Bedingung, dass die Summe der inneren Zug- und Druckkräfte (Integral der Zug- und Druckspannungen über den Querschnitt) der einwirkenden Normalkraft entsprechen muss.

Der Tragwiderstand wird am einfachsten mittels sogenannter Interaktionsdiagramme untersucht. Diese zeigen die Kombinationen von Biegemomenten und Normalkraft, unter welchen der Tragwiderstand erreicht wird.

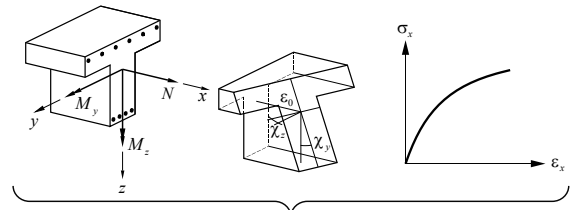
# Biegung und Normalkraft

## Allgemeines

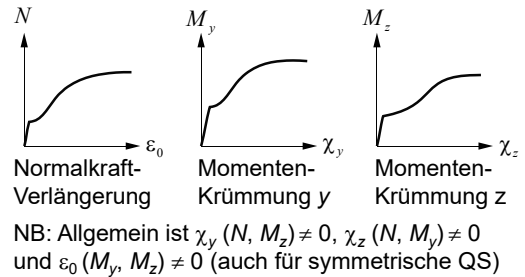
- Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ermöglicht die Ermittlung des Tragverhaltens von Stäben bei gegebenem Baustoffverhalten (Spannungs-Dehnungs-Diagramme)
- Schnittgrößen ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) folgen aus den Verformungsgrößen ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) einfach durch Integration, umgekehrt ist im allgemeinen eine Iteration erforderlich:

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{Integration}} \\ \xleftarrow{\text{Iteration}} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{matrix} \right.$$

Statische Berechnung: ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) meist auf Hauptachsen Beton-QS bezogen, bei Berücksichtigung ideeller Querschnittswerte beachten!



Ermittlung des Tragverhaltens für beliebige Querschnittsgeometrie / Baustoffe möglich:



Unter der Annahme einer linearen Verteilung der Längsdehnungen («Ebenbleiben des Querschnitts») ist der Verformungszustand («Dehnungsebene») in jedem Querschnitt durch drei Verformungsgrößen («verallgemeinerte Dehnungen») eindeutig definiert. Üblicherweise verwendet man als verallgemeinerte Dehnungen die Dehnung der Schwerachse  $\varepsilon_0$  und die Krümmungen  $\chi_y$  und  $\chi_z$ .

Ist für jede Faser des Querschnitts das Materialverhalten bekannt (Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Beton und Bewehrung), können für einen beliebigen Verzerrungszustand ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) die zugehörigen Schnittgrößen resp. Spannungsresultierenden («verallgemeinerte Spannungen») durch Integration der Spannungen über den Querschnitt ermittelt werden. Üblicherweise verwendet man als Spannungsresultierende die Normalkraft  $N$  und die auf die Schwerachse bezogenen Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$ .

Soll umgekehrt für eine gegebene Beanspruchung (Spannungsresultierende  $N$ ,  $M_y$  und  $M_z$ ) der Verzerrungszustand ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) ermittelt werden, ist ausser in einfachen Spezialfällen ein iteratives Vorgehen erforderlich.

## Ergänzende Bemerkungen

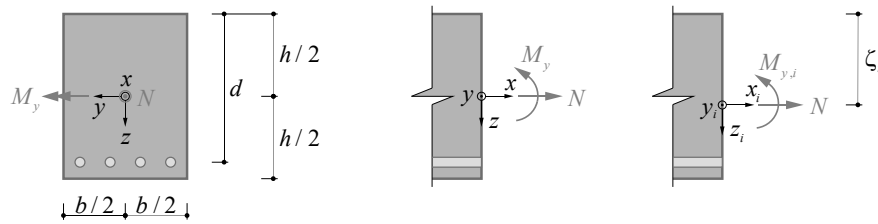
Grundsätzlich kann für die Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  resp. die Dehnung  $\varepsilon_0$  auch eine andere Bezugsachse als die Schwerachse gewählt werden. Wichtig ist, dass für Einwirkungen und Widerstand die gleiche Achse verwendet wird (besonders zu beachten bei Stabstatikprogrammen, welche die Verwendung verschiedener Bezugsachsen erlauben, beispielsweise mit sogenannten «Achspunkten»).

Als Bezugsachse wird in statischen Berechnungen meist die Schwerachse des Bruttoquerschnitts verwendet.

Die Querkraft  $V$  wird bei diesem Vorgehen nicht betrachtet (alle Spannungen sind senkrecht zum Querschnitt resp. parallel zur Stabachse). Sie kann indirekt berücksichtigt werden, indem – auf Basis der Modellvorstellung eines parallelen, geneigten Schubfelds im Steg – eine zusätzliche Normalkraft der Grösse  $V \cdot \cot \alpha$  eingeführt wird, die in Stegmitte angreift und der Resultierenden Horizontalkraft im Steg entspricht (Druckkraft im Steg muss durch Gurte aufgenommen werden, siehe «Querschnittsbetrachtung» im Kapitel Querkraft).

# Biegung und Normalkraft – Verhalten

## Momenten-Krümmungs-Diagramme: ungerissen-elastischer Zustand



- Schnittgrößen werden in der Regel auf den reinen Betonquerschnitt bezogen
- Spannungen werden am ideellen Querschnitt ermittelt

• Spannungen im Querschnitt:

$$\sigma = n \cdot \left( \frac{N}{A_i} + \frac{M_{y,i}}{I_{y,i}} \cdot z_i \right)$$

• Moment bezüglich ideellem Schwerpunkt:

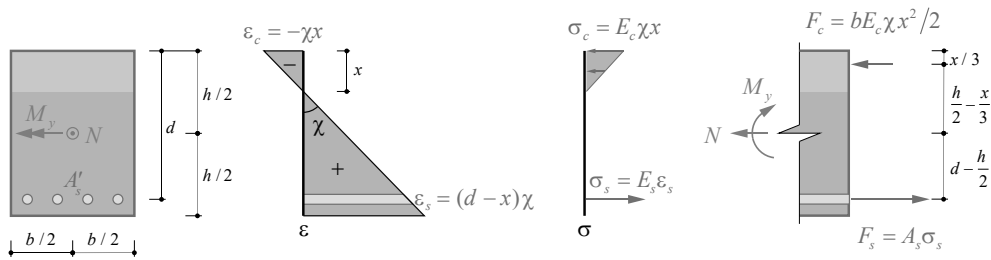
$$M_{y,i} = M_y - N \cdot \left( \zeta_i - \frac{h}{2} \right)$$

In vielen Fällen ist in der Praxis die Biegung um die vertikale Achse vernachlässigbar ( $M_z = 0$ ). Bei einfach symmetrischen Querschnitten gilt dann  $\chi_z = 0$  und es reicht aus, je zwei verallgemeinerte Spannungen ( $N$  und  $M_y$ ) und Dehnungen ( $\varepsilon_0$  und  $\chi_y$ ) zu betrachten.

In der Praxis ermittelt man Momenten-Krümmungs-Diagramme (für eine gegebene Normalkraft) heute meist mit Computerprogrammen («Querschnittsprogramme»). Auf den folgenden Seiten wird das Vorgehen bei der Ermittlung eines Momenten-Krümmungs-Diagramms «von Hand» für ein einfaches Beispiel erläutert.

# Biegung und Normalkraft – Verhalten

## Momenten-Krümmungs-Diagramme: gerissen-elastischer Zustand



$$\Sigma H = 0 \rightarrow N = A_s E_s (d-x) \chi - \frac{b E_c \chi x^2}{2}$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow M_y = A_s E_s (d-x) \left( d - \frac{h}{2} \right) \chi + \frac{b E_c \chi x^2}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right)$$

Ermittlung von  $(N, M_y)$   
aus  $(x, \chi)$  direkt

Bestimmung von  $(x, \chi)$   
aus  $(N, M_y)$  allgemein  
durch Lösen der beiden  
Gleichungen (Iteration)

Im Beispiel wird der Verzerrungszustand (d.h. die Dehnungsebene) nicht durch  $\varepsilon_0$  und  $\chi_y$  festgelegt, sondern durch die Höhe der Druckzone  $x$  und die Krümmung  $\chi (= \chi_y)$ .

Die verallgemeinerten Spannungen  $N$  und  $M_y$  können dann für gegebene Werte von  $x$  und  $\chi$  direkt ermittelt werden. Umgekehrt müssen für die Ermittlung der Dehnungsebene ( $x$  und  $\chi$ ) bei gegebener Beanspruchung ( $N$  und  $M_y$ ) die beiden Gleichungen iterativ gelöst werden.

Wählt man für die Höhe der Druckzone einen bestimmten Wert  $x_i$ , so erhält man (bei gegebener Normalkraft  $N$ ) die zugehörige Krümmung  $\chi_i$  aus der ersten Gleichung und damit aus der zweiten Gleichung das Biegemoment  $M_{y,i}$ . Damit ist ein Punkt  $i \{ \chi_i, M_{y,i} \}$  des Momenten-Krümmungs-Diagramms (für gegebene Normalkraft  $N$ ) ermittelt. Wiederholt man das Vorgehen für andere Werte von  $x_i$  (beispielsweise indem man ausgehend von  $x = h$  den Wert von  $x$  sukzessive verkleinert), kann das gesamte Momenten-Krümmungs-Diagramm ermittelt werden. Dies wird auf den folgenden Seiten mit einem numerischen Beispiel illustriert.

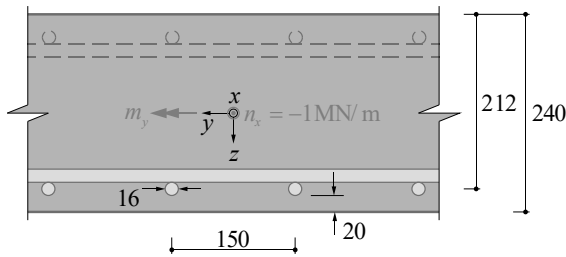
# Biegung und Normalkraft – Verhalten

## Momenten-Krümmungs-Diagramme: gerissen-elastischer Zustand

- Das  $M$ - $\chi$ -Diagramm ergibt sich für eine gegebene Normalkraft aus der Wahl von  $x$  und Lösen der zwei Gleichungen nach  $\chi$  und  $M_y$ .
- Die Dehnungsebene findet sich bei bekannten Schnittgrössen  $N$  und  $M_y$  im Allgemeinen iterativ aus den zwei Gleichungen.
- Wird für den Beton (und allenfalls auch für die Bewehrung) ein nichtlineares Verhalten vorausgesetzt, kann im Prinzip gleich vorgegangen werden.
- Die Dehnungsebene ist durch die zwei Grössen  $x$  und  $\chi$  eindeutig definiert.

## Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.15f),  $m$ - $\chi$ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Stahlbetonplatte,  $h = 240$  mm
- Beton C25/30, Betonstahl B500B
- Ideale Querschnittswerte ([1], 2.13f):
  - $a_i = 247'819$  mm<sup>2</sup>/m
  - $i_{y,i} = 1.216 \cdot 10^9$  mm<sup>4</sup>/m
  - $Ei_{y,i} = 36.5$  MNm<sup>2</sup>/m
  - $\zeta_i = 122.9$  mm

Rissmoment: 
$$\sigma_{c,inf} = n_c \cdot \left( \frac{n}{a_i} + \frac{m_{r,d}}{i_{y,i}} \cdot z_i \right) = 1 \cdot \left( -\frac{1 \cdot 10^6}{247'819} + \frac{m_{r,d}}{1.216 \cdot 10^9} \cdot (240 - 122.9) \right) = f_{ctm} = 2.6 \text{ MPa} \quad \rightarrow m_{r,d} = 68.9 \text{ kNm/m}$$

Bezogen auf die Hauptachsen des Betonquerschnitts resultiert:

$$m_{r,y} = m_{r,d} + n_x \cdot \left( \zeta_i - \frac{h}{2} \right) = 68.9 - 1 \cdot (122.9 - 120) = 66 \text{ kNm/m}$$

## Biegung und Normalkraft – Verhalten

### Beispiel ([1], 3.15f), $m$ - $\chi$ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)

*Dekompressionsmoment:* Wird die Randspannung am unteren Querschnittsrand gleich null gesetzt, erhält man das sogenannte Dekompressionsmoment:

$$\sigma_{c,inf} = 1 \cdot \left( -\frac{1 \cdot 10^6}{247'819} + \frac{m_{dec,i}}{1.216 \cdot 10^9} \cdot (240 - 122.9) \right) = 0 \rightarrow m_{dec,i} = 41.9 \text{ kNm/m}$$
$$\rightarrow m_{dec,y} = 39 \text{ kNm/m}$$

Für den gerissenen Zustand können für angenommene Werte  $x$  die zugehörigen Krümmungen  $\chi$  und Momente  $m_y$  ermittelt werden:

1.  $x$  wählen

$$2. \chi = \frac{n_x}{a_s E_s (d - x) - \frac{E_c x^2}{2}} \text{ aus } \Sigma H = 0 \rightarrow n_x = a_s E_s (d - x) \chi - \frac{E_c \chi x^2}{2}$$

$$3. m_y = a_s E_s (d - x) \left( d - \frac{h}{2} \right) \chi + \frac{E_c \chi x^2}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right)$$




## Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.15f),  $m$ - $\chi$ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)

$x$ [mm]	$\chi$ [mrad/m]	$m_y$ [kNm/m]
240	1.147	38.8
212	1.483	49.3
150	3.120	78.6
120	5.243	102.8
100	8.388	132.8
90	11.367	159.4

Dekompression ( $x = h$ )

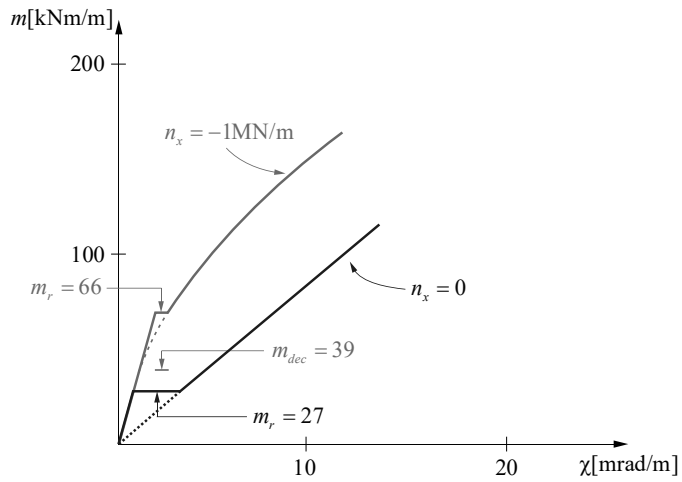
$x = d$

  $x$  gewählt

N.B.:  $a_s = 1'340.4 \text{ mm}^2/\text{m}$   
 $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$   
 $E_c = 30 \text{ kN/mm}^2$   
 $d = 212 \text{ mm}$   
 $h = 240 \text{ mm}$

## Biegung und Normalkraft – Verhalten

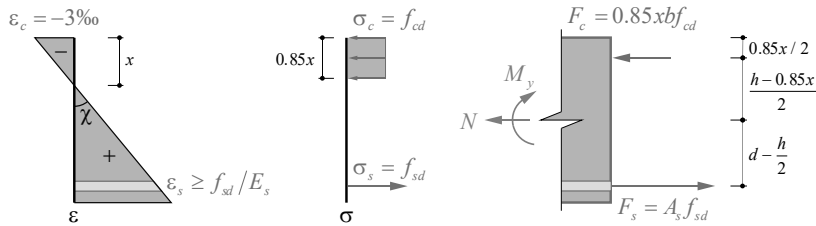
Beispiel ([1], 3.15f),  $m$ - $\chi$ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Im gerissenen Zustand ergibt sich wegen  $n_x < 0$  trotz der angenommenen linearen Elastizität von Beton und Bewehrung ein nichtlineares Verhalten.
- Das Rissmoment wird durch die Druckkraft erhöht.
- Beim Dekompressionsmoment ist die Kennlinie des gerissenen Zustands zu jener des ungerissenen tangential.

