1. Einführung

Die Lehrveranstaltung 'Stahlbeton' hat folgende Lernziele:

- Kenntnis der Baustoffe Beton und Betonstahl sowie Verständnis ihres Zusammenwirkens
- Erfassen des Tragverhaltens typischer Bauteile
- Kenntnis elementarer Modellvorstellungen und Fähigkeit zur Anwendung derselben auf einfache Problemstellungen
- sichere Bemessung und sinnvolle konstruktive Durchbildung einfacher Tragwerke.

Inhalt

1. Einführung
2. Biegung
3. Biegung und Normalkraft
4. Querkraft
5. Torsion
6. Scheiben
7. Vorspannung
8. Platten

Zusätzlich zum vorliegenden Skript stützt sich die Lehrveranstaltung namentlich auf folgende Unterlagen:

- Marti, P., "Baustatik", Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 2011.
- Marti, P., Mousch, O. und Schilling, B., "Ingenieur-Betonbau", vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2005, 225 pp.
- Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, "Norm SIA 262, Betonbau", Zürich, 2003, 90 pp.

Zur Einführung wird auf S. 42-49 des Buchs 'Ingenieur-Betonbau' verwiesen (Kapitel 'Beton', 'Bewehrung', 'Festigkeit und Verformung' sowie 'Verbund'). Eine Darstellung des geschichtlichen Hintergrunds des Betonbaus findet sich auf S. 2-39 dieses Buchs.

Fachausdrücke und Bezeichnungen werden durchwegs nach SIA 262 (Ziffer 1) verwendet und nach Bedarf sukzessive eingeführt. Die entsprechenden Definitionen werden im vorliegenden Skript im allgemeinen nicht wiederholt.

2. Biegung

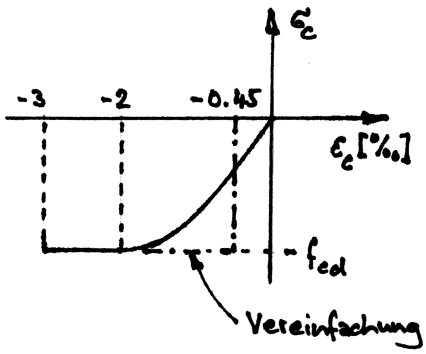
2.1 Allgemeines

Der Fall einer reinen oder vorherrschenden Biegebeanspruchung tritt in der Praxis sehr häufig auf. Zur Einführung in die Problematik wird auf S. 50-51 des Buchs 'Ingenieur-Betonbau' verwiesen.

Bei der Querschnittsanalyse geht man im allgemeinen von folgenden Annahmen aus (SIA 262, 4.3.2.3):

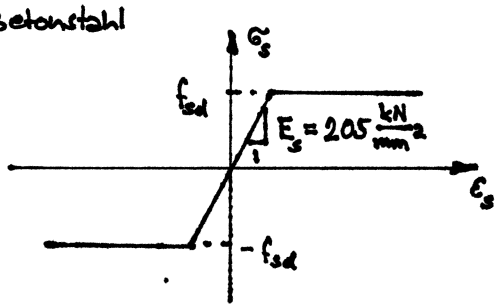
- die Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur Stabachse
- die Bewehrung überträgt nur Zug- und Druckkräfte in ihrer Richtung
- die Zugfestigkeit des Betons wird vernachlässigt
- die Spannungs-Dehnungs-Diagramme des Betons und der Bewehrung werden wie folgt in Rechnung gestellt:

Beton



(SIA 262, Fig. 11, Tab. 8, 4.2.1.5/6)

Betonstahl



(SIA 262, Fig. 15, Tab. 9, 4.2.2.5/6)

Der Bemessungswert f_{cd} der Betondruckfestigkeit und der Bemessungswert f_{sd} der Fliessgrenze von Betonstahl betragen (SIA 262, 2.3.2):

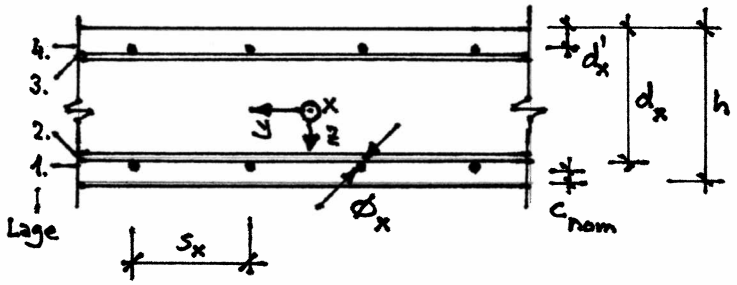
$$f_{cd} = \frac{\eta_{fc} f_{ck}}{\gamma_c} \qquad f_{sd} = \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$$

$$\left(\eta_{fc} = \sqrt[3]{\frac{30}{f_{ck}}} \leq 1,\ \gamma_c = 1.5 \right) \qquad \left(\gamma_s = 1.15 \right)$$

2.2 Rechteckquerschnitte

2.2.1 Konstruktive Durchbildung

Ein grosser Teil des Betons wird in der Praxis für Platten eingesetzt (z.B. für Böden und Decken). Diese sind in der Regel nahe ihrer Oberflächen orthogonal bewehrt, weisen also vier Bewehrungslagen auf. Oft ist die Beanspruchung in einer Richtung dominant, was die Anordnung einer entsprechenden Hauptbewehrung (möglichst in äusserster Lage) nach sich zieht. Wenn sichergestellt ist, dass auf einer Plattenseite keine Zugkräfte auftreten, kann die entsprechende Bewehrung entfallen (z.B. keine obere Bewehrung in Bereichen mit zweiachsig positiven Hauptmomenten).



Plattendicke h
statische Höhe d, d'
Stabdurchmesser $\varnothing$
Bewehrungsüberdeckung c_{nom}
Stababstand s
Grösstkorn D_{max}

Die Bewehrungsüberdeckung c_{nom} (ca. 20 bis 60 mm) wird aufgrund der Expositionsklasse (SIA 262, Tab. 17) und der Feuerwiderstandsklasse (SIA 262, Tab. 15) festgelegt. Zudem ist $c_{nom} \geq \varnothing$ und $c_{nom} \geq D_{max}$ einzuhalten (SIA 262, 5.2.2); massgebend ist der grösste Wert.

Der lichte Stababstand $s - \varnothing$ soll $\geq \varnothing$, $\geq D_{max}$ und ≥ 20 mm betragen (SIA 262, 5.2.3.2). Für den Stababstand s werden in der Regel runde Werte gewählt: 75, 100, 125, 150, 200, 250 oder 300 mm. In den Zonen grösster Beanspruchung sind für die Hauptbewehrung die Bedingungen $s \leq 1.2\,h$ und $s \leq 300$ mm einzuhalten (SIA 262, 5.5.3.1).

Der Stabdurchmesser $\varnothing$ bewegt sich zwischen 6 und 40 mm. Übliche

Grössen sind ϕ = 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 26 und 30 mm. Stäbe mit $\phi > 30$ mm sollen nur in Ausnahmefällen verwendet werden (SIA 262, 5.2.1).

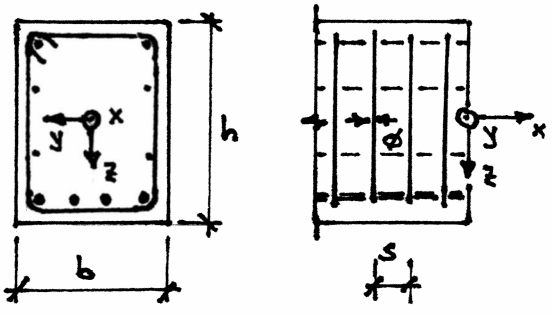
Die Stablängen sind aus Transport- und Montagegründen beschränkt, was die Anordnung von Übergreifungsstössen erforderlich macht. Diese sind möglichst in Zonen geringer Beanspruchung anzuordnen und für $\phi > 12$ mm derart zu versetzen, dass in einem Querschnitt höchstens die Hälfte der Bewehrungskraft von einer Stossverbindung zu übertragen ist (SIA 262, 5.2.6.2/3). Die Übergreifungslänge muss mindestens etwa 50 ϕ entsprechen (SIA 262, Tab. 18, 5.2.6.5).

Die statische Höhe d folgt aus

$$d = h - c_{nom} - \frac{\phi}{2}$$

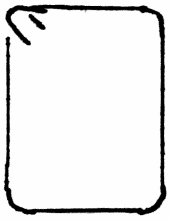
bei einer einlagigen Bewehrung. Im allgemeinen ist sie gleich dem Abstand der Schwerachse der Zugbewehrung vom gedrückten Querschnittsrand. Zur genauen Identifikation wird bei d, ϕ und s der entsprechende Index für die Bewehrungsrichtung hinzugesetzt (x bzw. y). Zudem werden obenliegende Bewehrungen mit einem hochgesetzten Strich (') bezeichnet.

Bei Balken sind stets Bügel anzuordnen, deren Abstand 25 ϕ nicht übersteigt, und die die Längszugbewehrung umfassen. Ihre Querschnittsfläche muss mindestens 0.2 % der zugehörigen Betonquerschnittsfläche betragen, und sie müssen derart verankert sein, dass die Bügelkräfte über die Höhe des Hebelarms der inneren Kräfte wirksam werden können (SIA 262, 5.5.2.2/4).

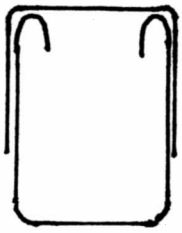


$$s \leq 25\,\phi \quad , \quad \frac{\phi^2 \pi}{2bs} \geq 0.2\,\%$$

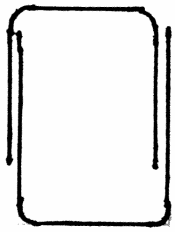
Alternative Bügelformen:



geschlossene Bügel
mit 135°-Haken
optimale Verankerung
Einfädeln Längsbewehrung



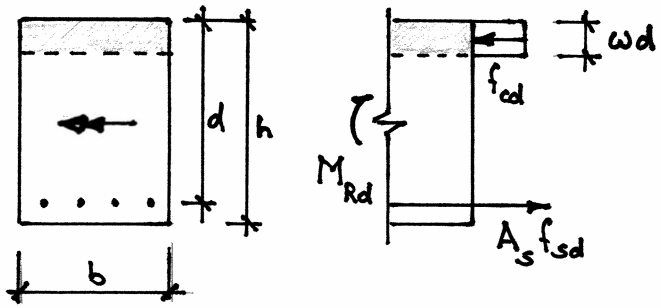
U-Bügel mit
Endhaken,
geschlossen mit
Steckbügel
einfachere Montage der
Längsbewehrung,
Achtung Stosslänge



Steckbügelpaar
einfachere Montage der
Längsbewehrung,
Achtung Stosslänge

2.2.2 Biegewiderstand

a) Keine Bewehrung auf Biegedruckseite



A_s Querschnittsfläche der Bewehrung

M_{Rd} Bemessungswert des Biegewiderstands

ω mechanischer Bewehrungsgehalt
$= A_s f_{sd} / (b d f_{cd})$

N.B. vereinfachte rechteckförmige Betondruckspannungsverteilung

Gleichgewicht der Längskräfte am Schnittkörper erfordert

$$A_s f_{sd} = \omega d b f_{cd}$$

Mit dem Hebelarm $d(1-\omega/2)$ des inneren Kräftepaars folgt

$$\underline{M_{Rd} = A_s f_{sd}\, d(1-\omega/2) = f_{cd}\, b d^2 \omega (1-\omega/2)} \qquad (2.1)$$

und der Biegetragsicherheitsnachweis lautet

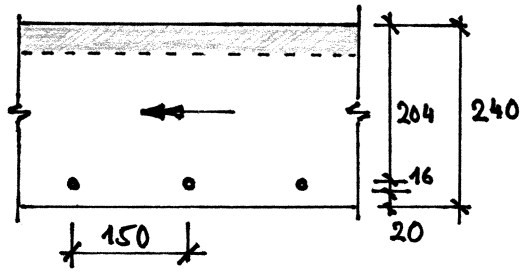
$$\underline{M_d \leq M_{Rd}} \qquad (2.2)$$

Auflösen der Formel für M_{Rd} nach ω bringt

$$\underline{\omega = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_{Rd}}{b d^2 f_{cd}}}} \qquad (2.3)$$

BEISPIEL 2.1

Eine Stahlbetonplatte aus Beton C 25/30 ist an der Unterseite mit Stäben $\phi = 16$ mm aus Betonstahl B500B bewehrt. Die Plattendicke beträgt $h = 240$ mm, die Bewehrungsüberdeckung $c_{nom} = 20$ mm und der Stababstand $s = 150$ mm. Man ermittle den auf die Einheitsbreite $b = 1$ m bezogenen Bemessungswert m_{Rd} des Biegewiderstands.



N.B. Berechnung erfolgt auf der Grundlage des Nennwerts von ϕ (SIA 262, 4.2.2.4)

$$d = 240 - 20 - 16/2 = 212 \text{ mm}$$

$$f_{cd} = 16.5 \text{ N/mm}^2$$

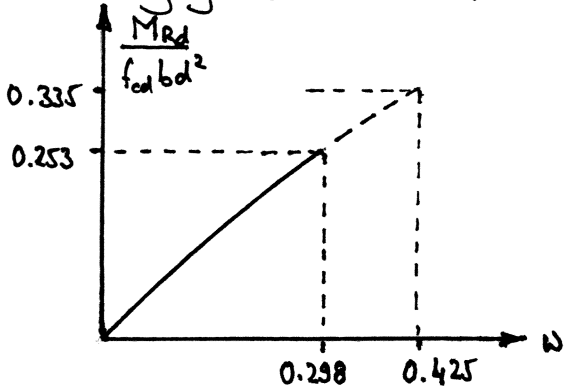
$$f_{sd} = 435 \text{ N/mm}^2$$

$$a_s = \frac{\phi^2 \pi}{4 s} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} = 1340 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\omega = \frac{a_s f_{sd}}{d f_{cd}} = \frac{1.340 \cdot 435}{212 \cdot 16.5} = 0.167$$

$$\underline{\underline{m_{Rd} = f_{cd} d^2 \omega (1 - \omega/2) = 113.3 \text{ kN}}}$$

Um ein ausreichendes plastisches Verformungsvermögen sicherzustellen ist die Druckzonenhöhe im allgemeinen auf $0.35\,d$ zu beschränken. Druckzonenhöhen $> 0.5\,d$ sind zu vermeiden (SIA 262, 4.1.4.2.5/6). Wegen der angenommenen vereinfachten rechteckförmigen Betondruckspannungsverteilung erhält man damit folgende obere Schranken für den mechanischen Bewehrungsgehalt: $\omega \leq 0.85 \cdot 0.35 = 0.298$ bzw. $0.85 \cdot 0.5 = 0.425$.



$0.425 (1 - 0.425/2) = 0.335$

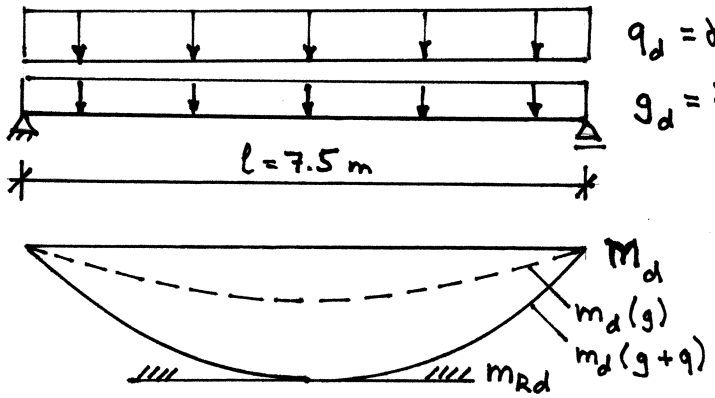
$0.298 (1 - 0.298/2) = 0.253$

Aus der Bedingung $M_{Rd} \leq 0.253\, f_{cd}\, b d^2$ (bzw. $0.335\, f_{cd}\, b d^2$) lässt sich eine Bedingung für die minimal erforderliche statische Höhe ableiten:

$$d \geq 1.99 \sqrt{\frac{M_{Rd}}{b\, f_{cd}}} \qquad \left(\text{bzw. } 1.73 \sqrt{\frac{M_{Rd}}{b\, f_{cd}}}\right)$$

BEISPIEL 2.2

Eine 300 mm dicke Platte aus Beton C 25/30 ist als einfacher Balken über 7.5 m gespannt. Ihre Bewehrung aus Betonstahl B500B besteht aus Stäben $\phi = 18$ mm im Abstand $s = 150$ mm. Die Bewehrungsüberdeckung beträgt $c_{nom} = 30$ mm. Ermittle die zulässige gleichmässig verteilte Nutzlast q_{adm}. Für die Eigenlast der Platte darf $g = 7.5\ kN/m^2$ angenommen werden.



$q_d = \gamma_Q \cdot q_{adm} = 1.5 \cdot q_{adm}$

$g_d = \gamma_G \cdot g = 1.35 \cdot 7.5 = 10.13\ kN/m^2$

$d = h - c_{nom} - \phi/2 = 300 - 30 - 9 = 261$ mm

$a_s = \frac{\phi^2 \cdot \pi}{4\, s} = \frac{18^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} = 1696\ mm^2/m$

$f_{cd} = 16.5\ N/mm^2$

$f_{sd} = 435\ N/mm^2$

$\omega = \frac{a_s\, f_{sd}}{d\, f_{cd}} = \frac{1.696 \cdot 435}{261 \cdot 16.5} = 0.171$

$\underline{m_{Rd} = f_{cd}\, d^2\, \omega (1 - \omega/2) = 176.1\ kNm/m}$

$m_{d,max} = (g_d + q_d) \cdot \frac{l^2}{8} = m_{Rd}$

$\therefore \underline{\underline{q_{adm} = 9.95\ kN/m^2}}$

b) Einfluss einer Bewehrung auf Biegedruckseite

Eine Bewehrung auf der Biegedruckseite hat in der Regel einen relativ kleinen Einfluss auf den Biegewiderstand. Für überschlägige Bemessungen (im Vorprojekt) wird dieser Einfluss deshalb meist vernachlässigt und nach (2.1) gerechnet. Die definitive Bemessung (im Ausführungsprojekt) erfolgt im allgemeinen mit Hilfe von Querschnittsprogrammen; damit kann der Einfluss der Bewehrung auf der Biegedruckseite (wie auch jener weiterer über die Querschnittshöhe verteilter Bewehrungen) ohne weiteres erfasst werden. Handrechnungen sind dagegen wegen der verschiedenen erforderlichen Fallunterscheidungen recht mühsam und weitgehend überholt. Auf die Entwicklung allgemeiner Bemessungsformeln wird hier deshalb verzichtet. Das prinzipielle Vorgehen wird lediglich an einem Einzelfall (Beispiel 2.3) illustriert.

Eine Bewehrung auf der Biegedruckseite wirkt sich jedoch günstig insbesondere auf die Langzeit-Verformungen aus. Da sich der Beton mit der Zeit durch Kriechen der Beanspruchung entzieht, werden Druckkräfte auf die Bewehrung umgelagert, und die Verformungen bleiben dementsprechend beschränkt.

Druckbewehrung in Biegedruckzonen ist meist unwirtschaftlich, da sie im allgemeinen höchstens teilweise ins Fliessen gebracht werden kann (auf dem Bemessungsniveau), und da das Verhältnis f_{sd}/f_{cd} deutlich unter dem Verhältnis der auf das Volumen bezogenen Kosten von verlegtem Betonstahl und eingebrachtem Beton liegt. In speziellen Fällen, namentlich um Platz sparen zu können, kann die Verstärkung von Biegedruckzonen mit Druckbewehrung jedoch durchaus sinnvoll sein. Um in solchen Fällen möglichst günstige Verhältnisse für das Verformungsvermögen zu schaffen (Stauchen des Betons und Fliessen der Bewehrung auf Druck) ist im allgemeinen die Anordnung einer entsprechenden Umschnürungsbewehrung angezeigt (SIA 262, 4.2.1.8/9).

BEISPIEL 2.3

Ein Betonrohr (Beton C 40/50) mit einem Innendurchmesser von 2.5m und einem Aussendurchmesser von 3.0m ist innen und aussen mit einer Ringbewehrung (Betonstahl B500B) aus Stäben $\phi = 12$ mm im Abstand $s = 100$ mm versehen. Die Bewehrungsüberdeckung beträgt $c_{nom} = 30$ mm. Man ermittle den Ringbiegewiderstand des Rohres und diskutiere die Abtragung der aus der Rohrkrümmung resultierenden Umlenkkräfte für positive und negative Ringbiegemomente.

1. Approximation von m_{Rd} mit (2.1)

$d = 250 - 30 - 6 = 214$ mm

$a_s = \frac{12^2 \cdot \pi}{4 \cdot 100} = 1131$ mm^2/m

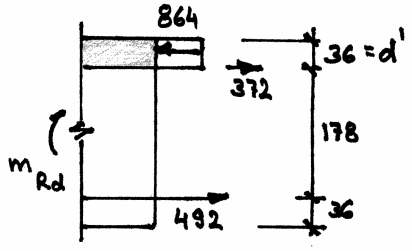
$f_{cd} = 24$ N/mm^2

$f_{sd} = 435$ N/mm^2

$\omega = \frac{1.131 \cdot 435}{214 \cdot 24} = 0.096$

$m_{Rd} = f_{cd}\, d^2 \omega (1 - \omega/2) = \underline{100.2 \text{ kNm/m}}$

2. Starr-ideal plastische Berechnung (keine Dehnungsbegrenzung)



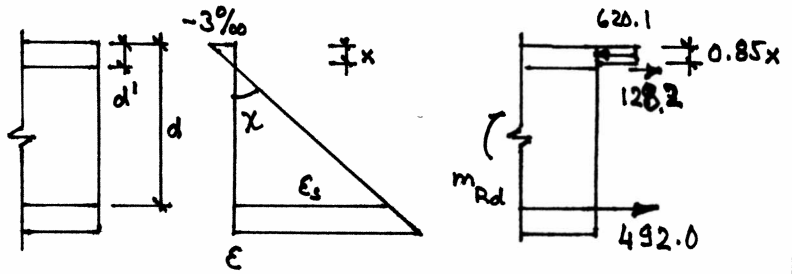
$a_s \cdot f_{sd} = 492.0$ kN/m

$d' \cdot f_{cd} = 864$ kN/m

$\Big\} \; 864 - 492 = 372$ kN/m

$\underline{m_{Rd}} = 0.178 \cdot 492 + \frac{0.036}{2} \cdot 864 = \underline{103.1 \text{ kNm/m}}$

3. Berechnung von m_{Rd} nach SIA 262 (mit Dehnungsbeschränkung)



$\chi = \frac{0.003}{x}$, $\varepsilon_s' = -0.003\left(1 - \frac{d'}{x}\right)$

$\Sigma n = 0$: $a_s f_{sd} - 0.85 x f_{cd} + a_s' E_s \varepsilon_s' = 0$

(Annahme $d' \geq 0.85x$)

Die Bedingung $\Sigma n = 0$ liefert eine quadratische Gleichung für x mit der Lösung

$\underline{x = 30.4 \text{ mm}}$

$\rightarrow \varepsilon_s' = 0.553$ ‰

$\sigma_s' = 113.3$ N/mm^2

$a_s' \sigma_s' = 128.2$ kN/m

Somit ist $\underline{m_{Rd}} = 0.214 \cdot 492.0 + 0.036 \cdot 128.2 - \frac{0.85 \cdot 0.0304}{2} \cdot 620.1 = \underline{101.9 \text{ kNm/m}}$

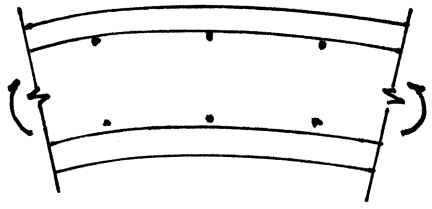
4. Diskussion der Ergebnisse für m_{Rd}

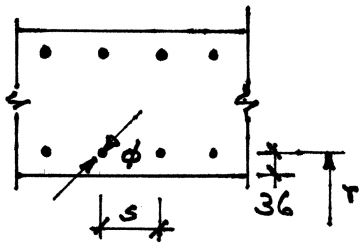
Die Berechnung nach SIA 262 liefert einen Wert von m_{Rd}, der lediglich 1.7 % grösser ist als der mit (2.1) unter Vernachlässigung von a_s' ermittelte Wert.

Bei der starr - ideal plastischen Berechnung liegt die Neutralachse auf der Höhe von a_s'. Da $E_s \to \infty$ geht, kann $\sigma_s' \neq 0$ sein; a_s' bleibt starr bzw. elastisch.

Die Berechnung nach SIA 262 ist viel aufwandiger als jene nach (2.1) und jene mit der starr - ideal plastischen Idealisierung. Diese beiden einfachen Approximationen liefern sehr gute untere und obere Schranken für das "genaue" Ergebnis nach SIA 262.

5. Umlenkkräfte





Bei positiven Ringbiegemomenten (innen Zug) droht die innere Bewehrung ausgerissen zu werden:

$$\text{Querzugspannung im Beton} = \frac{\frac{\phi^2 \pi}{4} \cdot f_{sd}}{r(s-\phi)} = \frac{\frac{12^2 \cdot \pi}{4} \cdot 435}{1286 \cdot 88} = 0.43 \text{ N/mm}^2$$

Gemäss SIA 262, Ziffer 5.2.7.1 sind derartige Querzugspannungen auf

$f_{ctd} = 0.5 \cdot f_{ctk\,0.05} / \gamma_c$ zu beschränken.

Hier : $0.5 \cdot 0.7 \cdot 3.5 / 1.5 = 0.82 \text{ N/mm}^2 > 0.43 \text{ N/mm}^2$, o.k.

Bei negativen Ringbiegemomenten erzeugen die Umlenkkräfte der Bewehrung und der Druckzone Querdruck.

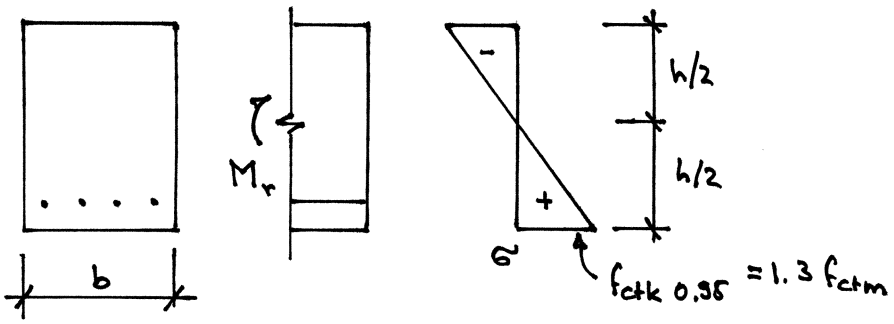
c) Mindestbewehrung

Der Biegewiderstand M_{Rd} muss mindestens so gross sein wie das beim Reissen des Betons aufgebrachte Moment M_r, sonst würde das Bauteil beim ersten Riss schlagartig (spröd) versagen. Durch das Einlegen einer Mindestbewehrung wird sichergestellt, dass sich das Bauteil duktil verhalten kann (SIA 262, 4.1.4.2.4).

Der notwendige mechanische Mindestbewehrungsgehalt ω_{min} kann aus (2.3) bestimmt werden, indem M_{Rd} durch M_r ersetzt wird, wobei für Rechteckquerschnitte näherungsweise

$$M_r = \frac{b h^2}{6} f_{ctk\,0.95} \qquad (2.4)$$

gesetzt werden kann (Rechnung mit reinem Betonquerschnitt):



Somit erhält man

$$\omega_{min} = 1 - \sqrt{1 - \frac{h^2 \cdot 1.3\, f_{ctm}}{3 d^2 f_{cd}}} \qquad (2.5)$$

Diese Formel ist in der folgenden Tabelle für einige Betonsorten und Verhältnisse d/h ausgewertet.

Beton	C 20/25	C 30/37	C 50/60
$d = 0.8h$	0.057	0.050	0.051
$d = 0.9h$	0.045	0.040	0.040

Mit $\omega_{min} = 0.04$ resultiert nach (2.1) $M_{Rd,min} = 0.039\, f_{cd}\, b d^2$, woraus sich die Bedingung

$$d \leq 5.05 \sqrt{\frac{M_{Rd}}{b f_{cd}}}$$

für die statische Höhe d ableiten lässt. Zusammen mit der auf S. 2.6 angegebenen unteren Schranke für d erhält man näherungsweise die Beziehung

$$d \approx (2 \div 5) \sqrt{\frac{M_{Rd}}{b f_{cd}}} \qquad (2.6)$$

zur Abschätzung der aus Sicht der Tragsicherheit erforderlichen Bauteildicke.

2.2.3 Biegesteifigkeit

a) Verbundquerschnitte

Die Biegesteifigkeit von Stahlbetonquerschnitten im ungerissenen Zustand I sowie im gerissenen Zustand II kann allgemein mit der in den Vorlesungen über Baustatik behandelten Theorie der aus linear elastischen Werkstoffen aufgebauten Verbundquerschnitte bestimmt werden. Dabei wird der Elastizitätsmodul jeder Faser des Querschnitts über die Wertigkeit

$$n(y,z) = \frac{E(y,z)}{E_c} \qquad (2.7)$$

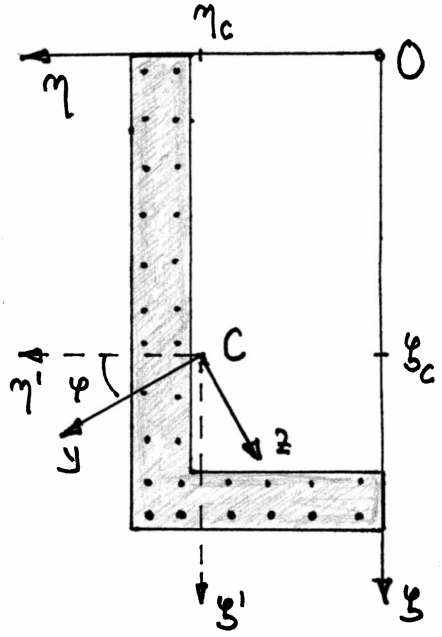
auf den Elastizitätsmodul E_c des Betons bezogen.

Von beliebigen Ausgangskoordinaten η, ζ ausgehend erhält man zunächst die Koordinaten des Schwerpunkts C des Querschnitts

$$\eta_c = \frac{\int \eta \, n \, dA}{A_i} \quad , \quad \zeta_c = \frac{\int \zeta \, n \, dA}{A_i} \tag{2.8}$$

mit der <u>ideellen Querschnittsfläche</u>

$$A_i = \int n \, dA \tag{2.9}$$



Aus den Flächenträgheitsmomenten

$$I_{\eta' i} = \int \zeta'^2 \, n \, dA \quad , \quad I_{\zeta' i} = \int \eta'^2 \, n \, dA$$

und dem Deviationsmoment

$$C_{\eta' \zeta' i} = - \int \eta' \zeta' \, n \, dA$$

folgt die Beziehung

$$\tan 2\varphi = \frac{2 C_{\eta' \zeta' i}}{I_{\eta' i} - I_{\zeta' i}} \tag{2.10}$$

für den Winkel φ, der die Stellung der <u>Hauptachsen</u> y, z mit den Hauptwerten

$$I_{yi} = \int z^2 \, n \, dA, \quad I_{zi} = \int y^2 \, n \, dA \tag{2.11}$$

der Flächenträgheitsmomente des ideellen Querschnitts bestimmt.

Im gerissenen Zustand <u>II</u> wird die Wertigkeit des Betons in der Zugzone gleich null gesetzt (SIA 262, 4.1.4.1.3).

Für den ungerissenen Zustand <u>I</u> kann vereinfachend statt mit ideellen Querschnittswerten mit reinen Betonquerschnittswerten gerechnet werden.

BEISPIEL 2.4

Man ermittle die Biegesteifigkeiten der in Beispiel 2.1 behandelten Platte im Zustand I und im Zustand II unter Voraussetzung von $E_c = 30\ kN/mm^2$ und $E_s = 205\ kN/mm^2$.

1. Zustand I

(2.9): $A_i = 240 \cdot 1000 + \frac{1000}{150} \cdot \frac{16^2 \cdot \pi}{4} \cdot \left(\frac{205}{30} - 1\right) = \underline{247\ 819\ mm^2/m}$

N.B. $A_c = 240\ 000\ mm^2/m$; $A_i = 1.033\ A_c$.
Faktor $\left(\frac{205}{30} - 1\right)$ berücksichtigt die über die Steifigkeit des Betons hinausgehende Steifigkeit des Betonstahls; jene ist im Produkt $240 \cdot 1000$ bereits enthalten.

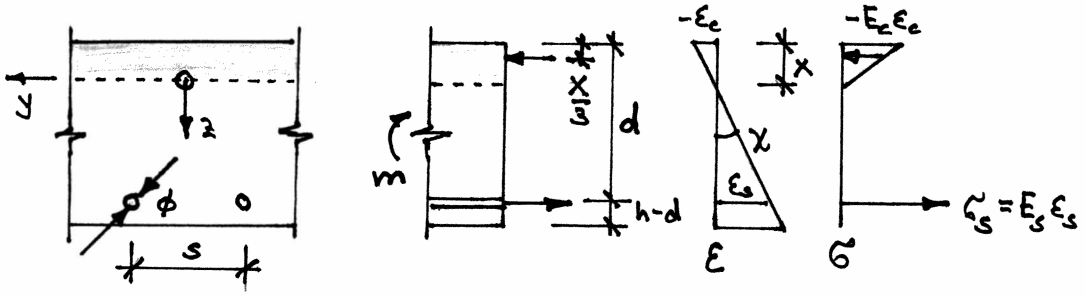
$(2.8)_2$ mit O in oberster Faser: $\underline{\zeta_c} = \frac{120 \cdot 240\,000 + (240 - 20 - \frac{16}{2})\,7819}{247\,819} = \underline{122.9\ mm}$

$(2.11)_1$: $\underline{I_{yi}} = \frac{240^3 \cdot 1000}{12} + (122.9 - 120)^2 \cdot 240\,000 + (240 - 20 - \frac{16}{2} - 122.9)^2 \cdot 7819 = \underline{1.216 \cdot 10^9\ \frac{mm^4}{m}}$

N.B. $I_{yc} = \frac{240^3 \cdot 1000}{12} = 1.152 \cdot 10^9\ \frac{mm^4}{m}$; $I_{yi} = 1.056\ I_{yc}$.

$\underline{\underline{EI^{I}}} = E_c\, I_{yi} = 30 \cdot 10^3 \cdot 1.216 \cdot 10^9 = \underline{\underline{36.5\ MNm^2/m}}$

2. Zustand II



Die Neutralachse im Abstand x vom oberen Querschnittsrand ist gleich der Querschnittshauptachse y. Da das Flächenmoment 1. Grades um diese Achse verschwinden muss, gilt

$$\frac{x^2 s}{2} = (d-x)\, n\, \frac{\phi^2 \pi}{4}$$

bzw. mit dem (auf d bezogenen) geometrischen Bewehrungsgehalt

$$\rho = \frac{a_s}{d} = \frac{\frac{\phi^2 \pi}{4}}{d \cdot s}$$

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 = 2n\rho\left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

woraus

$$x = d\left(\sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n} - \rho n\right) \qquad (2.12)$$

folgt. Mit

$$\sigma_s = E_s (d-x)\chi$$

und dem Hebelarm $d - x/3$ der inneren Kräfte ergibt sich das auf die Einheitsbreite bezogene Moment

$$m = a_s E_s (d-x)\left(d - \frac{x}{3}\right)\chi$$

Für Rechteckquerschnitte der Breite b mit $\rho = A_s/(bd)$ gilt (2.12) weiterhin, und das Biegemoment beträgt

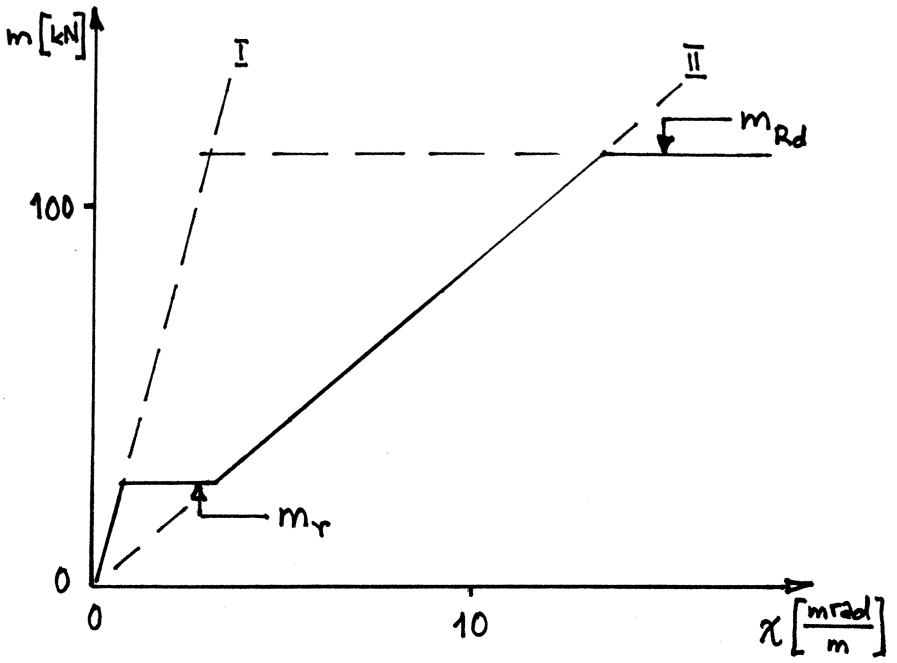
$$M = A_s E_s (d-x)\left(d - \frac{x}{3}\right)\chi$$

d.h. es gilt

$$EI^{II} = A_s E_s \left(d-x\right)\left(d - \frac{x}{3}\right) \qquad (2.13)$$

Für das vorliegende Beispiel mit $d = 212$ mm und $\rho = 0.63\%$ resultiert $x = 53.8$ mm und $EI^{II} = 8.4\ MNm^2/m = 0.23\ EI^{I}$.

