In diesem Anwendungsmuster wird anhand eines 1 m breiten Ausschnitts der Platte aus dem Kolloquium 2 das ungerissene und gerissene Biegetragverhalten eines Stahlbetonträgers analysiert. Es werden dabei zwei verschiedene Belastungszustände betrachtet:

1) q = 5 kN/m: über die ganze Länge ungerissener Träger
2) q = 15 kN/m: teilweise gerissener Träger mit ungerissenen und gerissenen Bereichen

<u>Baustoffe</u>

Beton C25/30 $f_{cd} = 16.5\,\text{MPa};\quad f_{cm} = 33\,\text{MPa};\quad f_{ctm} = 2.6\,\text{MPa}$

$k_E = 10'000;\quad E_{cm} = k_E \sqrt[3]{f_{cm}} = 32.08\,\text{GPa}$

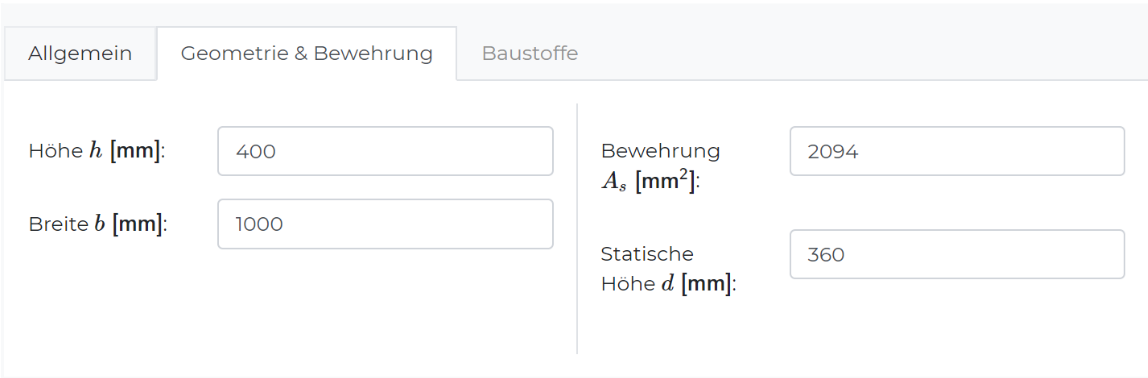
Betonstahl B500B $f_{sd} = 435\,\text{MPa}$

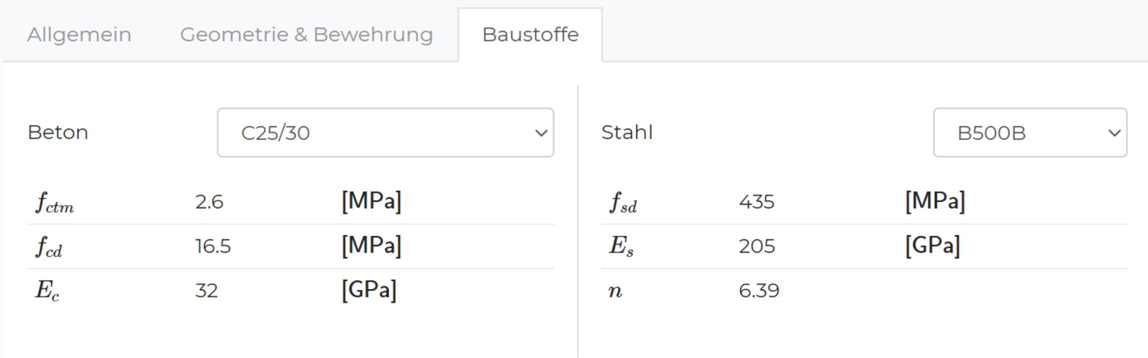
$E_s = 205\,\text{GPa}$

Wertigkeit $n = \dfrac{E_s}{E_c} = 6.4$

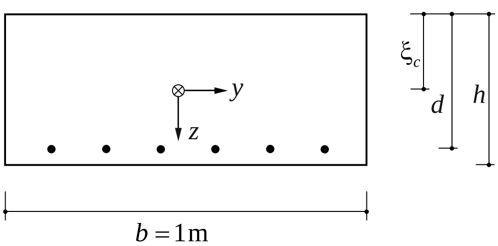
<u>Geometrie</u>

Bewehrung $Ø = 20\,\text{mm}$ $s = 150\,\text{mm}$ $A_s = \dfrac{Ø^2 \cdot \pi}{4 \cdot s} = 2094\,\text{mm}^2$ $c_{nom} = 30\,\text{mm}$