## Biegung und Normalkraft – Verhalten

### Biege­widerstand unter gleichzeitiger Wirkung einer Normalkraft



$$\Sigma H = 0 \rightarrow N + F_c - F_s = 0 \quad \rightarrow 0.85x = \frac{A_s f_{sd} - N}{b f'_{cd}}$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow M_y - F_c \cdot \left( \frac{h}{2} - 0.425x \right) - F_s \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) = 0 \quad \rightarrow M_{y,Rd} = A_s f_{sd} \left( d - \frac{h}{2} \right) + 0.85x b f'_{cd} \left( \frac{h - 0.85x}{2} \right)$$

Der Biege­widerstand kann für eine beliebige, gegebene Normalkraft grundsätzlich wie für reine Biegung ermittelt werden; anstelle der Beziehung «Druck = Zug» ( $N = 0$ ) tritt die Bedingung, dass die Summe der inneren Zug- und Druckkräfte der einwirkenden Normalkraft entsprechen muss. Die angegebenen Beziehungen gelten für den Fall, dass die Bewehrung im Bruchzustand fließt; diese Annahme muss im konkreten Fall überprüft werden. Fließt die Bewehrung nicht, ist die Ermittlung des Biege­widerstands aufwendiger.

Auf der folgenden Seite wird dies an einem numerischen Beispiel erläutert.

## Biegung und Normalkraft – Verhalten

**Beispiel** ([1], 3.20), **Biege­widerstand unter einer Normalkraft** (ohne Berücksichtigung von  $A'_s$ )

- Stahlbetonplatte,  $h = 240$  mm,  $a_s = 1'340$  mm<sup>2</sup>/m,  $d = 212$  mm
- Beton C25/30:  $f_{cd} = 16.5$  MPa, Betonstahl B500B:  $f_{sd} = 435$  MPa

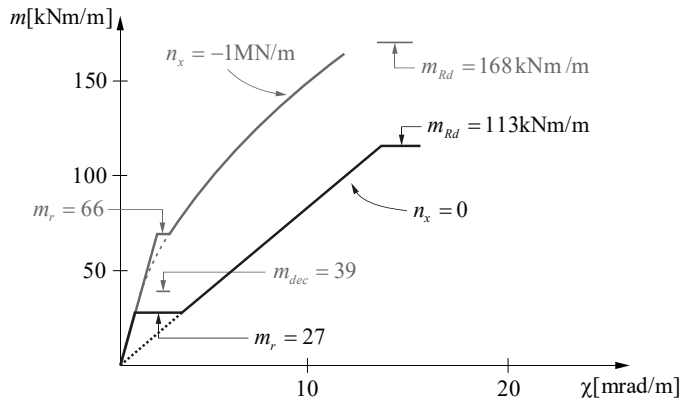
$$0.85x = \frac{1'340 \cdot 435 + 1 \cdot 10^6}{1'000 \cdot 16.5} = 95.9 \text{ mm} \quad \rightarrow x = \frac{95.9}{0.85} = 112.9 \text{ mm}$$

Kontrolle der Stahldehnungen:  $\frac{3\text{‰}}{x} \cdot (d - x) = \frac{3}{112.9} \cdot (212 - 112.9) = 2.63\text{‰} > 2.12\text{‰}$  i.O.

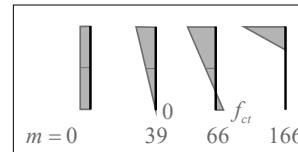
$$m_{y,Rd} = 1'340 \cdot 435 \cdot (212 - 120) + 95.9 \cdot 1'000 \cdot 16.5 \cdot \left( \frac{240 - 95.9}{2} \right) = 167.7 \text{ kNm/m}$$

## Biegung und Normalkraft – Verhalten

Beispiel ([1], 3.15f),  $m$ - $\chi$ -Diagramm einer Platte (ohne Berücksichtigung der Druckbewehrung)



- Der Biege­wider­stand wird durch die Druckkraft erhöht.
- Das Verformungsvermögen nimmt ab
- Kennlinie zu steif (hoch), da Beton bis zum Bruch linear elastisch angenommen wurde.



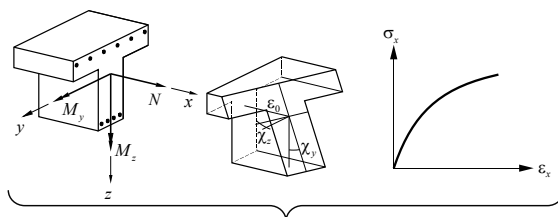
Im Beispiel wurde bei der Ermittlung des Momenten-Krümmungs-Diagramms ein linear elastisches Verhalten des Betons vorausgesetzt. Für höhere Beanspruchungen wird die wirkliche Steifigkeit damit überschätzt.

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

## Allgemeines

- Bemessung resp. Nachweis des Querschnittswiderstands für kombinierte Beanspruchung erfolgt mit Interaktionsdiagrammen
- Vorgehen 1 (starr-ideal plastisch): Ermittlung aus den Fließfiguren von Beton und Bewehrung durch (geometrische) Linearkombination
- Vorgehen 2 (SIA 262): Annahme von Dehnungsebenen ( $\varepsilon_0, \chi_y, \chi_z$ ), Kombinationen ( $N, M_y, M_z$ )<sub>Rd</sub> folgen durch Integration:

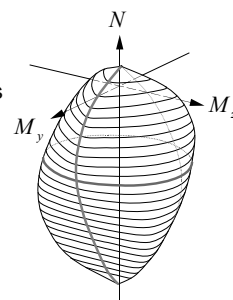
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Integration!}} \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right\}$$



( $N, M_y, M_z$ ) für Dehnungsebenen, die dem Erreichen des Querschnittswiderstands entsprechen  
 → Interaktionsdiagramme (ideal plastisch = Fließfigur)

Flächen ( $N, M_y, M_z$ )<sub>Rd</sub> oder (in Praxis üblich) 2D-Kurven:

( $N, M_y$ )<sub>Rd</sub> für  $M_z = 0$   
 ( $M_y, M_z$ )<sub>Rd</sub> für  $N = \text{konst.}$   
 etc.



Wie einleitend bemerkt, wird der Tragwiderstand am einfachsten mittels sogenannter *Interaktionsdiagramme* untersucht. Interaktionsdiagramme für Biegung und Normalkraft können im allgemeinen Fall im Raum  $\{N, M_y, M_z\}$  dargestellt werden. Jeder Punkt  $\{N, M_y, M_z\}$ <sub>Rd</sub> eines solchen Interaktionsdiagramms entspricht einer Kombination von  $\{N, M_y, M_z\}$ , unter welcher der Tragwiderstand erreicht wird.

Näherungsweise können Interaktionsdiagramme unter Annahme eines starr-ideal plastischen Verhaltens ermittelt werden. Solche Interaktionsdiagramme (aplastische Bereiche = Fließfiguren nach Plastizitätstheorie) sind mindestens schwach konvex. Die begrenzte Duktilität von Beton und Bewehrung kann berücksichtigt werden, indem Dehnungsebenen, welche dem Erreichen der Bruchstauchung des Betons resp. der Bruchdehnung der Bewehrung entsprechen («Dehnungsbegrenzungen»), untersucht werden.

## Ergänzende Bemerkungen

- In der Praxis ermittelt man Interaktionsdiagramme heute mit computergestützten Querschnittsprogrammen
- Bei der Kontrolle des Tragwiderstands beschränkt man sich in der Praxis meist auf die Kombinationen der extremalen Werte jeder Spannungsresultierenden mit den jeweils zugehörigen Werten der übrigen Spannungsresultierenden:

$$\{N_{Ed,max}, M_{y,Ed}, M_{z,Ed}\}, \{N_{Ed,min}, M_{y,Ed}, M_{z,Ed}\}$$

$$\{N_{Ed,max}, M_{y,Ed,max}, M_{z,Ed}\}, \{N_{Ed,max}, M_{y,Ed,min}, M_{z,Ed}\}$$

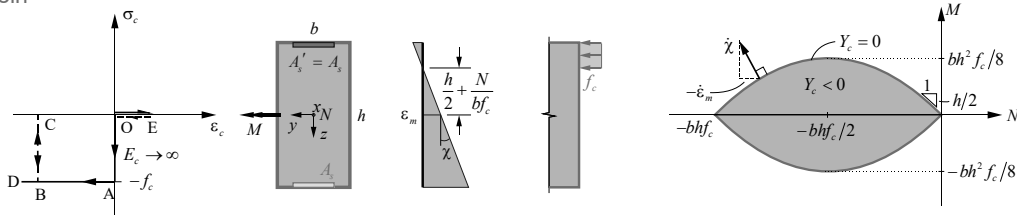
$$\{N_{Ed,max}, M_{y,Ed}, M_{z,Ed,max}\}, \{N_{Ed,max}, M_{y,Ed}, M_{z,Ed,min}\}$$

Dies ist nicht in allen Fällen konservativ (beispielsweise kann mit bei Brückenstützen zusammen mit einem Biegemoment  $M_{y,Ed}$ , das nur wenig kleiner ist als  $M_{y,Ed,max}$ , ein Biegemoment  $M_{z,Ed}$  auftreten, das wesentlich grösser ist als das gemeinsam mit  $M_{y,Ed,max}$  auftretende Biegemoment  $M_{z,Ed}$ ).

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung

(1) Beton allein



Druckzone oben:  $N_c = -\left(\frac{h}{2} - \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2 b f_c}\right)$

Druckzone unten:  $N_c = -\left(\frac{h}{2} + \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}}\right) b f_c, \quad -M_{yc} = -N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2 b f_c}\right)$

Fliessfunktion:  $Y_c = \pm M_{yc} + N_c \left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2 b f_c}\right) = 0$

Fliessgesetz:  $\pm \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}} = \frac{h}{2} + \frac{N_c}{b f_c} = \frac{\partial Y_c / \partial N_c}{\partial Y_c / \partial M_{yc}}$

→ Aplastischer Bereich  $Y_c < 0$ , begrenzt durch Fließgrenze  $Y_c = 0$  (besteht aus zwei Parabeln)  
 → Plastische Verzerrungszinkremente sind orthogonal zur Fließgrenze, nach aussen gerichtet (Fließgesetz, allgemein  $\dot{\epsilon} = \kappa \cdot \text{grad} Y$ )

Auf dieser und den folgenden Seiten wird gezeigt, wie Interaktionsdiagramme für starr-ideal plastisches Verhalten ermittelt werden können. Dies erfolgt am Beispiel eines Rechteckquerschnitts unter einfacher Biegung.

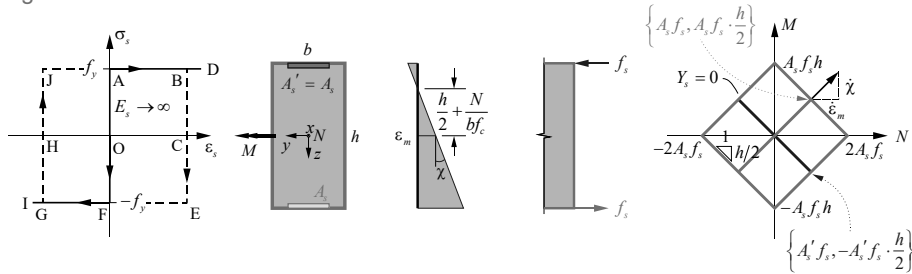
Zuerst wird der (theoretische) Fall einer symmetrischen Bewehrung ohne Überdeckung untersucht. Anschliessend werden die Einflüsse einer nicht symmetrischen Bewehrung und einer Überdeckung untersucht.

Der aplastische Bereich des Betons ist durch zwei Parabeln begrenzt. Die plastischen Verzerrungszinkremente sind – wie erwartet – orthogonal zur Fließfunktion.

## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

**Rechteckquerschnitt** – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung,  $A_s = A'_s$

(2) Bewehrung allein



- **Aplastischer** Bereich  $Y_s < 0$  ist bei zwei Bewehrungslagen ein Parallelogramm (bei symmetrischer Bewehrung  $A_s = A'_s$  Rhombus), das durch die den beiden Bewehrungslagen entsprechenden Vektoren aufgespannt wird
- Kombination der beiden Bewehrungslagen grafisch durch geometrische Linearkombination (siehe Kombination von Beton und Bewehrung)
- Eckpunkte: beide Bewehrungen fließen, Seiten: eine Bewehrung fließt
- Plastische Verzerrungssinkremente sind orthogonal zur Fließgrenze  $Y_s = 0$ , nach aussen gerichtet (Fließgesetz)

Der applastische Bereich der oberen resp. unteren der Bewehrung besteht jeweils aus einer Geraden.

Der applastische Bereich der beiden Bewehrungslagen entspricht einem Parallelogramm. Dieses kann grafisch konstruiert werden, indem der applastische Bereich einer der beiden Bewehrungslagen mit seinem Ursprung entlang der Grenze des applastischen Bereichs der anderen Bewehrungslage verschoben wird (grafische Linearkombination).