3. Momenten - Krümmungsdiagramm



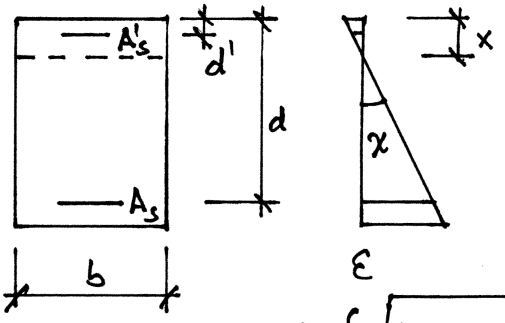
N.B. $m_{Rd} = 113.3$ kNm/m
siehe Beispiel 2.1

Rissmoment m_r: $f_{ctm} = 2.6$ N/mm²

$$\chi_r = \frac{f_{ctm}}{E_c(h - \zeta_p)} = \frac{2.6}{30(0.24 - 0.1229)} = 0.74 \text{ mrad/m}$$

$$\underline{m_r} = EI^{I} \cdot \chi_r = 36.5 \cdot 0.74 = \underline{27 \text{ kNm/m}}$$

Einfluss einer Druckbewehrung (Annahme $d' < x$):



$$\frac{bx^2}{2} + (x - d')A'_s(n-1) = (d - x)A_s n$$

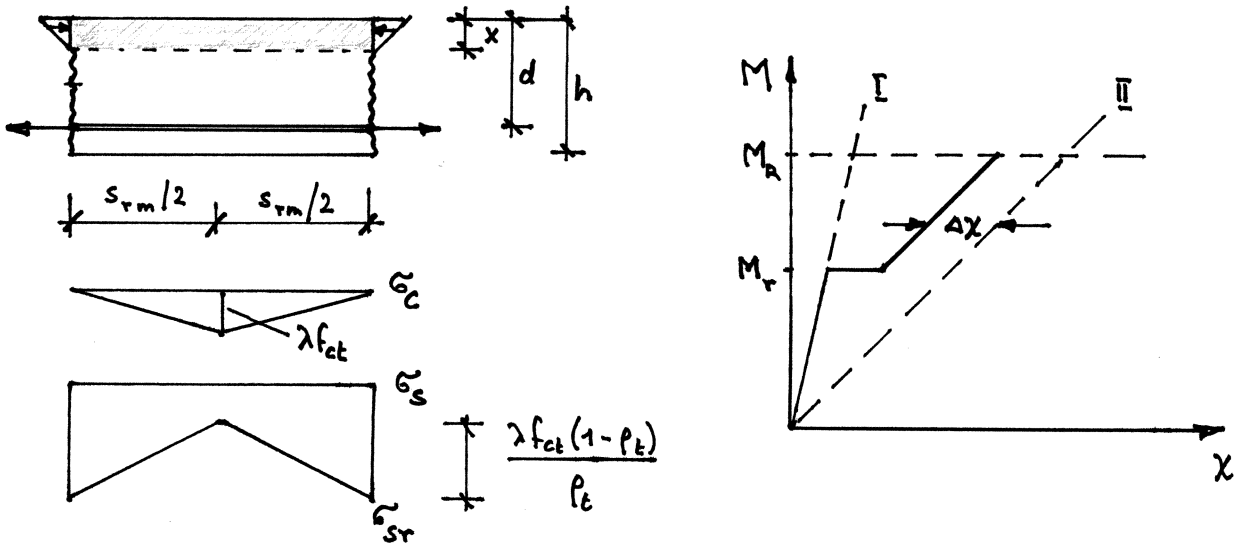
$$\rho = \frac{A_s}{bd} \qquad \rho' = \frac{A'_s}{bd}$$

$$x = d \cdot \left\{ \sqrt{\left[\rho n + \rho'(n-1)\right]^2 + 2\left[\rho n + \frac{d'}{d}\rho'(n-1)\right]} - \left[\rho n + \rho'(n-1)\right] \right\} \qquad (2.14)$$

$$EI^{II} = A_s E_s (d - x)^2 + A'_s(E_s - E_c)(x - d')^2 + \frac{bx^3 E_c}{3} \qquad (2.15)$$

b) Zugversteifung

Beim Erreichen des Rissmoments M_r stellen sich die Risse in einem endlichen Abstand s_{rm} ein. Zwischen den Rissen wirkt der Beton auf Zug an der Aufnahme der Beanspruchung mit. Die Spannungen σ_s im Betonstahl werden über Verbundschubspannungen an der Staboberfläche vom Maximalwert σ_{sr} am Riss zu einem Minimalwert zwischen den Rissen abgebaut. Dadurch wird die mittlere Stahldehnung und damit auch die Krümmung χ verkleinert. Diesen Effekt nennt man Zugversteifung.



Gemäss dem in Kapitel 3 diskutierten Zuggurtmodell beträgt die mittlere Dehnungsreduktion im Betonstahl $\lambda f_{ct}(1-\rho_t)/(2\rho_t E_s)$, woraus sich die Krümmungsreduktion

$$\Delta\chi = \frac{\lambda f_{ct}(1-\rho_t)}{2\rho_t E_s (d-x)} \qquad (2.16)$$

ergibt. Der Faktor λ liegt zwischen 0.5 und 1; er berücksichtigt, dass Querschnitte mit $\sigma_c = f_{ct}$ reissen können ($\lambda = 0.5$, minimaler Rissabstand) oder ungerissen bleiben können ($\lambda = 1$, maximaler Rissabstand). Setzt man die Stahlspannung (am Riss)

$$\sigma_{sr0} = \frac{M_r (d-x) E_s}{E I^{II}} \qquad (2.17)$$

beim Erreichen von M_r gleich der Spannung

$$\sigma_{sr0} = f_{ct}\left(\frac{1}{\rho_t} + n - 1\right) \tag{2.18}$$

beim Reissen eines Zuggurtelements (Bewehrungsgehalt ρ_t, $n = E_s/E_c$), resultiert

$$\rho_t = \frac{1}{\frac{M_r(d-x)E_s}{f_{ct}EI^{II}} + 1 - n} \tag{2.19}$$

und Rückeinsetzen in (2.16) bringt

$$\Delta\chi = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{M_r}{EI^{II}} - \frac{f_{ct}}{E_c(d-x)}\right] \tag{2.20}$$

Für den Rissabstand resultiert

$$s_{rm} = \lambda\, s_{rm0}\ , \quad s_{rm0} = \frac{\phi(1-\rho_t)}{4\rho_t} \qquad (0.5 \leq \lambda \leq 1) \tag{2.21}$$

und für die Rissbreite

$$w_r = \frac{\lambda s_{rm0}(2\sigma_{sr} - \lambda\sigma_{sr0})}{2E_s} \qquad (\sigma_{sr} \geq \sigma_{sr0}) \tag{2.22}$$

BEISPIEL 2.5

Für die in Beispiel 2.1 sowie Beispiel 2.4 behandelte Platte ermittle man $\Delta\chi$ sowie s_{rm} und w_r für $m = m_r$ und $m = m_{Rd}$.

$$(2.20): \quad \Delta\chi = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{27}{8.4} - \frac{2.6}{30(0.212-0.0538)}\right] = \left\{\begin{array}{l}\underline{0.67\ \text{mrad/m}},\ \lambda = 0.5\\ \underline{1.33\ \text{mrad/m}},\ \lambda = 1\end{array}\right\}$$

$$(2.19): \quad \rho_t = \frac{1}{\frac{27(0.212-0.0538)205}{2.6\cdot 8.4} + 1 - \frac{205}{30}} = 2.92\,\%$$

$$(2.18): \quad \sigma_{sr0} = 2.6\left(\frac{1}{0.0292} + \frac{205}{30} - 1\right) = 104.2\ \text{N/mm}^2$$

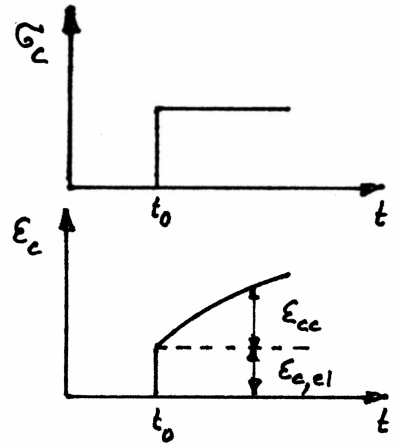
$$(2.21): \quad s_{rm0} = \frac{16(1-0.0292)}{4\cdot 0.0292} = 133\ \text{mm} \rightarrow \underline{66.5\,\text{mm} \leq s_{rm} \leq 133\ \text{mm}}$$

$$(2.22): \quad \sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.03\ \text{mm}\ (\lambda = 0.5);\ w_r = 0.03\ \text{mm}\ (\lambda = 1)$$

$$\sigma_{sr} = 435\ \text{N/mm}^2 = f_{sd} \rightarrow \underline{w_r = 0.13\ \text{mm}\ (\lambda = 0.5)};\ \underline{w_r = 0.25\ \text{mm}\ (\lambda = 1)}$$

c) Einfluss des Kriechens

Unter andauernder Beanspruchung kriecht der Beton, d.h. seine Verformungen nehmen mit der Zeit t zu:



t_0 Alter des Betons bei Einwirkungsbeginn

$\varepsilon_{c,el} = \sigma_c / E_c(t_0)$

$$\varepsilon_{cc}(t) = \varphi(t, t_0) \cdot \varepsilon_{c,el} \qquad (2.23)$$

$\varphi(t, t_0)$ Kriechzahl

Die Kriechzahl hängt von der Umgebungsfeuchte, den Bauteilabmessungen, der Betonfestigkeit, dem Hydratationsgrad des Zements bei Einwirkungsbeginn sowie von der Dauer und Intensität der Einwirkung ab (SIA 262, 3.1.2.5). Allgemein ergeben sich relativ grosse Streuungen, man darf keine zu grosse Genauigkeit der Abschätzungen erwarten. Für spezielle Betone und Bauvorhaben (z.B. grosse Freivorbaubrücken) sind Vorversuche angezeigt.

Um die Grössenordnung des Kriecheinflusses abzuschätzen, wird oft vereinfachend mit einem modifizierten Elastizitätsmodul des Betons (z.B. mit $\varphi = 2$) gerechnet:

$$E_{ca} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi} \qquad (2.24)$$

E_{ca} lässt sich ohne weiteres nach der Theorie der Verbundquerschnitte berücksichtigen. Im Zustand I ist der Einfluss relativ gross, im Zustand II eher gering.

BEISPIEL 2.6

Schätze den Kriecheinfluss ($\varphi = 2$) für die Platte von Beispiel 2.4 ab.

1. Zustand I

$$A_i = 240\,000 + \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15}\left(\frac{205}{10} - 1\right) = \underline{266\,138 \text{ mm}^2/\text{m}}$$

$$y_c = \frac{120 \cdot 240\,000 + 212 \cdot 26\,138}{266\,138} = \underline{129.0 \text{ mm}}$$

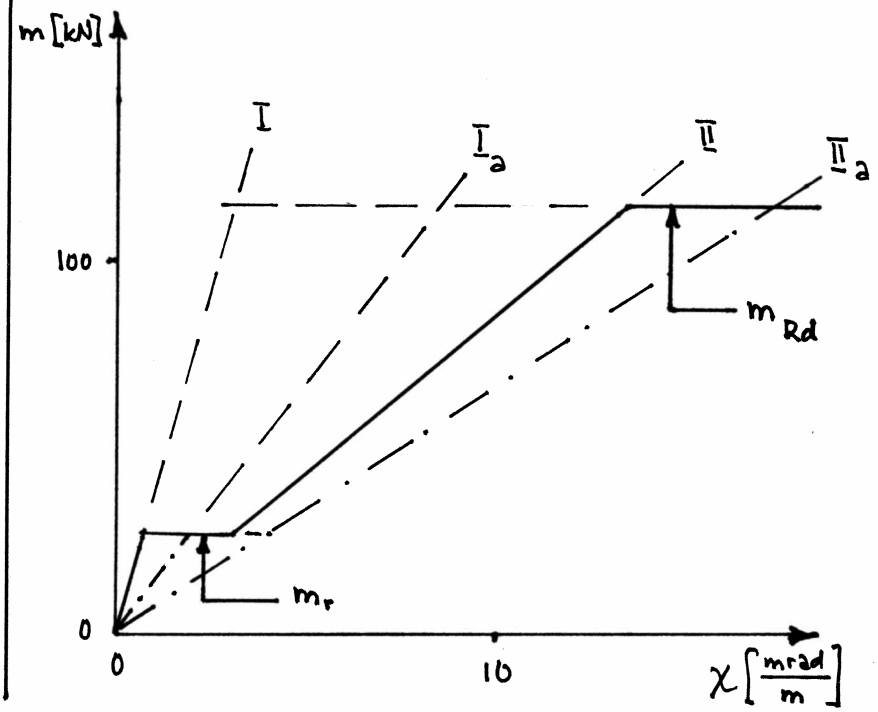
$$I_{yi} = \frac{240^3 \cdot 1000}{12} + (9.0)^2 \cdot 240\,000 + (212 - 129.0)^2 \cdot 26\,138 = \underline{1.352 \cdot 10^9 \text{ mm}^4/\text{m}}$$

$$EI_a^I = E_{ca} I_{yi} = 13.5 \text{ MNm}^2/\text{m} = 0.37\, EI^I$$

2. Zustand II

$$\rho_n = \frac{16^2 \cdot \pi \cdot 205}{4 \cdot 212 \cdot 150 \cdot 10} = 0.130 \rightarrow (2.12): \; x = 83.9 \text{ mm}$$

$$(2.13): \; EI_a^{II} = 6.5 \text{ MNm}^2/\text{m} = 0.77\, EI^{II}$$



d) Einfluss des Schwindens

Durch Verdunsten des Überschusswassers und Schrumpfen der Gelmasse nimmt das Volumen des Betons mit der Zeit ab, er schwindet. Das Schwindmass ε_{cs} hängt hauptsächlich von der Umgebungsfeuchte, den Bauteilabmessungen und der Betonfestigkeit ab; je nach Witterung und Feuchthaltung des Betons können erhebliche Unterschiede auftreten (SIA 262, 3.1.2.5).

Da die Bewehrung das Schwinden behindert, entstehen in Stahlbetonbauteilen Eigenspannungen, bei statisch unbestimmten Systemen darüberhinaus Zwängungen.

Wegen des Schwindens ergibt sich im allgemeinen eine initiale Krümmung, d.h. im Momenten-Krümmungsdiagramm eine entsprechende Verschiebung der Geraden I und II. Zudem wird wegen der Eigenspannungen im allgemeinen das Rissmoment verkleinert.

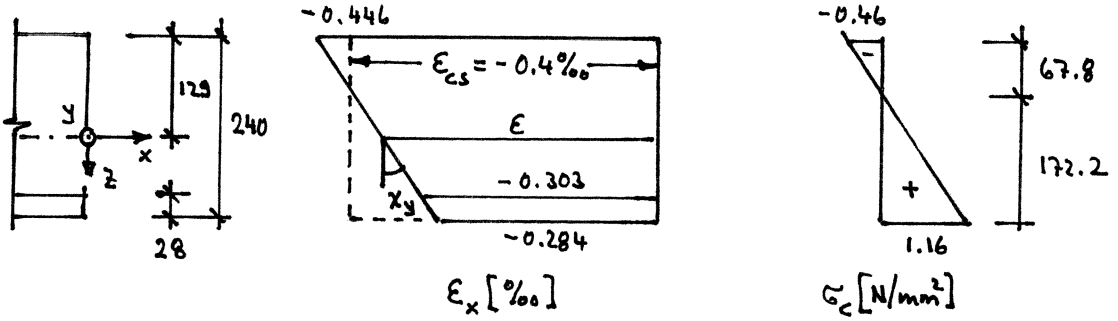
BEISPIEL 2.7

Die Platte von Beispiel 2.4 erfahre ein Endschwindmass $\varepsilon_{cs} = -0.4‰$. Da sich die unten in der Platte eingelegte Bewehrung der Schwindverformung widersetzt, verkrümmt sich die Platte nach unten. Da der Beton mit der Zeit auch kriecht, wird mit den in Beispiel 2.6 ermittelten ideellen Querschnittswerten gerechnet. Mit $a_s = 1340\ mm^2/m$ erhält man die Dehnung

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\int \varepsilon_{cs}\, dA}{A_i} = \frac{-0.4‰\,(240\,000 - 1340)}{266\,138} = \underline{-0.359‰}$$

auf der Höhe der Querschnittshauptachse y; ferner resultiert die Krümmung

$$\underline{\chi_y} = \frac{\int \varepsilon_{cs}\, z\, dA}{I_{yi}} = \frac{-0.4‰\,[(120-129)\,240\,000 - (212-129)\,1340]}{1.352 \cdot 10^9} = \underline{0.675\ mrad/m}$$



Auf der Höhe des Betonstahls ergibt sich eine Dehnung von $-0.303‰$ und damit $\sigma_s = -0.303 \cdot 205 = -62\ N/mm^2$. Am unteren Plattenrand resultiert die Betonzugspannung $\sigma_c = (-0.284 + 0.4) \cdot 10 = 1.16\ N/mm^2$.

Das Rissmoment wird von 27 kNm/m auf

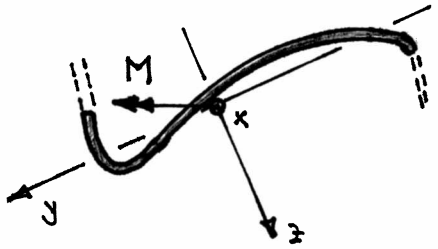
$$27 \cdot \frac{2.6 - 1.16}{2.6} = 15\ kNm/m$$

verringert ($f_{ctm} = 2.6\ N/mm^2$).

2.3 Allgemeine Querschnitte

2.3.1 Allgemeines

Die in Kapitel 2.2 für Rechteckquerschnitte angestellten Überlegungen hinsichtlich Tragsicherheit (Biegewiderstand) und Gebrauchstauglichkeit (Biegesteifigkeit) lassen sich ohne weiteres auf allgemeine Querschnitte übertragen. In der Regel ergibt sich schiefe Biegung. Bei der statischen Berechnung verwendet man meist die Hauptachsen des reinen Betonquerschnitts, allenfalls jene des ideellen Querschnitts.

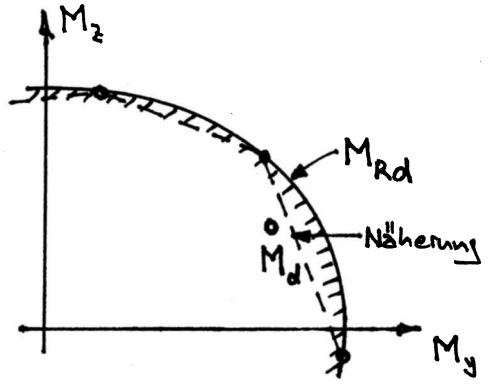


Beispiel Shedschale unter Eigenlast

Die Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens geht von den in Kapitel 2.1 zusammengestellten Annahmen aus. In der Praxis stehen verschiedene Computerprogramme zur Verfügung, die die Querschnittsanalyse für beliebige Querschnitte und Spannungs-Dehnungs-Diagramme ermöglichen.

2.3.2 Tragsicherheit

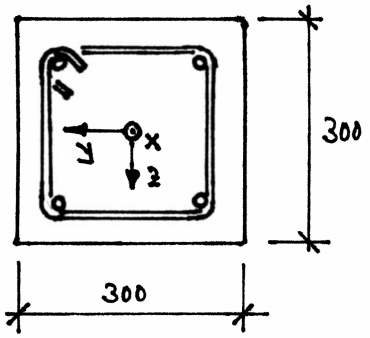
Der Tragsicherheitsnachweis erfolgt zweckmässigerweise unter Verwendung von Interaktionsdiagrammen: $M_d \leq M_{Rd}$



Beanspruchung $M_d \dots M_{yd}, M_{zd}$
Widerstand M_{Rd}

- Interaktionsdiagramme sind zumindest schwach konvex (nicht konkav).
- Punktweise Ermittlung von Interaktionsdiagrammen und lineare Verbindung der Punkte ergibt eine Näherung auf der sicheren Seite.

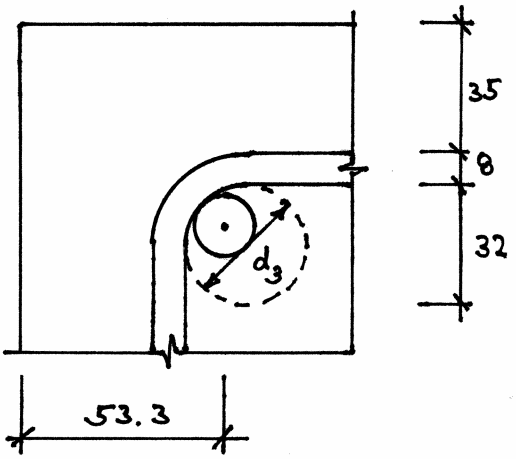
BEISPIEL 2.8



Quadratquerschnitt aus Beton C 25/30,
Bügel $\phi 8$ @ 100, $c_{nom} = 35$ } B500B
Längsstäbe $4\,\phi 16$

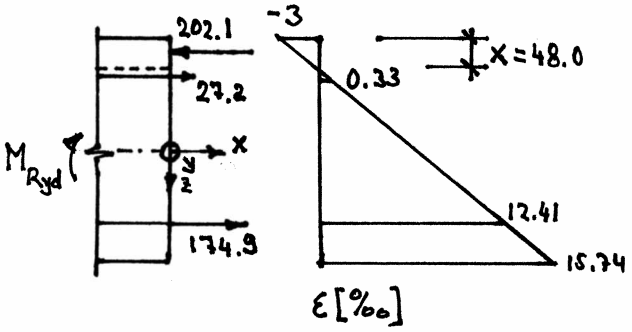
Biegerollendurchmesser für Bügel
$d_3 = 4\,\phi = 32$ mm (SIA 262, 5.2.4.1)

Eckdetail



Randabstand der Längsstäbe $\phi 16$:
$35 + 8 + 16 - 8/\sqrt{2} = 53.3$ mm
Eckabstand $= 53.3 \cdot \sqrt{2} = 75.4$ mm

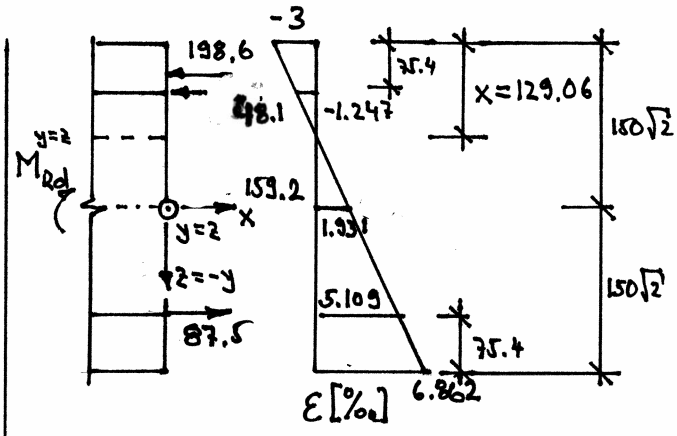
$f_{cd} = 16.5$ N/mm², $f_{sd} = 435$ N/mm²
$E_s = 205$ kN/mm²



$$0.85x \cdot 300 \cdot 16.5 = \frac{16^2 \cdot \pi}{2} \cdot \left[435 + 615 \cdot \frac{53.3 - x}{x}\right]$$
(3 · 205)

$\rightarrow x = 48.0$ mm

$M_{Ryd} = 174.9\,(300 - 53.3) + 27.2 \cdot 53.3$
$- 202.1 \cdot 0.85 \cdot 48.0/2 = \underline{40.5\ \text{kNm}}$



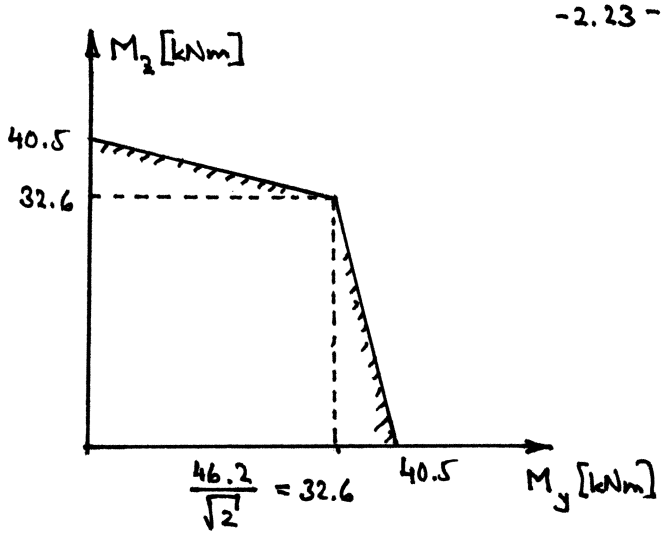
$$(0.85x)^2 \cdot 16.5 = 8^2 \cdot \pi \left[435 + 2 \cdot 615 \cdot \frac{150\sqrt{2} - x}{x} + 615 \cdot \frac{75.4 - x}{x} + 16.5\right]$$

$\rightarrow x = 129.06$ mm

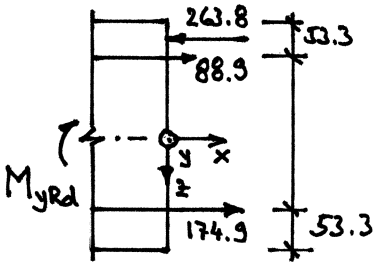
$M_{Rd}^{y=z} = 87.5 \cdot (300\sqrt{2} - 75.4) + 159.2 \cdot 150\sqrt{2}$
$- 48.1 \cdot 75.4 - 198.6 \cdot 73.1$
$= \underline{46.2\ \text{kNm}}$

N.B. $8^2 \cdot \pi \left(3 \cdot 205 \cdot \frac{x - 75.4}{x} - 16.5\right) = 48.1$ kN ... Stahldruckkraft abzüglich bereits in Betondruckkraft berücksichtigte Kraft

$\frac{2}{3} \cdot 0.85 \cdot 129.06 = 73.1$ ... Schwerpunktsabstand Betondruckkraft vom oberen Rand



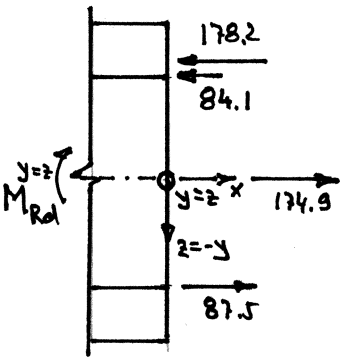
Statt mit Dehnungsbegrenzung auf 3‰ am Druckrand zu rechnen, könnte M_{Rd} einfacher (leicht auf der unsicheren Seite) mit einer starr-ideal plastischen Näherung abgeschätzt werden, vgl. Beispiel 2.8:



$16.5 \cdot 53.3 \cdot 300 = 263.8$ kN

$263.8 - 174.9 = 88.9$ kN

$$174.9 \cdot (300 - 53.3) + 88.9 \cdot 53.3 - 263.8 \cdot \frac{53.3}{2} = \underline{40.9\ \text{kNm}}$$



$8^2 \cdot \pi \cdot (43.5 - 16.5) = 84.1$ kN

$$\sqrt{\underbrace{(174.9 + 87.5 - 84.1)}_{178.2}/16.5} = 103.9\ \text{mm}$$

$$87.5 \cdot (300\sqrt{2} - 75.4) + 174.9 \cdot 150\sqrt{2} - 84.1 \cdot 75.4 - 178.2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 103.9$$

$$= \underline{48.9\ \text{kNm}}$$

Die starr-ideal plastisch ermittelten Werte sind im Vergleich zu den mit Dehnungsbegrenzung berechneten Werten um 1 bzw. 6 % auf der unsicheren Seite.

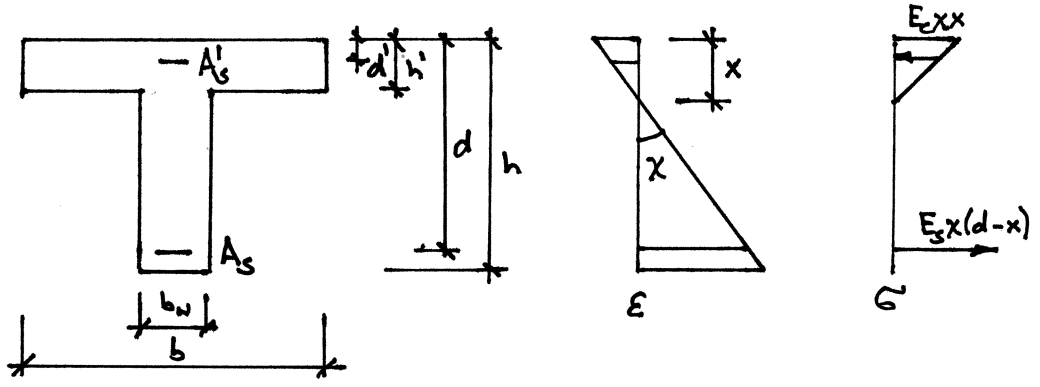
2.3.3 Gebrauchstauglichkeit

Gebrauchstauglichkeitsnachweise für allgemeine Querschnitte können analog zu Kapitel 2.2.3 durchgeführt werden. Im allgemeinen muss die Neutralachse für eine gegebene Beanspruchung iterativ bestimmt werden.

Zur Ermittlung von Durchbiegungen bilden Momenten-Krümmungsdiagramme und entsprechende Integrationsverfahren (z.B. Mohrsche Analogie) die Basis. Zur Ermittlung von Rissabständen und Rissbreiten kann auf das Zuggurtmodell zurückgegriffen werden.

2.3.4 Plattenbalken

Wegen der grossen praktischen Bedeutung von T- oder Plattenbalken-Querschnitten wird im folgenden auf einige Besonderheiten solcher aus einem Steg (Breite b_w) und einer Flanschplatte (Breite $b > b_w$) bestehenden Querschnitte hingewiesen.



Im Zustand II wirkt der Plattenbalken für $x \leq h'$ wie ein Rechteckquerschnitt, d.h. es können (2.14) und (2.15) angewandet werden.

Für den Fall $x > h'$ gilt:

$$A_s E_s \chi(d-x) + A_s'(E_s - E_c)\chi(d'-x) - \frac{bx}{2} E_c \chi x + \frac{1}{2}(b-b_w)(x-h')^2 E_c \chi = 0$$

woraus

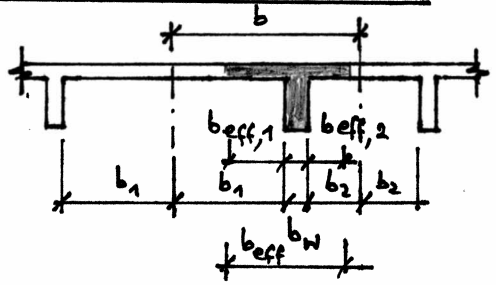
$$x = \frac{1}{b_w} \cdot \left\{ \sqrt{\left[h'(b-b_w) + A_s n + A_s'(n-1)\right]^2 + 2b_w\left[\frac{h'^2}{2}(b-b_w) + A_s n d + A_s'(n-1)d'\right]} - \left[h'(b-b_w) + A_s n + A_s'(n-1)\right] \right\} \qquad (2.24)$$

folgt. Ferner ist

$$EI^{II} = A_s E_s (d-x)d + A_s'(E_s - E_c)(d'-x)d' - \frac{bx^3 E_c}{6} + \frac{E_c}{6}(b-b_w)(x-h')^2(x+2h') \qquad (2.25)$$

Für $b_w = b$ erhält man aus (2.24) und (2.25) wieder (2.14) und (2.15).

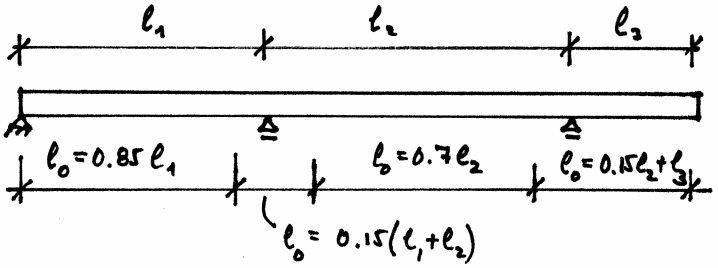
Nach Elastizitätstheorie entziehen sich die vom Steg weiter entfernten Flanschbereiche der Mitwirkung (engl. "shear lag"). Dies kann durch den Ansatz einer <u>mitwirkenden Plattenbreite</u> (SIA 262, 4.1.3.3) berücksichtigt werden:



$$b_{eff} = b_w + b_{eff,1} + b_{eff,2} \leq b$$

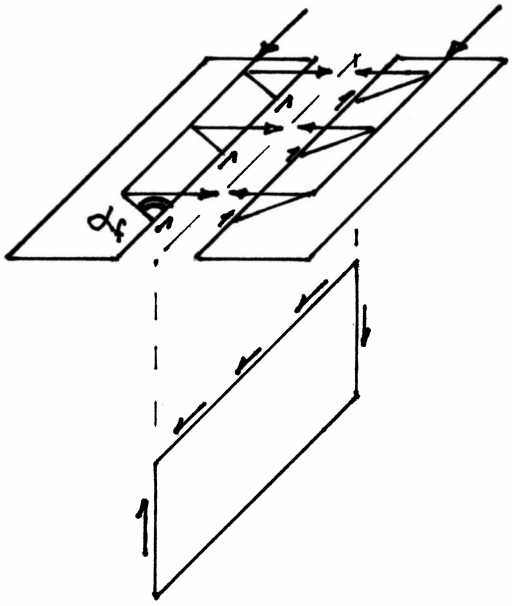
wobei

$$b_{eff,i} = 0.2\, b_i + 0.1\, \ell_0 \leq 0.2\, \ell_0$$

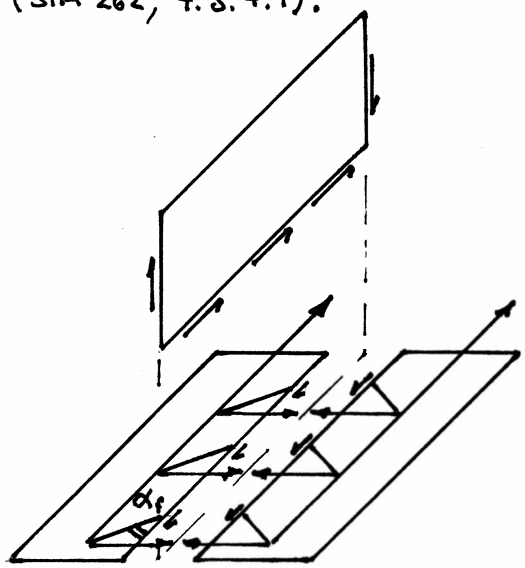


ℓ_0 = Abstand der Momentennullpunkte (Näherung)

Für den Grenzzustand der Tragsicherheit ist der <u>Schubanschluss</u> der Flanschplatten an die Stege sicherzustellen. Die Einleitung von Zug- oder Druckkräften in die Flansche bzw. Gurte erzeugt Schubkräfte im Übergang zu den Gurten sowie Querzug- und Druckkräfte in den Gurten (SIA 262, 4.3.4.1):



Druckflansch: $25° \leq \alpha_f \leq 45°$



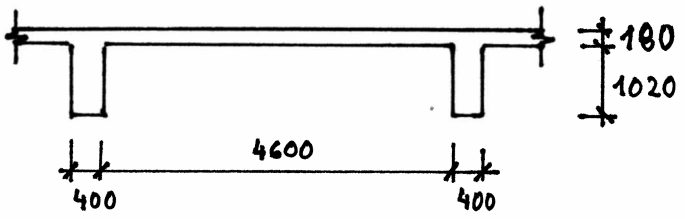
Zugflansch: $35° \leq \alpha_f \leq 50°$

Eine kleine Druckfeldneigung α_f im Flansch führt zu kleinen Querzugkräften und damit zu einer geringeren Querbewehrung. Bei Zugflanschen muss dagegen bei kleinem α_f die Längsbewehrung verlängert werden; für Zugflansche ist deshalb $\alpha_f = 45°$ eine gute Wahl.

Bei Plattenbalken sollte die Biegedruckzone im Grenzzustand der Tragsicherheit in der Regel vollständig im Flansch liegen, d.h. nicht in den Steg reichen ($0.85x \leq h'$), sonst ergibt sich eine unter Umständen gefährliche Verminderung der zur Sicherstellung der Querkraftabtragung erforderlichen Höhe des geneigten Druckspannungsfelds im Steg. Dieses Spannungsfeld sollte sich über die ganze Steghöhe ausbilden können. Auf diese Problematik, die analog auch bei Hohlkastenträgern auftritt, ist namentlich bei Zwischenauflagern von Durchlaufträgern zu achten. Weitere Bemerkungen hierzu folgen in Kapitel 4.

BEISPIEL 2.9

Eine 16 m breite, sehr lange Öffnung soll mit einem Stahlbeton-Plattenbalkenquerschnitt konstanter Höhe als einfacher Balken überspannt werden. Ausser seiner Eigenlast muss der Plattenbalken eine Auflast von $g_{k1} = 1\ kN/m^2$ und eine Nutzlast von $q_k = 3\ kN/m^2$ aufnehmen. Die Bewehrungsüberdeckung muss mindestens $c_{nom} = 30\ mm$ betragen. Bemesse die Konstruktion.