Ideelle QS-Werte:



$$A_i = A_c + A_s \cdot (n-1) = 0.4113\,\text{m}^2$$

$$\xi_c = \frac{A_c \cdot \frac{h}{2} + A_s \cdot (n-1) \cdot d}{A_i} = 204.4\,\text{mm}$$

Ungerissene Biegesteifigkeit:

$$I_{yi} = \frac{h^3 \cdot b}{12} + \left(\xi_c - \frac{h}{2}\right)^2 \cdot A_c + (d - \xi_c)^2 \cdot A_s \cdot (n-1) = 5.61 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$EI_y{}^{I} = E_c \cdot I_{yi} = 180.08 \text{MNm}^2$$

Gerissene Biegesteifigkeit:

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = 0.58\,\%$$

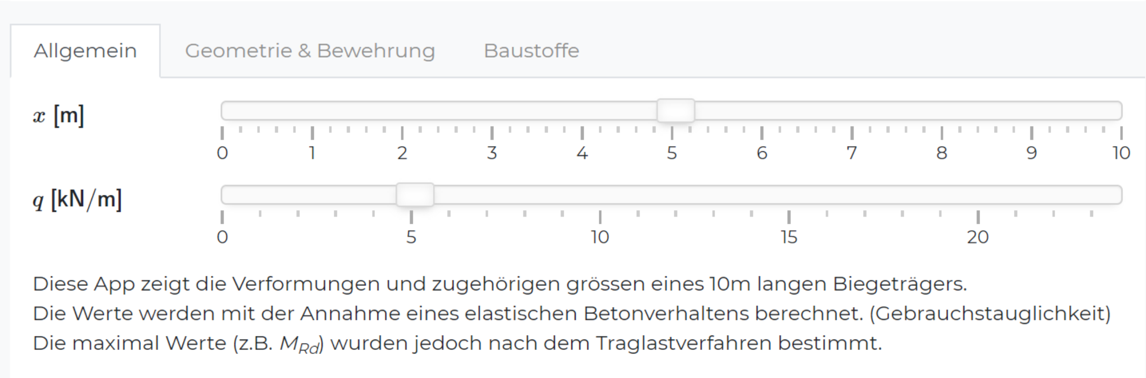
$$x = d \cdot \left(\sqrt{(\rho \cdot n)^2 + 2 \cdot \rho \cdot n} - \rho \cdot n\right) = 85.69\,\text{mm}$$

$$EI_y{}^{II} = A_s \cdot E_s \cdot (d - x) \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right) = 39.03\,\text{MNm}^2\,/\,\text{m}$$

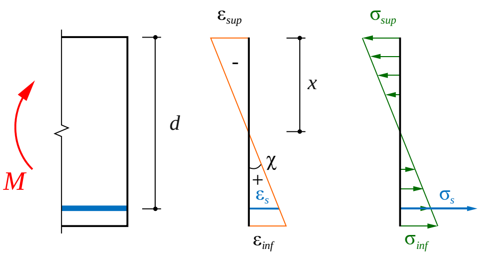
Rissmoment des Betons:

$$M_r = \frac{I_{yi}}{h - \xi_c} \cdot f_{ctm} = 74.6\,\text{kNm}$$

1) q = 5 kN/m, ungerissenes Verhalten



Herleitung der Resultate:



Einwirkungsmoment: $M = \frac{qL^2}{8} = 62.5\,\text{kNm} < M_r = 75.3\,\text{kNm}$