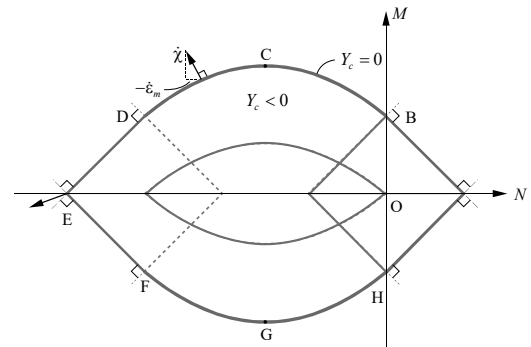


## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

**Rechteckquerschnitt** – starr-ideal plastisch, ohne Überdeckung,  $A_s = A'_s$

(3) Stahlbeton = Beton + Bewehrung

- Fließfigur des Stahlbetons durch geometrische Linearkombination der Fließgrenzen  $Y_c = 0$  und  $Y_s = 0$
- Vorgehen: Fließgrenze ( $Y_c = 0$ ) rein translatorisch mit ihrem Ursprung entlang Fließgrenze ( $Y_s = 0$ ) bewegen (oder umgekehrt  $Y_s = 0$  entlang  $Y_c = 0$ )
- Resultierender Bereich  $Y < 0$  entspricht dem aplastischen Bereich des Stahlbetonquerschnitts, mindestens schwach konvex, Fließgesetz (Orthogonalität der plastischen Verzerrungsincremente bezüglich Fließgrenze) gilt weiterhin
- Entlang gerader Stücke der Fließgrenze bleibt eine Bewehrung elastisch (starr)
- Vorgehen auf beliebige Bauteile und Beanspruchungen übertragbar

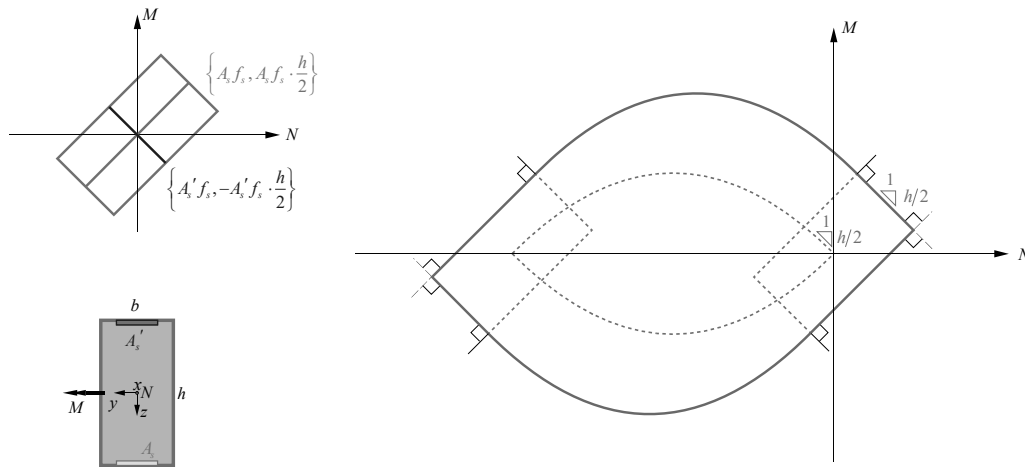


Der aplastische Bereich des Stahlbetonquerschnitts (= das  $M-N$ -Interaktionsdiagramm für starrplastisches Verhalten) kann – analog zu demjenigen der beiden Bewehrungslagen – grafisch konstruiert werden, indem der aplastische Bereich der beiden Bewehrungslagen mit seinem Ursprung entlang der Grenze des aplastischen Bereichs des Betons verschoben wird ... oder umgekehrt (grafische Linearkombination).

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch

Einfluss unsymmetrische Bewehrung,  $A_s \neq A'_s$

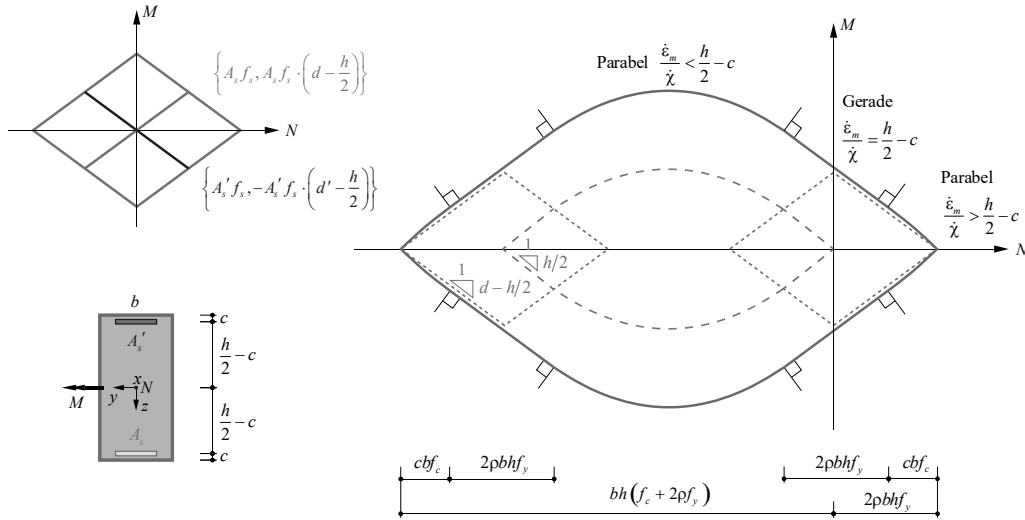


Bei nicht symmetrischer Bewehrung liegen die Eckpunkte des aplastischen Bereichs der Bewehrung nicht mehr auf den Koordinatenachsen. Der Einfluss der nicht symmetrischen Bewehrung auf den aplastischen Bereich des Stahlbetonquerschnitts (= auf das  $M-N$ -Interaktionsdiagramm für starr-plastisches Verhalten) ist durch die grafische Konstruktion direkt ersichtlich.

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch

Einfluss Überdeckung



07.11.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

19

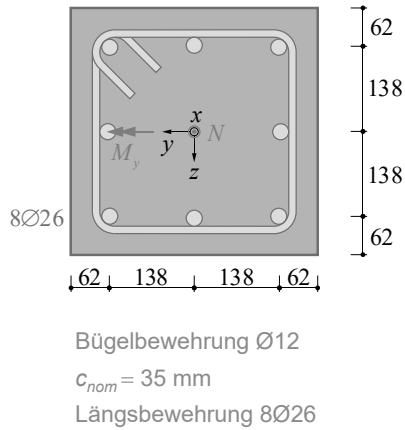
Weist die Bewehrung eine Überdeckung auf, ist die Steigung des aplastischen Bereichs der Bewehrung nicht mehr gleich gross wie diejenige des Betons im Ursprung, sondern etwas kleiner (da die äusserste Faser des Betonquerschnitts jetzt einen grösseren Hebelarm aufweist als die Bewehrung).

Der Einfluss der Überdeckung auf den aplastischen Bereich des Stahlbetonquerschnitts (= auf das  $M-N$ -Interaktionsdiagramm für starr-ideal plastisches Verhalten) ist durch die grafische Konstruktion direkt ersichtlich.

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

## Rechteckquerschnitt – Interaktionsdiagramm für starr-ideal plastisches Verhalten

[1], Seite 3.19, Beispiel 3.8



- Beton C30/37:  $f_{cd} = 20$  MPa  
 $f_{ctm} = 2.9$  MPa  
 $E_{cm} = 33.6$  GPa
- Betonstahl B500B:  $f_{sd} = 435$  MPa  
 $E_s = 205$  GPa

Vereinfachungen / Annahmen:

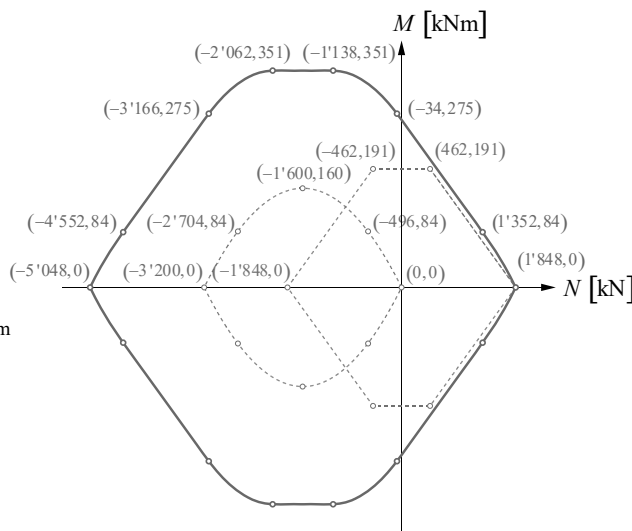
- Berechnung mit Bruttoquerschnitt des Betons (inklusive an der Stelle der Längsbewehrung nicht vorhandener Beton)
- Mittlerer Randabstand der drei äusseren Stäbe Ø26:  $d' = 62$  mm (Bügel mit  $d_3 = 4\emptyset$  abgebogen)

Auf dieser und der folgenden Seite wird das Interaktionsdiagramm des dargestellten Querschnitts für starr-ideal plastisches Verhalten ermittelt. Auf Seite 27 erfolgt der Vergleich mit dem Interaktionsdiagramm unter Berücksichtigung von Dehnungsgrenzen.

## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

### Rechteckquerschnitt – starr-ideal plastisch ([1], Beispiel 3.8)

Beton	reine Stauchung: $N_c = -(400\text{mm})^2 \cdot 20\text{MPa} = -3'200\text{ kN}$ Druckzone $x = h/2$ : $M_{yc} = 20\text{MPa} \cdot 400\text{mm} \cdot 200\text{mm} \cdot 100\text{mm} = 160\text{ kNm}$ neutrale Achse = äuss. Bew: $N_e = -20\text{MPa} \cdot 400\text{mm} \cdot 62\text{mm} = -496\text{ kN}$ $M_{ye} = 496\text{kN} \cdot (200\text{mm} - \frac{62\text{mm}}{2}) = 84\text{ kNm}$
Bewehrung	reiner Zug resp. Druck: $N_s = 8 \cdot (13\text{mm})^2 \cdot \pi \cdot (-435\text{MPa} \dots 435\text{MPa}) = -1'848 \dots 1'848\text{ kN}$ neutrale Achse bei $x = h/2$ : $N_s = 2 \cdot (13\text{mm})^2 \cdot \pi \cdot (-435\text{MPa} \dots 435\text{MPa}) = -462 \dots 462\text{ kN}$ $M_{ys} = 2 \cdot 3 \cdot (13\text{mm})^2 \cdot \pi \cdot \pm 435\text{MPa} \cdot (200\text{mm} - 62\text{mm}) = \pm 191\text{ kNm}$
Punkte	$1'848\text{kN} - 496\text{kN} = 1'352\text{ kN}$ $1'352\text{kN} - (1'848\text{kN} - 462\text{kN}) = -34\text{ kN}$ $191\text{kNm} + 84\text{kNm} = 275\text{ kNm}$ $-1600\text{kN} + 462\text{kN} = -1'138\text{ kN}$ $160\text{kN} + 191\text{kN} = 351\text{ kN}$ $-1'600\text{kN} - 462\text{kN} = -2'062\text{ kN}$ $160\text{kN} + 191\text{kN} = 351\text{ kN}$ etc.



07.11.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

21

Die Ermittlung des starr-ideal plastischen Interaktionsdiagramms erfolgt, indem die Widerstände von Beton und Bewehrung separat ermittelt und anschliessend summiert werden. Dies kann wiederum grafisch erfolgen. Die sich auf dem Umfang abzeichnenden Punkte werden numerisch ermittelt, indem die Normalkräfte und Biegemomente in Beton und Bewehrung für übereinstimmende Lagen der neutralen Achse summiert werden.

Der aplastische Bereich des Betons ist durch die beiden Punkte «reine Stauchung» und «neutrale Achse bei  $h/2$ » definiert (parabolischer Verlauf, siehe allgemeine Ermittlung für Rechteckquerschnitt). Zusätzlich wird der Punkt «neutrale Achse auf Höhe der äusseren (oberen resp. unteren) Bewehrung» ermittelt; in diesem Punkt stimmen die Steigungen der aplastischen Bereiche von Beton und Bewehrung überein.

Der aplastische Bereich der Bewehrung ist hexagonal, da zusätzlich zur oberen und unteren Bewehrung (siehe allgemeine Ermittlung für Rechteckquerschnitt) eine mittlere Bewehrungslage vorhanden ist. Liegt die neutrale Achse auf der Höhe dieser Bewehrung ( $x = h/2$ ), fliesst die obere und resp. untere Bewehrungslage auf Zug resp. Druck, so dass sich ihre Normalkräfte aufheben. Die mittlere Bewehrungslage weist dagegen keine Dehnung auf und kann somit bei starr-ideal plastischem Verhalten eine beliebige Spannung zwischen der negativen und positiven Fließgrenze aufweisen. Die gesamte Normalkraft der Bewehrung liegt für  $x = h/2$  somit zwischen der negativen und der positiven Fließkraft der mittleren Bewehrungslage.

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

## Interaktionsdiagramme mit Dehnungsbegrenzungen (nach SIA 262)

- Interaktionsdiagramme für starr-plastisches Verhalten von Beton und Bewehrung eignen sich gut für Handrechnungen und die Kontrolle von Computerberechnungen. Sie überschätzen den Bruchwiderstand, da weder Bewehrung noch Beton ideal plastisch sind.
- Nach SIA 262 sind Dehnungsbegrenzungen für Beton (Bruchstauchung) und Bewehrung (generell Bruchdehnung, bei Druckgliedern Fließdehnung) zu berücksichtigen.
- Interaktionsdiagramme mit Dehnungsbegrenzungen werden ermittelt, indem Dehnungsebenen ( $\epsilon_0, \chi_y, \chi_z$ ) angenommen und die zugehörigen Schnittgrößen ( $N, M_y, M_z$ )<sub>Rd</sub> durch Integration über die Querschnittsfläche ermittelt werden.
- Pro Dehnungsebene resultiert ein Punkt des Interaktionsdiagramms. In Handrechnungen werden wenige typische Dehnungsebenen angenommen, welche eine gute Näherung des Interaktionsdiagramms ermöglichen.
- Mit Computerprogrammen können die Interaktionsdiagramme durch Untersuchung einer Vielzahl von Dehnungsebenen genauer ermittelt werden.
- Aufgrund der Dehnungsbegrenzungen können lokal konkave Interaktionsdiagramme resultieren.