Wahl: Stegabstand = 5 m
Stegdicke = 0.4 m
Plattendicke = 0.18 m
Trägerhöhe = 1.2 m

Beton C 25/30
Betonstahl B500B

N.B. Schlankheiten ... Träger $1.2/16 = 1/13.3$
Platte $0.18/4.6 = 1/25.6$

Einwirkungen

Platte in Querrichtung:

$$\left.\begin{aligned} g_{k0} &= 0.18\,m \cdot 25\,kN/m^3 = 4.5\ kN/m^2 \\ g_{k1} &= 1.0\ \text{"} \end{aligned}\right\} g_d = 1.35 \cdot 5.5 = \underline{7.4\ kN/m^2}$$

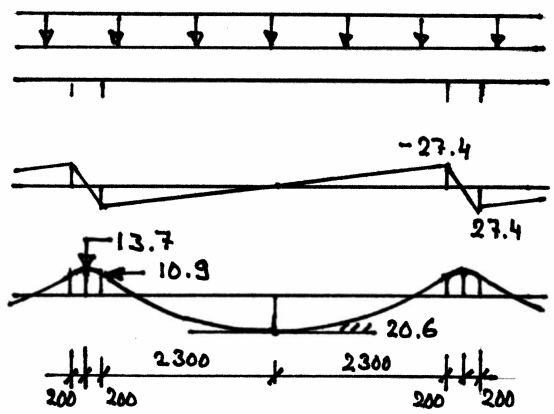
$$q_k = 3.0\ \text{"} \rightarrow q_d = 1.5 \cdot 3 = \underline{4.5\ \text{"}}$$

Plattenbalken:

$$g_d = 5 \cdot 7.4 + 0.4 \cdot 1.02 \cdot 25 \cdot 1.35 = \underline{50.9\ kN/m}$$

$$q_d = 5 \cdot 4.5 = \underline{22.5\ \text{"}}$$

Platte in Querrichtung



$g_d + q_d = 11.9\ kN/m^2$

V_d [kN/m]

m_d [kNm/m]

Vereinfachte Betrachtung unter Vollast mit Berücksichtigung der Stegbreite

$2.3m \cdot 11.9\ kN/m^2 = 27.4\ kN/m$

$11.9\ kN/m^2 \cdot \frac{(4.6m)^2}{8} = 31.5\ kNm/m$

$11.9\ kN/m^2 \cdot \frac{(4.8m)^2}{8} = 34.3\ kNm/m$

Wähle untere Bewehrung $\underline{\phi 8 @ 150}$: $a_s = \frac{4^2 \cdot \pi}{150} = 335\ mm^2/m$

$d = 180 - 30 - \frac{8}{2} = 146\ mm$

$f_{sd} = 435\ N/mm^2$

$f_{cd} = 16.5\ N/mm^2$

$\omega = 0.061$

(2.1) $m_{Rd} = \underline{20.6\ kNm/m}$

Über den Stegen muss ein Moment mit einem Betrag von $34.3 - 20.6 = \underline{13.7\ kNm/m}$ aufgenommen werden können. Zusätzlich erfordert der Schubanschluss eine Quer-zugbewehrung. Die beiden Effekte werden weiter unten superponiert, und die über den Stegen erforderliche Querbewehrung wird dann definitiv festgelegt.

Parallel zu den Stegen des Plattenbalkens wird in der Platte oben und unten eine Bewehrung $\underline{\phi 8 @ 150}$ eingelegt. Anstatt Einzelstäbe zu verlegen, könnten geschweisste Matten verwendet werden (kleinerer Verlegeaufwand).

Ausser dem Biegetragsicherheitsnachweis ist auch ein Querkrafttragsicherheitsnachweis zu führen (SIA 262, 4.3.3.2):

$V_{Rd} = k_d \tau_{cd} d = 0.697 \cdot 1 \cdot 145 = \underline{101\ kN/m} \gg 27.4\ kN/m = V_{d,max}$, o.k.

$d = 145\ mm$ (Annahme obere Querbewehrung bei Stegen $\phi 10$)

$\tau_{cd} = 1\ N/mm^2$

$k_d = \frac{1}{1 + 3 \cdot 0.145} = 0.697$

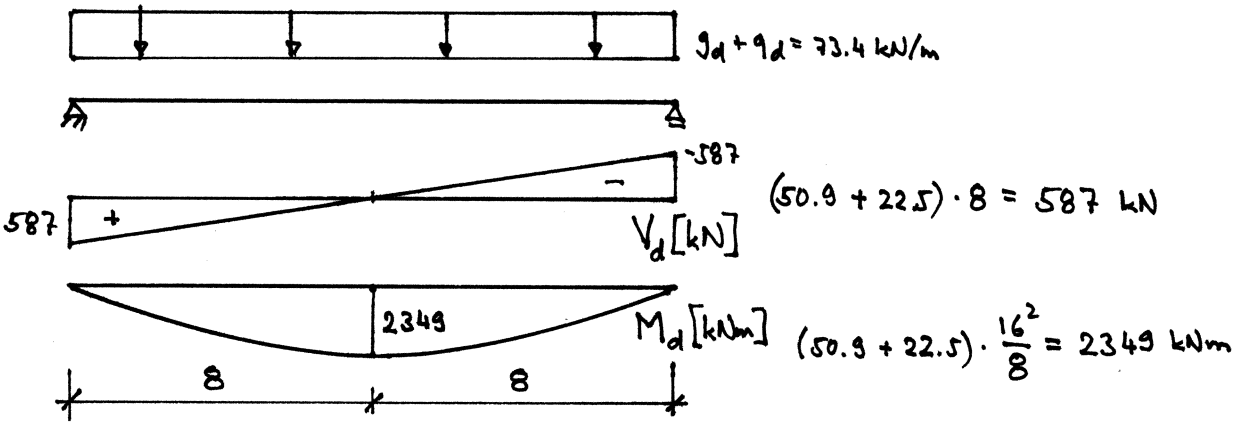
$\uparrow k_v = 3$

Plattenbalken

Mitwirkende Plattenbreite: $b_w = 0.4\,m$

$b_1 = 2.3\,m$, $l_0 = 16\,m$ $\Big\}$ $b_{eff,1} = 0.2 \cdot 2.3 + 0.1 \cdot 16 = 2.06\,m$

$b_{eff} = 0.4 + 2 \cdot 2.06 = \underline{4.52\,m}$ $(< b = 5\,m$, o.k.)



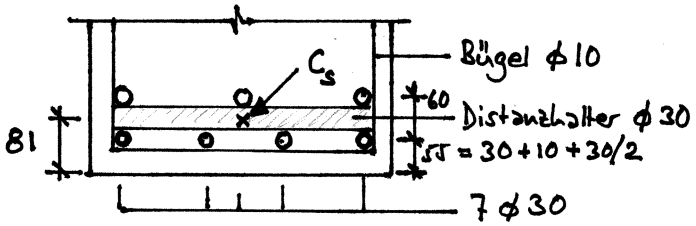
$(50.9 + 22.5) \cdot 8 = 587$ kN

$(50.9 + 22.5) \cdot \frac{16^2}{8} = 2349$ kNm

Abschätzung erforderliche Längsbewehrung: Annahme Hebelarm $z = 1.08\,m$

$$A_{s,erf} = \frac{M_{d,max}}{z \cdot f_{sd}} = \frac{2349 \cdot 10^3}{1.08 \cdot 435} = 5000\ mm^2/m$$

z.B. $7\,\phi\,30 \rightarrow A_s = 4948\ mm^2/m$



Schwerpunkt Längsbewehrung C_s:

$(4 \cdot 55 + 3 \cdot 115)/7 = \underline{81\ mm}$

Zugkraft: $A_s \cdot f_{sd} = 4948 \cdot 435 = \underline{2152\ kN}$

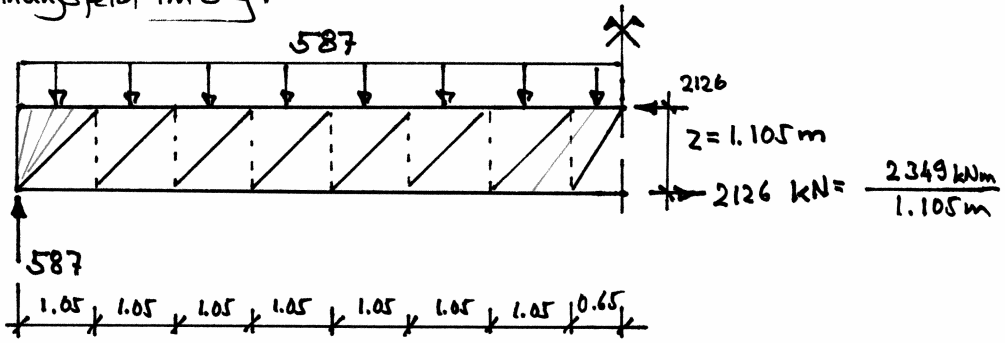
Druckzonendicke $= \frac{2152}{4.52 \cdot 16.5} = \underline{29\ mm}$

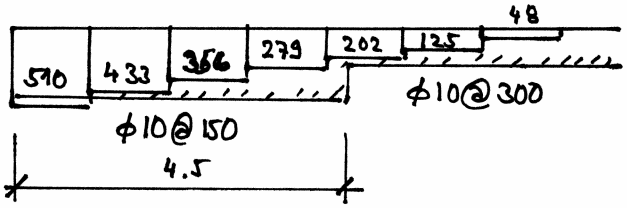
effektiver Hebelarm $z = 1200 - 81 - \frac{29}{2} = \underline{1105\ mm}$

$M_{Rd} = A_s f_{sd} z = 4948 \cdot 435 \cdot 1105 = \underline{2359\ kNm} > M_{d,max} = 2349\ kNm$

Die Bewehrung mit 7 Stäben ϕ30 reicht gerade aus, um den Biegetragsicherheitsnachweis erbringen zu können. Die Abstufung der Längsbewehrung wird im Zusammenhang mit der Bügelbemessung anhand eines Spannungsfelds untersucht. Dabei wird der in Feldmitte sich ergebende Hebelarm $z = 1.105\,m$ über die ganze Trägerlänge als konstanter Gurtabstand vorausgesetzt (Vereinfachung, sichere Seite).

Spannungsfeld im Steg:

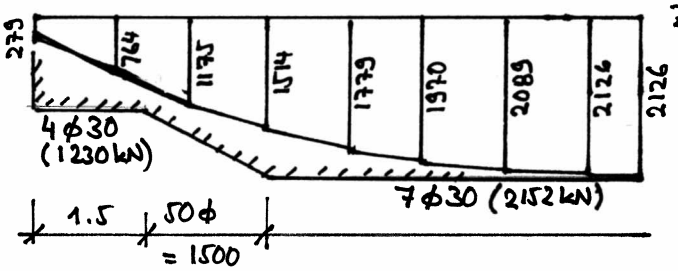




Bügelkräfte [kN] und Deckungslinie

Über eine Länge von 1.05 m sind 7 zweischnittige Bügel ϕ 10@150 angeordnet. Widerstand $7 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot 435 = 478$ kN (< 510 kN) reicht bis auf fächerförmiges Spannungsfeld bei Auflager aus zur Aufnahme der Bügelkräfte.

4.5 m vom Auflager entfernt wird die Bügelbewehrung abgeschuft. Im Auflagerbereich (erste 1.05 m) ein zusätzlicher Bügel (8 statt 7)!



Zuggurtkraft [kN] und Deckungslinie

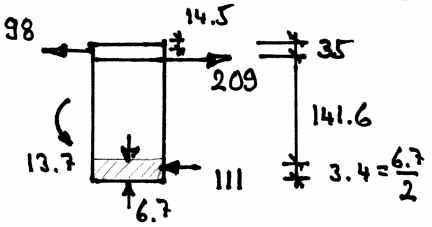
4 unten liegende ϕ30 bei Auflager aufgebogen und verankert

3 oben liegende ϕ30 abgeschuft

Schubanschluss Druckflansch:

Die maximale Schubkraft zwischen Steg und Flansch tritt in der zweiten Länge von 1.05 m vom Auflager auf und beträgt 764 − 279 = 485 kN. Davon wird auf jede Seite des Steges ein Anteil von $485 \cdot \frac{4.52 - 0.4}{2 \cdot 4.52} = 221$ kN übertragen, d.h. 221/1.05 = 211 kN/m, was mit einem Winkel $\alpha_f = 25°$ zu einer Querzug-kraft von $211 \cdot \tan 25° = 98$ kN/m führt.

Die Querzugkraft wirkt in der Mitte der Druckzonendicke von 29 mm und ist mit dem Querbiegemoment von 13.7 kNm/m zu superponieren:

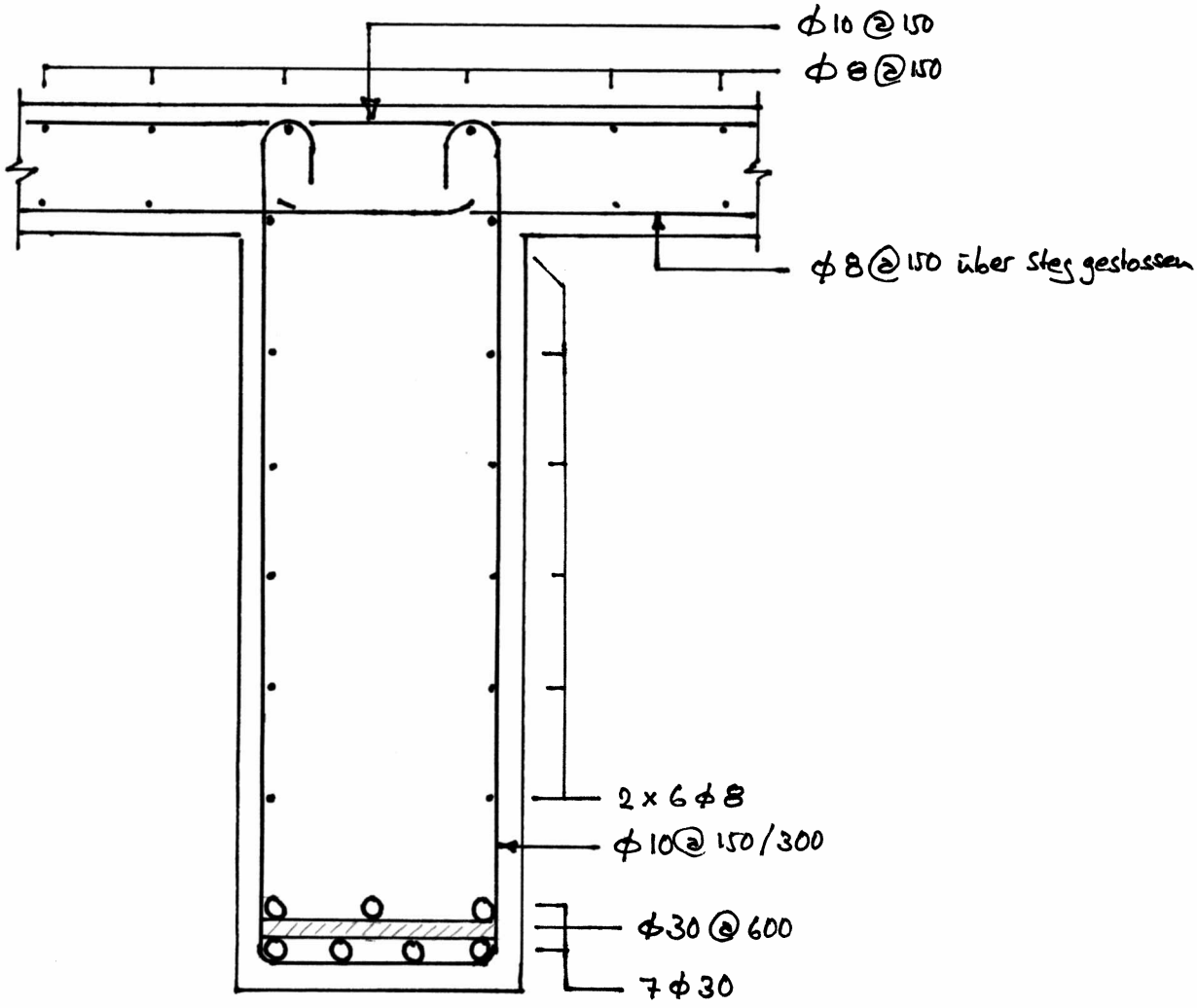


$(35 - 14.5) \cdot 98 = 2.0$ kNm/m

$(13.7 + 2.0)/0.1416 = 111$ kN/m, $\frac{111}{16.5} = 6.7$ mm

Die Zugkraft von 209 kN/m kann von ϕ10@150 aufgenommen werden: $5^2 \cdot \pi \cdot 435/150 = 228$ kN/m, o.k.

Bewehrungsskizze



Bemerkungen

Das Beispiel zeigt das typische Vorgehen bei der Bemessung von Stahlbetonbauteilen: - Wahl der Abmessungen und Baustoffe

- Zusammenstellung der Einwirkungen
- statische Berechnung und Bemessung der Hauptquerschnitte
- konstruktive Durchbildung
- Kontrolle, Zusammenfassung und Zusammenstellung der noch weiter zu behandelnden Probleme.

Weiter zu bearbeiten wären im vorliegenden Fall (hier unterdrückt):

- Anordnung der Stösse der Längsbewehrung ϕ 30 mm sowie der konstruktiven Bewehrung; Bewehrungsplan und Eisenliste
- Gebrauchstauglichkeitsnachweise (Durchbiegungen in Feldmitten der Platte sowie des Plattenbalkens).

BEISPIEL 2.10

Man ermittle näherungsweise die Mittendurchbiegung des in Beispiel 2.9 betrachteten Plattenbalkens. Ferner ermittle man die zugehörigen Stahlspannungen.

1. Gerissene Steifigkeit kurzfristig

Annahme $x < h'$, nur Hauptbewehrung $7\phi 30$ berücksichtigt

$A_s = 7 \cdot 15^2 \cdot \pi = 4948 \text{ mm}^2$ | $\rho_n = 0.006267$

$b_{eff} = 4.52 \text{m}$

$d = 1200 - 81 = 1119 \text{ mm}$ | (2.12): $x = \underline{118.5 \text{ mm}} < h' = 180 \text{mm}$, o.k.

$\rho = \frac{A_s}{b_{ef} \cdot d} = 0.098 \%$

$E_c = 32 \text{ kN/mm}^2$ | (2.13): $EI^{II} = \underline{1095.6 \text{ MNm}^2}$

$E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$

2. Gerissene Steifigkeit langfristig

Annahme $x > h'$, $\varphi = 2$

$b = 4.52 \text{m}$ | (2.24): $x = \underline{197.6 \text{ mm}} > h'$, o.k.

$b_w = 0.4 \text{m}$

$h' = 0.18 \text{m}$ | (2.25): $EI_a^{II} = \underline{985.1 \text{ MNm}^2}$

$A_s = 4948 \text{ mm}^2$

$n = \frac{205 \cdot 3}{32} = 19.22$

$d = 1119 \text{ mm}$

3. Durchbiegung infolge ständigen Lasten, langfristig

Annahme Plattenbalken vollgerissen, keine Zugversteifung

$g = 5 \cdot (4.5 + 1) + 0.4 \cdot 1.02 \cdot 25 = 37.7 \text{ kN/m}$

$w_{ga} = \frac{5 g \cdot \ell^4}{384 \, EI_a^{II}} = \frac{5 \cdot 37.7 \cdot (16)^4}{384 \cdot 985.1} = \underline{\underline{32.7 \text{ mm}}} = \ell/490$

4. Durchbiegung infolge Nutzlasten, kurzfristig

$w_q = \frac{5 q \ell^4}{384 \cdot EI^{II}} = \frac{5 \cdot 15 \cdot (16)^4}{384 \cdot 1095.6} = \underline{\underline{11.7 \text{ mm}}} = \ell/1370$

N.B. $q = 5 \cdot 3 = 15 \text{ kN/m}$

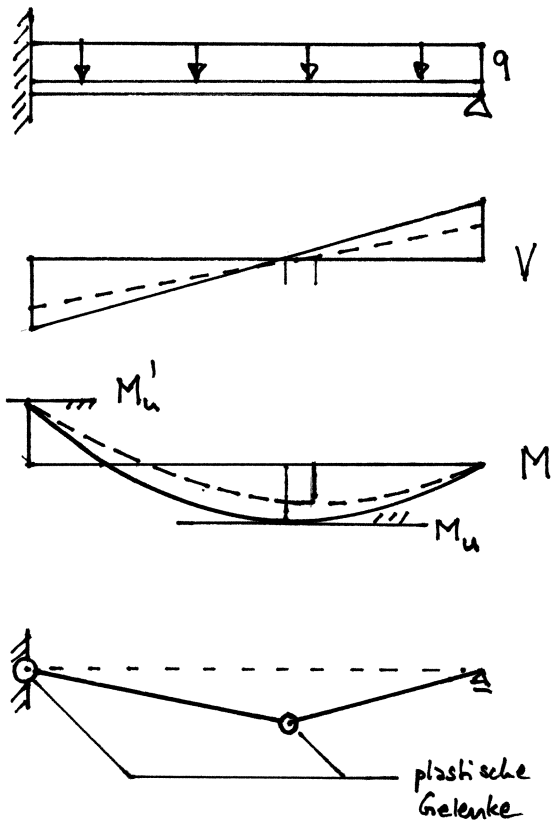
5. Stahlspannungen

g, langfristig : $\sigma_{sga} = \dfrac{g\,\ell^2 (d-x)\, E_s}{8 E I_a^{II}} = \dfrac{37.7 \cdot 16^2 (1119 - 197.6)\, 205}{8 \cdot 985.1} = \underline{\underline{231\ N/mm^2}}$

q, kurzfristig : $\sigma_q = \dfrac{q\,\ell^2 (d-x)\, E_s}{8 E I^{II}} = \dfrac{15 \cdot 16^2 (1119 - 118.5) \cdot 205}{8 \cdot 1095.6} = \underline{\underline{90\ N/mm^2}}$

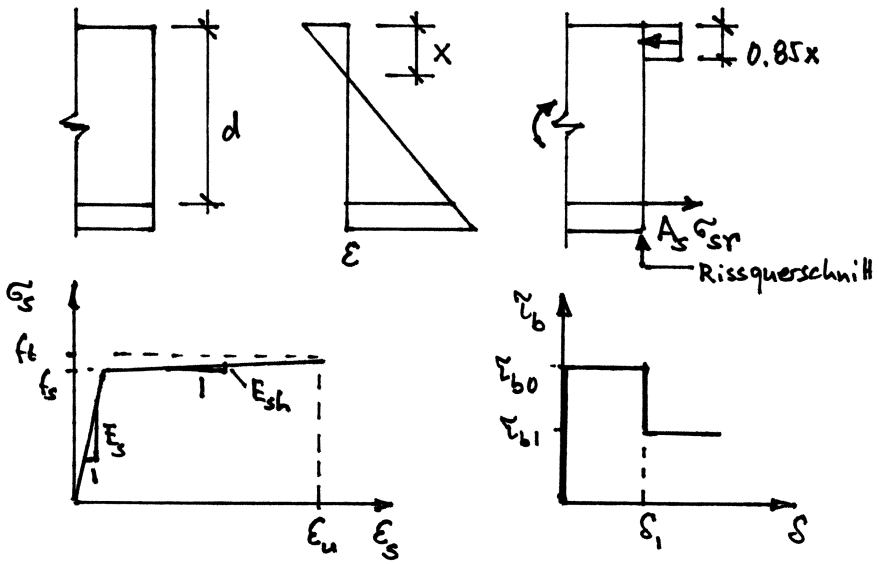
2.4 Verformungsvermögen

Schnittgrössen statisch unbestimmter Bauteile dürfen bei Einhaltung bestimmter Regeln ohne rechnerischen Nachweis des Verformungsvermögens umgelagert werden (SIA 262, 4.1.4.2.5). Dies wird im folgenden erläutert.



Bei kontinuierlicher Steigerung der Last q wird beim nebenstehenden System zuerst der Fliessbeginn bei der Einspannung erreicht. Dort bildet sich ein erstes plastisches Gelenk; das einfach statisch unbestimmte System wird zu einem statisch bestimmten einfachen Balken. Da der Fliessbeginn im Feld noch nicht erreicht ist, kann die Last weiter gesteigert werden. Dies erfordert bei der Einspannung eine bestimmte plastische Rotation. Wenn auch der Fliessbeginn im Feld erreicht wird, wird das System zu einem Mechanismus.

Der plastische Rotationsbedarf hängt vom betrachteten System und der Belastungskonfiguration ab. Das Rotationsvermögen wird einerseits durch die Stahldehnungen und andererseits durch die Betonstauchungen begrenzt.



Beschränkung der plastischen Rotation θ_{pu} infolge Betonstahl, Näherung:

$$\theta_{pus} = \frac{l_p(\varepsilon_{smu} - \varepsilon_{smy})}{d-x} \qquad (2.26)$$

l_p ... plastische Gelenklänge, ca. 2d

ε_{smu} ... mittlere Stahldehnung beim Erreichen von $\varepsilon_{sr} = \varepsilon_u$ bzw. $\sigma_{sr} = f_t$

ε_{smy} ... " " " " " $\varepsilon_{sr} = f_s/E_s$ bzw. $\sigma_{sr} = f_s$

Beschränkung der plastischen Rotation θ_{pu} infolge Beton, Näherung:

$$\theta_{puc} = l_p\left(\frac{\varepsilon_{c2}}{x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x}\right) \qquad (2.27)$$

ε_{c2} ... Bruchstauchung von Beton, ca. 3‰ bzw. mit Umschnürung u.U. wesentlich höher (SIA 262, 4.2.1.9)

Die mittleren Stahldehnungen ε_{sm} werden gemäss

$$\sigma_{sr} \leq f_s \rightarrow \varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{s_{rm}\tau_{b0}}{\phi E_s} \qquad (2.28)$$

$$\sigma_{sr} > f_s \geq \sigma_{smin} \rightarrow \varepsilon_{sm} = \frac{\phi(f_s^2 - \sigma_{smin}^2)}{4 s_{rm} E_s \tau_{b0}} + \frac{\phi f_s(\sigma_{sr} - f_s)}{2 s_{rm} E_s \tau_{b1}} + \frac{\phi(\sigma_{sr} - f_s)^2}{4 s_{rm} E_{sh} \tau_{b1}} \qquad (2.29)$$

$$\sigma_{smin} = \sigma_{sr} - \frac{2 s_{rm}\tau_{b0}}{\phi} + \frac{(\sigma_{sr} - f_s)(\tau_{b0} - \tau_{b1})}{\tau_{b1}} \qquad (2.30)$$

und

$$\sigma_{smin} > f_y \rightarrow \varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr} - f_s}{E_{sh}} + \frac{f_s}{E_s} - \frac{s_{rm}\tau_{b1}}{\phi E_{sh}} \qquad (2.31)$$

aufgrund des in Kapitel 3 dargestellten Zuggurtmodells ermittelt, wobei

σ_{sr} ... Stahlspannung am Riss

s_{rm} ... mittlerer Rissabstand

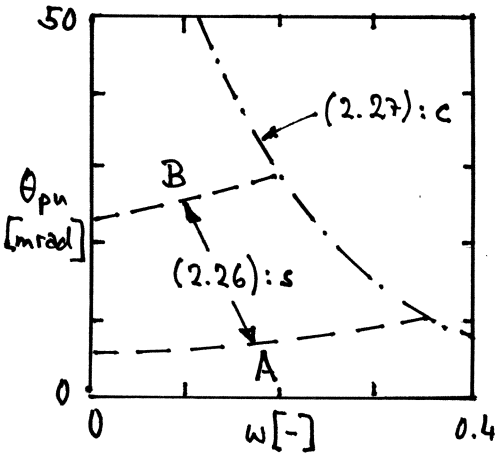
ϕ ... Stabdurchmesser des Betonstahls

τ_{b0} ... Verbundschubspannung vor Fliessbeginn des Betonstahls (ca. $2 f_{ctm}$)

τ_{b1} ... " nach " " " (ca. f_{ctm})

σ_{smin} ... minimale Stahlspannung zwischen den Rissen

Für Rechteckquerschnitte ist der mechanische Bewehrungsgehalt w zu x/d proportional ($w_d = 0.85\,x$) und damit können (2.26) und (2.27) in Abhängigkeit von w dargestellt werden:



- Mit zunehmendem w fällt θ_{puc} ab, während θ_{pus} leicht ansteigt.
- Für kleine w ist θ_{pus} massgebend, für grosse w hingegen θ_{puc}.
- Stähle der Duktilitätsklasse A sind i.a. nicht zu empfehlen bzw. es ist stets ein Nachweis des Verformungsvermögens zu erbringen (SIA 262, 4.1.4.2.5).

Das oben dargestellte Diagramm beruht auf einigen hier nicht weiter diskutierten Annahmen. Wesentlich sind die qualitativen Zusammenhänge. Während die Grenzen (2.26) für den Betonstahl bei gegebener Duktilitätsklasse nicht weiter beeinflusst werden können, kann die Grenze (2.27) für den Beton bei Bedarf mit einer geschichteten konstruktiven Durchbildung (Umschnürung) verschoben werden.

2.5 Ermüdung

2.5.1 Allgemeines

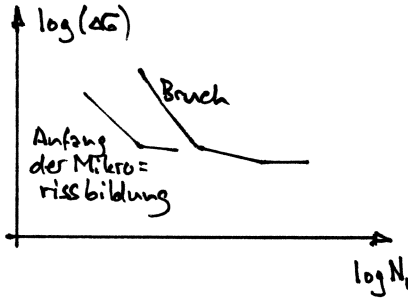
Bei Bahnbrücken, Fahrbahnplatten von Strassenbrücken, Kranbahnträgern, Maschinenfundamenten und ähnlich beanspruchten Bauteilen können Ermüdungsprobleme auftreten. Sind mehr als 50 000 Spannungswechsel zu erwarten, ist ein Ermüdungsnachweis für den Bewehrungsstahl und den Beton erforderlich (SIA 262, 4.3.8.1.1).

Wie auch im Stahlbau (Kerbwirkung!) kann im Betonbau mit einer geeigneten konstruktiven Durchbildung die Gefährdung durch Ermüdung stark reduziert werden (SIA 262, 4.3.8.1.2 und 5.6): Schweissungen der Bewehrung möglichst vermeiden, falls unumgänglich nur Stumpfnähte, keinesfalls Heftschweissungen; Verankerungen und Kupplungen möglichst in Bereichen kleiner Spannungsdifferenzen anordnen; Querkraftbewehrung von Platten muss Längsbewehrung umfassen und ausreichend überdeckt sein.

2.5.2 Versuche an freischwingenden Proben und praktische Umsetzung

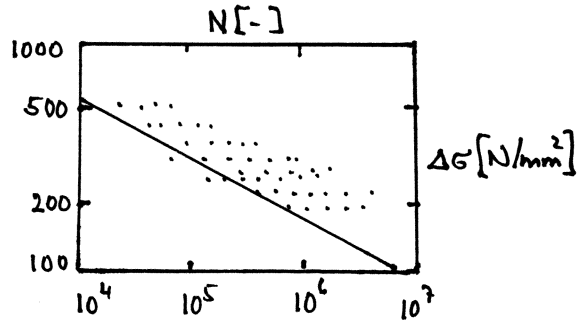
Die meisten Erkenntnisse über das Ermüdungsverhalten stammen aus Versuchen an freischwingenden Proben, insbesondere an Stahlstäben. Im Vergleich zum Betonstahl sind die Kenntnisse des Ermüdungsverhaltens des Betons eher gering.

Normalerweise werden die Proben einer Spannungsgeschichte der Art $\sigma = \sigma_m + (\Delta\sigma/2)\cdot\sin(\omega t)$ unterworfen, bis bei einer Anzahl N_u Spannungswechsel der Bruch eintritt. Trägt man die Resultate im doppeltlogarithmischen Massstab auf, lassen sich folgende Phasen des Ermüdungsprozesses unterscheiden:



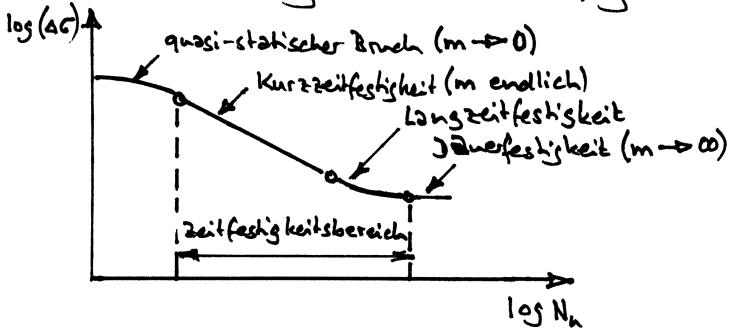
- Entwicklung der Versetzungsstruktur
- Mikrorissbildung und Wachstum
- Makrorissbildung / Rissfortpflanzung
- Bruch

Aus vielen Ermüdungsversuchen mit unterschiedlichen Spannungsdifferenzen $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ ergeben sich viele Punkte in derartigen S-N-Diagrammen (Wöhler-Diagrammen), z.B.



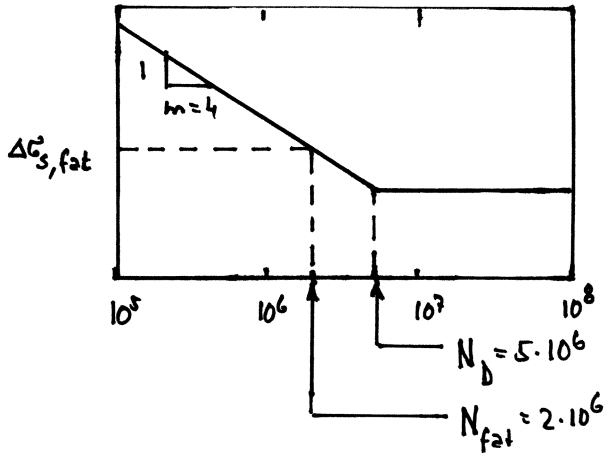
N.B.:
- i.a. grosse Streuung der Resultate von Ermüdungsversuchen
- Auswertung durch Einpassen von Geraden, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten werden.

Im S-N-Diagramm werden folgende Bereiche unterschieden:



N.B. Parameter m siehe unten, Betriebsfestigkeitskurve

Das Ermüdungsverhalten von Betonstahl wird mit Betriebsfestigkeitskurven beschrieben (SIA 262, 3.2.2.6):



- Die Bemessungswerte $\Delta\sigma_{sd,fat}$ ergeben sich aus den nominellen Werten $\Delta\sigma_{s,fat}$ durch Division mit $\gamma_s = 1.15$ (SIA 262, 4.3.8.2.1)
- Die Dauerfestigkeit beträgt etwa $\Delta\sigma_{sd,D} = 0.8\ \Delta\sigma_{sd,fat}$ (SIA 262, 4.3.8.2.3).

Werte für $\Delta\sigma_{sd,fat}$:

145	N/mm²	...	gerade Stäbe, $\phi \leq 20$ mm
135	"	...	Bügel $\phi \leq 16$mm
120	"	...	gerade Stäbe $\phi > 20$ mm
55	"	...	geschweisste Längsstösse, Matten, mechanische Stabverbindungen } evtl. höher bei schlüssigen Versuchen

2.5.3 Schädigung durch Ermüdungsbeanspruchung

Eine Probe mit der initialen Querschnittsfläche A werde einer konstanten Normalkraftdifferenz $\Delta\sigma_0 \cdot A$ unterworfen. Nach N Zyklen sei eine Schädigung D eingetreten, derart, dass nur noch eine Querschnittsfläche $A(1-D)$ wirksam ist. Die effektive Spannungsdifferenz beträgt dann

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_0}{1-D} \tag{2.32}$$

Setzt man voraus, dass die Zunahme von D mit N zu $\Delta\sigma^m$ proportional ist, also

$$\frac{dD}{dN} = c \cdot \Delta\sigma^m \tag{2.33}$$

(mit c = const), ergibt sich unter Verwendung von (2.32) zunächst

$$\frac{dD}{dN} = \frac{c \cdot \Delta\sigma_0^m}{(1-D)^m}$$

woraus

$$-\frac{(1-D)^{m+1}}{m+1} = N \cdot c\, \Delta\sigma_0^m + \text{const}$$

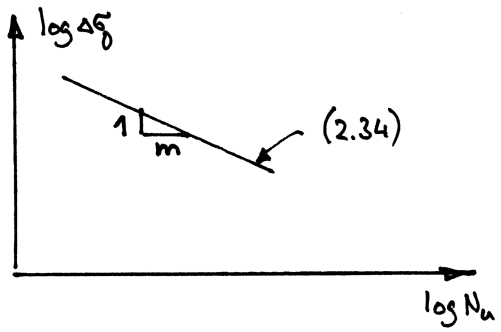
und somit wegen $D(0)=0$ und $D(N_u)=1$

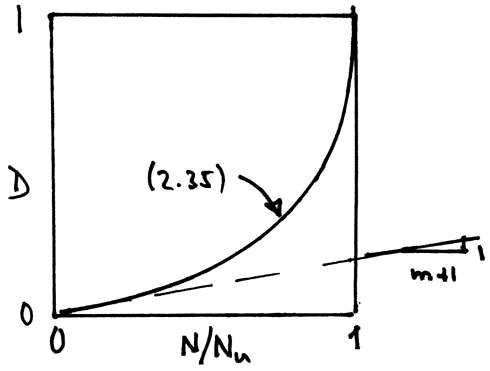
$$N_u = \frac{1}{c\,(m+1)\,\Delta\sigma_0^m} \tag{2.34}$$

sowie

$$D = 1 - \left(1 - \frac{N}{N_u}\right)^{\frac{1}{m+1}} \tag{2.35}$$

folgt:





N.B. analog Betriebsfestigkeitskurve

Bei konstantem m (für alle $\Delta\sigma_0$) ergibt sich eine einzige D-(N/N_u)-Beziehung (2.35), und somit können die Schädigungen infolge verschiedener $\Delta\sigma_{0i}$ superponiert werden. Für den Ermüdungsbruch (D=1) gilt die Regel

$$\sum_i \frac{N_i}{N_{ui}} = 1 \qquad (2.36)$$

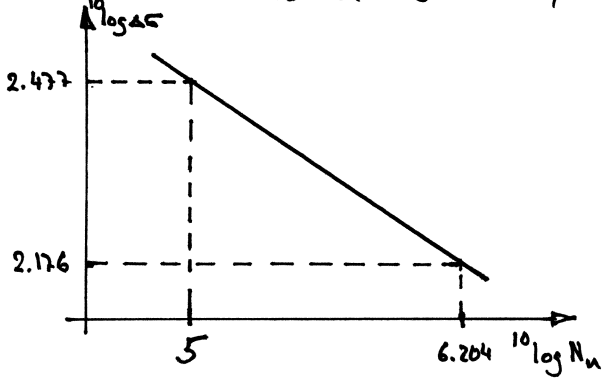
mit

N_i ... Anzahl Spannungswechsel $\Delta\sigma_{0i}$

N_{ui} ... N_u für $\Delta\sigma_{0i}$

BEISPIEL 2.11

Aus Ermüdungsversuchen an einem bestimmten Betonstahl ist bekannt, dass $1.6 \cdot 10^6$ Lastwechsel mit einer Schwingbreite $\Delta\sigma = 150\ N/mm^2$ zum Bruch führten, während der Bruch bei $\Delta\sigma = 300\ N/mm^2$ bereits bei 10^5 Lastwechseln eintrat. Wieviele Lastwechsel $\Delta\sigma = 200\ N/mm^2$ würden zum Bruch führen (a), und (b) wenn zuerst 10^6 Lastwechsel $\Delta\sigma = 150\ N/mm^2$ aufgebracht würden, wieviele Lastwechsel $\Delta\sigma = 200\ N/mm^2$ würden dann zum Bruch führen?



$$m = \frac{6.204 - 5}{2.477 - 2.176} = 4.0$$

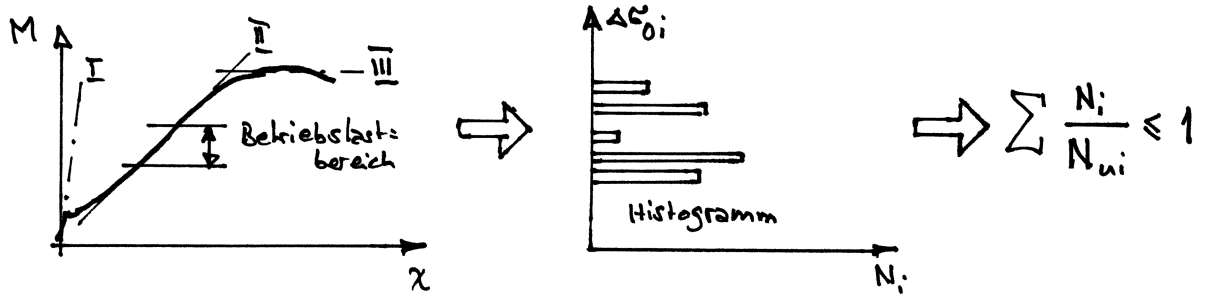
a) $N_u\ (\Delta\sigma = 200\ N/mm^2) = 1.6 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{150}{200}\right)^4 = \underline{506'250}$

b) (2.36): $\frac{10^6}{1.6 \cdot 10^6} + \frac{N_{200}}{506'250} = 1 \longrightarrow \underline{N_{200} = 189'844}$

Die Schadensakkumulationshypothese (2.36) wird nach Palmgren und Miner benannt (vgl. SIA 262, 4.3.8.2.5).