Druckzonenhöhe: $x = \xi_c = 204.4\,\text{mm}$

Krümmung: $\chi = \frac{M}{EI_y{}^{I}} = 0.35 \cdot 10^{-6}\ \text{mm}^{-1}$

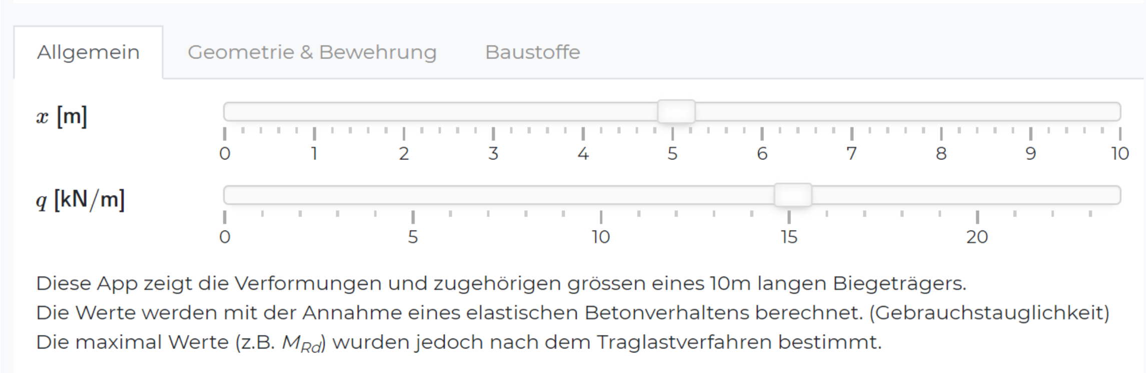
$$\varepsilon_{\text{sup}} = -\chi \cdot \xi_c = 0.071‰ \qquad \sigma_{\text{sup}} = \varepsilon_{\text{sup}} \cdot E_c = -2.3\,\text{MPa}$$

$$\varepsilon_{\text{inf}} = \chi \cdot (h - \xi_c) = 0.068‰ \qquad \sigma_{\text{inf}} = \varepsilon_{\text{inf}} \cdot E_c = 2.2\,\text{MPa}$$

$$\varepsilon_s = \chi \cdot (d - \xi_c) = 0.054‰ \qquad \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = 11.1\,\text{MPa}$$

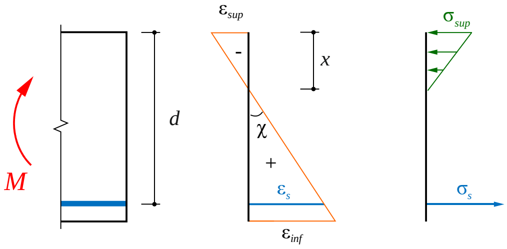
Mittendurchbiegung des ungerissenen Systems: $w = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EI^I} = 3.62\,\text{mm}$

2) q = 15 kN/m, gerissenes Verhalten



Herleitung der Resultate:

NB: Im Gegensatz zum Nachweis der Tragsicherheit, wo angenommen wird, dass die maximale Druckdehnung 3 ‰ beträgt und somit der Rechteck-Spannungsblock angesetzt wird, wird beim Nachweis der Gebrauchstauglichkeit von linear elastischem Betonverhalten unter Druck ausgegangen. Dies bedeutet, dass nicht eine rechteckige Kraft mit Höhe 0.85 x angreift, sondern eine dreiecksförmige Kraft mit Höhe x.



Einwirkungsmoment: $M = \frac{qL^2}{8} = 187.5\text{kNm}$

Druckzonenhöhe: $x = 85.69\,\text{mm}$ (siehe S.2)

Krümmung: $\chi = \frac{M}{EI_y^{II}} = 4.80 \cdot 10^{-6}\ \text{mm}^{-1}$

→

$$\varepsilon_{\text{sup}} = -\chi \cdot x = -0.412\text{‰} \qquad \sigma_{\text{sup}} = \varepsilon_{\text{sup}} \cdot E_c = -13.2\,\text{MPa}$$

$$\varepsilon_{\text{inf}} = \chi \cdot (h - x) = 1.510\text{‰} \qquad \sigma_{\text{inf}} = 0$$