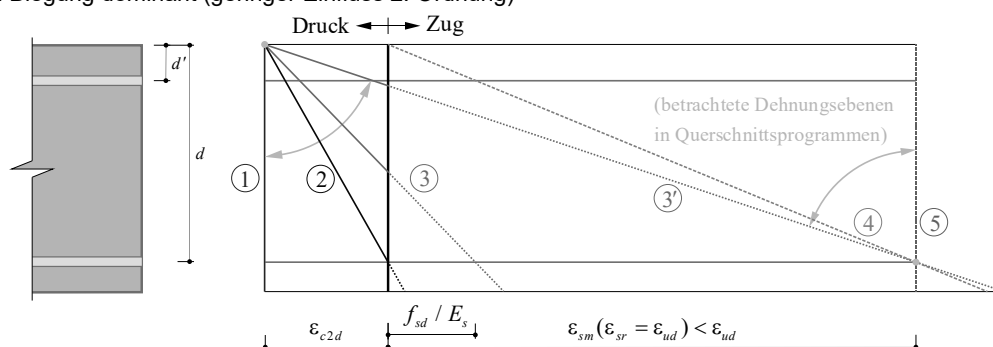
## Ergänzende Bemerkungen

- Mit starr-ideal plastisch ermittelten Interaktionsdiagrammen kann keine Aussage über die tatsächliche Steifigkeit im Bruchzustand gemacht werden, da die Dehnungen beim Erreichen der Fließgrenze unendlich gross werden. Für Problemstellungen, bei welchen die Verformungen bei der Ermittlung der Beanspruchung berücksichtigt werden müssen (Druckglieder) sind sie daher ungeeignet.
- Werden Interaktionsdiagramme auf der Basis von Dehnungsebenen mit Dehnungsbegrenzungen ermittelt, können für jeden Punkt des Interaktionsdiagramms (allgemein  $\{N, M_y, M_z\}_{Rd}$  resp. bei Biegung um eine Achse  $\{N, M_y\}_{Rd}$ ) die zugehörigen Biegesteifigkeiten (allgemein  $(EI)_y = M_{y,Rd} / \chi_{yR}$  und  $(EI)_z = M_{z,Rd} / \chi_{zR}$ , bei ebener Biegung  $(EI)_y = M_{y,Rd} / \chi_{yR}$ ) angegeben werden, da sowohl die Krümmungen  $\chi$  als auch die Biege widerstände  $M_{Rd}$  bekannt sind.
- Bei Stützen wird als Dehnungsbegrenzung anstelle der Bruchdehnungen von Beton und Bewehrung oft eine Begrenzung auf die Fließdehnung ( $f_{sd}/E_s$ ) der Bewehrung verwendet, womit zwar ein kleinerer Biege widerstand, jedoch auch kleinere einwirkende Biegemomente (infolge zweiter Ordnung) resultieren, siehe folgende Seiten.

## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

### Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

Fall i: Biegung dominant (geringer Einfluss 2. Ordnung)



NB: Einfluss des Verbundverhaltens

- mittlere Dehnung  $\varepsilon_{sm}$ , bei welcher im Riss die Bruchdehnung  $\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}$  erreicht wird, kann mit dem Zuggurtmodell ermittelt werden. Abschätzung  $\approx 0.4 \dots 0.5 \varepsilon_{ud}$  in der Regel ausreichend (Einfluss auf Bruchwiderstand gering). Für B500B ( $\varepsilon_{ud} = 45\text{‰}$ ) z. Bsp.  $\varepsilon_{sm}(\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}) \approx 22.5\text{‰}$ .
- bei  $\varepsilon_{sm} = f_{sd}/E_s$  ist  $\varepsilon_{sr} > f_{sd}/E_s$  (d.h. Betonstahl fließt eigentlich schon etwas vorher), Einfluss auf Tragwiderstand gering (sichere Seite für Effekte 2. Ordnung, da von einer grösseren rechnerischen Krümmung ausgegangen wird)

07.11.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

23

Für Handrechnungen reicht die Betrachtung weniger Dehnungsebenen aus, um das Interaktionsdiagramm polygonal anzunähern.

Ist die Biegebeanspruchung dominant (geringe Effekte 2. Ordnung), werden die Dehnungen auf die Bruchstauchung des Betons (Druck) resp. die halbe Bruchdehnung der Bewehrung (Zug) begrenzt. Diese Begrenzungen werden nachfolgend als Fall «i» bezeichnet.

Üblicherweise werden im Fall i folgende Dehnungsebenen betrachtet (im Beispiel für positive Biegung):

- (1) Zentrische Stauchung (Betonbruchstauchung über gesamte Querschnittshöhe)
- (2) Dekompression auf Höhe der unteren Bewehrung (Betonbruchstauchung am oberen Querschnittsrand, Dehnung = 0 auf Höhe der unteren Bewehrung)
- (3) Betonbruchstauchung am oberen Querschnittsrand, Dehnung der unteren Bewehrung entspricht der Fließgrenze (neutrale Achse liegt in der Nähe der halben Querschnittshöhe)
- (4) Reißen des Betons auf der ganzen Querschnittshöhe (Betondruckzonenhöhe  $x=0$ ), Dehnung der unteren Bewehrung entspricht der halben Bruchdehnung. Alternativ könnte der Punkt «reine Biegung» ( $N_d=0$ ) im Interaktionsdiagramm berechnet werden. Diese Berechnung ist etwas aufwändiger, da eine Querschnittsanalyse durchgeführt werden muss, um die Krümmung bestimmen zu können.
- (5) Reiner Zug (Dehnungen in allen Bewehrungslagen liegen über der Fließgrenze)

### Ergänzende Bemerkung

Computerprogramme für die automatisierte Ermittlung von Interaktionsdiagrammen können relativ einfach programmiert werden. Um Konvergenzprobleme zu vermeiden empfiehlt es sich, die Dehnungsebenen über die Dehnungen an den Querschnittsrändern zu definieren (und nicht über die Krümmung). Damit kann jeweils eine Randdehnung konstant gehalten und die andere zwischen den Dehnungsbegrenzungen variiert werden.

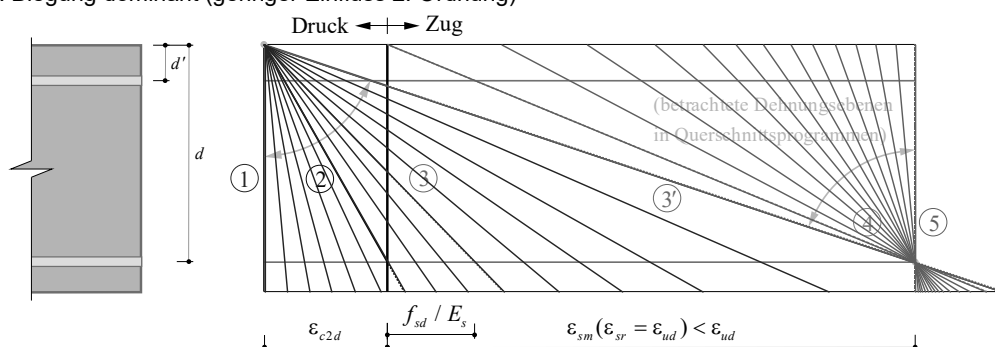
## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

### Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

Fall i: Biegung dominant (geringer Einfluss 2. Ordnung)

$$|\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{c2,d} = 3\text{‰}$$

$$\varepsilon_{sm} \leq 0.5 \cdot \varepsilon_{ud}$$



NB: Einfluss des Verbundverhaltens

- mittlere Dehnung  $\varepsilon_{sm}$ , bei welcher im Riss die Bruchdehnung  $\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}$  erreicht wird, kann mit dem Zuggurtmodell ermittelt werden. Abschätzung  $\approx 0.4 \dots 0.5 \varepsilon_{ud}$  in der Regel ausreichend (Einfluss auf Bruchwiderstand gering). Für B500B ( $\varepsilon_{ud} = 45\text{‰}$ ) z. Bsp.  $\varepsilon_{sm}(\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}) \approx 22.5\text{‰}$ .
- bei  $\varepsilon_{sm} = f_{sd} / E_s$  ist  $\varepsilon_{sr} > f_{sd} / E_s$  (d.h. Betonstahl fließt eigentlich schon etwas vorher), Einfluss auf Tragwiderstand gering (sichere Seite für Effekte 2. Ordnung, da von einer grösseren rechnerischen Krümmung ausgegangen wird)

07.11.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

24

Für Handrechnungen reicht die Betrachtung weniger Dehnungsebenen aus, um das Interaktionsdiagramm polygonal anzunähern.

Ist die Biegebeanspruchung dominant (geringe Effekte 2. Ordnung), werden die Dehnungen auf die Bruchstauchung des Betons (Druck) resp. die halbe Bruchdehnung der Bewehrung (Zug) begrenzt. Diese Begrenzungen werden nachfolgend als Fall «i» bezeichnet.

Üblicherweise werden im Fall i folgende Dehnungsebenen betrachtet (im Beispiel für positive Biegung):

- (1) Zentrische Stauchung (Betonbruchstauchung über gesamte Querschnittshöhe)
- (2) Dekompression auf Höhe der unteren Bewehrung (Betonbruchstauchung am oberen Querschnittsrand, Dehnung = 0 auf Höhe der unteren Bewehrung)
- (3) Betonbruchstauchung am oberen Querschnittsrand, Dehnung der unteren Bewehrung entspricht der Fließgrenze (neutrale Achse liegt in der Nähe der halben Querschnittshöhe)
- (4) Reißen des Betons auf der ganzen Querschnittshöhe (Betondruckzonenhöhe  $x=0$ ), Dehnung der unteren Bewehrung entspricht der halben Bruchdehnung. Alternativ könnte der Punkt «reine Biegung» ( $N_d=0$ ) im Interaktionsdiagramm berechnet werden. Diese Berechnung ist etwas aufwändiger, da eine Querschnittsanalyse durchgeführt werden muss, um die Krümmung bestimmen zu können.
- (5) Reiner Zug (Dehnungen in allen Bewehrungslagen liegen über der Fließgrenze)

### Ergänzende Bemerkung

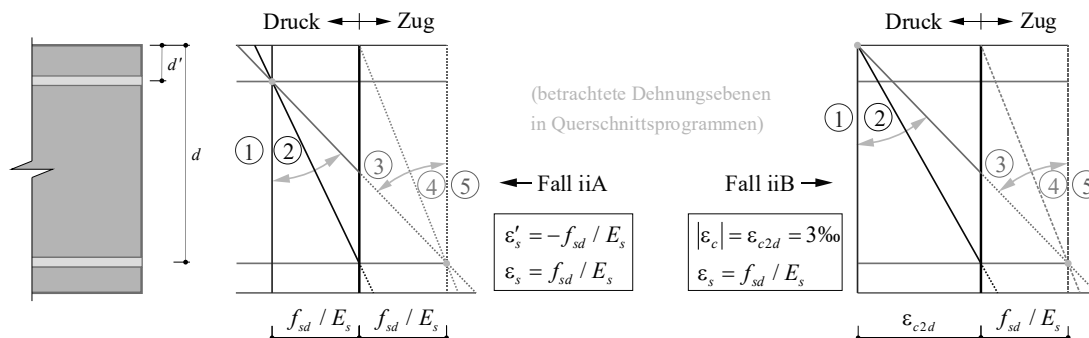
Computerprogramme für die automatisierte Ermittlung von Interaktionsdiagrammen können relativ einfach programmiert werden. Um Konvergenzprobleme zu vermeiden empfiehlt es sich, die Dehnungsebenen über die Dehnungen an den Querschnittsrändern zu definieren (und nicht über die Krümmung). Damit kann jeweils eine Randdehnung konstant gehalten und die andere zwischen den Dehnungsbegrenzungen variiert werden.



## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

### Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

Fall ii: Normalkraft dominant (Druckglieder), übliche Annahmen:



NB. Druckglieder: Querschnittswiderstand ↔ Biegesteifigkeit (siehe SIA 262 4.3.7.9)

- Mit den dargestellten Dehnungsbegrenzungen für Druckglieder (Fall iiA/B) resultiert bei einzelnen Dehnungsebenen ein etwas kleinerer Querschnittswiderstand als für den Fall mit dominanter Biegung (Fall i)
- Bei Druckgliedern (Einfluss 2. Ordnung) wird in der Regel der kleinere Querschnittswiderstand durch die grössere Biegesteifigkeit im nominellen Bruchzustand mehr als kompensiert (Systemtraglast für Fall iiA/B grösser als Fall i).
- Dehnungsebenen gemäss Fall iiA sind nur zulässig, sofern die Betonrandstauchung  $\epsilon_{c2d}$  nicht übersteigt. Andernfalls ist Fall iiB anzuwenden (oft bei gedungenen QS oder grossem  $d'$ ).

Bei Druckgliedern werden strengere Dehnungsbegrenzungen verwendet, da mit den Dehnungsebenen gemäss vorhergehender Seite (Dehnungsebenen zwischen 3 und 4) grosse rechnerische Krümmungen und entsprechend kleine rechnerische Biegesteifigkeiten resultieren, was bei Problemen zweiter Ordnung zu unwirtschaftlichen Lösungen führen kann.

In der Praxis werden folgende Begrenzungen verwendet:

Begrenzung der Dehnungen auf die positive resp. negative Fließdehnung der Bewehrung (Zug resp. Druck), nachfolgend als «iiA» bezeichnet (Abbildung links).

Begrenzung der Dehnungen auf die Bruchstauchung des Betons (Druck) resp. die Fließdehnung der Bewehrung (Zug), nachfolgend als «iiB» bezeichnet (Abbildung rechts).

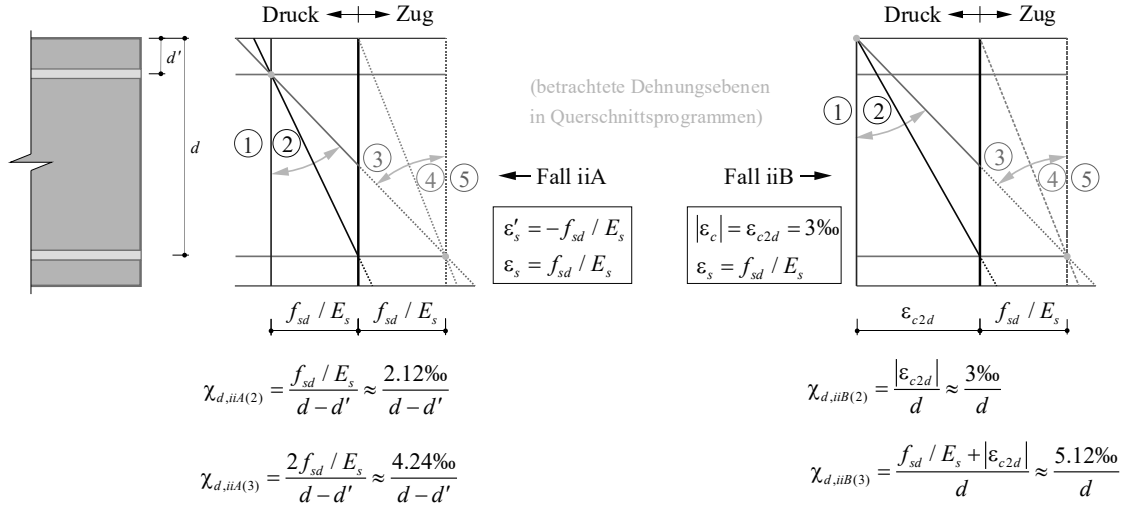
Üblicherweise werden im Fall ii die abgebildeten Dehnungsebenen betrachtet (im Beispiel für positive Biegung). Für Druckglieder sind dabei die Dehnungsebenen 4 und 5 nicht relevant (es resultiert eine Zugkraft).