2.5.4 Ermüdungsnachweis für Bewehrung

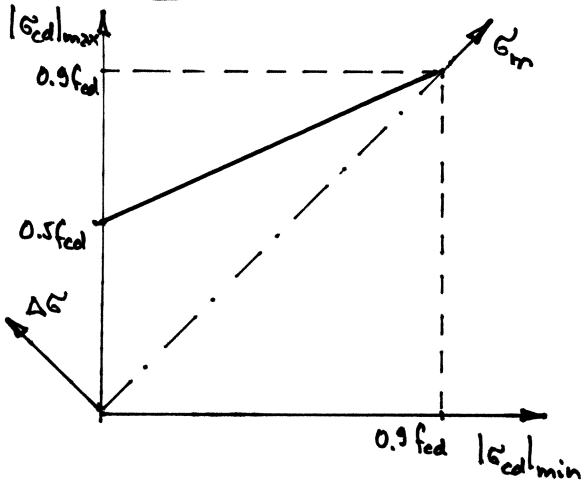
Aus einem bestimmten Lastkollektiv kann man für einen gegebenen Querschnitt über das Momenten- Krümmungsdiagramm und die kritische Bewehrungslage auf die Spannungswechsel $\Delta\sigma_{di}$ schliessen und damit den Nachweis gemäss (2.36) führen:



Oft genügen vereinfachte Nachweise, indem man zeigt, dass $\Delta\sigma_{sd}$ infolge der Ermüdungseinwirkungen die Dauerfestigkeit $\Delta\sigma_{sd,D}$ bzw. die Betriebsfestigkeit $\Delta\sigma_{sd,fat}$ nicht überschreitet, vgl. SIA 262, 4.3.8.2.

2.5.5 Ermüdungsnachweis für Beton

Für Biegedruckzonen wird von einer mit zunehmender Mittelspannung abnehmenden Schwingbreite ausgegangen:



Die nebenstehende Darstellung entspricht einem sogenannten Goodman-Diagramm.

Vgl. SIA 262, 4.3.8.3.1

2.6 Zusammenfassung

1. Das Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen unter Biegebeanspruchung wird mit Momenten-Krümmungsdiagrammen beschrieben. Im allgemeinen sind die drei Zustände I (ungerissen, elastisch), II (gerissen, Bewehrung elastisch) und III (gerissen, Bewehrung fliesst) zu unterscheiden.
2. Das Verhalten im Zustand I kann mit den üblichen Methoden der Festigkeitslehre erfasst werden. Reine Betonquerschnittswerte führen zu guten Näherungen für die Biegesteifigkeit. Allenfalls sind ideelle Querschnittswerte zu verwenden.
3. Das Verhalten im Zustand II kann unter der Annahme eines linear elastischen Verhaltens der Bewehrung wie auch des Betons (auf Druck) gut erfasst werden. Über die Wertigkeit $n = E_s/E_c$ können bei Bedarf Tangenten- bzw. Sekantensteifigkeiten des Betons sowie der Einfluss des Kriechens berücksichtigt werden.
4. Das Verhalten im Zustand III kann unter Voraussetzung eines ideal plastischen Verhaltens der Bewehrung wie auch des Betons erfasst werden. Die Fliessdehnung der Bewehrung und die Bruchstauchung des Betons begrenzen die möglichen Krümmungen nach unten und oben.
5. Die Bewehrungsgehalte sind nach unten und oben derart zu begrenzen, dass die Bewehrung beim Reissen des Betons elastisch bleibt und vor dem Stauchen des Betons fliesst.
6. Plattenbalken können analog wie Rechteckquerschnitte behandelt werden, wobei die mitwirkende Plattenbreite zu beachten ist.
7. Durchbiegungen können anhand des Verhaltens im Zustand I und II abgeschätzt werden, gegebenenfalls unter Berücksichtigung des Kriechens. Für verfeinerte Untersuchungen sind ungerissene und gerissene Bereiche zu unterscheiden sowie allenfalls der Einfluss der Zugversteifung zu berücksichtigen.

8. Mittlere Rissabstände und Rissbreiten können falls erforderlich mit dem Zuggurtmodell abgeschätzt werden.
9. Zur Erfassung des Tragverhaltens beliebiger Querschnitte unter allgemeinen Beanspruchungen stehen verschiedene Querschnittsprogramme zur Verfügung.
10. Das plastische Verformungsvermögen kann bei Bedarf mit den in Kapitel 2.4 zusammengestellten Beziehungen nachgewiesen werden.
11. Bei oft wiederholten Beanspruchungen ist die Ermüdungsgefahr zu beachten. Die in Kapitel 2.5 zusammengestellten Grundlagen erlauben den Einstieg in diese Problematik.
12. Bei der Behandlung praktischer Probleme empfiehlt sich i.a. ein nach folgenden Punkten gegliedertes Vorgehen:
    - Tragsystem und Abmessungen
    - Baustoffe
    - Kraftfluss / überschlägige Bemessung (in Richtung Kraftfluss)
    - Konstruktionsdetails / Bauvorgang (in umgekehrter Richtung)
    - Kontrolle / evtl. Verfeinerung (in Richtung Kraftfluss)
    - Zusammenstellung der weiter zu bearbeitenden Fragen.

3. Biegung und Normalkraft

3.1 Allgemeines

Bei gegebenen Spannungs-Dehnungsdiagrammen kann das Tragverhalten von Stäben mit beliebiger Querschnittsgeometrie und Baustoffzusammensetzung aufgrund der Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte ermittelt werden. Aus der ebenen Dehnungsverteilung

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \varepsilon_0 + \chi_y z - \chi_z y \tag{3.1}$$

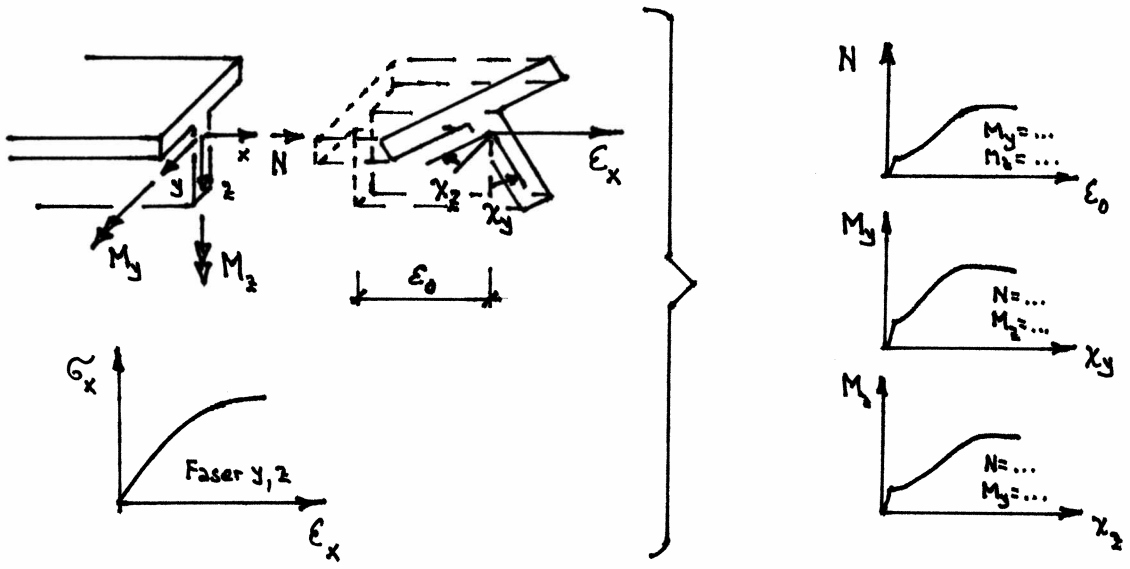
folgt mit den Werkstoffbeziehungen

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_x(\varepsilon_x) \tag{3.2}$$

durch Integration über die Querschnittsfläche A

$$N = \int_A \sigma \, dA \;,\; M_y = \int \sigma z \, dA \;,\; M_z = -\int \sigma y \, dA \tag{3.3}$$

Von den Verformungsgrössen $\varepsilon_0, \chi_y, \chi_z$ ausgehend können die Schnittgrössen N, M_y, M_z ohne weiteres ermittelt werden. Die umgekehrte Aufgabe, d.h. die Ermittlung von $\varepsilon_0, \chi_y, \chi_z$ zu gegebenen Schnittgrössen, erfordert im allgemeinen eine Iteration.



$$\{\varepsilon_0, \chi_y, \chi_z\} \underset{\text{Iteration}}{\overset{\text{Integration}}{\rightleftharpoons}} \{N, M_y, M_z\}$$

3.2 Normalkraft

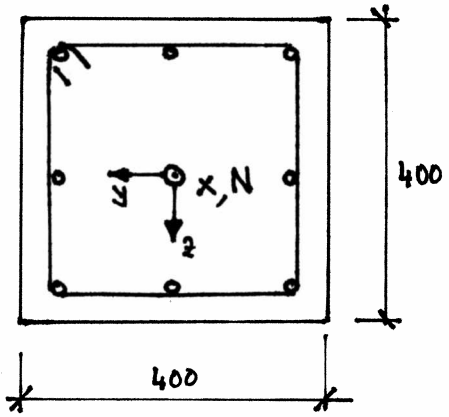
3.2.1 Einleitung

Der Fall einer reinen Normalkraft N tritt in der Praxis nur selten auf. Er erlaubt es aber, das grundsätzliche Verhalten von Stahlbetonbauteilen zu erläutern.

Bei asymmetrischen Querschnitten treten unter reiner Normalkraft im allgemeinen auch Krümmungen auf. Hier beschränken wir uns auf symmetrische Querschnitte. Ferner werden auch thermische und Langzeiteffekte nicht betrachtet, d.h. wir beschränken uns auf Kurzzeiteffekte.

BEISPIEL 3.1

Man ermittle das N-ε-Diagramm für einen quadratischen Querschnitt (Seitenabmessungen 400mm) aus Beton C 30/37, der mit Bügeln ϕ 12 mm (c_{nom} = 35mm) und 8 Längsstäben ϕ 26 mm aus Betonstahl B500B bewehrt ist.



Beton C 30/37 : f_{cd} = 20 N/mm²

f_{ctm} = 2.9 N/mm²

E_{cm} = 33.6 kN/mm²

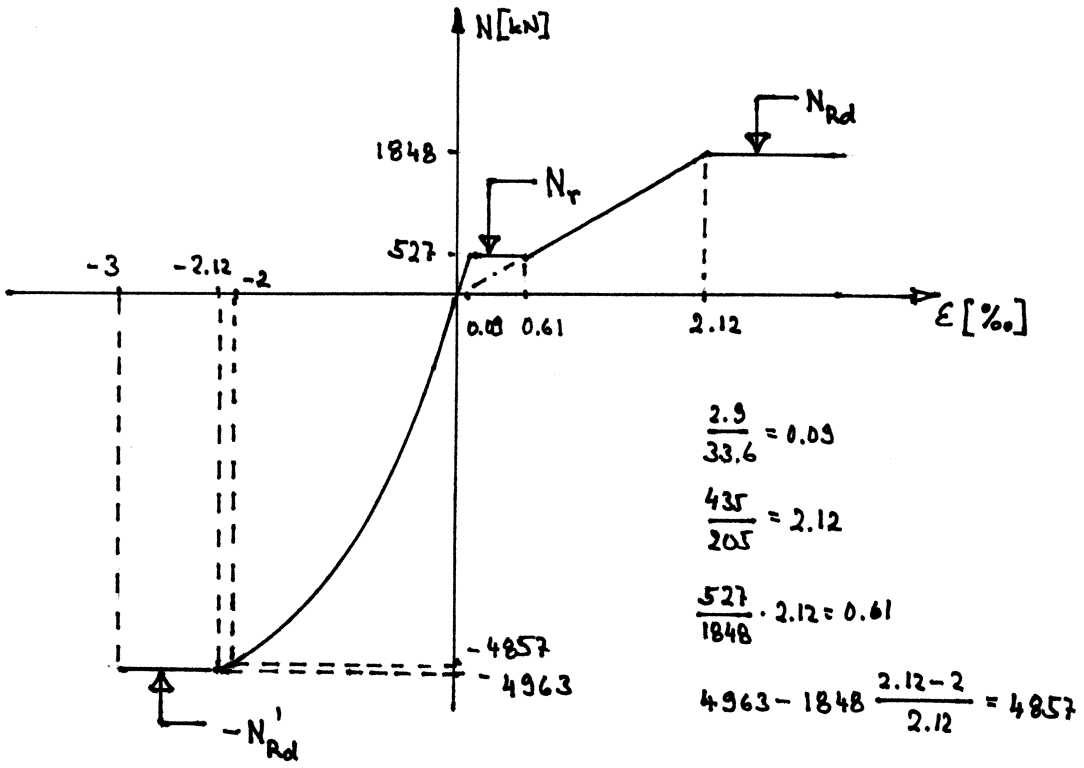
Betonstahl B500B : f_{sd} = 435 N/mm²

E_s = 205 kN/mm²

Rissnormalkraft $N_r = (400^2 - 8 \cdot 13^2 \cdot \pi)\,2.9 + 2.9 \cdot \frac{205}{33.6} \cdot 8 \cdot 13^2 \cdot \pi =$ **527 kN**

Zugwiderstand $N_{Rd} = 8 \cdot 13^2 \cdot \pi \cdot 435 =$ **1848 kN**

Druckwiderstand $N'_{Rd} = (400^2 - 8 \cdot 13^2 \cdot \pi) \cdot 20 + 435 \cdot 8 \cdot 13^2 \cdot \pi =$ **4963 kN**



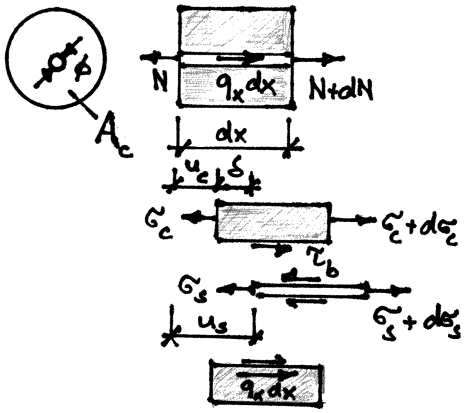
σ-ε-Diagramme gemäss Figur 11 und 15, SIA 262; Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Zugversteifung) vernachlässigt, für $N > N_r$ ist nur noch der Betonstahl wirksam.

3.2.2 Zuggurtmodell

Das Zuggurtmodell erlaubt die Berücksichtigung der Zugversteifung sowie die Abschätzung von Rissabständen s_r und Rissbreiten w_r.

Wir betrachten ein differentielles Element eines Zuggurts mit Bruttoquerschnittsfläche A_c, das mit einem Bewehrungsstab mit Durchmesser ϕ bewehrt ist. Der geometrische Bewehrungsgehalt beträgt $\rho = \phi^2\pi/(4A_c)$. Zwischen Beton und Bewehrung ergibt sich der Schlupf

$$\delta = u_s - u_c \qquad (3.4)$$



Gleichgewicht erfordert

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi\pi\, dx\, \tau_b + q_x dx + A_c(1-\rho)d\sigma_c = 0 \\ -\phi\pi\, dx\, \tau_b + \frac{\phi^2\pi}{4} d\sigma_s = 0 \end{array} \right\}$$

woraus

$$\frac{d\sigma_c}{dx} = -\frac{\phi\pi\tau_b + q_x}{A_c(1-\rho)} \quad , \quad \frac{d\sigma_s}{dx} = \frac{4\tau_b}{\phi} \tag{3.5}$$

folgt.

Unter der Annahme eines linear elastischen Verhaltens des Betons und der Bewehrung, d.h.

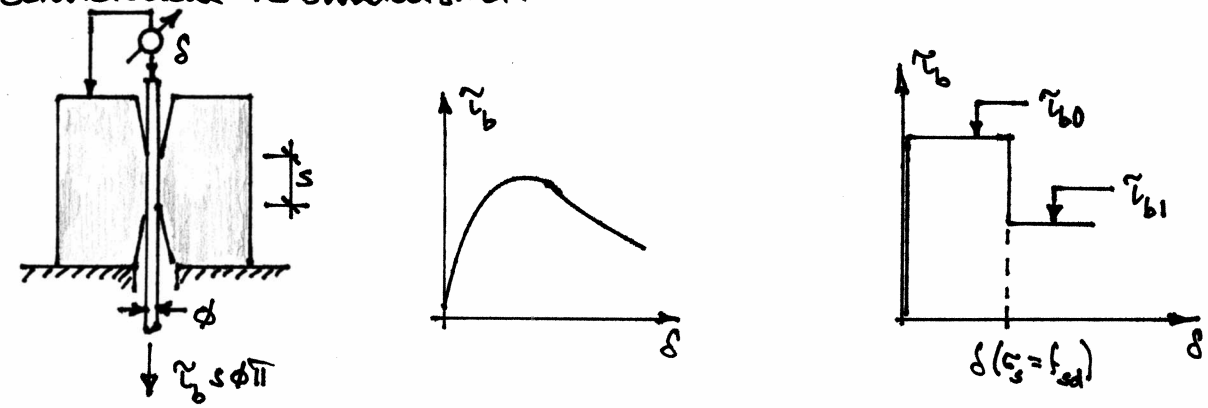
$$\varepsilon_c = \frac{du_c}{dx} = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad , \quad \varepsilon_s = \frac{du_s}{dx} = \frac{\sigma_s}{E_s} \tag{3.6}$$

ergibt sich die <u>Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes</u>

$$\frac{d\varepsilon_s}{dx} - \frac{d\varepsilon_c}{dx} = \frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{4\tau_b}{\phi E_s} + \frac{\phi\pi\tau_b + q_x}{A_c E_c(1-\rho)} \tag{3.7}$$

die bei bekannten <u>Verbundschubspannungs - Schlupf - Beziehungen</u> $\tau_b = \tau_b(\delta)$ integriert werden kann; im allgemeinen ist eine numerische Integration erforderlich, analytische Lösungen gelingen nur in Spezialfällen.

Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehungen werden durch Ausziehversuche an Stäben gewonnen, die über eine kurze Verbundlänge ($s \approx 3 \div 5\,\phi$) mit Betonblöcken verbunden sind:

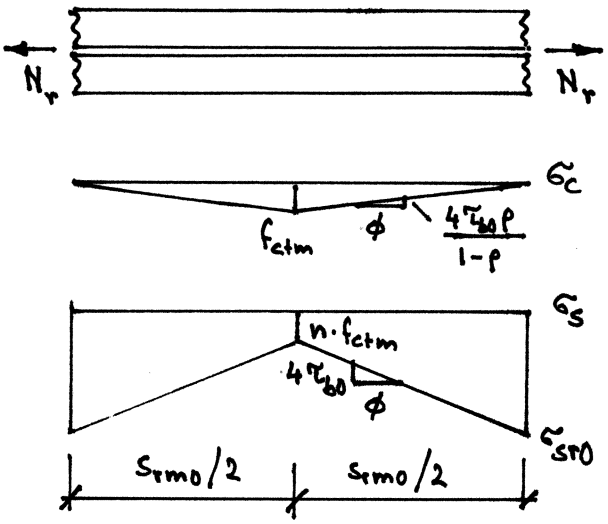


Die grundlegende Annahme des Zuggurtmodells besteht in der Idealisierung der τ_b-δ-Beziehung als abgetreppte, starr-ideal plastische Beziehung. Normalerweise wird vom Ansatz

$$\tau_{b0} = 2\,\tau_{b1} = 2 f_{ctm} \qquad \left(f_{ctm} = 0.3\, f_{ck}^{2/3}\,,\ N/mm^2\right) \tag{3.8}$$

ausgegangen. Der Abfall von τ_{b0} auf τ_{b1} erfolgt bei dem Schlupf, bei dem die Bewehrung die Fliessgrenze erreicht ($\sigma_s = f_{sd}$).

Bei der Rissbildung unter $N(x) = \text{const}$ $(d.h.\ q_x = 0)$ ergeben sich folgende Verhältnisse:



$$N_r = A_c(1-\rho) f_{ctm} + \rho A_c n f_{ctm} = \rho A_c \sigma_{sr0}$$

wobei

$$\rho = \frac{\phi^2 \pi}{4 A_c}, \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

Die angegebenen Steigungen der Funktionen $\sigma_c(x)$ und $\sigma_s(x)$ ergeben sich aus (3.5).

Für die Stahlspannung σ_{sr0} am Riss resultiert

$$\sigma_{sr0} = f_{ctm}\left(\frac{1}{\rho} - 1 + n\right) \tag{3.9}$$

und für s_{rm0} erhält man

$$s_{rm0} = \frac{\phi f_{ctm}(1-\rho)}{2\tau_{b0}\rho} \tag{3.10}$$

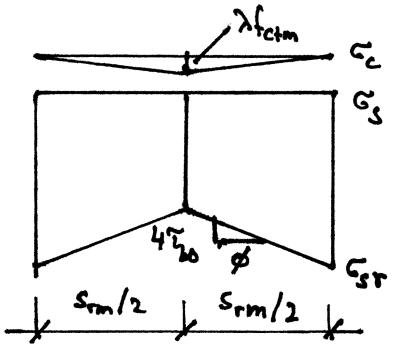
d.h. mit $(3.8)_1$

$$s_{rm0} = \frac{\phi}{4}\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \tag{3.11}$$

Da in der Mitte des Elements der Länge s_{rm0} die Betonspannung $\sigma_c = f_{ctm}$ ist, könnte sich dort ein weiterer Riss bilden. Allgemein kann sich der mittlere Rissabstand s_{rm} zwischen den Grenzen s_{rm0} und $s_{rm0}/2$ einstellen:

$$s_{rm} = \lambda \cdot s_{rm0} \qquad \left(\tfrac{1}{2} \le \lambda \le 1\right) \tag{3.12}$$

Wird die Normalkraft N nach dem Reissen gesteigert $(N > N_r)$, verharren die Betonspannungen bei den beim Reissen angenommenen Werten. Die Stahlspannungen steigen dagegen weiter:



Stahldehnung am Riss ... σ_{sr}/E_s

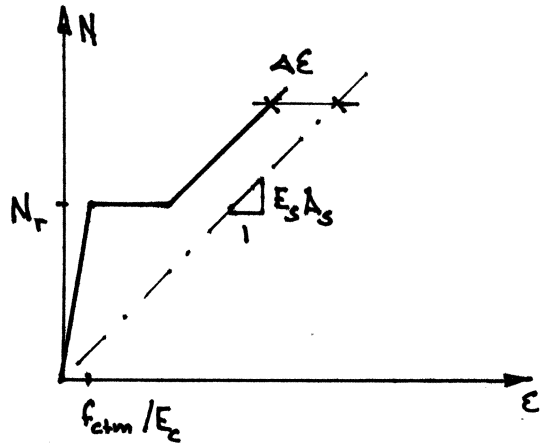
Mittlere Stahldehnung ... $\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{4\tau_{b0}}{\phi} \cdot \frac{s_{rm}}{4E_s}$

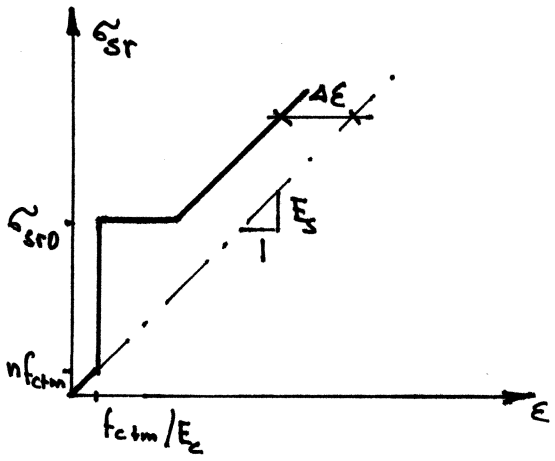
$$= \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho E_s}$$

Im N-ε-Diagramm und im σ_{sr}-ε-Diagramm ergibt sich dadurch im Vergleich zur Kennlinie des nackten Stahls eine Verschiebung um

$$\Delta\varepsilon = \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho E_s} \qquad (3.13)$$

nach links:





Die Rissbreiten ergeben sich aus der Differenz der mittleren Stahl- und Betondehnungen, multipliziert mit s_{rm}:

$$w_r = s_{rm}\left[\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c}\right] = \frac{\lambda s_{rm0}(2\sigma_{sr} - \lambda\sigma_{sr0})}{2E_s} \qquad (3.14)$$

BEISPIEL 3.2

Anwendung des Zuggurtmodells auf das Beispiel 3.1:

$$\rho = \frac{8 \cdot 13^2 \cdot \pi}{(400)^2} = 2.65\%$$

$$n = \frac{205}{33.6} = 6.1$$

(3.9): $\sigma_{sr0} = 2.9\left(\frac{1}{0.0265} + 6.1 - 1\right) = \underline{124\ N/mm^2}$

(3.11): $s_{rm0} = \frac{26}{4}\left(\frac{1}{0.0265} - 1\right) = \underline{238.4\ mm}$

(3.12): $\underline{119.2\ mm \leq s_{rm} \leq 238.4\ mm}$

Rissbreiten gemäss (3.14):

$\lambda = \frac{1}{2}$, $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.05$ mm

$\sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = \underline{0.23\ mm}$

$\lambda = 1$, $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0} \rightarrow w_r = 0.07$ mm

$\sigma_{sr} = f_{sd} \rightarrow w_r = \underline{0.43\ mm}$

3.2.3 Zwängungen

Das in Kapitel 3.2.2 dargestellte Zuggurtmodell gestattet die Beschreibung des Verhaltens von Stahlbetonzuggliedern unter einer monoton steigenden Belastung (Normalkraft N). Vielfach sind aufgezwungene oder behinderte Verformungen zu betrachten, die z.B. von Temperaturänderungen herrühren und bei statisch unbestimmten Systemen zu Zwangsschnittgrössen führen. Auch für solche Fälle kann das Zuggurtmodell angewendet werden.

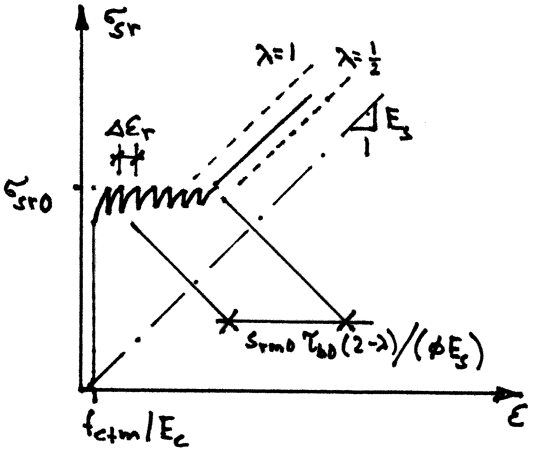
Wir betrachten ein Zugglied der Länge l, das einer monoton steigenden äusseren Zwängung ε unterworfen wird. Gemäss (3.9), (3.10) und (3.13) beträgt die Länge des horizontalen Teils der σ_{sr}-ε-Kurve $s_{rm0}\tau_{b0}(2-\lambda)/(\phi E_s)$. Da bei abgeschlossenem Rissbild über die Länge l bei mittlerem Rissabstand λs_{rm0} $l/(\lambda s_{rm0})$ Risse auftreten, entspricht jedem neuen Riss ein Dehnungszuwachs

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{s_{rm0}^2 \tau_{b0}\lambda(2-\lambda)}{l\,\phi\,E_s} \tag{3.15}$$

und für die zugehörigen mittleren Rissbreiten folgt aus (3.14) mit $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$

$$w_r = \frac{s_{rm0}\sigma_{sr0}\lambda(2-\lambda)}{2E_s} \tag{3.16}$$

Jeder Riss führt zu einer gewissen Entlastung, wodurch sich eine sägezahnförmige σ_{sr}-ε-Kurve ergibt:



Der nebenstehend illustrierte Fall eines sogenannten äusseren Zwangs kann auch z.B. infolge behinderter Verkürzung bei einem Temperaturabfall auftreten. Im allgemeinen ergibt sich kein abgeschlossenes Rissbild.

BEISPIEL 3.3

Eine 300 mm dicke Wand aus Beton C 30/37 ($f_{ctm} = 2.9\ N/mm^2$, $E_c = 33.6\ kN/mm^2$) ist beidseitig orthogonal mit Stäben ϕ 16 mm aus Betonstahl B500B ($E_s = 205\ kN/mm^2$) im Abstand von 150 mm bewehrt. Der Temperaturausdehnungskoeffizient von Beton und Betonstahl ist gleich $\alpha_T = 10^{-5}/°C$. Die Wand ist an ihren Enden unverschieblich gehalten und wird um 30°C abgekühlt. Ermittle Grenzwerte für Rissabstände und Rissbreiten.

Bewehrungsgehalt $\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot (150)^2} = 0.894\ \%$

(3.11): $s_{rm0} = \frac{16}{4}\left(\frac{1}{0.00894} - 1\right) = 444\ mm \rightarrow$ $\underline{222\ mm \leq s_{rm} \leq 444\ mm}$

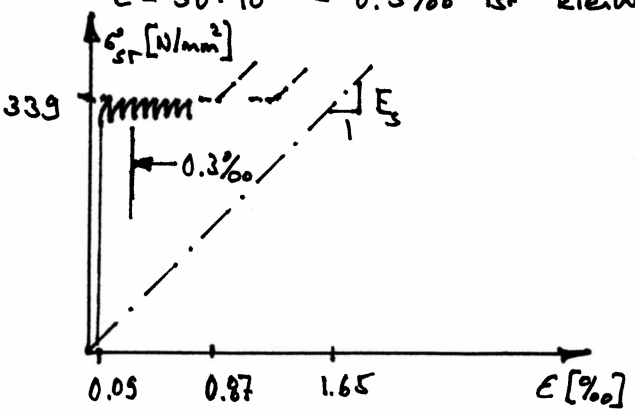
(3.9): $\sigma_{sr0} = 2.9\left(\frac{1}{0.00894} - 1 + \frac{205}{33.6}\right) = 339\ N/mm^2$

(3.14) mit $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$: $\lambda = 1 \rightarrow w_r = \frac{444 \cdot 339}{2 \cdot 205\,000} = 0.37\ mm$

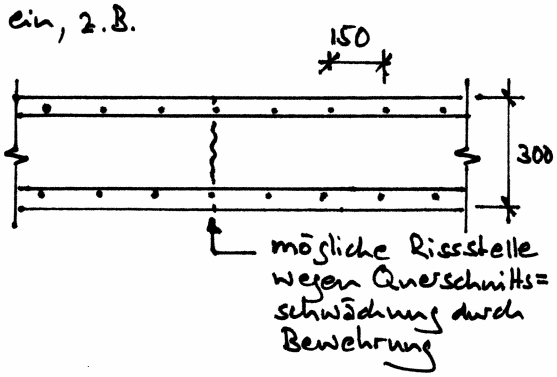
$\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow w_r = \frac{3}{4} \cdot 0.37 = 0.28\ mm$

$\underline{0.28\ mm \leq w_r \leq 0.37\ mm}$

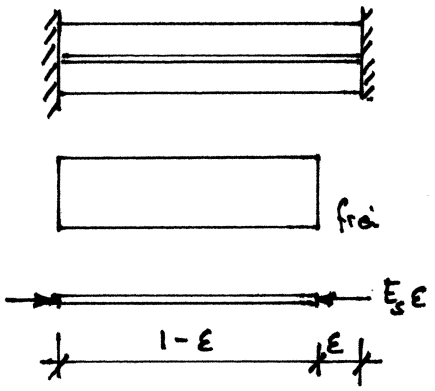
N.B. Das <u>Rissbild ist nicht abgeschlossen</u>. Die Länge $s_{rm0}\,\tau_{b0}\,(2-\lambda)/(\phi E_s)$ beträgt mit $\lambda = 1$ und $\tau_{b0} = 2 f_{ctm}$ mindestens 0.78 ‰. Die Zwängung $\varepsilon = 30 \cdot 10^{-5} = 0.3$ ‰ ist kleiner als $(f_{ctm}/E_c) + 0.78$ ‰ $= 0.87$ ‰.

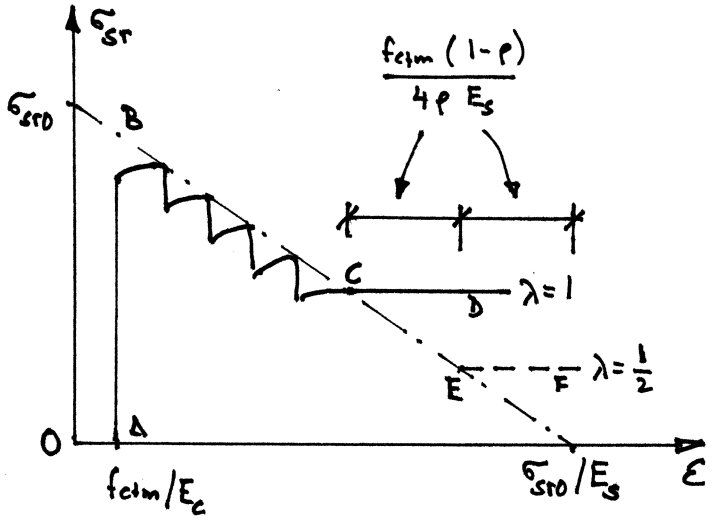


Die Risse stellen sich im allgemeinen an der Stelle der Querbewehrungsstäbe ein, z.B.



Ausser äusserem Zwang sind auch Fälle von innerem Zwang zu beachten, z.B. infolge behinderter Schwindverkürzung oder infolge unterschiedlicher Temperaturausdehnungskoeffizienten von Beton und Betonstahl.

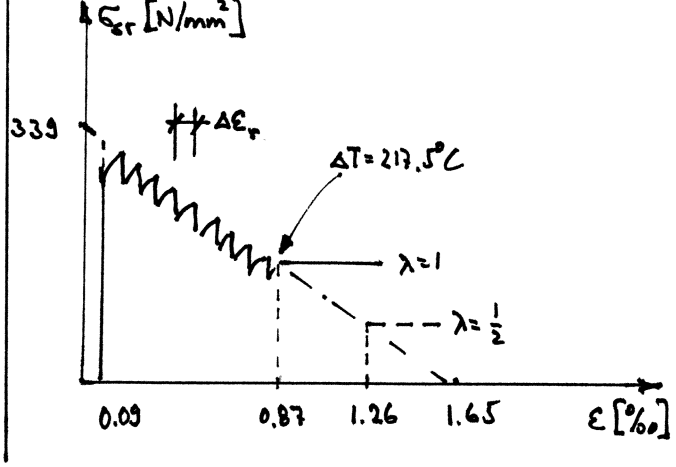




Beispiel Schwinden: Ein Zugglied der Länge l möchte sich frei um ε verkürzen. Da die Auflager jede Verkürzung verhindern, ist ein äusserer Zwang ε aufzubringen; dabei ist von σ_{sr} der Betrag $E_s\varepsilon$ abzuziehen. Damit erhält man für $\lambda=1$ die Kurve OABCD und für $\lambda=0.5$ die Kurve OABEF.