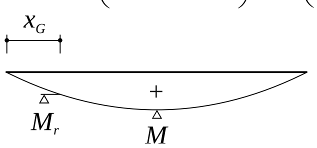
$$\varepsilon_s = \chi \cdot (d - x) = 1.318\text{‰} \qquad \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s = 270.1\,\text{MPa}$$

Mittendurchbiegung des vollständig gerissenen Systems: $w = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EI_y^{II}} = 50.04\,\text{mm}$

Die Berechnung der Durchbiegungen des teilweise gerissenen Balkens erfordert analytische Integration, da über zwei verschiedene Steifigkeitsbereiche integriert werden muss, welche nicht als Standardfälle in den Integrationstabellen vorhanden sind.

Als erstes muss berechnet werden, ab welcher Koordinate x ab dem linken (und rechten) Auflager der Querschnitt reisst. Dies kann über die Parabelgleichung berechnet werden:

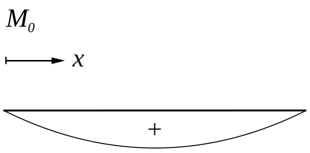
$$x_G = \frac{L}{2}\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{M_r}{M}}\right) = 5\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{74.6}{187.5}}\right) = 1.12\text{m}$$

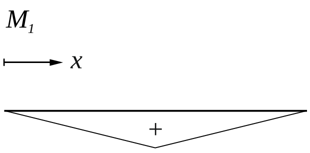


Die Durchbiegungen lassen sich nun mit der Kraftmethode allgemein wie folgt formulieren:

$$w = \int_0^L \frac{M_0\cdot M_1}{EI(x)}dx = 2\cdot\int_0^{L/2}\frac{M_0\cdot M_1}{EI(x)}dx = 2\cdot\int_0^{x_G}\frac{M_0\cdot M_1}{EI^I}dx + 2\cdot\int_{x_G}^{L/2}\frac{M_0\cdot M_1}{EI^{II}}dx$$

Für die Berechnung dieser Integrale müssen die Funktionen von M_0 und M_1 aus Symmetriegründen nur im Bereich $0 \le x \le \frac{L}{2}$ aufgestellt werden:





$$M_0(x) = ax^2 + bx + c \qquad M_0(0) = 0 \qquad M_0(\tfrac{L}{2}) = \frac{qL^2}{8} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(M_0(\tfrac{L}{2})\right) = 0$$

$$\rightarrow \qquad M_0(x) = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{qL}{2}x$$

$$\rightarrow \qquad M_1(x) = \frac{x}{2}$$

$$w = \int_0^L \frac{M_0\cdot M_1}{EI(x)}dx = 2\cdot\int_0^{L/2}\frac{-\frac{1}{4}qx^3+\frac{1}{4}qLx^2}{EI(x)}dx = \frac{2}{EI^I}\cdot\left[-\frac{1}{16}qx^4+\frac{1}{12}qLx^3\right]_0^{x_G} \frac{2}{EI^{II}}\cdot\left[-\frac{1}{16}qx^4+\frac{1}{12}qLx^3\right]_{x_G}^{L/2}$$

$$w = \frac{2}{EI^I}\cdot qx_G{}^3\cdot\left[-\frac{1}{16}x_G+\frac{1}{12}L\right] - \frac{2}{EI^{II}}\cdot qx_G{}^3\cdot\left[-\frac{1}{16}x_G+\frac{1}{12}L\right] + \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI^{II}}$$

$$w = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI^{II}} - \left(\frac{2}{EI^{II}}-\frac{2}{EI^I}\right)\cdot qx_G{}^3\cdot\left[-\frac{1}{16}x_G+\frac{1}{12}L\right]$$

$$w = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI^{II}} - \left(\frac{1}{EI^{II}}-\frac{1}{EI^I}\right)\cdot qx_G{}^3\cdot\left(\frac{1}{6}L-\frac{1}{8}x_G\right)$$

$$w = 50.04\,\text{mm} - 0.65\,\text{mm} = 49.39\,\text{mm}$$

- Durchbiegung für den über die ganze Länge gerissenen Träger
- Korrekturterm für die Berücksichtigung der ungerissenen Randbereiche