Grundsätzlich können auch andere Dehnungsbegrenzungen verwendet werden. Wichtig ist dabei, dass für die Berechnung der Verformungen 2. Ordnung und die Ermittlung des Querschnittswiderstands konsistente Annahmen getroffen werden.

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

## Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen

Fall ii: Normalkraft dominant (Druckglieder), übliche Annahmen:



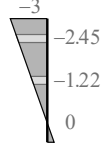
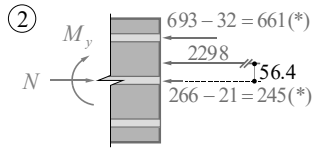
Die Abbildung zeigt, dass die Krümmung im Bruchzustand bei Verwendung der strengeren Dehnungsbegrenzungen Fall iiA kleiner ist als im Fall iiB für Dehnungsebene (2) falls  $d' < 0.29d$ , resp. für Dehnungsebene (3) falls  $d' < 0.17d$ .

Die Krümmung bei Verwendung der Dehnungsbegrenzung Fall i wäre insbesondere im Bereich zwischen den Dehnungsebenen (3) und (5) markant grösser als für die Begrenzungen Fall iiA/B.

## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

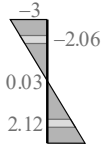
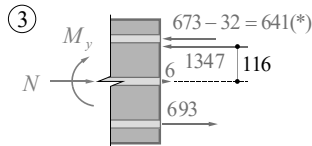
### Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])

- Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug ①  $N_{Rd} = -4'963 \text{ kN}$ , ②  $N_{Rd} = 1'848 \text{ kN}$
- Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB):



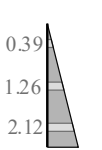
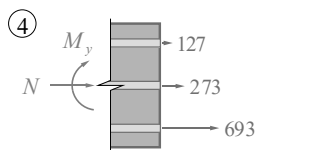
$$N_{Rd}^- = -2'298 - 661 - 245 = -3'204 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = 2'298 \cdot 0.0564 + 661 \cdot 0.138 = 221 \text{ kNm}$$



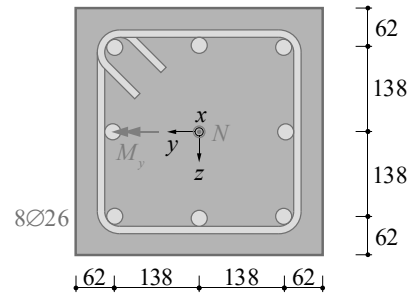
$$N_{Rd}^- = -1'347 - 641 + 693 + 6 = -1'289 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = 1'347 \cdot 0.116 + (641 + 693) \cdot 0.138 = 340 \text{ kNm}$$



$$N_{Rd}^- = 127 + 273 + 693 = 1'093 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = (693 - 127) \cdot 0.138 = 78 \text{ kNm}$$



Betonkräfte (brutto, daher Abzug  $A_s \cdot f_{cd}$  bei Bewehrung s. unten):

$$\textcircled{1} 0.85 \cdot (2 \cdot 138 + 62) \cdot 0.40 \cdot 20 = 2'298 \text{ kN}$$

$$\textcircled{2} 0.85 \cdot (198.1) \cdot 0.40 \cdot 20 = 1'347 \text{ kN}$$

Bewehrungskräfte:

$A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s$ , in der Druckzone  $-A_s \cdot f_{cd}$   
(da Betonkräfte ohne Abzug von  $A_s$  gerechnet wurden)

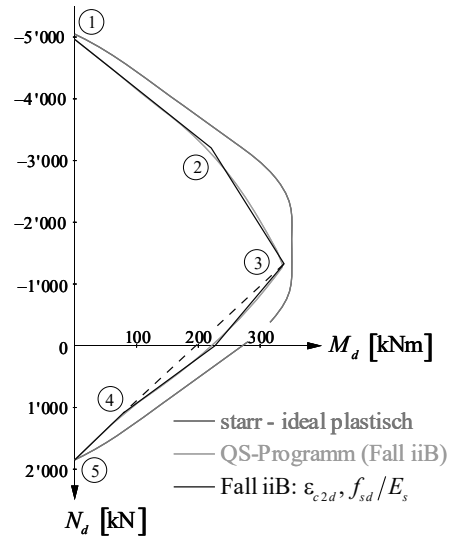
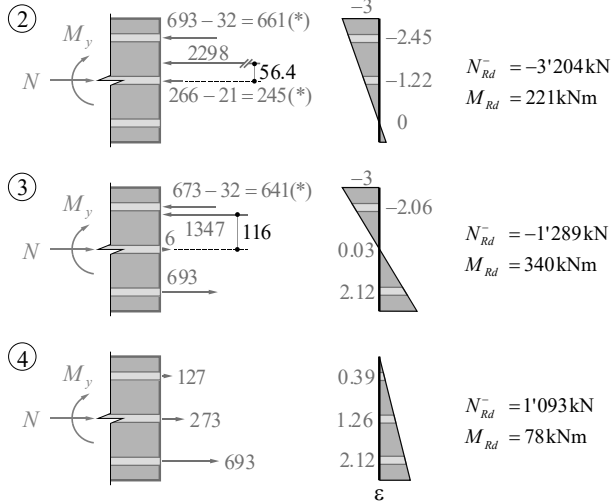
Auf dieser und der folgenden Seite wird das Interaktionsdiagramm des dargestellten Querschnitts, der auf Seite 20-21 für starr-plastisches Verhalten analysiert wurde, unter Berücksichtigung der Dehnungsbegrenzung Fall iiB für Druckglieder ermittelt.

Die Berechnungen sind deutlich aufwendiger als für starr-plastisches Verhalten.

## Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

### Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])

- Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug ①  $N_{Rd} = -4'963 \text{ kN}$ , ⑤  $N_{Rd} = 1'848 \text{ kN}$
- Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB):



07.11.2024

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

28

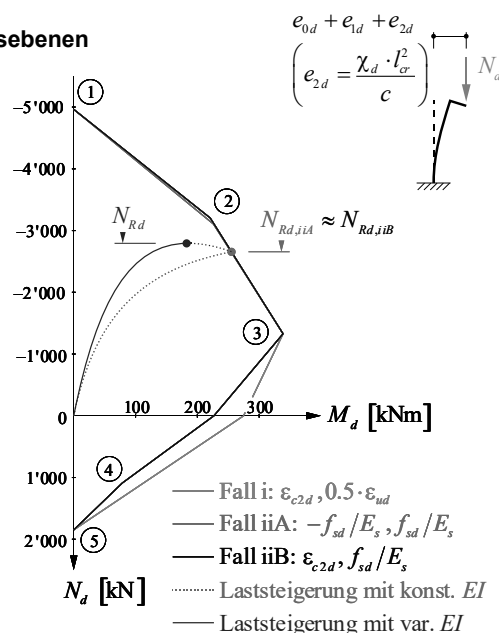
Der Vergleich mit dem auf Seite 21 ermittelten Interaktionsdiagramm für starr-ideal plastisches Verhalten zeigt, dass vor allem im Bereich grosser Biegemomente in Kombination mit Normalkraft grössere Unterschiede bestehen. Ein Teil der Unterschiede rührt auch daher, dass im starr-ideal plastischen Fall der Bruttoquerschnitt des Betons ohne Abzug der Bewehrungsfläche betrachtet wurde.

Die Unterschiede zwischen den Dehnungsbegrenzungen Fall iiB und QS-Programm sind dagegen klein. Mit einem Querschnittsprogramm können viel mehr Punkte ermittelt werden, was im vorliegenden Beispiel insbesondere im Bereich reiner Biegung zu Unterschieden mit der Handrechnung führt. Dies kann durch die Ermittlung eines zusätzlichen Punktes des Interaktionsdiagramms für reine Biegung beseitigt werden (vergleiche die gestrichelte und die durchgezogene Linie im Fall iiB).

## Biegung und Normalkraft – Dehnungsebenen

### Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen – Wahl der Dehnungsebenen (schematisch, für Querschnitt gemäss [1] Beispiel 3.10)

- Nachweis für gegebenen Wert der Normalkraft  $N_{Ed}$  (SIA 262)  
→  $M_{Ed} = N_{Ed}(e_{0d} + e_{1d} + e_{2d})$
- Vergrößerung des Biegemoments  $N_{Ed} \cdot e_{2d}$  proportional zur Krümmung
- Die Biegesteifigkeit  $EI$  von schlanken Druckgliedern wird bei der Berechnung mittels Interaktionsdiagramms unterschätzt. Daraus resultieren grössere rechnerische Effekte zweiter Ordnung, was zu einem kleineren rechnerischen Normalkraftwiderstand führt (siehe Laststeigerungskurven mit konstantem resp. variablem  $EI$ ; führt zu unterschiedlicher Bruchkraft  $N_{Rd}$  resp.  $N_{Rd,iiA}$ )
- Da bei schlanken Druckgliedern der kleinere Biegezugwiderstand im Fall iiA/B durch die grössere rechnerische Biegesteifigkeit (→ kleinere Momente 2. Ordnung) oft mehr als kompensiert wird, erhält man eine bessere Näherung der wirklichen Bruchkraft mit Fall iiA/B als mit Fall i



Die Abbildung illustriert schematisch das Verhalten eines schlanken Druckglieds unter zunehmender Normalkraft. Die Biegebeanspruchung im massgebenden Querschnitt nimmt infolge der Verformungen zweiter Ordnung mit der Normalkraft überproportional zu.

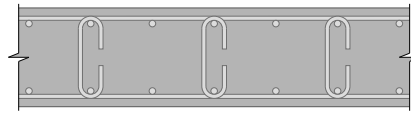
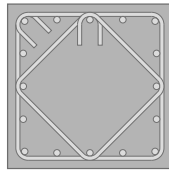
Die grüne Kurve zeigt das tatsächliche Verhalten (nichtlineare Berechnung mit variabler Biegesteifigkeit). Die orange Kurve zeigt das Verhalten bei Annahme einer konstanten Biegesteifigkeit entsprechend der Dehnungsbegrenzungen iiA resp. iiB.

Neben den Interaktionsdiagrammen für diese Dehnungsbegrenzungen ist auch der Fall i dargestellt. Man erkennt bei den Fällen iiA resp. iiB die gegenüber Fall i ausgeprägtere lokale Konkavität im Bereich der Dehnungsebenen (4) und (5).

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Druckglieder – konstruktive Durchbildung (SIA 262 5.5.4)

- Mindestabmessungen: Stützen ( $b/a \leq 4$ )  $\rightarrow a \geq 200$  mm (Ortbeton) bzw. 150 mm (Fertigteil)  
Wände ( $b/a > 4$ )  $\rightarrow a \geq 150$  mm (Ortbeton) bzw. 100 mm (Fertigteil)
- Längsbewehrungsgehalt:  $0.6\% \leq \rho \leq 8\%$   
Bei grossen Stützenquerschnitten darf  $\rho_{x,min} = 0.6\%$  auf eine Mantelfläche von mindestens 200 mm Dicke bezogen werden.  
In Wänden bezieht sich  $\rho_{x,min} = 0.6\%$  auf den für die Tragsicherheit erforderlichen Betonquerschnitts (Stababstand  $s \leq 300$  mm und  $s \leq 2a$ ).  
Falls  $\rho_x > \rho_{x,max} = 8\%$  verstärkte Verbügelung und spezielle konstruktive und ausführungstechnische Massnahmen erforderlich.  
Längsbewehrungsstäbe sind mit Bügeln gegen lokales Ausknicken zu sichern.
- Verbügelung:  $s_c \leq 15 \varnothing_{x,min}$  und  $s_c \leq a_{min}$  und  $s_c \leq 300$  mm  
Falls die Druckbewehrung  $f_{sd}$  erreicht, ist ausser den Eckstäben auch jeder zweite Längsbewehrungsstab mit Haken oder Bügeln zu umschliessen.

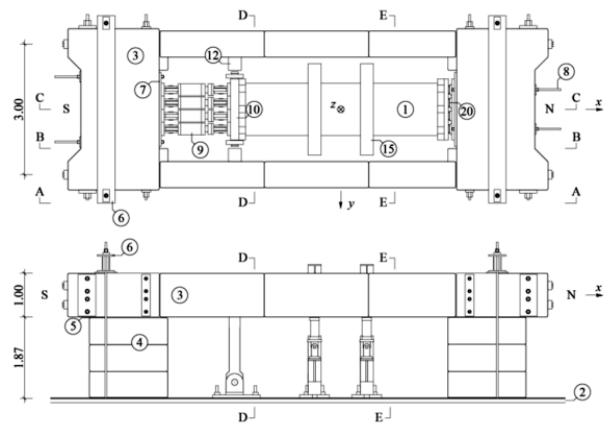
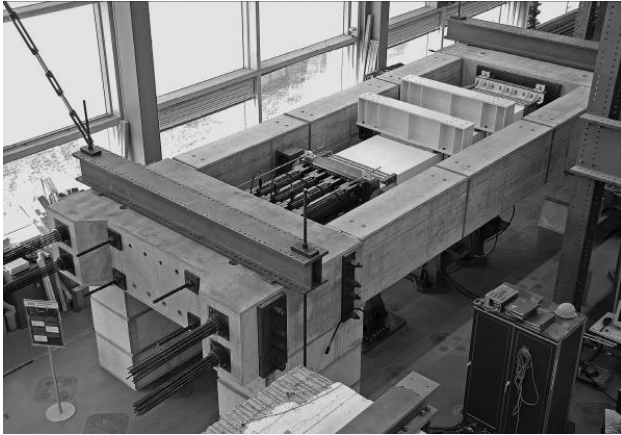


Die Abbildung illustriert konstruktive Regeln für Druckglieder gemäss SIA Norm 262. Da Druckglieder oft kritische Bauteile eines Tragwerks sind, ist auf ihre konstruktive Durchbildung besonderes Augenmerk zu legen.