BEISPIEL 3.4

Die in Beispiel 3.3 analysierte Wand weise unterschiedliche Temperaturausdehnungskoeffizienten ($\alpha_{Tc}=0.8\cdot10^{-5}/°C$, $\alpha_{Ts}=1.2\cdot10^{-5}/°C$) und eine Länge $l=4m$ auf. Diskutiere das Verhalten unter monoton steigender Temperatur.



$$(3.15):\ \Delta\varepsilon_r=\frac{444^2\cdot5.8\cdot\lambda(2-\lambda)}{4000\cdot16\cdot205}=\begin{cases}0.09\,‰ & (\lambda=1)\\ 0.07\,‰ & (\lambda=\frac{1}{2})\end{cases}$$

Um das abgeschlossene Rissbild zu erzeugen, wären Temperaturerhöhungen von

$\frac{0.87\,‰}{0.4\cdot10^{-5}}=217.5°C$ $(\lambda=1)$ bzw.

$\frac{1.26\,‰}{0.4\cdot10^{-5}}=315°C$ $(\lambda=\frac{1}{2})$ erforderlich.

3.2.4 Mindestbewehrung

Eine angemessene Mindestbewehrung ist vorzusehen, um

- einen Sprödbruch beim Auftreten des ersten Risses zu vermeiden
- ein ausreichendes Verformungsvermögen sicherzustellen
- die Rissbreiten auf akzeptable Werte zu beschränken.

Die erste Forderung resultiert in $\sigma_{sr0} \leq f_s$. Dabei sollte bei der Bestimmung von σ_{sr0} grundsätzlich von $f_{ctk\,0.95}$ ausgegangen und für f_s der Wert f_{sk} verwendet werden. Andererseits darf gemäss SIA 262 4.4.1.3 der Einfluss der Bauteilabmessung t berücksichtigt werden. Vereinfachend kann $\sigma_{sr0} \leq f_{sd}$ verlangt werden, wobei σ_{sr0} mit f_{ctm} nach (3.6) bestimmt wird. Daraus folgt

$$\rho_{min} = \frac{f_{ctm}}{f_{sd} - f_{ctm}(n-1)} \qquad (3.17)$$

Aus der Forderung nach einem ausreichenden Verformungsvermögen ergeben sich Regeln für die konstruktive Durchbildung (maximale Stababstände etc.).

Die Rissbreiten können durch die Begrenzung von σ_{sr} beschränkt werden, siehe SIA 262 Tab. 16 und Fig. 31.

BEISPIEL 3.5

Ein 12 m langer, 3 m breiter und 300 mm dicker Plattenstreifen aus Beton C 25/30 ($f_{ctm} = 2.6\ N/mm^2$, $E_c = 32.1\ kN/mm^2$), der mit Betonstahl B 500 B ($f_{sd} = 435\ N/mm^2$, $E_s = 205\ kN/mm^2$) längs bewehrt ist, sei völlig verkürzungsbehindert und werde einer Abkühlung $\Delta T = -30°C$ unterworfen ($\alpha_{Tc} = \alpha_{Ts} = \alpha_T = 10^{-5}/°C$). Bestimme die Bewehrung und diskutiere das Rissverhalten.

(3.17): $\rho_{min} = \dfrac{2.6}{435 - 2.6\left(\frac{205}{32.1} - 1\right)} = 0.62\%$ → Wähle $\underline{\phi\,14\,@\,150\ \text{beidseitig}}$

→ $\rho = \dfrac{14^2 \cdot \pi}{4 \cdot (150)^2} = 0.684\ \%$

(3.9): $\sigma_{sr0} = 2.6 \left(\frac{1}{0.00684} - 1 - \frac{205}{32.1} \right) = 394 \text{ N/mm}^2$

(3.11): $s_{rm0} = \frac{14}{4} \left(\frac{1}{0.00684} - 1 \right) = 508 \text{ mm}$

(3.15), $\lambda = 1$, $\tau_{b0} = 2 f_{ctm}$: $\Delta\varepsilon_r = \frac{508^2 \cdot 5.2}{12000 \cdot 205 \cdot 14} = 0.039 \text{ ‰}$

(3.16), $\lambda = 1$: $w_r = \frac{508 \cdot 394}{2 \cdot 205} = 0.49 \text{ mm}$

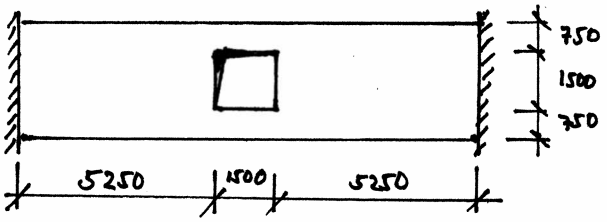
$\frac{f_{ctm}}{E_c} = \frac{2.6}{32.1} = 0.081 \text{ ‰}$

Infolge der Abkühlung ergäbe sich eine Dehnung von $\Delta T \cdot \alpha_T = -30 \cdot 10^{-5}$ $= -0.3 \text{ ‰}$ bzw. eine freie Verkürzung von $12\text{m} \cdot 0.3\text{‰} = 3.6 \text{ mm}$. Aus $(0.3\text{‰} - 0.081\text{‰}) / 0.039\text{‰} = 5.6$ resultieren theoretisch 6 Risse mit einer Breite von 0.49 mm.

N.B.: $0.081\text{‰} \cdot 12\text{m} = 0.97 \text{ mm}$
$6 \cdot 0.49\text{mm} = 2.94 \text{ mm}$
} Summe = $3.91 \text{ mm} \gtrsim 3.6 \text{ mm}$, o.k.

BEISPIEL 3.6

Wie Beispiel 3.5, jetzt wird aber im Zentrum eine Aussparung von 1.5m · 1.5m angeordnet:



Wir nehmen an, dass die Zwängung von 3.6 mm mit dem abgeschlossenen Rissbild im geschwächten Bereich neben der Aussparung und der elastischen Verlängerung des ungeschwächten, rissfreien Bereichs ausserhalb der Aussparung aufgenommen werden kann:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{f_{ctm}}{E_c}+\frac{\sigma_{sr0}}{E_s}\right)\cdot 1.5\,m = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2.6}{32.1}+\frac{394}{205}\right)\cdot 1.5 = 1.50\ mm$$

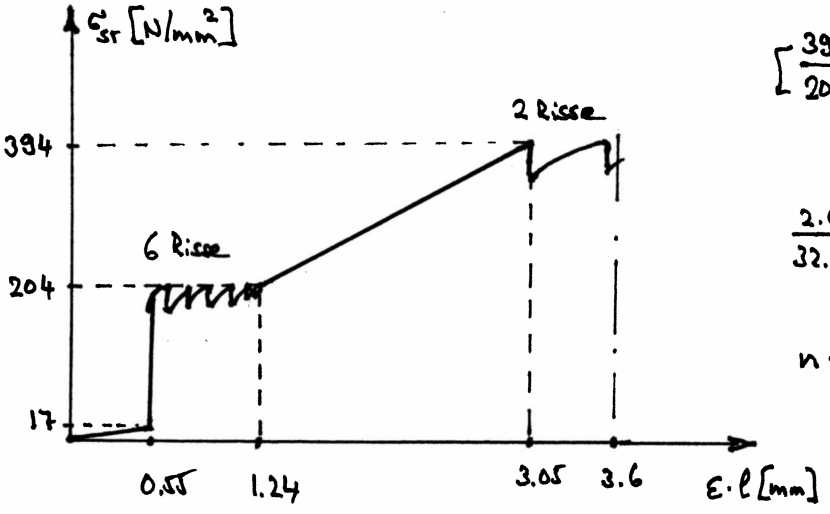
$$\frac{f_{ctm}}{E_c}\cdot\frac{1.5m}{3m}\cdot 10.5m = \frac{2.6\cdot 1.5\cdot 10.5}{32.1\cdot 3} = 0.43\ mm$$

Summe = 1.50 + 0.43 = 1.93 mm < 3.6 mm, Annahme nicht erfüllt!

Da die Zwängung so nicht aufgenommen werden kann, verstärken wir die Bewehrung im geschwächten Bereich, indem wir dort den Stababstand auf 75 mm reduzieren, d.h. beidseits der Aussparung je 20 Stäbe anordnen. Die Längsbewehrung wird dadurch ungeschwächt durchgeführt, und der Bewehrungsgehalt im geschwächten Bereich steigt auf $2\cdot 0.684 = 1.368\,\%$. (3.9) liefert $\sigma_{sr0} = 204\ N/mm^2$, und aus (3.11) folgt für den Aussparungsbereich $s_{rm0} = 252$ mm. Beim Abschluss des Rissbilds im Aussparungsbereich (6 Risse!) kann eine Zwängung von

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2.6}{32.1}+\frac{204}{205}\right)\cdot 1.5 + \frac{2.6\cdot 1.5\cdot 10.5}{32.1\cdot 3} = 0.81 + 0.43 = 1.24\ mm$$

aufgenommen werden. Anschliessend steigt σ_{sr} mit wachsenden Rissbreiten im Aussparungsbereich[1], bis auch im ungeschwächten Bereich Risse auftreten:



$$\left[\frac{394}{205}-\underbrace{\frac{2.6(1-0.01368)}{2\cdot 0.01368\cdot 205}}_{\Delta\varepsilon:\,(3.13)}\right]\cdot 1.5+\frac{2.6}{32.1}\cdot 10.5 = 3.05\ mm$$

$$\frac{2.6}{32.1}\left(1.5+\frac{10.5\cdot 1.5}{3}\right) = 0.55\ mm$$

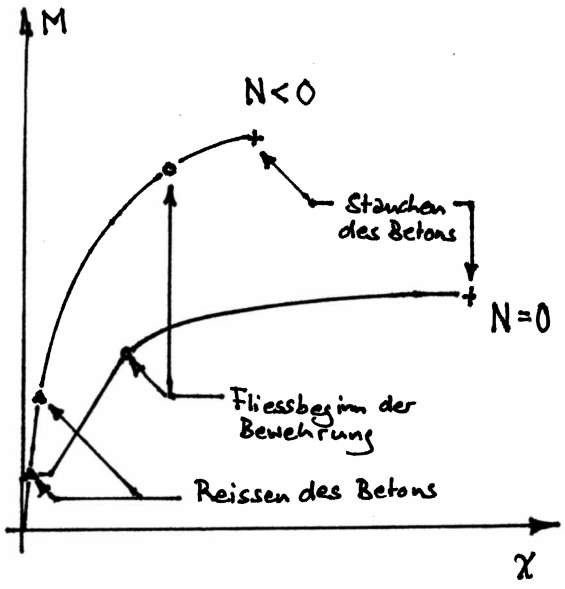
$$n\cdot f_{ctm} = \frac{205}{32.1}\cdot 2.6 = 17\ N/mm^2$$

[1] (3.14) mit $\lambda = 1$, $s_{rm0} = 252$ mm, $\sigma_{sr} = 394\ N/mm^2$, $\sigma_{sr0} = 204\ N/mm^2$: $w_r = 0.36$ mm.

3.3 Biegung und Normalkraft

3.3.1 Einleitung

Bei Stützen, Bogentragwerken, vorgespannten Bauteilen etc. treten Biegemomente in Kombination mit Normalkräften auf. Die Normalkräfte beeinflussen den Biegewiderstand, die Biegesteifigkeit und das Verformungsvermögen solcher Bauteile, d.h. das gesamte Momenten- Krümmungsdiagramm.



Das nebenstehende M-χ-Diagramm ist typisch z.B. für Stützen oder Pfähle mit kreisrundem Vollquerschnitt unter moderater Druckkraft $N = const < 0$.

Rissmoment und Biegewiderstand werden erhöht, im gerissenen Zustand ergibt sich schon vor dem Fliessen der Bewehrung ein nichtlineares Verhalten, und das Verformungsvermögen nimmt ab.

Das allgemeine Vorgehen zur Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens beliebiger Querschnitte wurde in Kapitel 3.1 dargelegt. In der Bemessungspraxis sind derartige Problemstellungen Routineaufgaben, zu deren Bewältigung viele leistungsfähige Computerprogramme zur Verfügung stehen. Nach wie vor sollte man in der Lage sein, entsprechende Computerberechnungen von Hand auf ihre Plausibilität zu prüfen.

In der statischen Berechnung werden die Schnittgrössen N, M_y, M_z in der Regel auf die Hauptachsen des reinen Betonquerschnitts bezogen. Dies gilt es bei der Bemessung zu beachten (z.B. bei der Verwendung ideeller Querschnittswerte, siehe Kapitel 2.2.3).

3.3.2 M-χ-Diagramme

Das grundsätzliche Vorgehen zur Ermittlung von M-χ-Diagrammen wird anhand eines einfach bewehrten Rechteckquerschnitts erläutert, der durch N und M_y beansprucht wird.

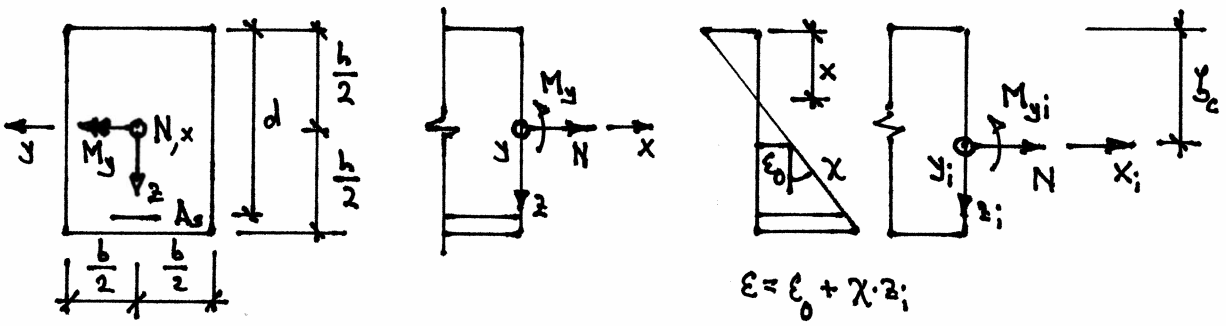
Für den ungerissenen Zustand gilt mit (2.9) und $(2.11)_1$

$$\sigma = n\left(\frac{N}{A_i} + \frac{M_{yi}}{I_{yi}} \cdot z_i\right) \tag{3.18}$$

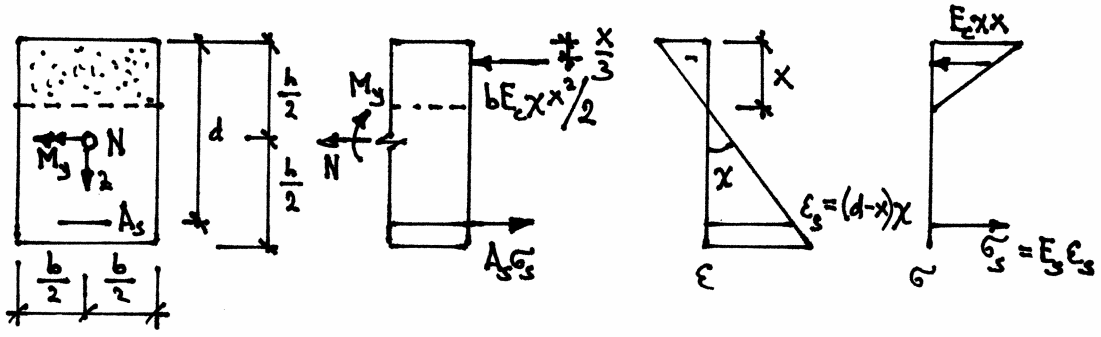
mit

$$M_{yi} = M_y - N\left(\zeta_c - \frac{h}{2}\right) \tag{3.19}$$

vgl. $(2.8)_2$.



Im gerissenen Zustand ergeben sich unter der Annahme eines linear elastischen Verhaltens von Beton und Bewehrung folgende Verhältnisse:



$$\left.\begin{aligned} N &= A_s E_s (d-x)\chi - \frac{bE_c\chi x^2}{2} \\ M_y &= A_s E_s (d-x)\left(d-\frac{h}{2}\right)\chi + \frac{bE_c\chi x^2}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{x}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Aus (3.20) können für gegebene N, M_y die beiden Unbekannten x, χ bestimmt werden.

Wird für den Beton (und allenfalls auch für die Bewehrung) ein nichtlineares σ-ε-Diagramm vorausgesetzt, kann im Prinzip gleich vorgegangen werden. Die ε-Verteilung ist mit zwei Grössen festgelegt (z.B. x und χ), die über die Gleichgewichtsbedingungen analog (3.20) bestimmt werden können.

BEISPIEL 3.7

Ermittle das m-χ-Diagramm der in Beispiel 2.4 behandelten Platte unter Voraussetzung einer Normalkraft von $N = -1\,MN/m$ (Druck).

Mit $\sigma = f_{ctm} = 2.6\ N/mm^2$, den in Beispiel 2.4 angegebenen Werten A_i und I_{yi} sowie $z_i = 117.1\ mm$ erhält man aus (3.18) für $N = -1\,MN/m$ und $n = 1$ das auf y_i bezogene Rissmoment $M_{yi} = 68.9\ kNm/m$. (3.19) liefert mit $y_c = 122.9\ mm$ und $h = 240\ mm$ das auf y bezogene Rissmoment

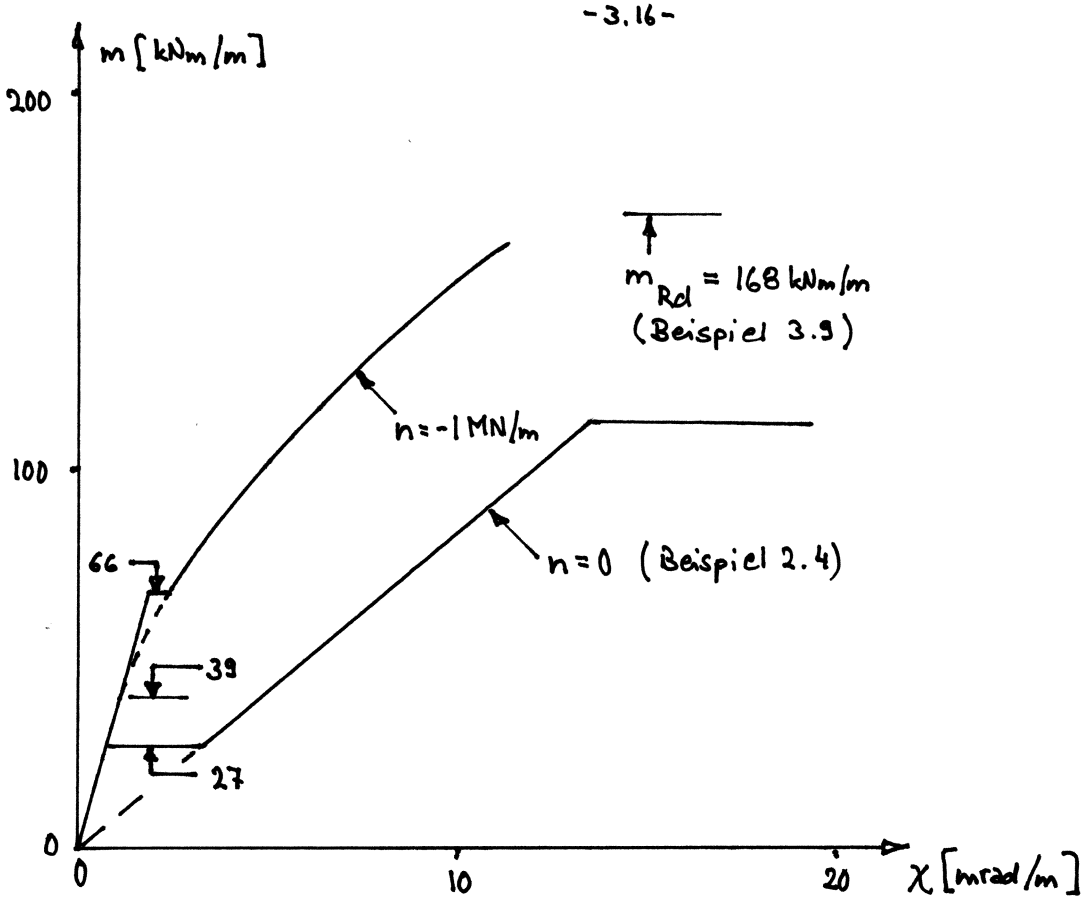
$$m_r = 68.9 - 1 \cdot 2.9 = 66 \quad kNm/m.$$

Wird die Randspannung σ am unteren Querschnittsrand gleich null gesetzt, erhält man analog $M_{yi} = 41.9\ kNm/m$ und damit das auf y bezogene sogenannte Dekompressionsmoment $m_{dec} = 39\ kNm/m$.

Für den gerissenen Zustand können aus $(3.20)_1$ für angenommene Werte x die zugehörigen Krümmungen χ und damit durch Einsetzen in $(3.20)_2$ die Momente m ermittelt werden:

x [mm]	χ [mrad/m]	σ_s [N/mm²]	$E_s \varepsilon_{xx}$ [N/mm²]	m [kNm/m]
240	1.149	- 6.6	8.3	39.0
212	1.483	0	9.4	49.3
150	3.120	40	14.0	78.6
120	5.243	99	18.9	102.8
100	8.388	193	25.2	132.8
90	11.367	284	30.7	159.4

N.B. $A_s = 1340.4\ mm^2/m$
$E_s = 205\ kN/mm^2$
$d = 212\ mm$
$b = 1\ m$
$E_c = 30\ kN/mm^2$
$h = 240\ mm$



Bemerkungen:

- Im gerissenen Zustand ergibt sich wegen $n<0$ trotz der angenommenen linearen Elastizität von Beton und Bewehrung ein nichtlineares Verhalten.
- Beim Dekompressionsmoment m_{dec} = 39 kNm/m ist die Kennlinie des gerissenen Zustands zu jener des ungerissenen tangential.
- Da mit E_c = 30 kN/mm² gerechnet wurde, liegt die Kennlinie des gerissenen Zustands im Vergleich zu einer Berechnung gemäss SIA 262 (siehe Kapitel 2.1) zu hoch, insbesondere im Bereich des Biegewiderstands m_{Rd}.
- m_{Rd} = 168 kNm/m wird in Beispiel 3.9 ermittelt.

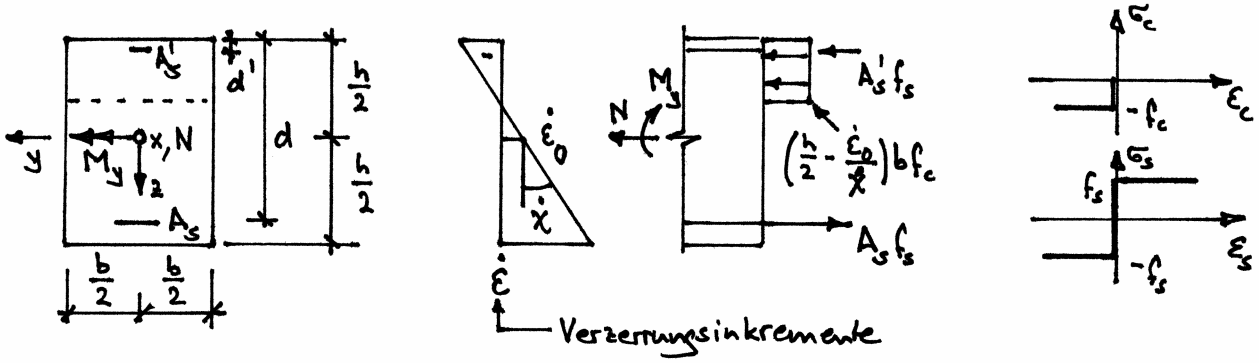
3.3.3 M-N-Interaktionsdiagramme

a) Allgemeines

M-N-Interaktionsdiagramme sind geschlossene Kurven (z.B. in der Ebene N, M_y) bzw. Flächen (im Raum N, M_y, M_z), die aus allen Beanspruchungspunkten bestehen, die dem Tragwiderstand eines gegebenen Querschnitts entsprechen. Sie können unter Zugrundelegung eines start-ideal plastischen Verhaltens

oder unter Verwendung normierter Spannungs-Dehnungsdiagramme für Beton und Bewehrung (z.B. nach SIA 262) ermittelt werden.

b) Rechteckquerschnitt — Starr-ideal plastische Behandlung

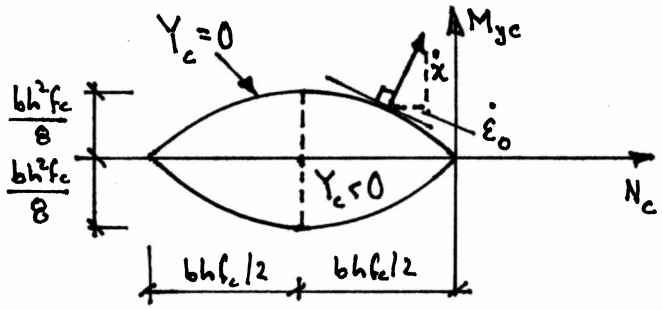


1. Wirkung des Betons allein

Druckzone oben: $N_c = -\left(\frac{h}{2} - \frac{\dot\varepsilon_0}{\dot\chi}\right) b f_c$, $M_{yc} = -N_c\left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2bf_c}\right)$

Druckzone unten: $N_c = -\left(\frac{h}{2} + \frac{\dot\varepsilon_0}{\dot\chi}\right) b f_c$, $-M_{yc} = -N_c\left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2bf_c}\right)$

Allgemein: <u>Fliessfunktion</u> $$Y_c = \pm M_{yc} + N_c\left(\frac{h}{2} + \frac{N_c}{2bf_c}\right) = 0 \qquad (3.21)$$



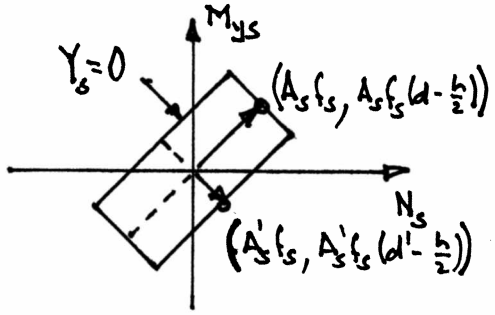
Der <u>plastische Bereich</u> ($Y_c < 0$) wird durch die <u>Fliessgrenze</u> $Y_c = 0$ begrenzt, die aus zwei Parabeln zusammengesetzt ist.

Jedem Punkt an der Fliessgrenze entspricht ein nach aussen gerichteter Orthogonalvektor, dessen Komponenten an $\dot\varepsilon_0$ und $\dot\chi$ proportional sind

→ <u>Fliessgesetz</u>

$$\pm \frac{\dot\varepsilon_0}{\dot\chi} = \frac{h}{2} + \frac{N_c}{bf_c} = \frac{\partial Y_c / \partial N_c}{\partial Y_c / \partial M_{yc}} \qquad (3.22)$$

2. Wirkung der Bewehrung allein

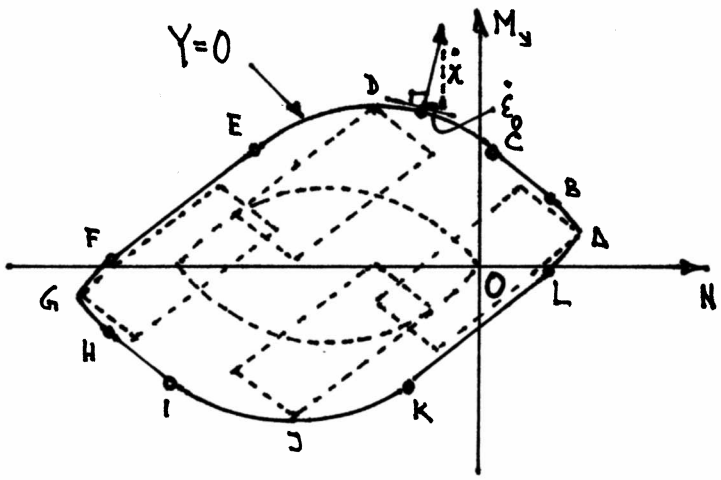


Der aplastische Bereich $Y_s < 0$ wird durch ein Parallelogramm begrenzt, das durch die den beiden Bewehrungslagen entsprechenden Vektoren aufgespannt wird.

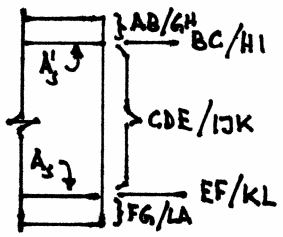
Eckpunkte des Parallelogramms bzw. der Fliessgrenze $Y_s = 0$ entsprechen Beanspruchungen, unter denen beide Bewehrungen fliessen, bei den Zwischenpunkten auf den Seiten des Parallelogramms fliesst jeweils nur eine Bewehrung. Wie man sich leicht überzeugt, gilt das Fliessgesetz wieder.

3. Stahlbeton

Die Fliessfigur des Stahlbetons entsteht, indem man die Fliessgrenze $Y_c = 0$ rein translatorisch derart bewegt, dass ihr Ursprung entlang $Y_s = 0$ geführt wird (oder umgekehrt). Der so überstrichene Bereich in der M_y-N-Ebene entspricht dem aplastischen Bereich $Y < 0$ des Stahlbetonquerschnitts. Dieser ist zumindest schwach konvex, d.h. er kann nicht konkav sein. Das Fliessgesetz (Orthogonalität der Vektoren mit Komponenten $\dot{\varepsilon}_0, \dot{\chi}$ zur Fliessgrenze im zugehörigen Punkt N, M_y) gilt weiterhin.



Lage der Neutralachse bezogen auf Teilstücke der Fliessgrenze:

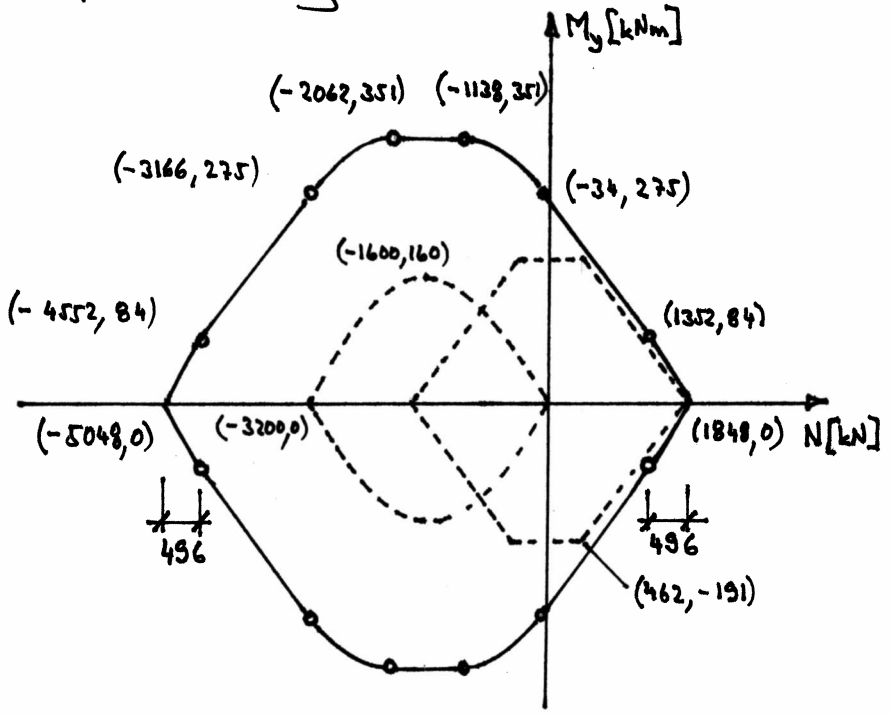


Für Punkte entlang der geraden Stücke der Fliessgrenze bleibt eine Bewehrung elastisch (bzw. starr). Das hier gezeigte Vorgehen zur Ermittlung der Fliessfigur von Stahlbeton ("Stahlbeton = Stahl + Beton") lässt sich auf beliebige Bauteile und Beanspruchung

gen übertragen.

BEISPIEL 3.8

Ermittle das M_y-N-Interaktionsdiagramm für den in Beispiel 3.1 betrachteten Stützenquerschnitt. Der mittlere Randabstand der drei aussenliegenden Stäbe beträgt $d' = 62$ mm. Der an der Stelle der Längsbewehrungsstäbe nicht vorhandene Beton darf bei der Behandlung nach starr-ideal plastischer Theorie vereinfachend einbezogen werden.



Beton: $-400^2 \cdot 20 = -3200$ kN

$20 \cdot 400 \cdot 200 \cdot 0.1 = 160$ kNm

$-20 \cdot 400 \cdot 62 = -496$ kN

$496 \left(200 - \frac{62}{2}\right) = 84$ kNm

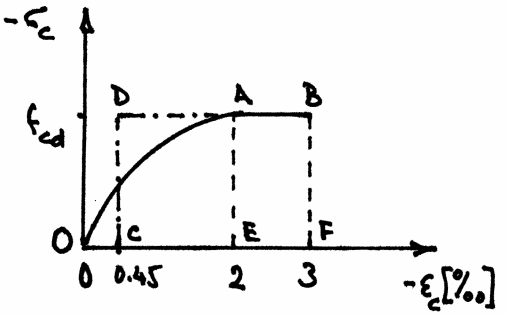
Bewehrung: $8 \cdot 13^2 \cdot \pi \cdot 435 = 1848$ kN

$2 \cdot 13^2 \cdot \pi \cdot 435 = 462$ kN

$2 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot \pi \cdot 435 \cdot (200-62) = 191$ kNm

c) Behandlung nach SIA 262

Das M-N-Interaktionsdiagramm wird punktweise durch Betrachtung charakteristischer Dehnungsebenen unter Verwendung der in der Norm dargestellten Spannungs-Dehnungsdiagramme für Beton und Betonstahl ermittelt.



Statt des Parabel-Rechteckdiagramms OABF wird vereinfachend oft das Rechteckdiagramm CDABF verwendet.

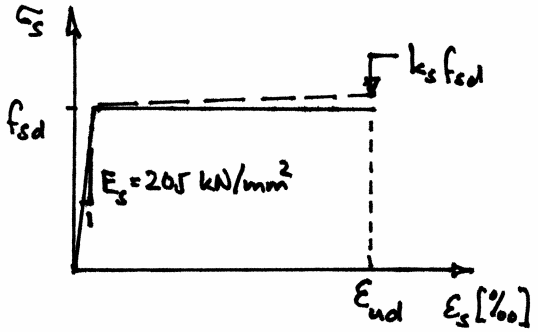
$$\sigma_c = f_{cd}\,\frac{k_c\,\eta - \eta^2}{1+(k_c-2)\,\eta} \qquad (3.23)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1d}}\,, \quad \varepsilon_{c1d} = -2‰$$

$$k_c = \frac{E_{cd}}{400\,f_{cd}}\,, \quad E_{cd} = E_{cm} = 6'000 \div 12'000\,\sqrt[3]{f_{cm}}$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8\ \text{N/mm}^2$$

$$f_{cd} = \frac{\eta_{fc} f_{ck}}{\gamma_c}\,, \quad \eta_{fc} = \sqrt[3]{\frac{30}{f_{ck}}} \le 1,\ \gamma_c = 1.5$$

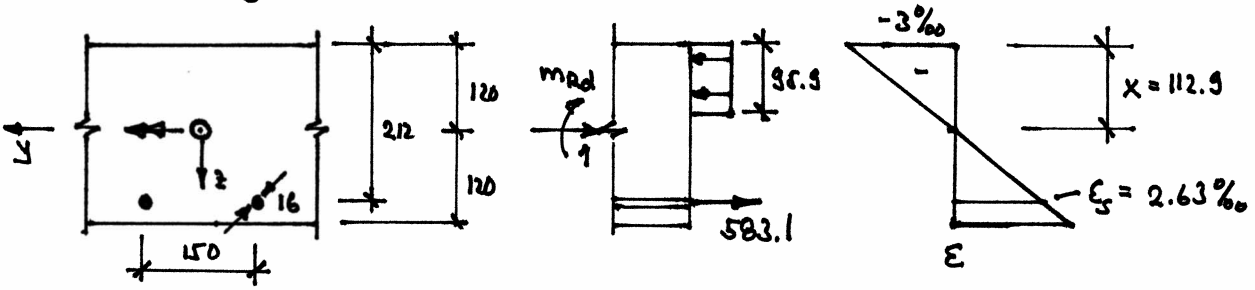


Betonstahl	B500A	B500B	B450C
f_{sd} [N/mm²]	435	435	≥ 390
k_s	1.05	1.08	≥ 1.15
ε_{ud} [‰]	20	45	65

Oft wird Verfestigung vernachlässigt ($k_s \to 1$).