# Biegung und Normalkraft - Druckglieder

## Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

[Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012]



An der ETH Zürich wurden Versuche an Plattenstreifen unter exzentrischem Längsdruck durchgeführt. In den Versuchen wurde das Zusammenwirken von altem und neuem Beton untersucht. Die beiden Grundversuche A "alter Beton" und N "neuer Beton" (in denen das Zusammenspiel alter-neuer Beton keine Rolle spielte) eignen sich gut zur Illustration des Verhaltens unter Normalkraft und Biegung bei relativ kleiner Exzentrizität.

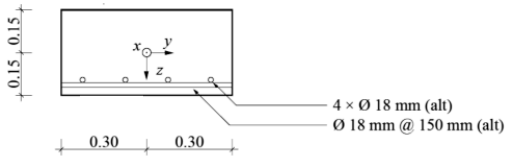
Die beiden Abbildungen zeigen den Aufbau der massiven Versuchsanlage. Zum Einsatz kam ein vorgespannter Stahlbetonrahmen mit einer sehr hohen Steifigkeit. Seine Abmessungen betragen 10.44 m in der Länge, sowie 3 m in der Breite; die Lasteinleitungshöhe kommt in 2.37 m über dem Boden zu liegen.

# Biegung und Normalkraft - Druckglieder

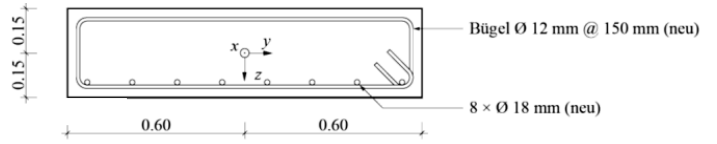
## Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

[Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012.]

Versuchskörper A – Querschnittsgeometrie



Versuchskörper N – Querschnittsgeometrie



Baustoff			A	N
Beton	Zylinderdruckfestigkeit $f_{cc}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	75.6	45.2
	Elastizitätsmodul $E_c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	44.5	35.7
Längsbewehrung	Dynamische Fließgrenze $f_{sy,dyn}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	534	510
	Dynamische Zugfestigkeit $f_{su,dyn}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	739	601

Die Tabelle fasst die Materialeigenschaften der beiden Prüfkörper A ("alt") und N ("neu") zusammen. Beide Prüfkörper weisen den selben Bewehrungsgehalt auf, jedoch verfügt nur Prüfkörper N über eine Bügelbewehrung.



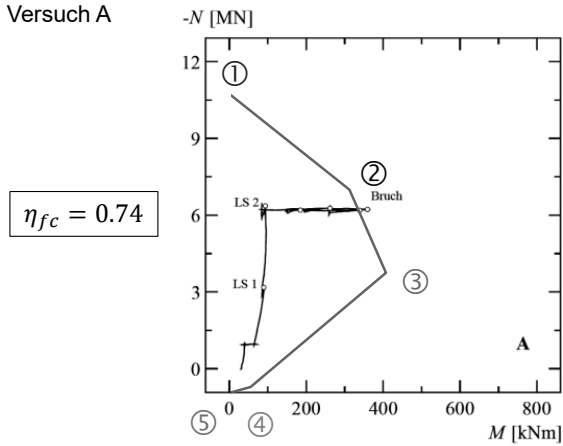
# Biegung und Normalkraft - Druckglieder

## Bruchversuche an Plattenstreifen aus altem und neuem Stahlbeton unter exzentrischem Längsdruck

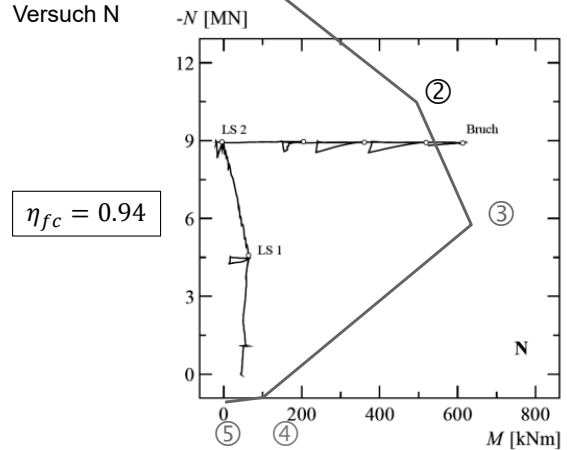
(Etter, S.; Villiger, S.; Marti, P. IBK-Bericht Nr. 336, ETH Zürich, 2012.)

N – M<sub>y</sub> – Interaktionsdiagramme:

Versuch A



Versuch N



Die Folie zeigt die M-N-Interaktionsdiagramme beider Querschnitte, zusammen mit den Versuchskurven.

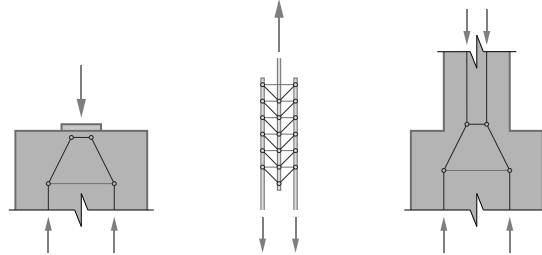
Die Versuchskörper wurden zunächst stufenweise mit einer Druckkraft belastet und anschliessend wurde schrittweise bis zum Bruch ein Biegemoment aufgebracht.

Die Bedeutung einer Bügelbewehrung für die Duktilität bei exzentrischem Druck wird mit den Versuchsvideos von Stephan Etter eindrücklich illustriert. Während der Versuchskörper N relativ gutmütig versagt, erfolgt das Versagen des Versuchskörpers A äusserst spröde (explosionsartig).

## Biegung und Normalkraft – Druckglieder

### Druckglieder – konstruktive Durchbildung (SIA 262 5.5.4)

- Verbügelung: In Kräfteinleitungszonen, Stossverbindungen und Querschnittsänderungen müssen zusätzlich Bügel zur Aufnahme von Querkugkräften eingebaut werden.



- Verbügelung in plastischen Bereichen bei Erdbebenbemessung:

...  $s_c \leq 6 \cdot \varnothing_x$  und  $s_c \leq 150 \text{ mm}$

$$\dots \rho_t \geq \max \left\{ \frac{0.08 \cdot f_{cd}}{f_{sd}}; \frac{-N_d - 0.08 \cdot a \cdot b \cdot f_{cd}}{4 \cdot a_c \cdot b_c \cdot f_{sd}} \right\}$$

... Umschnürungsbügel mit 135°-Endhaken mit Länge  $\geq 10 \varnothing_c$

... keine Übergreifungsstösse der Längsbewehrung (konventioneller Stoss an OK Fundament unzulässig!);  
mechanische Stabverbindungen nur bei nachgewiesener ausreichender Duktilität

### Ergänzende Bemerkungen

Neben den abgebildeten Themen ist bei hochbelasteten Stützen die Durchleitung der Normalkraft durch die Geschossdecken zu beachten. Dies insbesondere bei vorfabrizierten Stützen, deren Beton oft eine wesentlich höhere Druckfestigkeit aufweist als die in Ortbeton erstellte Geschossdecke.

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Allgemein kann der Nachweis der Tragsicherheit für exzentrisch beanspruchte Druckglieder mit nichtlinearen Berechnungsverfahren geführt werden.

Dabei ist grundsätzlich ein inkrementelles, iteratives Vorgehen erforderlich. Das Druckglied wird in eine geeignete Anzahl Elemente diskretisiert, und die Berechnung erfolgt auf der Basis der Momenten-Krümmungsbeziehungen der Stabelemente; diese sind nichtlinear und von der Normalkraft abhängig.

Solche allgemeinen Berechnungen sind auch mit heutigen Computerprogrammen relativ aufwändig, und die Resultate bedürfen in Anbetracht der diversen Annahmen, welche getroffen werden müssen, einer kritischen Interpretation. Sie lohnen sich in der Regel nur bei schlanken, hoch beanspruchten Stützen oder bei der Beurteilung bestehender Bauwerke.

Nachfolgend wird das für Handrechnungen gut geeignete Näherungsverfahren gemäss der Norm SIA 262 beschrieben, welches auf der Annahme einer konstanten Steifigkeit beruht. Diese entspricht der Sekantensteifigkeit im höchstbeanspruchten (massgebenden) Querschnitt und wird aus dem Momenten-Krümmungs-Diagramm bestimmt.

## Ergänzende Bemerkungen

Seit kurzem sind praxistaugliche Computerprogramme verfügbar, welche nichtlineare Berechnungen von Stahlbeton-Druckgliedern im Brandfall ermöglichen (sogenannte Heissbemessung). Obenstehende Bemerkungen hinsichtlich zu treffender Annahmen und kritischer Interpretation der Resultate sind für solche Berechnungen noch angebrachter.

Bei Verwendung hochfester Betone (was bei vorfabrizierten Stützen die Regel ist) ist insbesondere im Hochbau mit Brandschutzanforderung  $>R30$  darauf zu achten, dass ein Versagen durch Abplatzen im Brandfall ausgeschlossen ist. Es ist die Aufgabe der Projektverfasser, entsprechende Vorgaben zu machen und sie bei der Bauausführung durchzusetzen. Die meisten Stützenhersteller in der Schweiz verwenden heute «abplatzsichere» Betone (meist mit PP-Fasern); entsprechende Nachweise sind einzufordern. Weitere Angaben siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

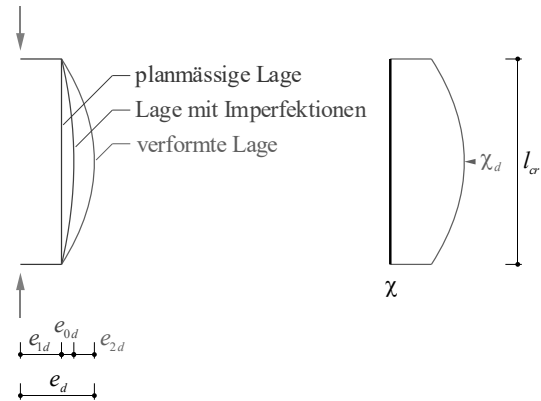
## Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Der Nachweis der Tragsicherheit berücksichtigt folgende drei Einflüsse:

- Geometrische Imperfektionen  $e_{0d}$
- Schnittgrößen erster Ordnung  $e_{1d}$
- Verformungen des Druckglieds  $e_{2d}$

Die maximale Exzentrizität  $e_d$  beträgt:

$$e_d = e_{0d} + e_{1d} + e_{2d} \left\{ \begin{array}{l} e_{0d} = \text{Max} \left\{ \alpha_i \frac{l_{cr}}{2}; \frac{d}{30} \right\} \\ \text{mit } \frac{1}{200} \geq \alpha_i = \frac{0.01}{\sqrt{l}} \geq \frac{1}{300} \quad (l \text{ in m}) \\ e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d} \\ e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c} \end{array} \right.$$



Nachfolgend wird das Berechnungsverfahren nach SIA 262 vorgestellt. Dieses berücksichtigt geometrische Imperfektionen sowie das sowohl geometrisch als auch werkstoffbedingt nichtlineare Verhalten des Druckglieds.

Nach der früheren Norm SIA 162 wurden die Verformungen (erster und zweiter Ordnung) aufgrund der Beanspruchungen und der Biegesteifigkeit  $EI$  ermittelt, welche in Funktion des Bewehrungsgehalts des Druckgliedes und der Beanspruchung relativ stark variiert. Dabei ist das Verhalten wie bereits erwähnt nicht nur geometrisch bedingt nichtlinear (Rissbildung, nichtlineares Baustoffverhalten, ...). Da der Bewehrungsgehalt bei der Bemessung zunächst unbekannt ist, die Resultate der Berechnungen jedoch stark beeinflusst, war diese Methode relativ aufwändig (mehrere Iterationen notwendig).

Das Berechnungsverfahren nach SIA 262 umgeht diese Schwierigkeiten, indem die Verformungen durch zweifache Integration der Krümmungen des Druckglieds ermittelt werden. Da einerseits die Krümmung im massgebenden Querschnitt beim Erreichen des Tragwiderstands (der unter Berücksichtigung von Dehnungsbegrenzungen ermittelt wird) bekannt ist und andererseits die Verteilung der Krümmungen über die Länge des Druckglieds zuverlässig (konservativ, aber ohne übermässige Reserven) geschätzt werden kann, führt dieses Verfahren in den meisten Fällen ohne Iteration zu einem brauchbaren Resultat.

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Geometrische Imperfektionen (für  $l = l_{cr}$ )

$$e_{0d} = \frac{l_{cr}}{400} \quad l_{cr} \leq 4 \text{ m}$$

$$e_{0d} = \frac{\sqrt{l_{cr}}}{200} \quad 4 \text{ m} < l_{cr} < 9 \text{ m} \quad \text{jedoch: } e_{0d} \geq \frac{d}{30}$$

$$e_{0d} = \frac{l_{cr}}{600} \quad l_{cr} \geq 9 \text{ m}$$

Planmässige Lage ( $M_{1d}$ : Moment erster Ordnung)

$$e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d}$$

Verformungen des Druckglieds

$$e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$$

$$\begin{aligned} M_d &= -N_d (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d}) \\ &= M_{1d} - N_d (e_{0d} + e_{2d}) \end{aligned}$$

Die geometrischen Imperfektionen können allgemein nach den Formeln 17 und 74 der Norm SIA 262 ermittelt werden. Für den Spezialfall  $l = l_{cr}$  resultieren die oben angegebenen, vereinfachten Beziehungen.

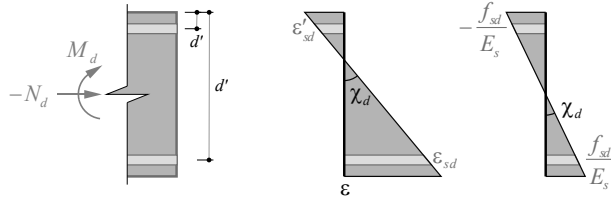
Die Verformungen des Druckglieds werden durch zweifache Integration der Krümmungen ermittelt. Dies lässt sich allgemein in der angegebenen Form darstellen, wobei die Integrationskonstante  $c$  von System und Belastung abhängig ist.

## Biegung und Normalkraft – Druckglieder

### Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung  $e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$

Die Krümmung beträgt allgemein  $\chi_d = \frac{\varepsilon_{sd} - \varepsilon'_{sd}}{d - d'}$



Auf der sicheren Seite liegend darf vereinfachend mit  $\varepsilon_{sd} = -\varepsilon'_{sd} = f_{sd} / E_s$  gerechnet werden. Für genauere Berechnungen kann die Krümmung entsprechend der Bruchkrümmung im massgebenden Querschnitt abgemindert werden (Iteration).

Langzeiteffekte können näherungsweise mit einer Vergrößerung der Krümmung um  $\chi_{irr,d} = \frac{|\varepsilon_{cr}|}{d}$  berücksichtigt werden.

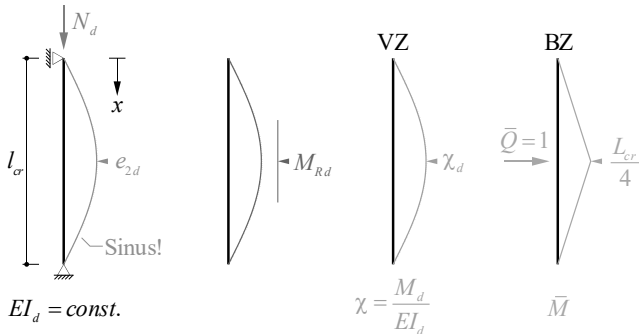
Für die Bemessung werden oft normierte Interaktionsdiagramme verwendet, in denen die Langzeiteffekte mit  $\varphi = 2$  bereits enthalten sind.

Die Krümmung im massgebenden Querschnitt kann durch Betrachtung der Dehnungsebene einfach ermittelt werden.

Die Näherung  $\varepsilon_{sd} = -\varepsilon'_{sd} = f_{sd} / E_s$  liegt auf der sicheren Seite, wenn der Querschnittswiderstand (Interaktionsdiagramm) mit entsprechenden Dehnungsbegrenzungen ermittelt wird. Ist die Krümmung im massgebenden Querschnitt beim Erreichen des Tragwiderstands kleiner als angegeben, kann bei Bedarf mit dieser Krümmung iteriert werden.

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Ermittlung der Verformungen 2. Ordnung $e_{2d}$ (Grundfall)



Annahme:  $EI = const. = EI(M_{Rd}) = EI_d$

$$\rightarrow \chi_d = \frac{M_d(x)}{EI_d}$$

Arbeitsgleichung:

$$e_{2d} = \int_0^{l_{cr}} \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} \cdot dx = \int_0^{l_{cr}} \chi \cdot \bar{M} \cdot dx = \chi_d \cdot \frac{l_{cr}^2}{4} \cdot \frac{4}{\pi^2} = \chi_d \cdot \frac{l_{cr}^2}{\pi^2}$$

$$\int_0^1 x \cdot \sin(\pi x) dx = \frac{4}{\pi^2} = 0.405$$

(Näherung mit Parabel:  $\frac{5}{12} = 0.417$ )

NB: analytische Herleitung des Integrationsfaktors

$$x = 0 \dots \frac{l_{cr}}{2}; \quad \chi(x) = \chi_d \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l_{cr}}\right); \quad \bar{M}(x) = \frac{x}{2}$$

$$2 \cdot \int_0^{\frac{l_{cr}}{2}} \chi \cdot \bar{M} \cdot dx = 2 \cdot \frac{\chi_d}{2} \cdot \int_0^{\frac{l_{cr}}{2}} x \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l_{cr}}\right) \cdot dx = 2 \cdot \frac{l_{cr}^2}{\pi^2} \cdot \frac{\chi_d}{2} = \chi_d \cdot \frac{l_{cr}^2}{\pi^2}$$

$$M_d = -N_d \cdot e_{2d}(x) \leq M_{Rd}$$

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + N \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$e_{2d}(x) = e_{2d} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l_{cr}}\right)$$

Die Verformungen 2. Ordnung werden mithilfe der Arbeitsgleichung ermittelt; der Integrationsfaktor  $c = \pi^2$  entspricht dabei dem Grundfall eines einfachen Balkens, dessen 1. Eigenform einer Sinuskurve mit dem Maximum in Feldmitte entspricht (unter Annahme konstanter Biegesteifigkeit  $EI$ ). Aufgrund der Exzentrizität zur idealen Stabachse entsteht ein zusätzlich wirkendes Moment  $M_d$ ; der Krümmungsverlauf ist entsprechend affin zur Auslenkung. Die maximale Durchbiegung kann nun mit der Arbeitsgleichung ermittelt werden (Belastungszustand mit Einzellast in der Mitte). Der Integrationsfaktor ergibt sich aus der Integration einer Sinuskurve über ein Dreieck; näherungsweise kann der Verlauf der Krümmungen als Parabel angenommen werden, was nur eine geringe Abweichung aufweist.

In vielen Fällen genügt die Abschätzung von  $c = \pi^2$ ; im Allgemeinen ist der Integrationsfaktor jedoch von der Belastung 1. Ordnung abhängig (siehe nächste Folie), da diese die Momentenbeanspruchung und somit den Verlauf der Verformungen massgeblich beeinflussen.

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung 
$$e_{2d} = \int_0^{l_{cr}} \chi \bar{M} dx = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c}$$

Der Integrationsfaktor  $c$  ergibt sich für eine allgemeine Belastung (aus mehreren Grundfällen  $i$  zusammengesetzt) zu

$$c = \alpha \cdot \pi^2 + (1 - \alpha) \frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} \quad \alpha = \frac{N_d}{N_{cr,d}} \quad N_{cr,d} = \frac{\pi^2 EI_d}{l_{cr}^2}$$

Vereinfachend darf dabei immer  $c = \pi^2$  gesetzt werden (SIA 262, 4.3.7.12).

Die Werte  $c_i$  der einzelnen Grundfälle folgen in Abhängigkeit des statischen Systems und der Belastung durch Anwenden der Arbeitsgleichung:

$l_{cr} = l$				$l_{cr} = 2l$			
$c_i = \pi^2$	$c_i = 8$	$c_i = 12$	$c_i = 9.6$	$c_i = \pi^2$	$c_i = 8$	$c_i = 12$	$c_i = 16$

Die Abbildung zeigt das Vorgehen zur Ermittlung der Integrationskonstante  $c$ , deren Wert für übliche statische Systeme und Belastungen («Grundfälle») unten angegeben ist. Man erkennt, dass die Näherung  $c = \pi^2$  für diese Fälle meist auf der sicheren Seite liegt.

Es ist zudem angegeben, wie die Integrationskonstante in allgemeinen Fällen (mehrere Grundfälle kombiniert) genauer abgeschätzt werden kann (in der Praxis wird  $c = \pi^2$  meist verwendet). Die Herleitung dieser Formel folgt auf der nächsten Seite.



# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Druckglieder – Nachweis der Tragsicherheit

Verformung zweiter Ordnung

Herleitung mit Vergrößerungsfaktor  $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{N_d}{N_{cr,d}}}$  (→ Vianello)

$$e_{2d} = \frac{\sum e_{1di}}{1 - \alpha} = \frac{\sum \frac{M_{di} l_{cr}^2}{EI_d c_i}}{1 - \alpha} = \frac{\chi_d l_{cr}^2}{c}$$

$$\chi_d = \frac{-N_d e_{2d} + \sum M_{di}}{EI_d}$$

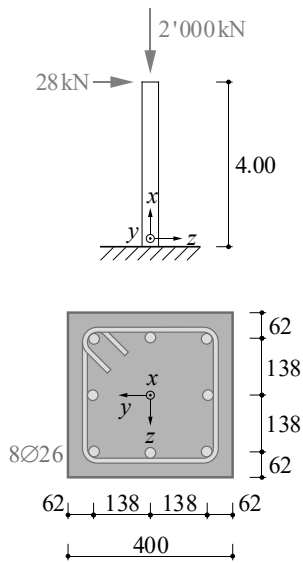
$$N_{cr,d} = -\frac{\pi^2 EI_d}{l_{cr}^2}$$

$\sum M_{di} = M_{d0} + M_{d1} = -N_d \cdot e_{0d} + M_{d1}$   
(→ inkl. geometrische Imperfektionen)

$$\rightarrow c = \frac{\chi_d l_{cr}^2}{e_{2d}} = \frac{(1 - \alpha)(-N_d e_{2d} + \sum M_{di})}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} = -\frac{N_d \pi^2 l_{cr}^2}{\pi^2 EI_d} + (1 - \alpha) \frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} = \alpha \cdot \pi^2 + (1 - \alpha) \frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}}$$

## Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Beispiel ([1], S. 3.29), Kragstütze



- Stahlbetonstütze,  $a = b = 400$  mm
- Beton C30/37, Betonstahl B500B
- 8 Längsstäbe  $\varnothing = 26$  mm,  $A_{s,x} = 8 \cdot 531 = 4248$  mm<sup>2</sup>
- Bügelbewehrung  $\varnothing_c = 12$  mm,  $c_{nom} = 35$  mm
- Eigengewicht der Stütze wird vernachlässigt

Näherung SIA 262:  $\chi_d = \frac{2f_{sd}}{E_s} = 15.4$  mrad/m

$$e_{0d} = \frac{0.01 l_{cr}}{\sqrt{l}} = 20 \text{ mm } (> d/30)$$

$$e_{1d} = -M_{1d} / N_d = 4 \cdot 28 / 2'000 = 56 \text{ mm}$$

$$e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{\pi^2} = 99.7 \text{ mm}; \quad c = \pi^2$$

$$M_d = -N_d (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d}) = 367 \text{ kNm}$$

Interaktionsdiagramm mit  $(M_d, N_d) = (367 \text{ kNm}, -2'000 \text{ kNm})$

→ nicht ok, Iteration (oder Erhöhung der Bewehrung)!

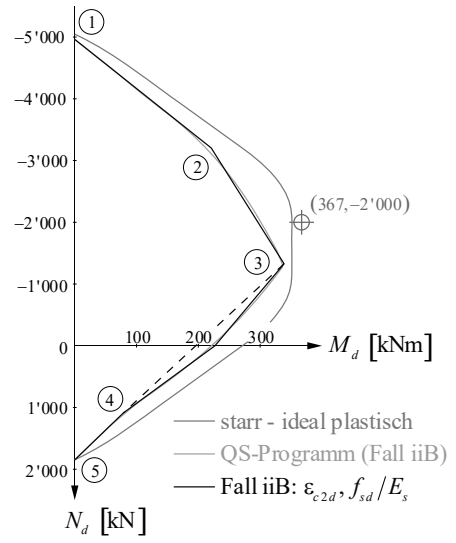
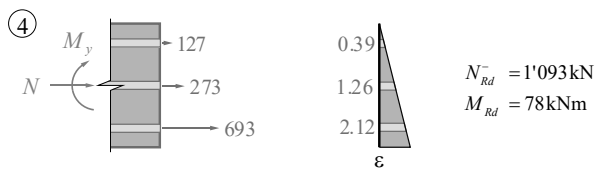
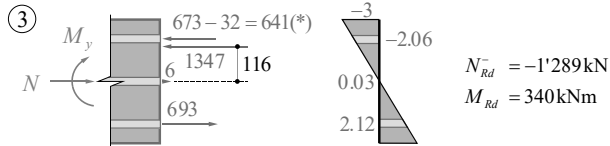
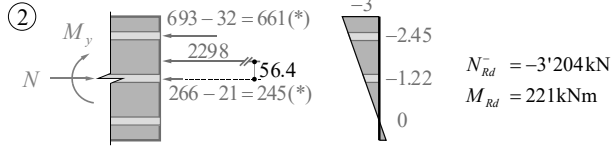
Auf dieser und den nächsten Seiten wird das Vorgehen bei der Stützenbemessung (resp. dem Tragsicherheitsnachweis) an einem Beispiel erläutert.

Dabei kann die Tragsicherheit mit der ersten Näherung ( $c = \pi^2$ ,  $\varepsilon_{sd} = -\varepsilon'_{sd} = f_{sd} / E_s$ ) nicht nachgewiesen werden.

# Biegung und Normalkraft – Interaktionsdiagramme

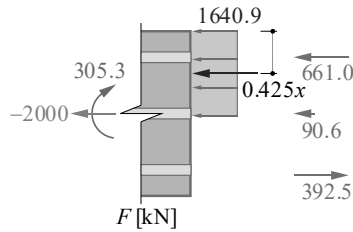
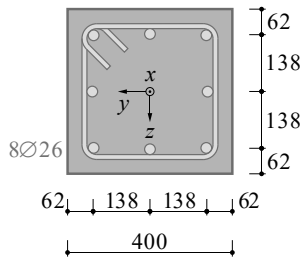
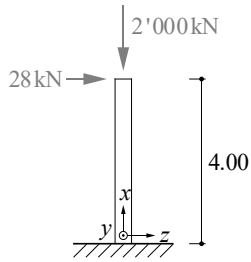
## Interaktionsdiagramm mit Dehnungsbegrenzungen (Beispiel 3.10 aus [1])

- Siehe Beispiel 3.1: Reiner Druck/Zug ①  $N_{Rd} = -4963 \text{ kN}$ , ⑤  $N_{Rd} = 1878 \text{ kN}$
- Weitere Punkte (Druckglied, Ebenen iiB):

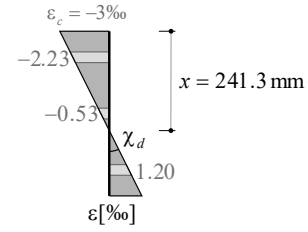


## Biegung und Normalkraft – Druckglieder

### Beispiel ([1], 3.29), Kragstütze



$$M_{Rd} = 305.3 \text{ kNm}$$



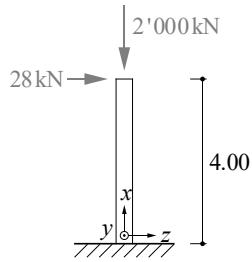
$$\chi_d = \frac{3}{241.3} = 12.43 \text{ mrad/m}$$

- Gleiches Beispiel wie auf Folie 38/39, aber genauere Untersuchung mit Biege- und Normalkraft sowie zugehöriger Dehnungsebene (Dehnungsebene iterativ bestimmt)
- Biege- und Normalkraftgrößen größer als bei Bestimmung aus Sekante zwischen anderen Dehnungsebenen
- Krümmung kleiner als mit Näherung nach SIA 262
- Tragsicherheitsnachweis gerade knapp i.O. (bei Betrachtung als einfache Biegung,  $M_z = 0$ )

Mit einer genaueren Untersuchung (Krümmung entsprechend Dehnungsebene bei Erreichen des Querschnittswiderstands, bessere Näherung der Integrationskonstanten  $c$ ) kann der Nachweis der Tragsicherheit dagegen gerade knapp erbracht werden (siehe folgende Folien).