BEISPIEL 3.9

Ermittle den Biegewiderstand der in Beispiel 3.7 behandelten Platte unter $n = -1$ MN/m gemäss SIA 262.



$$a_s \cdot f_{sd} = \frac{16^2 \cdot \pi \cdot 435}{4 \cdot 150} = 583.1\ \text{kN/m}$$

$$\frac{-n + a_s f_{sd}}{b \cdot f_{cd}} = 0.85\,x = \frac{1583.1}{16.5} = 95.9\ \text{mm}$$

$$x = 95.9 / 0.85 = 112.9\ \text{mm}$$

$$\varepsilon_s = \frac{3}{112.9}\,(212 - 112.9) = 2.63‰ > \frac{f_{sd}}{E_s} = 2.12‰$$

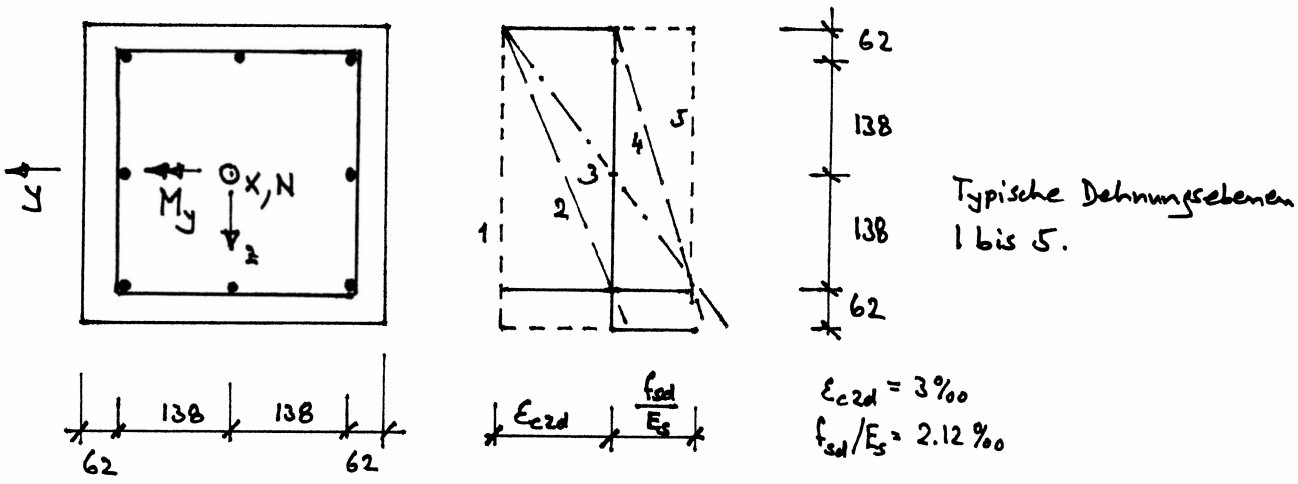
→ Annahme fliessende Bewehrung i.O.

$$m_{Rd} = 583.1 \cdot 92 + 1583.1\left(120 - \frac{95.9}{2}\right)$$

$$= \underline{167.7\ \text{kNm/m}}$$

BEISPIEL 3.10

Behandle Beispiel 3.8 gemäss SIA 262 und vergleiche die Ergebnisse.

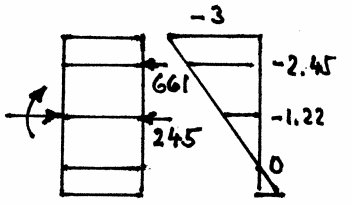


Typische Dehnungsebenen 1 bis 5.

① Reiner Druck, siehe Beispiel 3.1 : $N_{Rd} = -4963$ kN

⑤ " Zug , " " 3.1 : $N_{Rd} = 1848$ kN

②

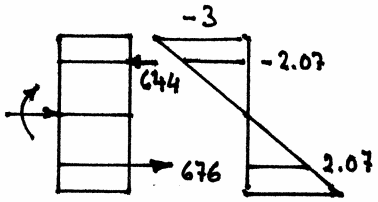


Betondruck 2298 kN, z = -56.4

$N_{Rd} = -3204$ kN

$M_{Rd} = 221$ kNm

③

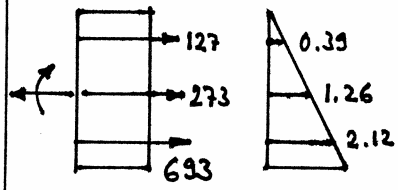


1360 kN, -115 mm

$N_{Rd} = -1328$ kN

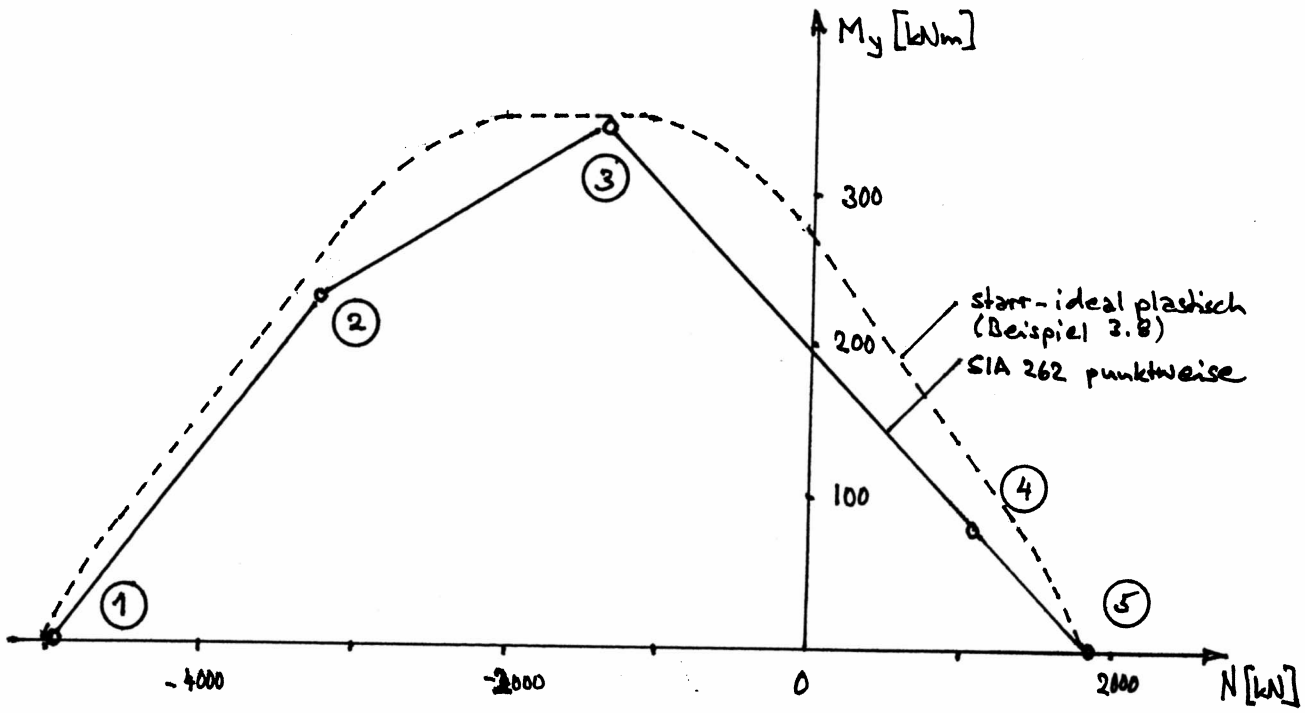
$M_{Rd} = 339$ kNm

④



$N_{Rd} = 1093$ kN

$M_{Rd} = 78$ kNm



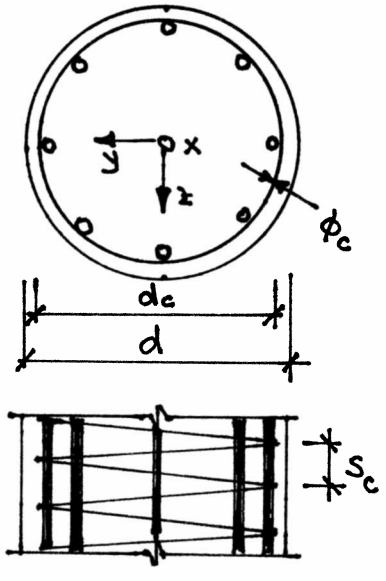
3.4 Umschnürungswirkung

3.4.1 Allgemeines

Mit einer Umschnürungsbewehrung kann das Tragverhalten von Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung markant verbessert werden. In dem von einer Wendel- oder Bügelbewehrung umschnürten Kernbeton ergeben sich günstige dreiachsige Druckspannungszustände; die Querdehnung des Betons aktiviert die Umschnürungsbewehrung auf Zug, und damit werden im Kernbeton Querdruckspannungen aufgebaut.

Bis zum Erreichen der einachsigen Betondruckfestigkeit bleiben die Querdehnungen und Querdruckspannungen relativ gering. Mit zunehmender Stauchung des Betons in Längsrichtung nehmen die Querdehnungen nach Erreichen der einachsigen Betondruckfestigkeit rasch zu, und die Umschnürungswirkung kommt voll zum Tragen. Der Überdeckungsbeton beginnt zwar im allgemeinen abzuplatzen, die Druckbeanspruchung kann aber bei ausreichender Umschnürungsbewehrung noch erhöht werden, bis der Kernbeton versagt, Längsbewehrungsstäbe ausknicken oder Bügel zerrissen werden.

3.4.2 Kreisquerschnitte



d_c = Durchmesser der Umschnürungsspirale

d = Durchmesser

s_c = Ganghöhe der Umschnürungsspirale

ϕ_c = Stabdurchmesser der Umschnürungsspirale

Annahme $s_c << d_c$, Betrachtung auf Bemessungsniveau, Querdruck nach Kesselformel

$$\sigma_{cy} = \sigma_{cz} = \sigma_{c1} = -\frac{\pi \phi_c^2 f_{sd}}{2 d_c s_c} \qquad (3.24)$$

Gemäss der Fliessbedingung von COULOMB mit $\tan\varphi = 3/4$ wird die einaxige Betondruckfestigkeit um das Vierfache des Betrags von σ_{c1} gesteigert, auf

$$f_{cd3} = f_{cd} + \frac{2\pi\phi_c^2 f_{sd}}{d_c s_c} \tag{3.25}$$

Für die Zunahme der mittleren Stauchung gilt ebenfalls eine annähernd lineare Abhängigkeit vom Querdruck, der Proportionalitätsfaktor ist aber etwa fünfmal grösser als jener für die Zunahme der Druckfestigkeit

$$\varepsilon_{cd3} = 0.002 \cdot \left(\frac{5 f_{cd3}}{f_{cd}} - 4 \right) \tag{3.26}$$

A_{sx} = Querschnittsfläche der Längsbewehrung

$\rho_x = 4 A_{sx} / (d_c^2 \pi)$ = auf Kernbeton bezogener Längsbewehrungsgehalt

$\rho_c = \phi_c^2 \pi / (d_c s_c)$ = auf Volumen des Kernbetons bezogener Spiralbewehrungsgehalt

Querschnittswiderstand (Bewehrungsüberdeckung abgeplatzt):

$$N'_{Rd} = \left(\frac{d_c^2 \pi}{4} - A_{sx} \right) f_{cd3} + A_{sx} f_{sd} = \frac{d_c^2 \pi}{4} \left\{ f_{cd} + f_{sd} \left[2\rho_c + \rho_x \left(1 - 2\rho_c - \frac{f_{cd}}{f_{sd}} \right) \right] \right\} \tag{3.27}$$

Aus $(3.27)_2$ ersieht man, dass die Spiralbewehrung bezüglich N'_{Rd} etwa doppelt so wirksam ist wie die Längsbewehrung.

N'_{Rd} übersteigt den Querschnittswiderstand $(d^2\pi/4 - A_{sx}) f_{cd} + A_{sx} f_{sd}$ mit nicht abgeplatzter Bewehrungsüberdeckung, sofern

$$\rho_c > \frac{f_{cd} (d^2 - d_c^2)}{2 f_{sd} (1 - \rho_x) d_c^2} \tag{3.28}$$

ist.

BEISPIEL 3.11

Eine Stütze mit Kreisquerschnitt ($d = 700$ mm) aus Beton C 30/37 ($f_{cd} = 20\ N/mm^2$) ist längs mit 12 gleichmässig über den Umfang verteilten Bewehrungsstäben ϕ 22 mm aus Betonstahl B500B ($f_{sd} = 435\ N/mm^2$) bewehrt. Diese werden von einer Spirale ϕ 14 mm mit einer Ganghöhe $s_c = 75$ mm umschlossen. Die Bewehrungsüberdeckung der Spirale beträgt $c_{nom} = 35$ mm. Ermitte den Querschnittswiderstand N'_{Rd} und die zugehörige Stauchung.

$$d_c = d - 2\,c_{nom} - \phi_c = 700 - 2\cdot 35 - 14 = 616 \text{ mm}$$

(3.25): $$f_{cd3} = 20 + \frac{2\cdot\pi\cdot 14^2\cdot 435}{616\cdot 75} = \underline{31.6\ N/mm^2}$$

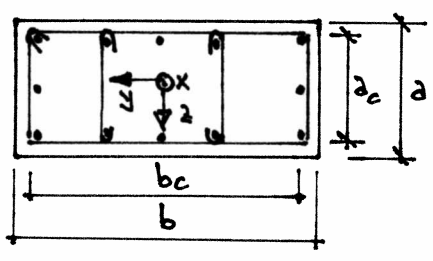
(3.26): $$\varepsilon_{cd3} = 0.002\cdot\left(\frac{5\cdot 31.6}{20} - 4\right) = \underline{7.8\ ‰}$$

(3.27): $$N'_{Rd} = \frac{616^2\cdot\pi}{4}\cdot 31.6 + \frac{12\cdot 22^2\cdot\pi}{4}(435 - 31.6) = \underline{11.3\ MN}$$

N.B. $$\frac{700^2\cdot\pi}{4}\cdot 20 + \frac{12\cdot 22^2\cdot\pi}{4}(435 - 20) = 9.6\ MN < N'_{Rd}$$

Wegen der endlichen (nicht verschwindenden) Ganghöhe ist ein äusserer umlaufender Querschnittsbereich nicht wirksam umschnürt. Gemäss SIA 262, Gl. (28) kann dieser Effekt näherungsweise berücksichtigt werden, indem der zweite Summand rechterhand in (3.25) mit $(1 - s_c/d_c)$ multipliziert wird. Im Beispiel 3.11 verändern sich die Werte dadurch wie folgt: $f_{cd3} = 30.2\ N/mm^2$, $\varepsilon_{cd3} = 7.1$ ‰, $N'_{Rd} = 10.8$ MN.

3.4.3 Rechteckquerschnitte



Gemäss SIA 262, Gl. (29) wird ein äusserer umlaufender Querschnittsbereich der Breite $s_c/2$ als nicht wirksam umschnürt betrachtet (s_c = Bügelabstand). Damit resultiert analog zu (3.27)

$$N_{Rd}' = a_c b_c f_{cd} + (a_c - s_c)(b_c - s_c)\rho_t f_{sd} \cdot 4 + A_{sx}(f_{sd} - f_{cd}) \qquad (3.29)$$

mit

$$\rho_t = \text{Min}\left(\frac{A_{sy}}{a_c s_c}, \frac{A_{sz}}{b_c s_c}\right) \qquad (3.30)$$

Stauchungen ε_{cd3} können aus (3.26) mit $f_{cd3} = f_{cd} + 4\rho_t f_{sd}(1 - s_c/a_c)(1 - s_c/b_c)$ ermittelt werden.

BEISPIEL 3.12

Behandle Beispiel 3.1 mit $s_c = 100$ mm bzw. 50 mm.

$a_c = b_c = 400 - 2 \cdot 35 - 12 = 318$ mm

$\rho_t = 2 \cdot 6^2 \cdot \pi / (318 \cdot s_c) = 0.71\,\%$ bzw. $1.42\,\%$

$A_{sx} = 8 \cdot 13^2 \cdot \pi = 4247\ \text{mm}^2$

(3.29): $N_{Rd}' = 318^2 \cdot 20 + 218^2 \cdot 0.0071 \cdot 435 \cdot 4 + 4247(435 - 20) = \underline{4.373\ \text{MN}}$

bzw. $N_{Rd}' = 318^2 \cdot 20 + 268^2 \cdot 0.0142 \cdot 435 \cdot 4 + 4247(435 - 20) = \underline{5.563\ \text{MN}}$

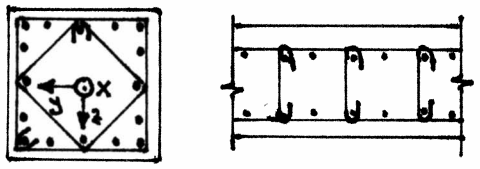
Im Vergleich zu dem in Beispiel 3.1 ermittelten Wert $N_{Rd}' = 4.963$ MN ergibt sich mit $s_c = 100$ mm keine Erhöhung des Querschnittswiderstands. Mit $s_c = 50$ mm erhöht sich N_{Rd}' um 12 %, und mit $f_{cd3} = 20 + 4 \cdot 0.0142 \cdot 435 (1 - 50/318)^2 = \underline{37.6\ \text{N/mm}^2}$ liefert (3.26) $\varepsilon_{cd3} = \underline{10.8\ ‰}$.

3.5 Druckglieder

3.5.1 Konstruktive Durchbildung

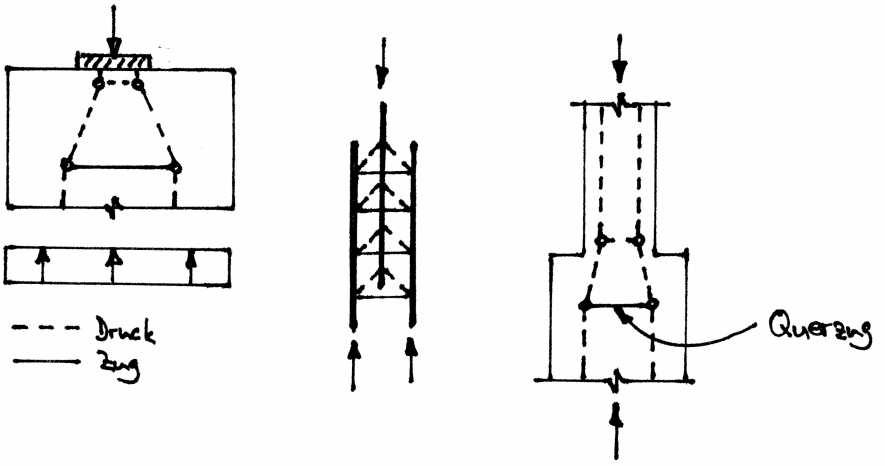
Die folgenden Ausführungen stützen sich auf Ziffer 5.5.4 der Norm SIA 262.

- Mindestabmessungen ... Stützen ($b/a \leq 4$) → $a \geq 200$ mm (Ortbeton) bzw. 150 mm (Fertigteil)
  Wände ($b/a > 4$) → $a \geq 150$ mm (Ortbeton) bzw. 100 mm (Fertigteil)
- Längsbewehrungsgehalt ... $0.6\% \leq \rho_x \leq 8\%$
  - Bei grossen Stützenquerschnitten darf $\rho_{x,min} = 0.6\%$ auf eine Mantelfläche von mindestens 200 mm Dicke bezogen werden.
  - In Wänden bezieht sich $\rho_{x,min} = 0.6\%$ auf den für die Tragsicherheit erforderlichen Betonquerschnitt (Stababstand $s \leq 300$ mm und $\leq 2a$)
  - Falls $\rho_x > \rho_{x,max} = 8\%$: verstärkte Verbügelung und spezielle konstruktive und ausführungstechnische Massnahmen erforderlich.
- Verbügelung ... $s_c \leq 15\, \phi_{x,min}$ und $\leq a_{min}$ und ≤ 300 mm
  - $\phi_c \geq \phi_{x,max}/3$
  - Falls Druckbewehrung f_{sd} erreicht → ausser Eckstäben jeden zweiten Längsstab mit Haken oder Bügeln umschliessen:



N.B. Horizontalbewehrung in hoch belasteten Wänden aussen (1. und 4. Lage), sonst innen (2./3. Lage), $\rho_y \geq \rho_x/4$

  - Krafteinleitungszonen, Stossverbindungen und Querschnittsänderungen → zusätzliche Bügel zur Aufnahme von Querzugkräften:



- Verbügelung in plastischen Bereichen bei Erdbebenbemessung

  ... $s_c \leq 6\,\phi_x$ und ≤ 150 mm (ausserhalb plast. Bereich $s_c \leq 250$mm bzw. d/2)

  . ρ_t (siehe 3.30):

  $\rho_t \geq 0.08\, f_{cd} / f_{sd}$ sowie $\rho_t \geq \dfrac{-N_d - 0.08 b f_{cd}}{4 a_c b_c f_{sd}}$ (grösserer Wert massgebend)

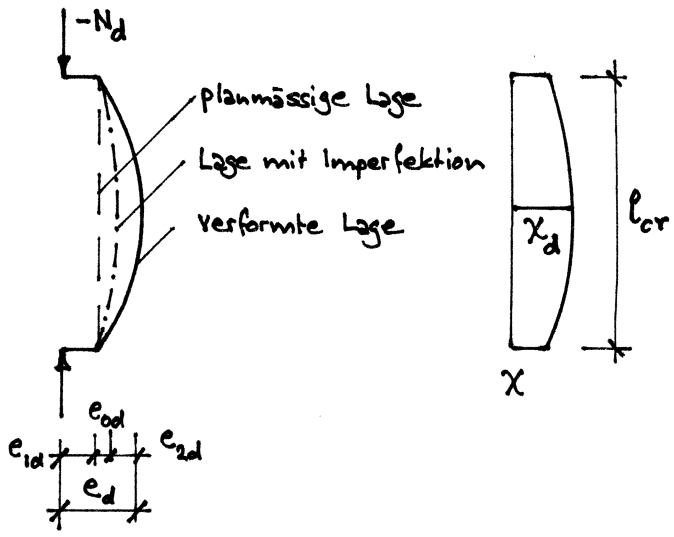
  . Umschnürungsbügel mit 135°-Endhaken mit Länge $\geq 10\,\phi_c$

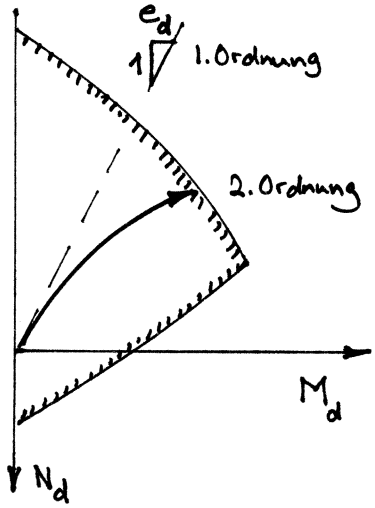
  . Keine Übergreifungsstösse der Längsbewehrung; mechanische Stabverbindungen nur bei nachgewiesener ausreichender Duktilität.

3.5.2 Nachweis der Tragsicherheit (SIA 262, 4.3.7)

Der Nachweis der Tragsicherheit berücksichtigt folgende drei Einflüsse:

- geometrische Imperfektionen ... e_{0d}
- Schnittgrössen erster Ordnung ... e_{1d}
- Verformungen des Druckglieds ... e_{2d}





Die maximale Exzentrizität e_d beträgt

$$e_d = e_{0d} + e_{1d} + e_{2d} \tag{3.31}$$

wobei

$$e_{1d} = \frac{M_{1d}}{-N_d} \tag{3.32}$$

und

$$e_{2d} = \chi_d \frac{l_{cr}^2}{c} \tag{3.33}$$

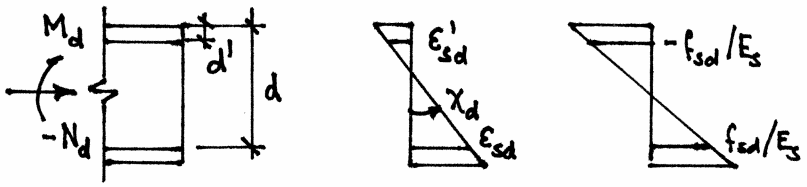
e_{0d} folgt aus

$$e_{0d} = \ell_{cr}/400 \qquad (\ell_{cr} \leq 4\,m)$$
$$e_{0d} = \sqrt{\ell_{cr}}/200 \qquad (4m < \ell_{cr} < 9m) \qquad \text{jedoch } e_{0d} \geq d/30 \qquad (3.34)$$
$$e_{0d} = \ell_{cr}/600 \qquad (\ell_{cr} \geq 9m)$$

Die Krümmung χ_d ergibt sich aus

$$\chi_d = \frac{\varepsilon_{sd} - \varepsilon'_{sd}}{d - d'} \qquad (3.35)$$

Vereinfachend und auf der sicheren Seite liegend darf in (3.35) $\varepsilon_{sd} = -\varepsilon'_{sd} = f_{sd}/E_s$ gesetzt werden.

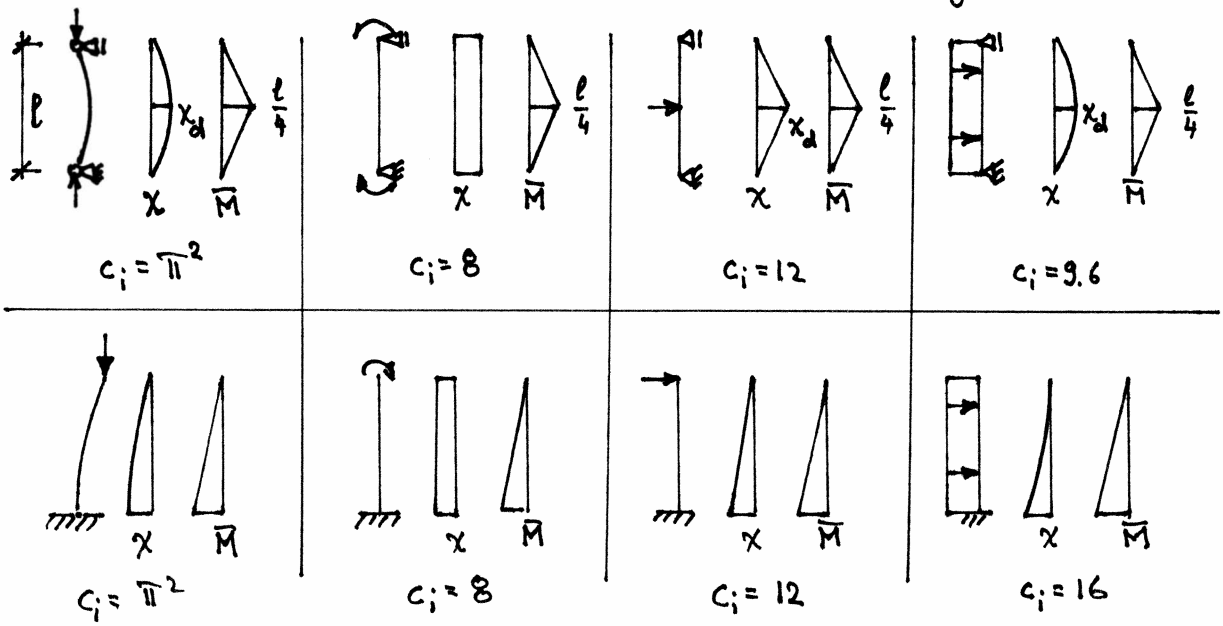


Der Integrationsfaktor c in (3.33) ergibt sich allgemein aus

$$c = \alpha \cdot \pi^2 + (1-\alpha)\,\frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} \qquad \left(\alpha = \frac{N_d}{N_{cr,d}}\right) \qquad (3.36)$$

Vereinfachend darf $c = \pi^2$ gesetzt werden.

Die Werte c_i folgen in Abhängigkeit des statischen Systems und der Belastung durch Anwenden der Arbeitsgleichung $e_{2d} = \int_0^{\ell_{cr}} \chi \cdot \bar{M}\,dx = \chi_d \ell_{cr}^2/c$:



Herleitung von (3.36) mit Vergrösserungsfaktor $(1-\alpha)^{-1}$:

$$e_{2d} = \frac{\sum e_{1di}}{1-\alpha} = \frac{\sum \frac{M_{di}\, \ell_{cr}^2}{EI_d \cdot c_i}}{1-\alpha} = \frac{\chi_d \ell_{cr}^2}{c}$$

$$\chi_d = \frac{-N_d e_{2d} + \sum M_{di}}{EI_d}$$

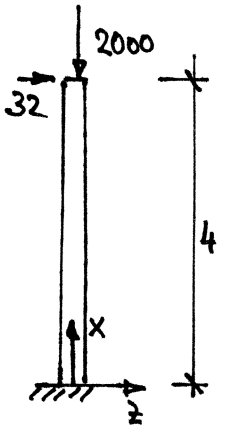
$$N_{cr,d} = -\frac{\pi^2 EI_d}{\ell_{cr}^2}$$

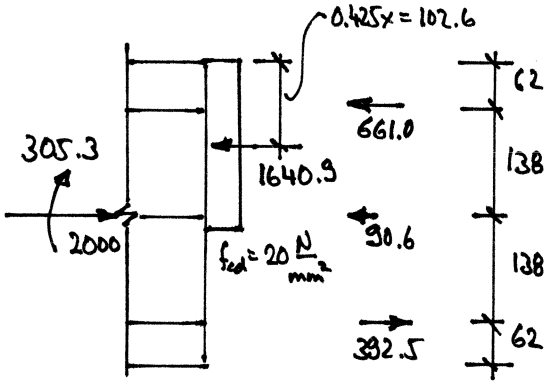
$$c = \frac{\chi_d \ell_{cr}^2}{e_{2d}} = \frac{(1-\alpha)(-N_d e_{2d} + \sum \pi_{di})}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}} = -\frac{N_d \pi^2 \ell_{cr}^2}{\pi^2 EI_d} + (1-\alpha)\frac{\sum \pi_{di}}{\sum \frac{\pi_{di}}{c_i}}$$

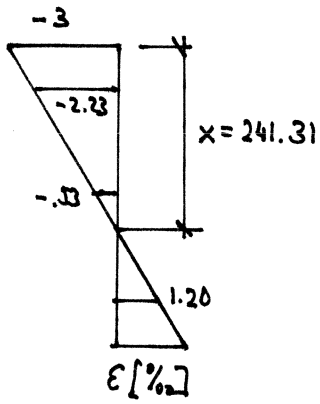
$$= \alpha \cdot \pi^2 + (1-\alpha)\cdot \frac{\sum M_{di}}{\sum \frac{M_{di}}{c_i}}$$

BEISPIEL 3.13

Eine 4m hohe Kragstütze mit dem in den Beispielen 3.1, 3.8, 3.10 und 3.12 behandelten Querschnitt ist am oberen Ende mit einer Horizontalkraft $Q_{zd} = 32$ kN und einer Vertikalkraft $Q_{xd} = -2000$ kN belastet. Erbringe den Nachweis der Tragsicherheit unter Vernachlässigung des Einflusses der Eigenlast der Stütze.







$\ell_{cr} = 8$ m

(3.34): $e_{0d} = 14.1$ mm

$N_d = -2000$ kN, $\underline{M_{Rd} = 305.3 \text{ kNm}}$, $\chi_d = \frac{3}{241.31} = \underline{12.43 \text{ mrad/m}}$

(3.36): $EI_d = \frac{M_{Rd}}{\chi_d} = 24.56 \text{ MNm}^2 \longrightarrow N_{cr,d} = \frac{\pi^2 \cdot 24.56}{8^2} = 3788 \text{ kN} \longrightarrow \alpha = \frac{2000}{3788} = 0.528$

$$c = 0.528 \cdot \pi^2 + 0.472 \cdot \frac{2 \cdot 14.1 + 32 \cdot 4}{\frac{28.2}{\pi^2} + \frac{128}{12}} = \underline{10.663}$$

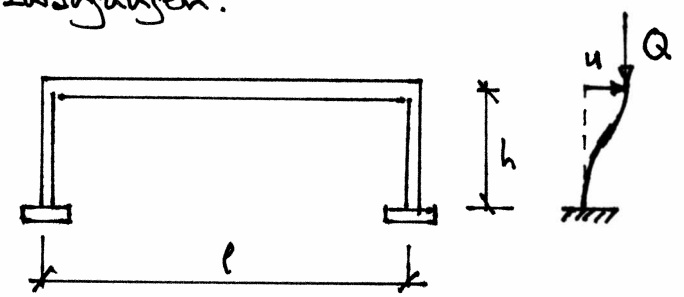
(3.33): $e_{2d} = 12.43 \cdot \frac{8^2}{10.663} = 74.6$ mm

(3.31): $e_d = 14.1 + 128/2 + 74.6 = 152.7$ mm $\longrightarrow \underline{M_d = 2 \cdot 152.7 = 305.4 \text{ kNm} \approx M_{Rd}}$

Der Tragsicherheitsnachweis kann gerade erfüllt werden.

3.5.3 Schlanke Stützen unter Last und Zwang

Infolge Vorspannung, Temperatureinwirkung, Schwinden des Betons, Fundamentverdrehungen etc. erfahren Stützen ausser Lasten im allgemeinen auch Zwängungen.



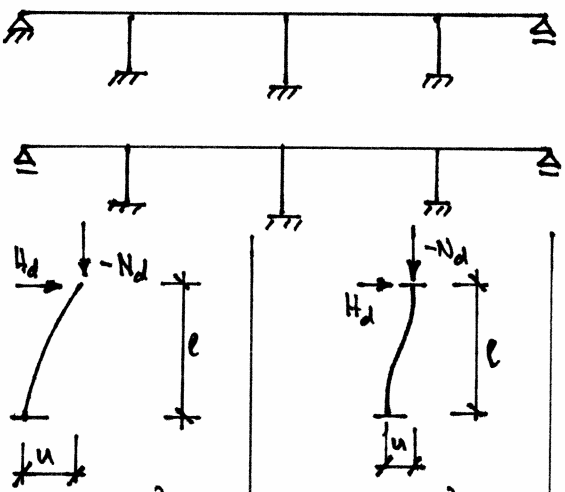
Beispiel Stützenkopfverschiebung u infolge
- Vorspannung P des Riegels
- Verkürzung $\alpha_T \cdot \Delta T \cdot l$ des Riegels
- " $\varepsilon_{cs} \cdot l$ " "

Grundsätzlich sind in solchen Fällen zwei Nachweise zu führen:
- Tragsicherheitsnachweis für Q_d und zugehörige Zwängung mit EI_{min}
- Spannungsnachweis für u_d und zugehörige Last Q mit EI_{max}.

Um auf der sicheren Seite zu bleiben, muss für den Tragsicherheitsnachweis mit einer minimalen Steifigkeit gerechnet werden, sonst werden die Effekte 2. Ordnung unterschätzt.

Umgekehrt sind die Effekte von Zwängungen (im Gebrauchszustand) umso grösser, je höher die Steifigkeit ist, d.h. um solche Einflüsse nicht zu unterschätzen, muss von einer maximalen Steifigkeit ausgegangen werden.

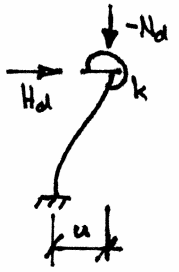
3.5.4 Gesamtstabilität von Stützensystemen



$$u = \frac{H_d \cdot l^3}{3EI(1-\alpha)} \qquad u = \frac{H_d \cdot l^3}{12EI(1-\alpha)}$$

$$\alpha = N_d / N_{cr,d}$$

Rahmensysteme sind oft längs nicht fixiert, sondern schwimmend gelagert. Das Bewegungszentrum ist dann von den Stützensteifigkeiten abhängig.



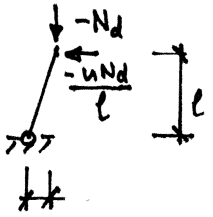
Allgemeiner Fall
$k \to 0$ oben gelenkig
$k \to \infty$ oben eingespannt

$$H_d = -\frac{12\,u}{\pi^2 \cdot l}\left(N_{cr,d} - N_d\right) \qquad (3.37)$$

wobei

$$N_{cr,d} = -\frac{\pi^2 EI_d}{\ell^2\left(4 - \frac{3}{1+\frac{EI_d}{k\ell}}\right)} \qquad (3.38)$$

Pendelstützen haben eine treibende Wirkung, d.h. sie liefern $H = u N_d / \ell$



Der Nachweis der Gesamtstabilität kann wie folgt erbracht werden:

$$H_d = u \cdot \left(\frac{12}{\pi^2} \sum_i \frac{N_{di} - N_{cr,di}}{\ell_i} + \sum_j \frac{N_{dj}}{\ell_j} \right) \qquad (3.39)$$

H_d = Horizontalkraft aus z.B. Anfahr- oder Bremskräften, Streichwind auf Träger, Längswind auf Stützen, Lagerreibung, Erdbeben

i = stabilisierende Stützen

j = Pendelstützen (treibende Wirkung)

Achtung: in (3.39) sind N_{di}, $N_{cr,di}$ und N_{dj} negative Grössen!

Besonders gefährlich sind kurze Pendelstützen. Sie ergeben eine grosse treibende Wirkung. Darauf ist vor allem im Bauzustand (Lehrgerüste) zu achten!

3.6 Zusammenfassung

1. Das Tragverhalten von Stahlbetondruckgliedern unter Biegung und Normalkraft kann aufgrund der Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte unter Verwendung beliebiger Spannungs-Dehnungsdiagramme für den Beton und die Bewehrung erfasst werden. Die Ermittlung von Schnittgrössen (N, M_y, M_z) zu vorgegebenen Verformungsgrössen ($\varepsilon_0, \chi_y, \chi_z$) erfordert eine Integration, die umgekehrte Aufgabenstellung im allgemeinen eine Iteration.
2. Die Rissbildung wird von der Bewehrung direkt beeinflusst (Bewehrungsgehalt, Stabdurchmesser). Das Zuggurtmodell gestattet eine übersichtliche Beschreibung der grundlegenden Zusammenhänge.
3. Bei der Anwendung des Zuggurtmodells sind Lasteinwirkungen sowie äusserer und innerer Zwang zu unterscheiden.
4. Unter Zwangbeanspruchungen wird in der Regel kein abgeschlossenes Rissbild erreicht.
5. Unter innerem Zwang ergeben sich beim Erstriss die ungünstigsten Spannungen. Weitere Risse führen zu einer sukzessiven Entspannung.
6. Mit der Mindestbewehrung wird sichergestellt, dass kein Sprödbruch beim ersten Riss auftritt, ein ausreichendes Verformungsvermögen sichergestellt ist und die Rissbreiten beschränkt bleiben.
7. Moderate Druckkräfte in Druckgliedern führen zu einer Erhöhung des Rissmoments (Dekompressionsmoments) sowie des Biegewiderstands und zu einer Reduktion des Verformungsvermögens.
8. Der Biegewiderstand von Druckgliedern wird mit M-N-Interaktionsdiagrammen beschrieben.
9. Mit einer Umschnürungsbewehrung kann die achsiale Druckfestigkeit des Kernbetons und vor allem die zugehörige Stauchung wesentlich gesteigert werden. Werden diese Eigenschaften ausgenutzt, ist mit abgeplatztem Überdeckungsbeton zu rechnen.