## Biegung und Normalkraft – Druckglieder

Beispiel ([1], 3.29), Kragstütze



Geometrische Imperfektionen

$$l_{cr} = 8 \text{ m} \quad e_{0,d} = \frac{\alpha_l l_{cr}}{2} = \frac{0.01 l_{cr}}{\sqrt{l}} \cdot \frac{8}{2} = \frac{8}{200\sqrt{4}} = 20 \text{ mm} \quad \left( > 11.3 \text{ mm} = \frac{d}{30} \right)$$

Planmässige Lage

$$M_{1,d} = 28 \cdot 4 \text{ m} = 112 \text{ kNm} \quad e_{1,d} = \frac{M_{1,d}}{-N_d} = \frac{112}{2000} = 56 \text{ mm}$$

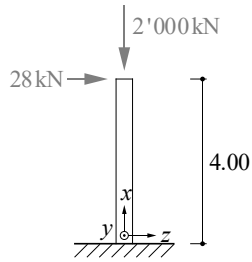
Verformung zweiter Ordnung

$$EI_d = \frac{M_{Rd}}{\chi_d} = \frac{305.3}{0.01243} = 24.56 \text{ MNm}^2$$

$$N_{cr,d} = \frac{\pi^2 EI_d}{l_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 24.56}{8^2} = 3.788 \text{ MN} \quad \rightarrow \alpha = \frac{N_d}{N_{cr,d}} = \frac{2'000}{3'788} = 0.528$$

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Beispiel ([1], 3.29), Kragstütze



$$\Sigma M_{di} = M_{d0} + M_{d1} = -N_d \cdot e_{0d} + M_{d1}$$

$$c = \alpha \cdot \pi^2 + (1 - \alpha) \frac{\Sigma M_{di}}{\Sigma \frac{M_{di}}{c_i}} = 0.528 \cdot \pi^2 + (1 - 0.528) \cdot \frac{40 + 112}{\frac{40}{\pi^2} + \frac{112}{12}} = 10.571 \quad (\text{Vergleich: } \pi^2 = 9.870)$$

$$e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c} = 12.43 \cdot \frac{8^2}{10.571} = 75.3 \text{ mm}$$

$$M_d = -N_d \cdot (e_{0d} + e_{1d} + e_{2d}) = 2000 \cdot (0.0200 + 0.0560 + 0.0753) = 302.6 \text{ kNm} < M_{Rd} \approx 305.3 \text{ kNm}$$

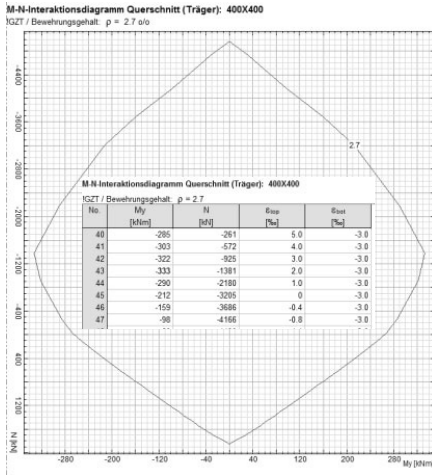
Momente erster Ordnung (inkl. geometrische Imperfektionen)

$M_{d0} = 2MN \cdot 20mm = 40kNm$	$M_{d1} = 28kN \cdot 4m = 112kNm$
$c_i = \pi^2$	$c_i = 12$

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

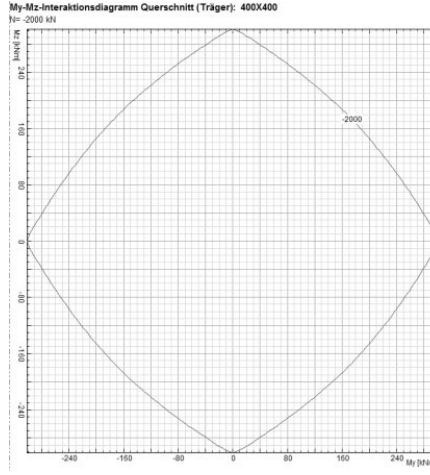
## Tragsicherheitsnachweis mit Computerprogrammen

Interaktionsdiagramm ( $M_{Rdy} - N_{Rd}$ )  
für  $M_z = 0$  (Tabelle: Randdehnungen  $\rightarrow \chi_d$ )



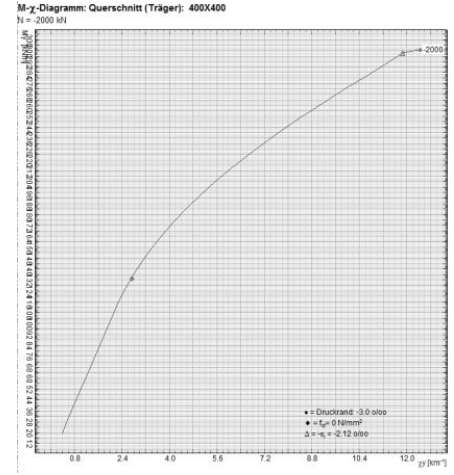
07.11.2024

Interaktionsdiagramm ( $M_{Rdy} - M_{Rdz}$ )  
für  $N = N_d = -2'000$  kN



ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

$M_{Rdy} - \chi_y$ -Diagramm für  $M_z = 0$  und  
 $N = N_d = -2'000$  kN ( $\rightarrow \chi_d$ )



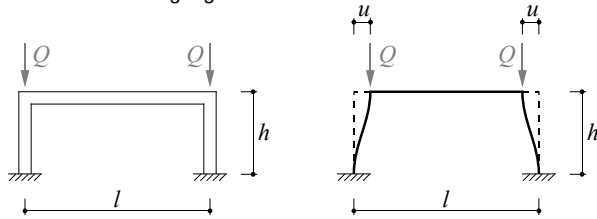
47

Die Abbildung zeigt Beispiele für mit einem Querschnittsprogramm ermittelte Interaktionsdiagramme (mit Tabelle, aus welcher die zu jedem Punkt der Kurve gehörende Krümmung ermittelt werden kann) und Momenten-Krümmungs-Diagramme, die als Grundlage für die Bemessung nach SIA 262 dienen können.

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Druckglieder – schlanke Stützen unter Last und Zwang

Infolge Vorspannung, Temperatureinwirkung, Schwinden des Betons, Fundamentverdrehungen, etc. erfahren Stützen ausser Lasten im allgemeinen auch Zwängungen.



Stützenkopfverschiebungen z.B. durch:

- Vorspannung  $P$  des Riegels
- Verkürzung  $\alpha_T \Delta_T l$  des Riegels (Temperatur)
- Verkürzung  $\epsilon_{cs} l$  des Riegels (Schwinden)

Um auf der sicheren Seite zu bleiben, muss für den Tragsicherheitsnachweis mit einem unteren Grenzwert der Steifigkeit gerechnet werden, sonst werden die Effekte 2. Ordnung unterschätzt.

Umgekehrt sind die Effekte von Zwängungen (im Gebrauchszustand) umso grösser, je höher die Steifigkeit ist, d.h. um solche Einflüsse nicht zu unterschätzen, muss von einem oberen Grenzwert der Steifigkeit ausgegangen werden.

Somit sind in solchen Fällen grundsätzlich zwei Nachweise zu führen:

- Tragsicherheitsnachweis für  $Q_d$  und zugehörige Zwängung mit  $EI_{min}$
- Spannungsnachweis für  $u_d$  und zugehörige Last  $Q$  mit  $EI_{max}$

## Ergänzende Bemerkung

Bei der Ermittlung der Zwangsbeanspruchungen kann die (in der Regel günstige) Wirkung der Langzeiteffekte (Kriechen resp. Relaxation des Betons) berücksichtigt werden. Diese Effekte bewirken, dass sich die Zwängungen im Laufe der Zeit abbauen resp. nicht den elastisch ermittelten Wert erreichen. Nähere Angaben siehe Vorlesung Advanced Structural Concrete.

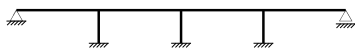


# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

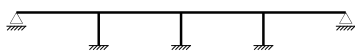
## Druckglieder – Gesamtstabilität von Stützensystemen

Rahmensysteme sind oft längs nicht fixiert, sondern schwimmend gelagert. Die Lage des Bewegungszentrums hängt dann von den Stützensteifigkeiten ab, und neben der Stabilität der einzelnen Stützen ist auch die Gesamtstabilität nachzuweisen.

(NB: Bei weichem Baugrund ist die Nachgiebigkeit der Fundationen zu berücksichtigen, d.h. Drehfedern statt starre Einspannung am Stützenfuss oder entsprechende Annahme von  $l$  resp.  $l_{cr}$ )



längs fixiert → Gesamtstabilität i.O.  
(bei ausreichendem Widerstand des festen Lagers)



schwimmend gelagert → Gesamtstabilität?

$u = \frac{H_d l^3}{3EI(1-\alpha)}$ 
 $u = \frac{H_d l^3}{12EI(1-\alpha)}$ 
 $H_d = -\frac{12u}{\pi^2 l} (N_{cr,d} - N_d)$

Allgemeiner Fall:  
 •  $k \rightarrow 0$ : oben gelenkig  
 •  $k \rightarrow \infty$ : oben eingespannt

mit  $\alpha = \frac{N_d}{N_{cr,d}}$ ;  $N_{cr,d} = -\frac{\pi^2 EI_d}{l^2 \cdot \left(4 - \frac{3}{1 + \frac{EI_d}{k \cdot l}}\right)}$

Bei der Untersuchung der Systemstabilität schwimmend gelagerter Systeme muss in einem ersten Schritt für jede Stütze die Steifigkeit (Kopfverschiebung für gegebene Horizontalkraft resp. Horizontalkraft bei gegebener Kopfverschiebung) ermittelt werden (Herleitung: siehe Baustatik).

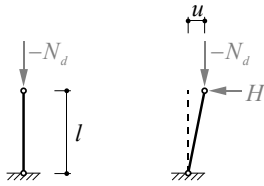
Zu beachten ist, dass die Stützennormalkräfte  $N_{cr,d}$  und  $N_d$  negativ sind (Druck). Für den gewöhnlichen Fall  $|N_d| < |N_{cr,d}|$  resultiert somit eine positive Horizontalkraft, d.h. wie erwartet ist eine Horizontalkraft in Richtung der Kopfverschiebung erforderlich, um den Stützenkopf zu verschieben (allgemein:  $u$  und  $H$  haben gleiches Vorzeichen).

Für  $|N_d| > |N_{cr,d}|$  (was grundsätzlich zu vermeiden ist), resultiert eine rückhaltende Horizontalkraft, d.h. der Stützenkopf muss zurückgehalten werden, um ein Ausknicken zu verhindern (allgemein:  $u$  und  $H$  haben unterschiedliches Vorzeichen). Solche Stützen (mit  $|N_d| > |N_{cr,d}|$ ) haben eine destabilisierende Wirkung auf das Gesamtsystem.

# Biegung und Normalkraft – Druckglieder

## Druckglieder – Gesamtstabilität von Stützensystemen

Pendelstützen haben eine treibende Wirkung, d.h. sie verursachen eine destabilisierende Kraft  $H$ :



$$H = -\frac{u \cdot N_d}{l}$$

$$H_d + u \cdot \frac{12}{\pi^2} \sum_i \frac{N_{cr,di} - N_{di}}{l_i} - u \cdot \sum_j \frac{N_{dj}}{l_j} = 0$$

Besonders gefährlich sind kurze Pendelstäbe. Sie ergeben eine grosse treibende Wirkung. Darauf ist vor allem im Bauzustand zu achten (Lehrgerüste → SIA 262, 6.1.4: kurze Pendelstäbe vermeiden, sonst treibende Kräfte berechnen und zusätzlich zu den üblichen 3% der Vertikallasten als Horizontallast ansetzen!)

Für den Nachweis der Gesamtstabilität des Stützensystems wird zuerst die Kopfverschiebung aus der horizontalen Gleichgewichtsbedingung ermittelt (Berücksichtigung rückhaltende Stützen nach allgemeinem Fall, siehe vorherige Folie).

Aus der Kopfverschiebung folgt der Horizontalschub der einzelnen Stützen. Damit ist die Beanspruchung der Stützen bekannt (Normalkraft, Horizontalschub, Biegemomente aus Horizontalschub sowie 2. Ordnung infolge Kopfverschiebung  $u$ ), und die Tragsicherheit der Stützenquerschnitte kann nachgewiesen werden.

$H_d$ : Horizontalkraft aus z.B. Anfahr- oder Bremskräften, Streichwind auf Träger, Längswind auf Stützen, Lagerreibung (rückhaltend), Erdbeben

$i$ : stabilisierende Stützen

$j$ : Pendelstützen (treibende Wirkung)

Achtung:  $N_{d,i}$ ,  $N_{cr,di}$  und  $N_{dj}$  sind negativ!

Neben Stützen mit  $|N_d| > |N_{cr,d}|$  wirken sich vor allem Pendelstützen nachteilig auf die Gesamtstabilität aus.

## Biegung und Normalkraft – Zusammenfassung

- Das Tragverhalten von Stahlbetondruckgliedern unter Biegung und Normalkraft kann aufgrund der Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte unter Verwendung beliebiger Spannungs-Dehnungsdiagramme für den Beton und die Bewehrung erfasst werden.
- Schnittgrößen ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) können aus gegebenen Verformungsgrößen ( $\epsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) durch Integration ermittelt werden. Die umgekehrte Aufgabenstellung im allgemeinen eine Iteration.
- Moderate Druckkräfte in Druckgliedern führen zu einer Erhöhung des Rissmoments (Dekompressionsmoments) sowie des Biege widerstands und zu einer Reduktion des Verformungsvermögens.
- Der Biege widerstand von Druckgliedern wird mit  $M$ - $N$ -Interaktionsdiagrammen beschrieben.
- Mit einer Umschnürungsbewehrung kann die axiale Druckfestigkeit des Kernbetons und vor allem die zugehörige Stauchung wesentlich gesteigert werden. Werden diese Eigenschaften ausgenutzt, ist mit abgeplatzttem Überdeckungsbeton zu rechnen (siehe Kapitel 3.1).
- Bei der konstruktiven Durchbildung von Druckgliedern sind die entsprechenden Regeln für die Bewehrungsführung sorgfältig zu beachten.
- Beim Nachweis der Tragsicherheit von Druckgliedern sind ausser den Schnittgrößen 1. Ordnung geometrische Imperfektionen sowie Einflüsse 2. Ordnung zu berücksichtigen.
- Bei Stützen unter Last- und Zwangsbeanspruchungen sind grundsätzlich ein Tragsicherheitsnachweis (mit unterem Grenzwert der Biegesteifigkeit) und ein Spannungsnachweis (mit oberem Grenzwert der Biegesteifigkeit) zu erbringen.
- Bei der Untersuchung der Gesamtstabilität von Rahmensystemen sind stabilisierende und treibende Wirkungen zu unterscheiden. Besondere Vorsicht ist bei kurzen Pendelstützen angezeigt.