10. Bei der konstruktiven Durchbildung von Druckgliedern sind die entsprechenden Regeln für die Bewehrungsführung sorgfältig zu beachten.
11. Beim Nachweis der Tragsicherheit von Druckgliedern sind ausser den Schnittgrössen 1. Ordnung geometrische Imperfektionen sowie Einflüsse 2. Ordnung zu berücksichtigen.
12. Bei Stützen unter Last- und Zwangsbeanspruchungen sind grundsätzlich ein Tragsicherheitsnachweis und ein Spannungsnachweis zu erbringen, wobei entweder mit einem unteren oder einem oberen Grenzwert der Biegesteifigkeit zu rechnen ist.
13. Bei der Untersuchung der Gesamtstabilität von Rahmensystemen sind stabilisierende und treibende Wirkungen zu unterscheiden. Besondere Vorsicht ist bei kurzen Pendelstützen angezeigt.

4. Querkraft

4.1 Allgemeines

4.1.1 Übersicht

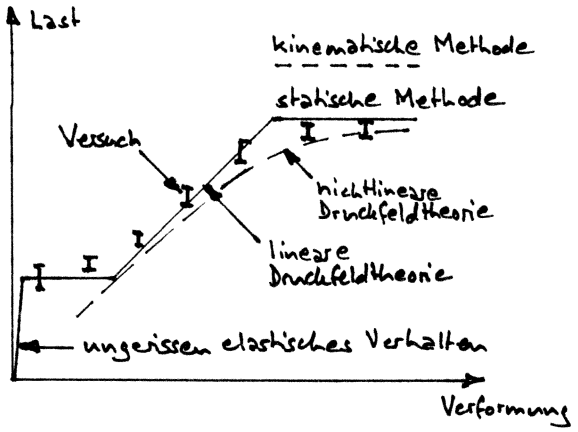
Das Tragverhalten von Stahlbetonbalken und -platten wird meist von den Kräften und Verformungen infolge Biegemomenten dominiert. Bei gedrungenen und stark profilierten Trägern können die Querkräfte und die zugehörigen Verformungen im Vergleich zu den Zug- und Druckkräften sowie den Verformungen infolge Biegung allerdings relativ gross sein, siehe Kapitel 4.1.2.

Aus dem Rissbild und der Verformung von Versuchsträgern schloss man schon früh auf eine Fachwerkwirkung von Stahlbetonträgern. Die ursprünglich einfachen und klaren Fachwerkmodellvorstellungen wurden dann leider durch viele empirische Modifikationen verunklärt, v.a. durch Normbestimmungen in vielen nationalen und internationalen Regelwerken. Mit dem CEB-FIP Model Code 1978 und in der Folge weiteren Normen besserte sich die Situation, es besteht aber weiter die Gefahr, dass die Anwendung von Fachwerkmodellen durch Überreglementierung behindert wird.

Seit 1960 wurden in der Erforschung des Schubtragverhaltens von Stahlbetonbauteilen namentlich in folgenden Bereichen grosse Fortschritte erzielt:

- Entwicklung plastischer Berechnungsmethoden – statische und kinematische Methode (Spannungsfelder und Bruchmechanismen)
- Entwicklung linearer und nichtlinearer Druckfeldtheorien
- Verifikation der Modellvorstellungen mit Grossversuchen.

Typisches Last - Verformungsdiagramm:



Das in Versuchen beobachtete Tragverhalten lässt sich mit den verschiedenen Modellvorstellungen näherungsweise erfassen, und diese können zur Bemessung neuer sowie zur Überprüfung bestehender Tragwerke angewendet werden.

Von besonderer Bedeutung für die Praxis sind Fachwerkmodelle (diskretisierte Spannungsfelder), die in der Regel iterativ entwickelt werden müssen. Werden den Fachwerkstäben entsprechende Steifigkeiten zugeordnet, so können Fachwerkmodelle im Sinne der linearen Druckfeldtheorie auch für Verformungsberechnungen verwendet werden.

4.1.2 Nominelle Schubspannungen

Auf die Stegbreite b_w und den Hebelarm z der inneren Zug- und Druckkräfte aus Biegung bezogene mittlere Schubspannungen

$$\tau_d = \frac{V_d}{b_w \cdot z} \qquad (4.1)$$

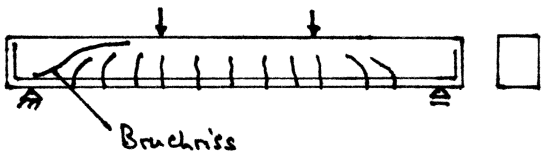
sind ein geeignetes Hilfsmittel zur Einordnung der in einem konkreten Fall vorliegenden Schubproblematik.

Liegt τ_d unterhalb einer unteren Schubspannungsgrenze von etwa $0.2 f_{ctm}$, kann bei dünnen Platten auf eine Bügelbewehrung (Querkraftbewehrung) verzichtet werden; Stegzugbrüche können damit ausgeschlossen werden. Zur Vermeidung von Stegdruckbrüchen ist andererseits eine obere Schubspannungsgrenze von etwa $2 f_{ctm}$ einzuhalten.

Bei dicken Platten (z.B. $h \geq 400$ mm) und bei Balken ist stets eine Bügelbewehrung anzuordnen, die einem geometrischen Bewehrungsgehalt

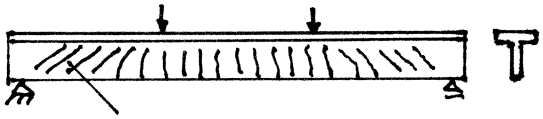
von mindestens 0.2% entspricht (SIA 262, 5.5.2.2). Zusätzlich ist zur Abtragung der Querkräfte die Längsbewehrung zu verstärken; die Bemessung erfolgt mit Spannungsfeldern bzw. Fachwerkmodellen.

Stegzugbruch:

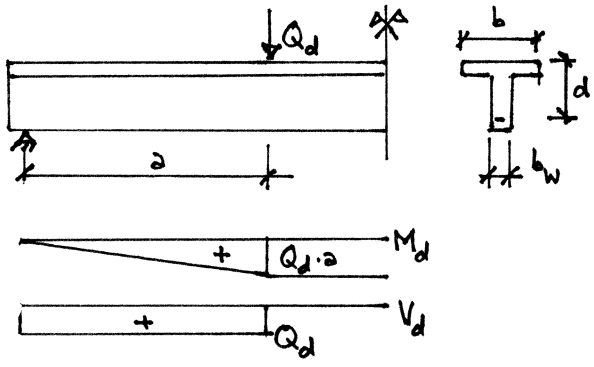


Aus gerissten Rissen im Schubbereich zwischen der aufgebrachten Last und dem Auflager kann sich ein Bruchriss entwickeln, der sich S-förmig zur Last und der Bewehrung entlang zum Auflager hin fortpflanzt und zu einem spröden (schlagartigen) Versagen führt.

Stegdruckbruch:



Bei profilierten, längs- und bügelbewehrten Trägern besteht die Gefahr eines (relativ spröden) Stegdruckversagens nach mehr oder minder ausgeprägtem Fliessen der Bügel.



Plattenbalken, Eigenlast gegenüber Q_d vernachlässigt, Annahme Biegedruckzone der Dicke wd ganz in Platte.

Hebelarm $z = d(1 - \frac{w}{2})$

Biegedruckkraft $\frac{Q_d \cdot a}{z} = b \cdot wd \cdot f_{cd}$

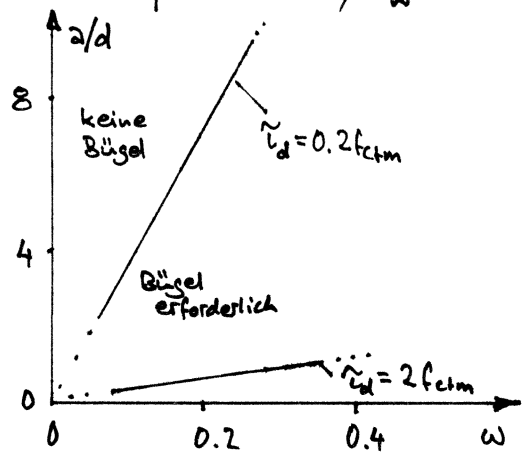
Nominelle Schubspannung $\tau_d = \frac{Q_d}{b_w \cdot z} = \frac{b}{b_w} \cdot \frac{d}{a} \cdot w \cdot f_{cd}$

Mit $f_{cd} \approx 6.9\, f_{ctm}$ und den oben eingeführten unteren und oberen Schubspannungsgrenzen von $0.2\, f_{ctm}$ bzw. $2\, f_{ctm}$ folgt für den bügelbewehrten Bereich

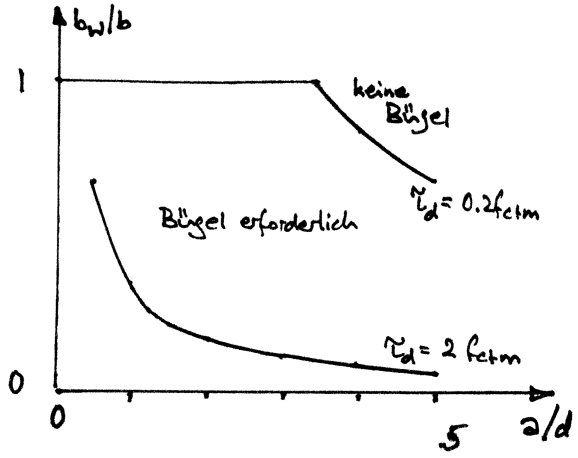
$$0.029 \leq w \cdot \frac{b}{b_w} \cdot \frac{d}{a} \leq 0.290 \qquad (4.2)$$

Die Beziehung (4.2) zeigt, dass die Gefahr eines Querkraftversagens mit grösserem Biegebewehrungsgehalt (ω), dünneren Stegen (b_w/b) und kürzeren Schubspannweiten (a/d) steigt.

Rechteckquerschnitte, $b_w = b$:



Plattenbalken, $\omega = 0.1$:



Das Diagramm rechts zeigt, dass mit zunehmender Schlankheit (a/d) und dank dem Einsatz von Bügeln eine starke Profilierung möglich ist ($b_w \ll b$).

In allgemeinen Fällen können die obigen Beziehungen mit der Schubspannweite

$$a = \frac{M_{d,max}}{V_{d,max}} \qquad (4.3)$$

sinngemäss angewendet werden.

BEISPIEL 4.1

Ermittle die in Beispiel 2.9 auftretenden nominellen Schubspannungen und vergleiche sie mit den eingeführten Schubspannungsgrenzen.

a) Platte

$V_{d,max} = 27.4$ kN/m, $z = 146\,(1 - 0.061/2) = 141.6$ mm, $0.2 \cdot f_{ctm} = 0.52$ N/mm²

$\tau_d = 27.4 / 141.6 = \underline{0.19 \text{ N/mm}^2} = 0.37 \cdot 0.52 \text{ N/mm}^2$

τ_d beträgt 37 % der unteren Schubspannungsgrenze. Es sind keine Bügel erforderlich. Da ferner die gesamte untere Biegebewehrung über die Stege des Plattenbalkens geführt wird (vgl. SIA 262, 5.5.3.3) besteht kein Trag-

sicherheitsproblem bezüglich Querkraft.

b) Stege

$V_{d,max} = 587$ kN, $b_w = 0.4$ m, $z = 1.105$ m $\rightarrow \tau_d = \frac{587\,000}{400 \cdot 1105} = \underline{1.33\ N/mm^2}$.

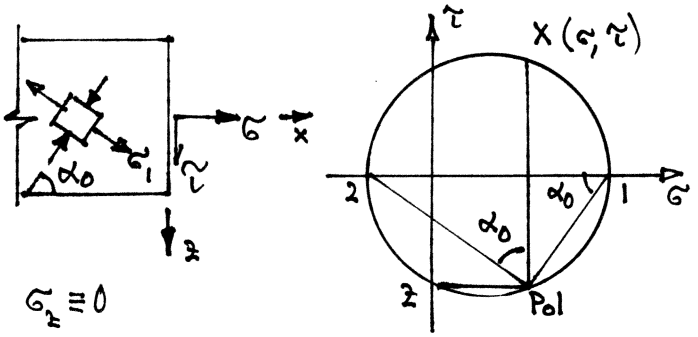
$2 \cdot f_{ctm} = 5.2\ N/mm^2$, $\tau_d = 0.26 \cdot 5.2 N/mm^2$

τ_d beträgt 26 % der oberen Schubspannungsgrenze. Führt man den Nachweis 1.05 m vom Auflager entfernt, was wegen des Fächers im Auflagerbereich korrekt ist, reduziert sich V_d auf 590 kN und τ_d auf $1.15\ N/mm^2$, was noch 22.5 % der oberen Schubspannungsgrenze entspricht.

Wie man sieht, sind Bügel erforderlich ($\tau_d > 0.52\ N/mm^2$). Der Bügelbewehrungsgehalt der gewählten Bügelbewehrung ($\underline{\phi 10 @ 150}$) beträgt $5^2 \cdot \pi/(150 \cdot 200) = \underline{0.26\ \% > 0.2\ \%}$. Im mittleren Stegbereich wird die Bügelbewehrung auf $\phi 10 @ 300$ und damit der Bügelbewehrungsgehalt auf $0.13\ \% < 0.2\ \%$ reduziert, was nach SIA 262 (5.5.2.2) streng nicht zulässig ist; ferner wird auch die Abstandsbestimmung $s \leq 25\,\phi$ verletzt, da $s = 300\ mm > 25 \cdot 10 = 250\ mm$. Streng genommen müsste die Bügelbewehrung im mittleren Stegbereich deshalb verstärkt werden, z.B. auf $\underline{\phi 8 @ 125}$: $4^2 \cdot \pi/(125 \cdot 200) = 0.20\ \%$, $s = 125\ mm < 25\,\phi = 200\ mm$.

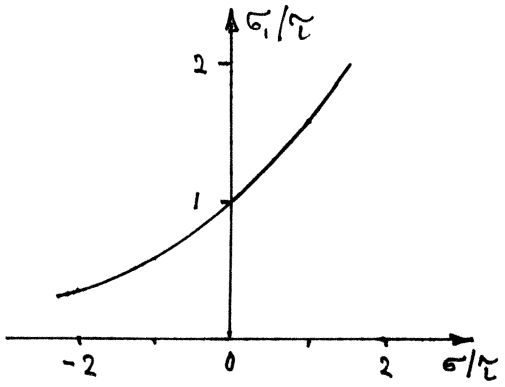
4.2 Ungerissenes Verhalten und Reissen

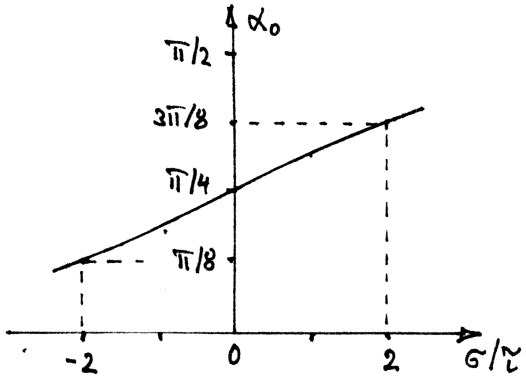
Bis zum Reissen des Betons können Querkraftprobleme mit Hilfe der üblichen elastizitätstheoretischen Verfahren behandelt werden. Namentlich können Risslasten durch Vergleich der Hauptzugspannungen mit der Betonzugfestigkeit abgeschätzt werden, z.B. in einem durch Biegung, Normal- und Querkraft beanspruchten Steg:



$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tan\alpha_0 = \frac{\sigma_1}{\tau}$$



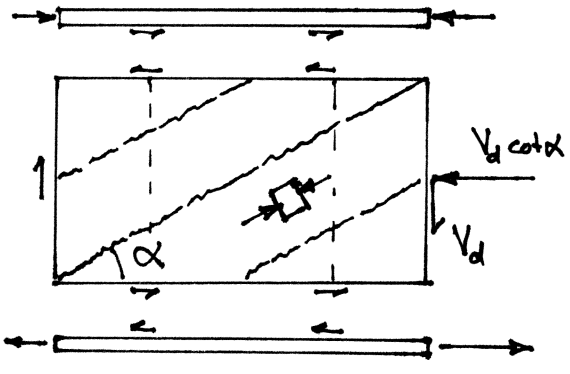


Übersteigt σ_{id} einen vorsichtig angesetzten Bruchteil der mittleren Betonzugfestigkeit f_{ctm} (z.B. den oben eingeführten Wert der unteren Schubspannungsgrenze $0.2\, f_{ctm}$), so ist eine Querkraftbewehrung (Bügel und verstärkte Längsbewehrung) anzuordnen.

N.B. Nach SIA 262, 5.2.7.1 beträgt $\underline{f_{ctd}} = 0.5 \cdot f_{ctk\,0.05} / \gamma_c = 0.5 \cdot 0.7\, f_{ctm} / 1.5 = \underline{0.23\, f_{ctm}} \approx 0.2\, f_{ctm}$.

Nach dem Reissen (Rissneigung α_0) stellt sich sukzessive eine Fachwerkwirkung unter Aktivierung der Bügel und der Längsbewehrung ein. Die Neigung α des diagonalen Druckfelds im Beton weicht im allgemeinen von der initialen Rissneigung α_0 ab. Dafür ist eine im einzelnen recht komplexe Umlagerung der inneren Kräfte erforderlich, die sich z.T. in Sekundärrissen äussert und auf Mechanismen der Rissverzahnung sowie der Dübelwirkung der Bewehrungsstäbe beruht.

Bei der Bemessung darf α etwa innerhalb der Grenzen $\alpha_0 \pm 20°$ frei gewählt werden, wenn bestimmte Regeln für die konstruktive Durchbildung beachtet werden (Mindestbewehrungsgehalt, maximale Stababstände).



Steg: diagonales Druckfeld

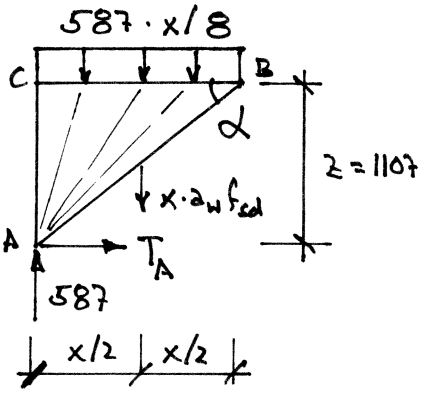
4.3 Fachwerkmodelle und Spannungsfelder

4.3.1 Einführung

Die Grundidee der Fachwerkmodelle und Spannungsfelder wurde bereits in Beispiel 2.9 eingeführt. Die dort gewählte Bügelbewehrung ϕ 10 @ 150 wurde im mittleren Stegbereich auf ϕ 10 @ 300 reduziert, und unmittelbar neben dem Auflager waren über eine Länge von 1.05 m nicht 7 sondern 8 Bügel erforderlich.

In Beispiel 4.1 wurde gezeigt, dass die Reduktion auf ϕ 10 @ 300 im mittleren Stegbereich unzulässig ist. In der Folge wird untersucht, ob die minimale Bügelbewehrung $\phi 8_{\wedge}^{@125}$ über die ganze Trägerlänge angelegt werden könnte und was für Konsequenzen dies hätte.

Wegen der um 2 mm dünneren Bügel vergrössert sich der Hebelarm der inneren Kräfte von 1105 auf 1107 mm. Die extremalen Gurtkräfte werden auf 2349 / 1.107 = 2122 kN reduziert. Die Längsbewehrung 7 ϕ 30 wird belassen ($7 \cdot 15^2 \cdot \pi \cdot 435 = 2152$ kN > 2122 kN).



- Fächerbereich ABC, unbekannte Länge x
- Der Widerstand der Bügelbewehrung pro Längeneinheit beträgt

$$a_w \cdot f_{sd} = \frac{2 \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 435}{125} = 349.85 \text{ kN/m}$$

- Gleichgewicht der Vertikalkräfte:

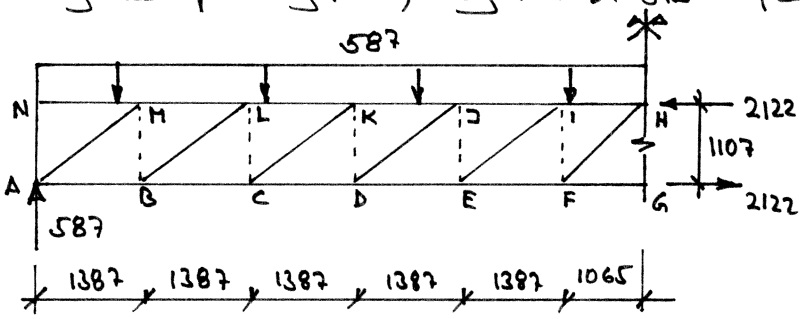
$$587\left(1 - \frac{x}{8}\right) = x \cdot a_w f_{sd} \rightarrow \underline{x = 1.387 \text{ m}}$$

$$\rightarrow \underline{\alpha = 38.6^\circ}$$

- Momentengleichgewicht um B: $T_A \cdot 1.107 = 587 \cdot \frac{x}{2} \rightarrow \underline{T_A = 368 \text{ kN}}$

- Gemäss Beispiel 2.9 musste beim Auflager eine Untergurtkraft von 279 kN verankert werden. Wegen der schwächeren Bügelbewehrung vergrössert sich die Fächerlänge von 1.05 m auf x = 1.387 m, und die Untergurtkraft steigt auf T_A = 368 kN.

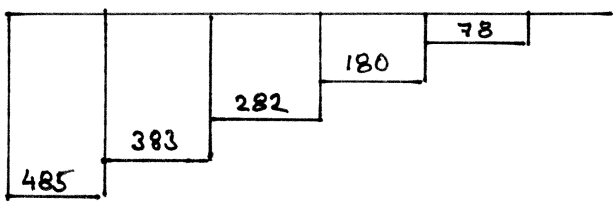
Fortsetzung des Spannungsfelds, Bügel- und Gurtkräfte:



Fächer: AMN, EFHI

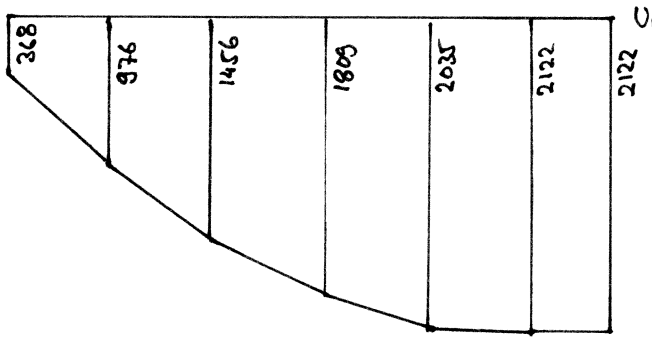
Parallele Druckfelder:
ABLM, BCKL, CDJK, DEIJ

Spannungsfrei: FGH



N.B. $587 \cdot \frac{1.065}{8} = 78$ kN

$587 \cdot \frac{1.387}{8} = 101.8$ kN

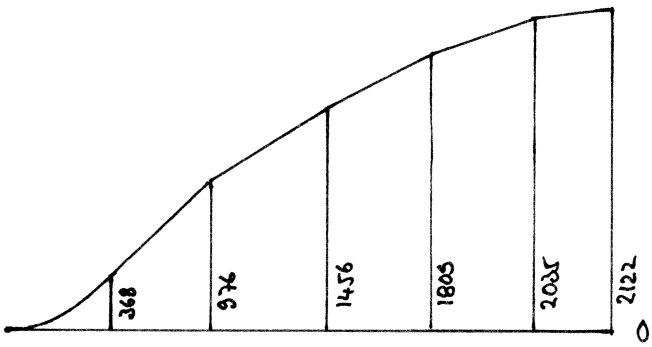


N.B. $101.8 \cdot \frac{1387}{1107} = 127.5$ kN

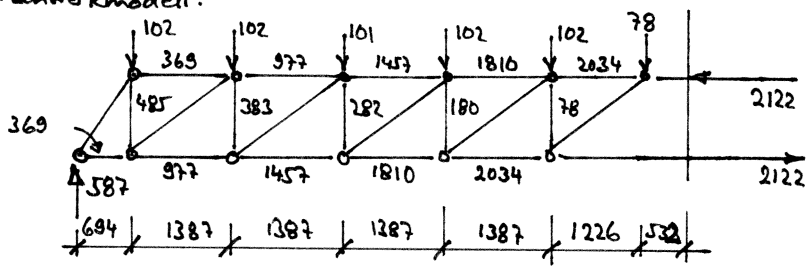
$485 \cdot \frac{1387}{1107} = 608$ kN

$78 \cdot \frac{1387+1065}{2 \cdot 1107} = 86$ kN

Kontrolle: $2122 - 2035 = 87$ kN
≈ 86 kN, o.k.



Fachwerkmodell:

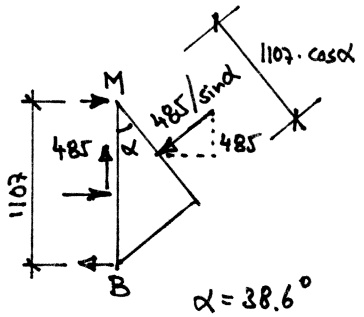


Fachwerkstäbe = Wirkungslinien der Spannungsresultierenden der einzelnen Spannungsfelder.

Fachwerkmodell und Spannungsfeld liefern gleiche Gurtkräfte an den Stellen, wo die Bügelkräfte springen, d.h. an Enden der parallelen Druckfelder.

Das Beispiel zeigt, dass die flachere Diagonalenneigung im Vergleich zu Beispiel 2.9 ($\alpha = 38.6°$ statt $43.5°$) erlaubt, eine schwächere Bügelbewehrung zu verwenden. Dafür wird die am Auflager zu verankernde Untergurtkraft grösser ($T_A = 368$ kN statt 279 kN).

Betondruckspannungen im parallelen Druckfeld ABLM:

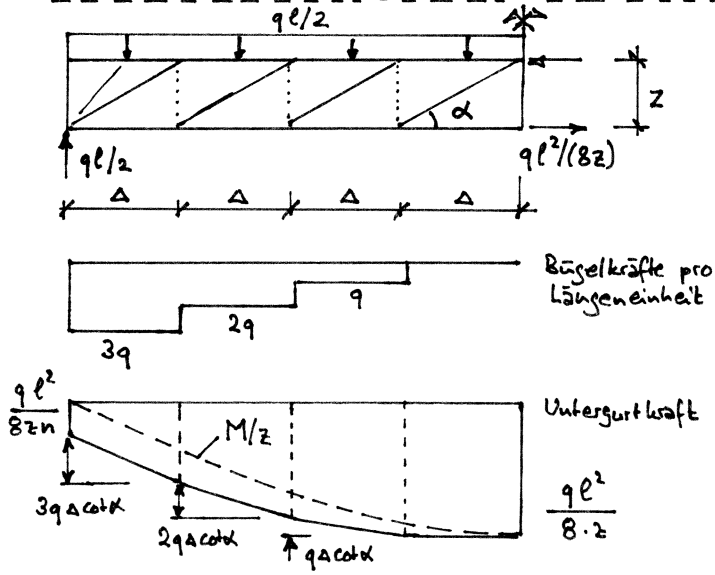


$$-\sigma_c = \frac{485\,\text{kN}/\sin\alpha}{400\,\text{mm} \cdot 1107\,\text{mm} \cdot \cos\alpha} = \underline{2.25\ \text{N/mm}^2} < 9.9\ \text{N/mm}^2$$

Beschränkung von $-\sigma_c$ auf $k_c f_{cd}$ mit $k_c = 0.6$ und $f_{cd} = 16.5\ \text{N/mm}^2$: $0.6 \cdot 16.5 = 9.9\ \text{N/mm}^2$ (SIA 262, 4.2.1.7).

4.3.2 Bewehrungsmengen

a) Einfacher Balken unter gleichmässig verteilter Belastung



Vertikale Bügel, Stegdicke b_w

$\ell = 2n\Delta$, $\Delta = z \cdot \cot\alpha$

In der Folge werden Verankerungslängen vernachlässigt → effektive Bewehrungsmengen entsprechend höher, z.B. + 20%.

Raumlast von Betonstahl $\gamma_s = 78.5\ \text{kN/m}^3$

Stahlspannung σ_s

Abreisslänge σ_s / γ_s

Bewehrungsmengen W [kN]:

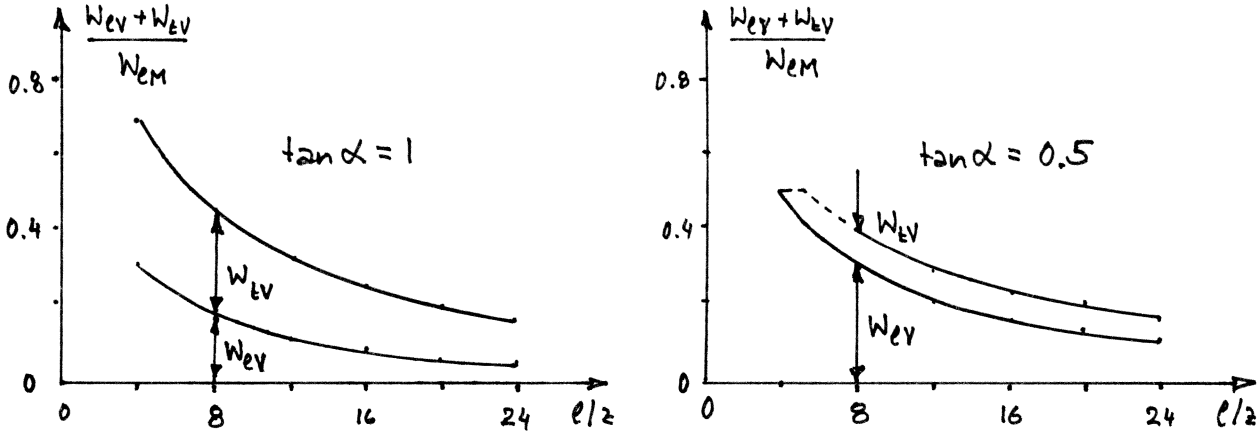
Längsbewehrung infolge M: $$W_{\ell M} = \frac{q\ell^2}{8z\sigma_s} \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \gamma_s = \frac{q\ell}{12} \cdot \frac{\ell}{z} \cdot \frac{\ell}{\sigma_s/\gamma_s}$$

Bügelbewehrung infolge V: $$W_{tV} = \frac{3(n-1)}{2n^2} \cdot \tan^2\alpha \cdot W_{\ell M} = 6(n-1)\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 \cdot W_{\ell M}$$

Längsbewehrung infolge V: $$W_{\ell V} = \frac{3n-1}{4n^2} \cdot W_{\ell M}$$

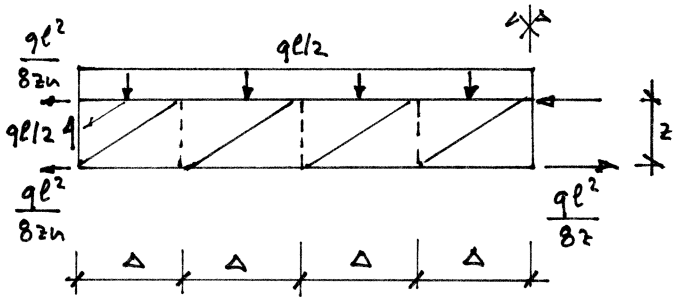
(4.4)

$(4.4)_1$ zeigt, dass W_{eM} zur Totallast ql, zur Schlankheit l/z und zu der auf die Abreisslänge σ_s/γ_s bezogenen Länge l proportional ist. Mit $(4.4)_2$ und $(4.4)_3$ werden die für Querkraft zusätzlich erforderlichen Bewehrungen auf W_{eM} bezogen.



Wie man sieht, ist die Gesamtbewehrung recht unabhängig von der Wahl von α. Mit steigender Schlankheit l/z sinkt der Schubbewehrungsanteil an der Gesamtbewehrung.

Indirekte Lagerung am Balkenende:

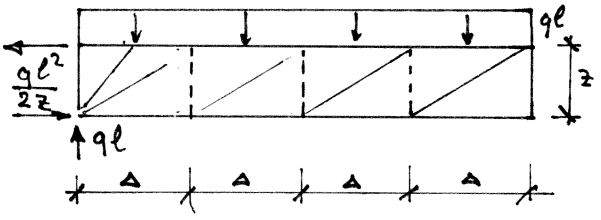


Das parallele Druckfeld beim Auflager erfordert eine obere Gurtbewehrung über die Länge $\Delta/2$.

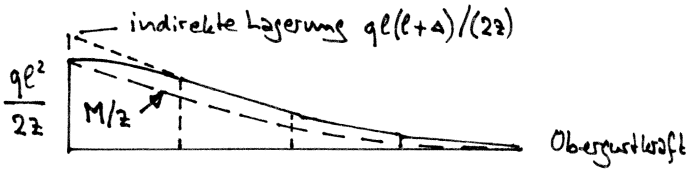
W_{eV} wird vergrössert, alle andern Beziehungen bleiben bestehen:

$$W_{eV} = \frac{6n+1}{8n^2} W_{eM} \qquad (4.5)$$

b) Kragarm unter gleichmässig verteilter Belastung



$l = n \cdot \Delta$



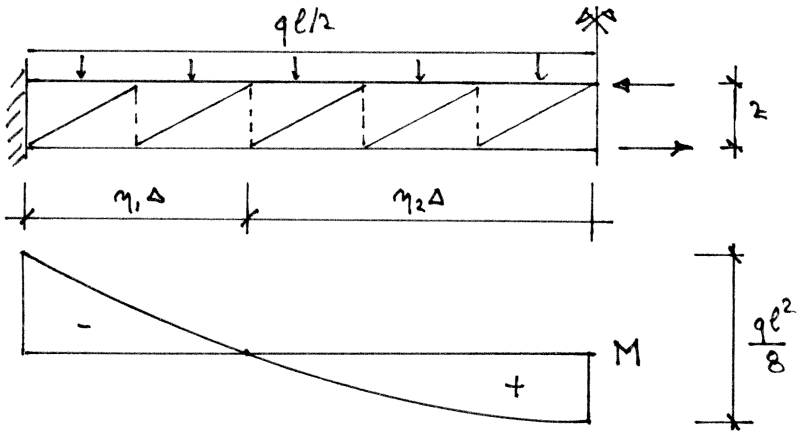
$$W_{eM} = \frac{ql^2 \cdot \gamma_s}{6 \cdot z \cdot \sigma_s}$$

$$W_{tV} = 3(n-1) \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^2 \cdot W_{eM}$$

$$W_{eV} = \frac{3n \mp 1}{2n^2} \cdot W_{eM} \qquad (4.6)$$

Bei direkter (indirekter) Lagerung gilt in $(4.6)_3$ das Minuszeichen (Pluszeichen).

c) Beidseitig eingespannter Balken unter gleichmässig verteilter Belastung



$$(\eta_1 + \eta_2)\Delta = \frac{\ell}{2}$$

Bewehrungsmengen für Länge $\ell = 2(\eta_1+\eta_2)\Delta$ und direkte Lagerung (Auflagerfächer):

$$W_{eM} = \frac{q\Delta^3 \gamma_s}{32 z \sigma_s} \cdot (\eta_1^3 + 3\eta_1^2\eta_2 + 2\eta_2^3), \quad W_{eV} = \frac{q\Delta z \gamma_s}{\sigma_s}(\eta_1+\eta_2)(\eta_1+\eta_2-1), \quad W_{eV} = \frac{q\Delta^3\gamma_s}{6 z \sigma_s}\left[3(\eta_1+\eta_2)^2 - \eta_1\right] \quad (4.7)$$

Bei indirekter Lagerung ändert sich nur W_{eV}:

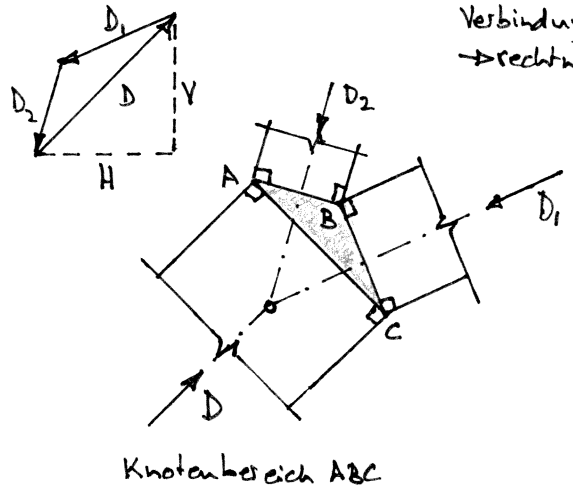
$$W_{eV} = \frac{q\Delta^3\gamma_s}{6 z \sigma_s}\left[3(\eta_1+\eta_2)^2 + \eta_1 + 2\eta_2\right] \quad (4.8)$$

N.B. W_{eM} wird minimal für $\eta_1 = \eta_2$: $W_{eM,min} = \frac{q\ell^3 \cdot \gamma_s}{32 \cdot z \sigma_s}$

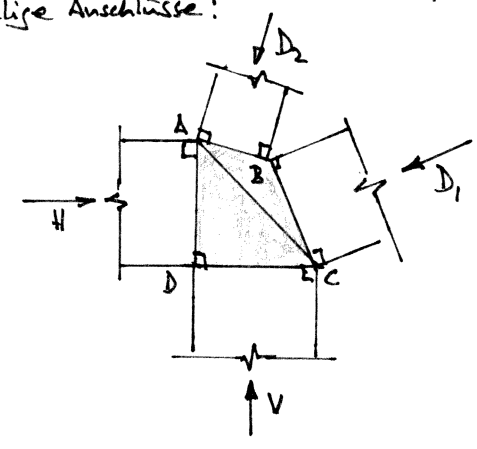
$W_{eM,min}$ des beidseitig eingespannten Balkens beträgt 3/8 des Werts W_{eM} des gleich langen einfachen Balkens, vgl. $(4.4)_1$.

4.3.3 Knotenbereiche

Wegen der endlichen Betonfestigkeit ergeben sich nicht wie in den Fachwerkmodellen punktförmige Knoten, sondern ausgedehnte Knotenbereiche:

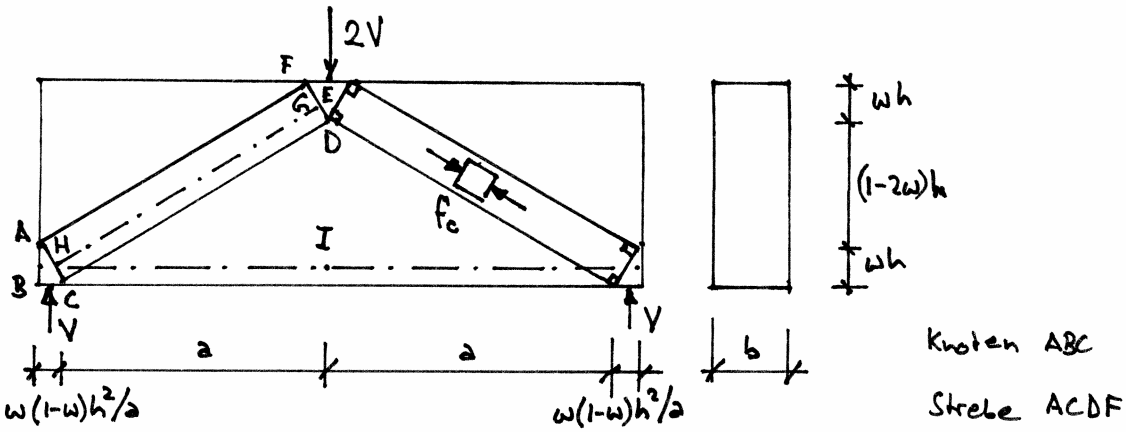


Verbindung von Streben mit gleichen Druckspannungen
→ rechtwinklige Anschlüsse!



Werden für die verschiedenen Streben unterschiedliche Druckspannungen gewählt, sind die Ränder des Knotenbereichs i.a. nicht mehr orthogonal zu den Streben. Untersuchung mit Mohrschen Kreisen und Spannungsdiskontinuitätslinien möglich, siehe Vorlesung Stahlbeton III.

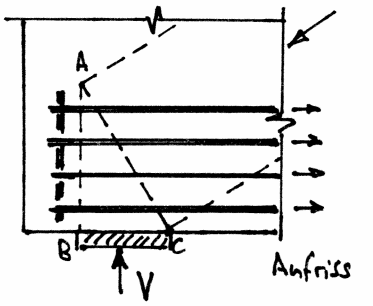
4.3.4 Strebenwirkung und Fächerwirkung

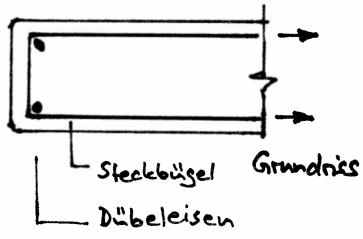


Zugkraft in Bewehrung: $T = w b h f_c$

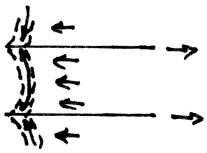
Querkraft : $V = w(1-w) b h^2 f_c / a$

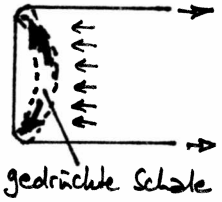
Die Zuggurtkraft T muss hinter dem Auflager voll verankert sein. Dies wäre mit einer Stahlplatte entlang AB möglich, was aber i.a. nicht in Frage kommt (Dauerhaftigkeit – Korrosionsschutz, Ästhetik). Eine dem Stahlbeton angepasste Lösung ist die Verwendung von Steckbügeln in Verbindung mit kräftigen Dübeleisen in deren Ecken:

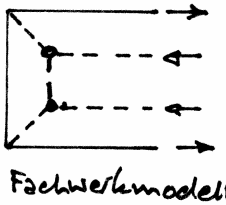




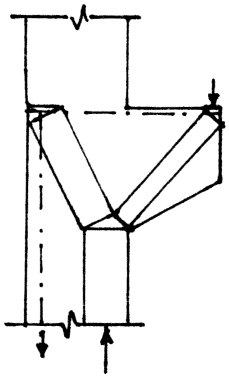
Zwischen den Steckbügeln können sich gedrückte Schalen ausbilden



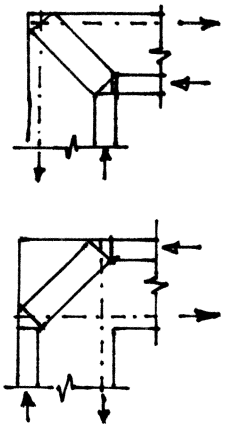




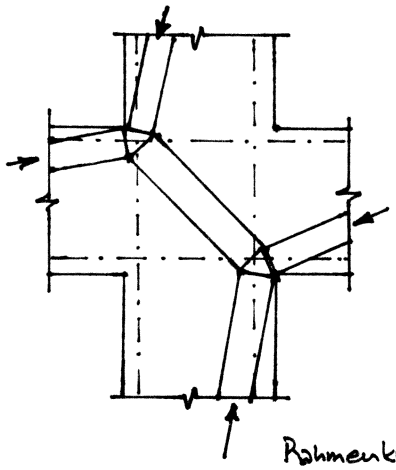
Weitere Beispiele:



Konsole



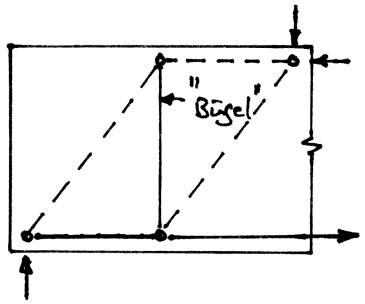
Rahmenecken



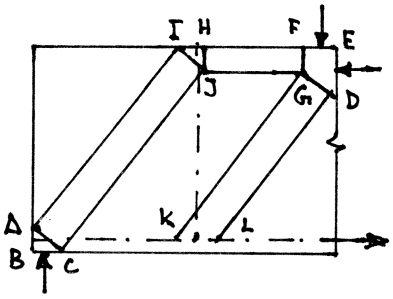
Rahmenknoten

Ausgehend von Fachwerkmodellen, mit denen das Prinzip des Kraftflusses festgelegt wird, erlauben Strebenmodelle vor allem, die Grösse der erforderlichen Knotenbereiche abzuschätzen und entsprechende konstruktive Details auszuarbeiten. Meist schliessen sich an die Entwicklung von Strebenmodellen weitere Verfeinerungen an, etwa durch Auffächerung von Streben (in der Regel iteratives Vorgehen erforderlich):

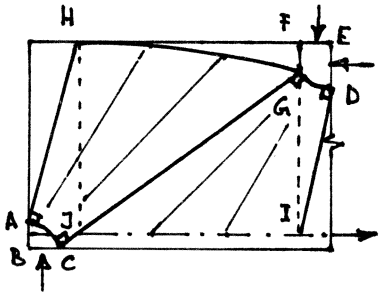
Fachwerkmodell



Strebenmodell



Spannungsfeld mit Fächern



Dank der Bügel im Bereich JIFH des Spannungsfelds kann die Zuggurtkraft entlang IJ weitgehend abgebaut werden, so dass die bei AB zu verankernde Kraft wesentlich kleiner ist, als ohne Bügel.

Knoten ABC	Knoten ABC
Strebe ACJI	Fächer ACGH
Knoten HIJ	Rand HG
Strebe HJGF	Druckzone HGF
Strebe KLDG	Fächer JIDG
Knoten DEFG	Knoten DEFG

N.B. :- Punkte A, C, D, G in Strebenmodell und Spannungsfeld identisch, aber AC und DG im Spannungsfeld gekrümmt

- Mitte IH im Strebenmodell = Mitte JI im Spannungsfeld = "Bügel" im Fachwerkmodell

4.3.5 Hinweise zur Anwendung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern

Fachwerkmodelle gestatten es, den Fluss der inneren Kräfte auf plausible Art zu verfolgen und, darauf basierend, die wesentlichen Abmessungen und konstruktiven Details festzulegen. Sie sollten nicht als Modelle missverstanden werden, die eine umfassende Beschreibung des Tragverhaltens erlauben. Vielmehr sind sie einfache Werkzeuge in der Hand von Ingenieuren, die primär konstruieren und nicht analysieren wollen.

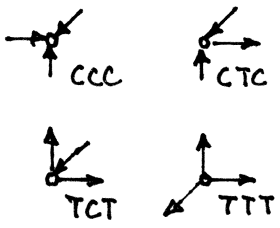
Meist genügt es, einige wichtige Details vertieft zu prüfen. Vollständige Spannungsfelder werden nur selten benötigt.

Praktische Hinweise:

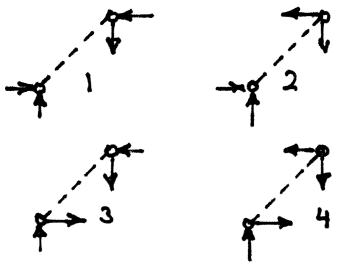
1. Fachwerkmodelle stets massstäblich darstellen.
2. Ausreichende Mindestbewehrung vorsehen ($\rho \gtrsim 0.2\%$ je nach Anwendung).
3. Effektive Betondruckfestigkeit vorsichtig wählen ($f_c = k_c f_{cd}$, SIA 262 4.2.1.7)
4. Iterativ vorgehen: probieren, damit ungefähre Kräfte bestimmen und sukzessive verbessern (inkl. Ausnutzung der verteilten Mindestbewehrung).

Die Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern ist ein Handwerk, das geübt sein will. Dabei ist es erleichternd, dass sich gewisse Grundmuster stets wiederholen:

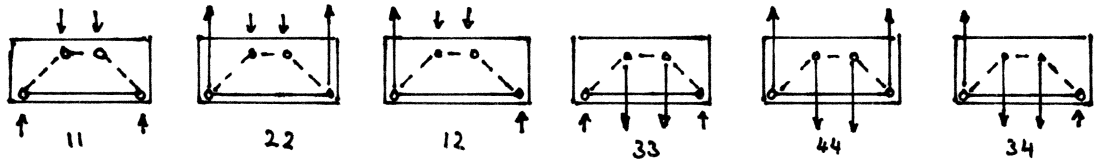
Knotentypen (C = Druck, T = Zug):



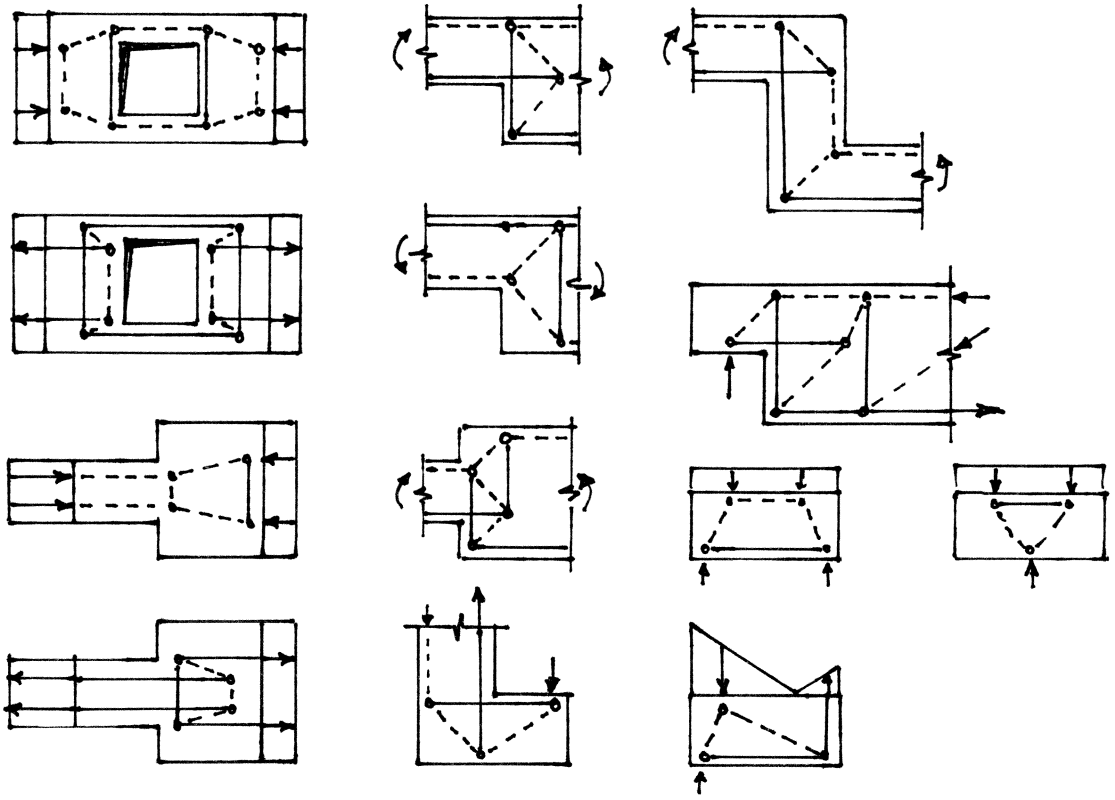
Strebenkonfigurationen:



Kombination:



Weitere Beispiele (verteilte Kräfte durch statisch äquivalente Einzelkräfte ersetzen):

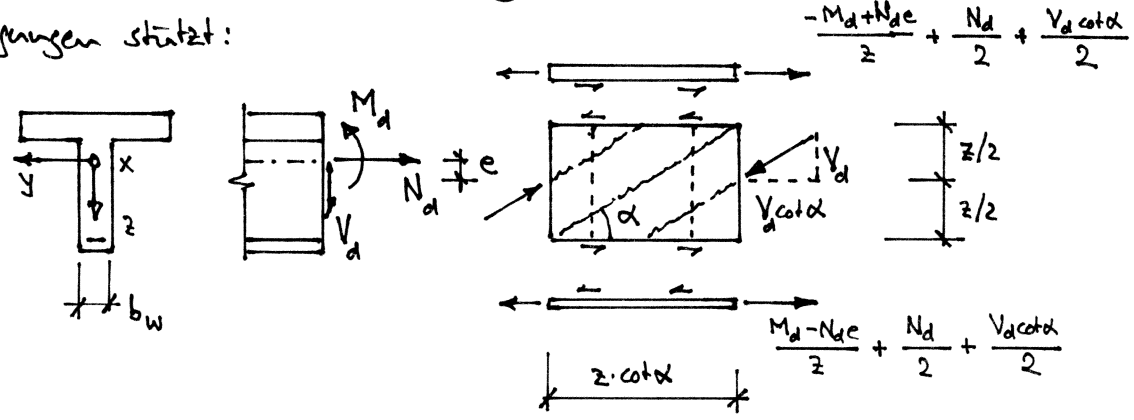


etc.

4.4 Querschnittsbetrachtung

4.4.1 Parallelgurtige Träger mit vertikalen Bügeln

Wenn sich sämtliche statischen und geometrischen Grössen entlang der Trägerachse nur allmählich verändern (nicht sprunghaft), darf näherungsweise von einer reinen Querschnittsbetrachtung ausgegangen werden, die sich auf folgende Überlegungen stützt:

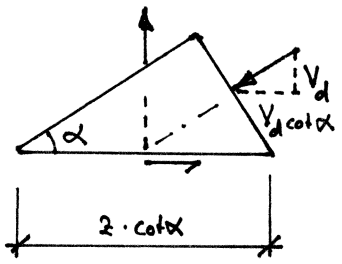


z = Abstand der resultierenden Zug- und Druckgurtkräfte
e = Exzentrizität der Schwerachse gegenüber mittlerer Steghöhe (z/2)
α = Neigung des diagonalen Druckfelds im Steg

Die Querkraft V_d ist einerseits begrenzt durch den Widerstand der Bügelbewehrung (Querschnittsfläche A_{sw}, Abstand s), andererseits durch den Widerstand des diagonalen Betondruckfelds im Steg. Zudem müssen die Zug- und Druckgurtkräfte aufgenommen werden können.

Widerstand der Bügelbewehrung:

$$V_{Rd,s} = A_{sw} f_{sd} \frac{z \cot\alpha}{s} \qquad (4.9)$$



Die Druckspannungen im Beton betragen

$$\frac{V_d / \sin\alpha}{b_w z \cos\alpha} = \frac{V_d}{b_w z} (\tan\alpha + \cot\alpha)$$

und sind auf $k_c f_{cd}$ zu begrenzen ($k_c = 0.6$, siehe SIA 262, 4.2.1.7), somit beträgt der Widerstand des Betondruckfelds

$$V_{Rd,c} = b_w z \, k_c f_{cd} \sin\alpha \cos\alpha \qquad (4.10)$$

Mit $f_{cd} \approx 0.9 f_{ctm}$ und $\alpha = 45°$ ergibt (4.10) eine obere Grenze für die mittleren Schubspannungen $\tau_d = V_d / (b_w z)$ gemäss (4.1) von $2.07 f_{ctm}$; mit der sehr flachen Neigung $\alpha = \arctan(1/2) = 26.6°$ ergibt sich eine analoge Grenze von $1.66 f_{ctm}$. In Kapitel 4.1.2 wurde eine obere Schubspannungsgrenze von etwa $2 f_{ctm}$ empfohlen. Wie man sieht, kann diese mit vertikalen Bügeln und $\alpha = 45°$ leicht überschritten werden und wird mit $\alpha = 37.5°$ gerade erreicht.

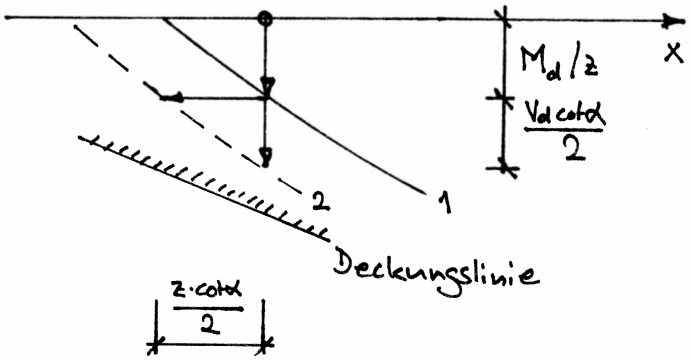
Mit geneigten Bügeln kann die obere Schubspannungsgrenze falls erforderlich wesentlich angehoben werden, siehe Kapitel 4.4.2. Allerdings ist die Erschwernis beim Verlegen geneigter Bügel zu berücksichtigen.

Wie die Figur unten auf S. 4.15 zeigt, verursacht V_d eine Längszugkraft $V_d \cot\alpha$, die je zur Hälfte vom Zug- bzw. Druckgurt aufgenommen werden muss. Für $N_d = 0$ kann ein ausreichender Zuggurtwiderstand nachgewiesen werden, indem man zeigt, dass die Zuggurtkraft-Deckungslinie von der

M_d/z-Linie horizontal um mindestens das Versatzmass

$$\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot\alpha \qquad (4.11)$$

entfernt ist:

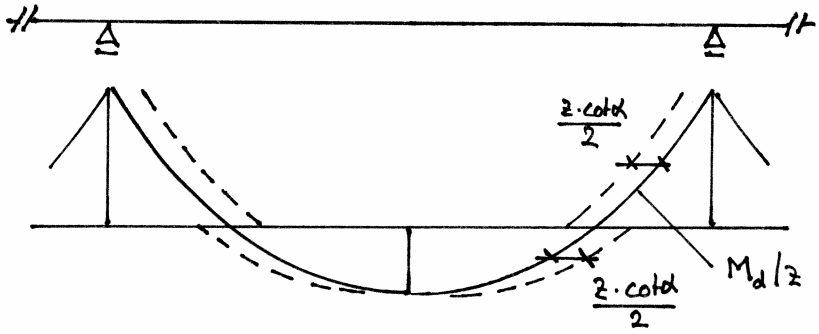


1: M_d/z-Linie

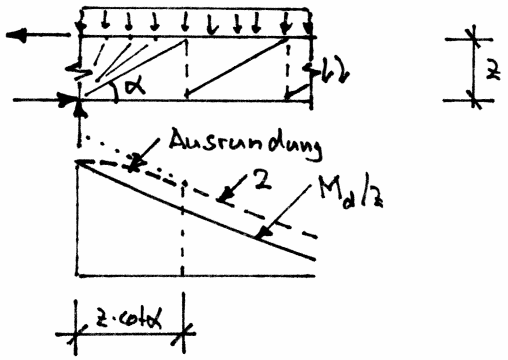
2: Verschobene M_d/z-Linie

Die Steigung der M_d/z-Linie beträgt $\frac{d}{dx}\left(\frac{M_d}{z}\right) = \frac{1}{z} \cdot \frac{dM_d}{dx} = \frac{V_d}{z}$. Somit erhält man die Linie 2 aus der Linie 1 nicht nur durch eine vertikale Verschiebung von $V_d \cot\alpha/2$ sondern auch durch eine horizontale Verschiebung von $(V_d \cot\alpha/2)/(V_d/z) = z \cot\alpha/2$.

Anwendung des Versatzmasses bei Durchlaufträgern:

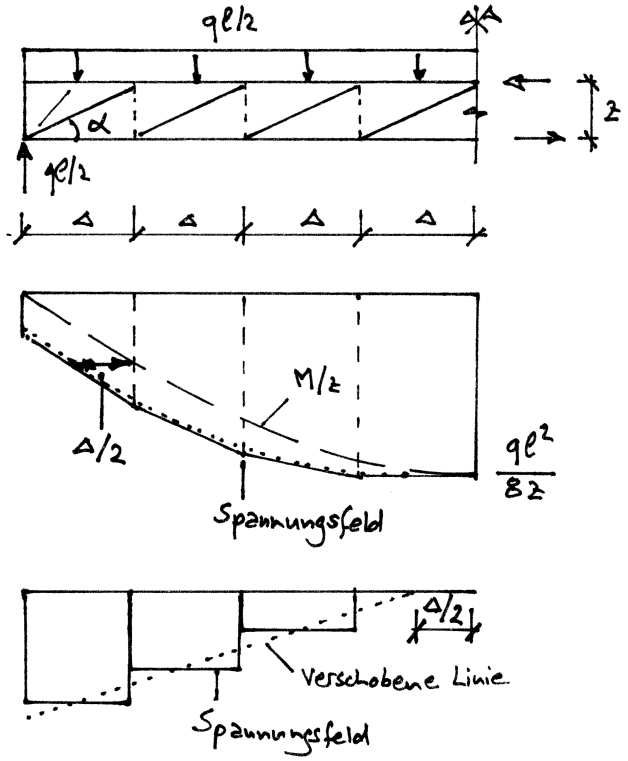


Über den Zwischenauflagern ergibt sich eine Ausrundung der verschobenen M_d/z-Linie:



Wegen des Fächers beim Zwischenauflager ist der Verlauf der verschobenen Linie 2 nur bis zum Abstand $z \cdot \cot\alpha$ vom Auflager gültig. Im Auflagerbereich ergibt sich eine parabolische Ausrundung.

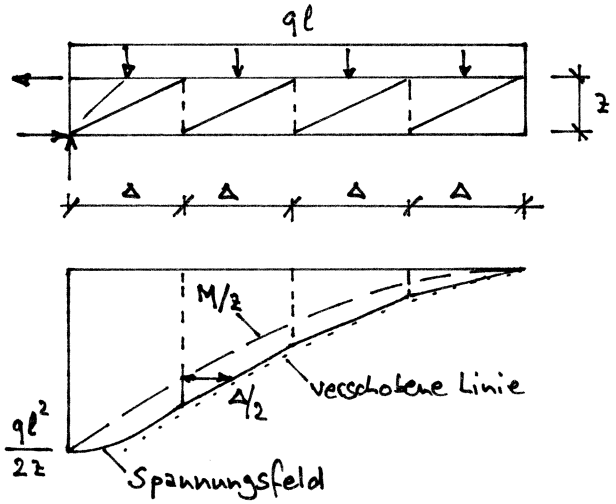
Vergleich mit Spannungsfeld – einfacher Balken:



Die verschobene M/z-Linie ist der polygonalen Zuggurtkraftlinie gemäss Spannungsfeld einbeschrieben. In den Mittelpunkten der einzelnen Abschnitte Δ berühren sich die beiden Linien, d.h. die polygonale Zuggurtkraftlinie ist dort zur verschobenen M/z-Linie tangential.

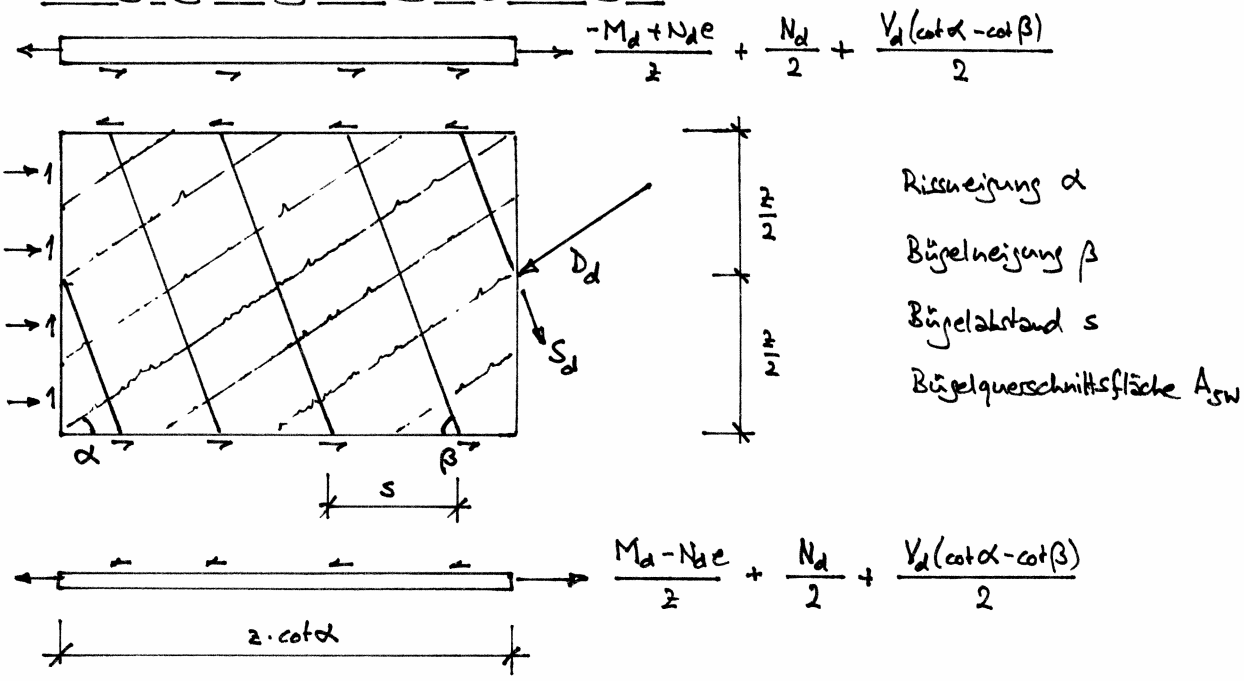
Mit der Querschnittsbetrachtung werden Bügelkräfte bestimmt, die im Mittel in einem Abstand $\Delta/2 = z \cot\alpha/2$ vom betrachteten Schnitt wirken.

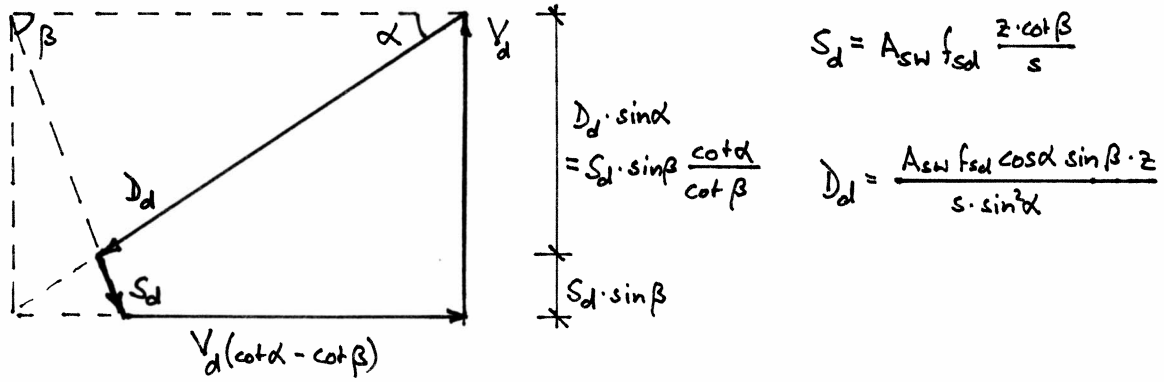
Vergleich mit Spannungsfeld – Kragarm:



Die verschobene M/z-Linie ist der polygonalen Zuggurtkraftlinie gemäss Spannungsfeld umschrieben. In den Mittelpunkten der einzelnen Abschnitte Δ ist das Polygon zur verschobenen Linie tangential.
Wegen des Endfächers ergibt sich bei der Einspannung gemäss Spannungsfeld eine parabolische Ausrundung der Zuggurtkraftkurve.

4.4.2 Parallelgurtige Träger mit geneigten Bügeln





Widerstand der Bügelbewehrung:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw} f_{sd} z}{s} (\cot\alpha + \cot\beta) \sin\beta \qquad (4.12)$$

Die Betondruckspannungen betragen $D_d / (b_w \cdot z \cos\alpha)$, somit Widerstand des Betondruckfelds:

$$V_{Rd,c} = b_w z k_c f_{cd} (\cot\alpha + \cot\beta) \sin^2\alpha \qquad (4.13)$$

Die beiden Gurte müssen die Längszugkraft

$$V_d (\cot\alpha - \cot\beta) \qquad (4.14)$$

infolge V_d je hälftig aufnehmen.

Setzt man voraus, dass die Gurtungen die ihnen zugewiesenen Kräfte aufnehmen können, resultiert durch Gleichsetzen der Widerstände (4.12) und (4.13)

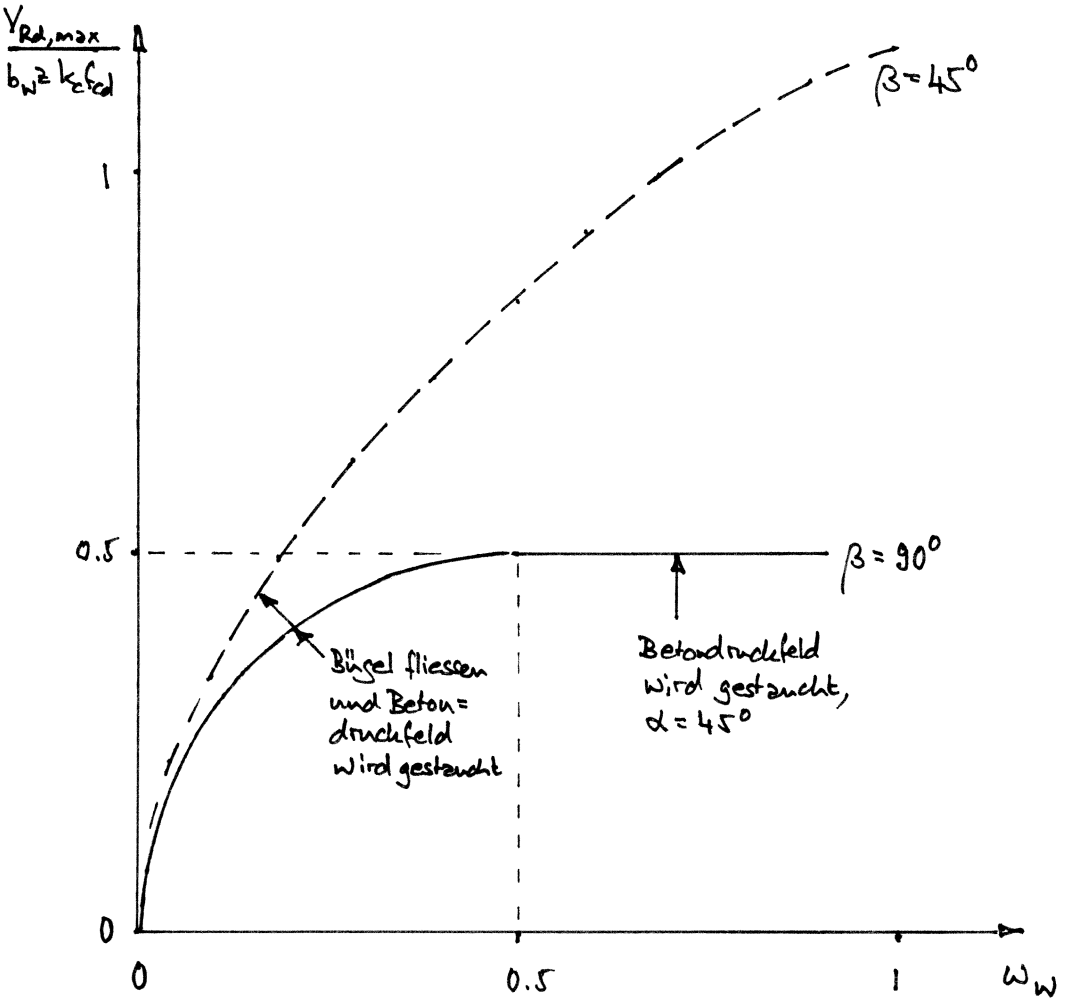
$$\sin^2\alpha = \frac{A_{sw} f_{sd}}{b_w \cdot s \cdot k_c f_{cd}} \cdot \sin\beta \qquad (4.15)$$

Rückeinsetzen in (4.13) bringt den maximal erreichbaren Widerstand

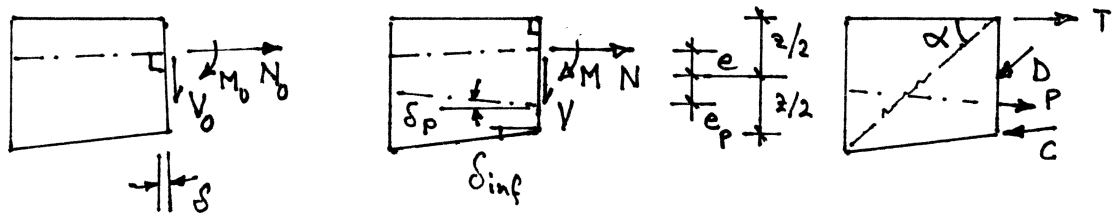
$$V_{Rd,max} = b_w z\, k_c f_{cd} \left[\sqrt{w_w \sin\beta (1 - w_w \sin\beta)} + w_w \cdot \cos\beta \right] \qquad (4.16)$$

wobei

$$w_w = \frac{A_{sw} f_{sd}}{b_w \cdot s \cdot k_c f_{cd}} \qquad (4.17)$$



4.4.3 Voutenträger



Annahme: zum Obergurt senkrechte Bügel, $\alpha = \text{const}$

δ ... Neigung der Stabachse zum Obergurt

δ_{inf} ... " des Untergurts " "

δ_p ... " der Resultierenden P der Stegspannglieder zum Obergurt

α ... " des Betondruckfelds im Steg zum Obergurt

N_0, V_0, M_0 ... Auf Stabachse bezogene Schnittgrössen

N, V, M ... Auf um δ gedrehtes Koordinatensystem bezogene Schnittgrössen

C, T ... Gurtkräfte

D ... Resultierende der Druckfeldspannungen

P ... Resultierende der Stegspanngliedkräfte

z ... Gurtabstand (senkrecht zum Obergurt gemessen)

e, e_p ... Exzentrizität von N bzw. P bezüglich $z/2$

Gleichgewicht:

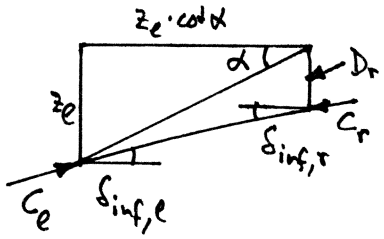
$$\begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_0 \\ V_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos\alpha & \cos\delta_p & -\cos\delta_{inf} \\ 0 & \sin\alpha & \sin\delta_p & \sin\delta_{inf} \\ \frac{z}{2}-e & e\cos\alpha & -(e+e_p)\cos\delta_p & \left(\frac{z}{2}+e\right)\cos\delta_{inf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ D \\ P \\ C \end{Bmatrix} \qquad (4.18)$$

Daraus folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} D &= \frac{2(V - P\sin\delta_p) - \tan\delta_{inf}\left[2\frac{M}{z} - N\left(1-\frac{2e}{z}\right) + P\cos\delta_p\left(1+\frac{2e_p}{z}\right)\right]}{(1+k)\sin\alpha} \\ T &= \frac{2k\frac{M}{z} + N\left(1+\frac{2ke}{z}\right) + (V - P\sin\delta_p)\cot\alpha - P\cos\delta_p\left(1-\frac{2ke_p}{z}\right)}{1+k} \\ C &= \frac{2\frac{M}{z} - N\left(1-\frac{2e}{z}\right) - (V - P\sin\delta_p)\cot\alpha + P\cos\delta_p\left(1+\frac{2e_p}{z}\right)}{(1+k)\cos\delta_{inf}} \end{aligned} \right\} \qquad (4.19)$$

mit

$$k = 1 - \tan\delta_{inf} \cdot \cot\alpha \tag{4.20}$$



Erforderlicher Bügelwiderstand:

$$\frac{A_{sw} \cdot z_e \cdot \cot\alpha \cdot f_s}{s} = D_r \cdot \sin\alpha + C_r \sin\delta_{inf,r} - C_e \sin\delta_{inf,e} \tag{4.21}$$

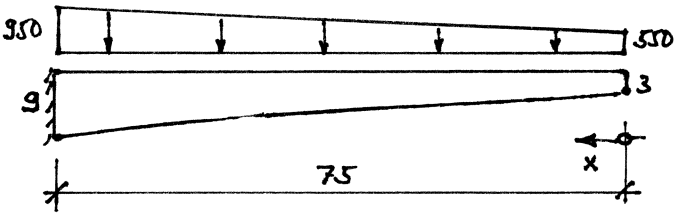
Betondruckspannungen im Steg

$$\frac{D}{b_w z \cos\alpha} \leq k_c f_c \tag{4.22}$$

N.B.- In den obigen Bezeichnungen wurde überall der Index d (Bemessungsniveau) unterdrückt.

- In der Regel rechnet man mit $P = P_\infty$ = Vorspannkraft nach Abzug aller Verluste.
- Zwängungen aus Vorspannung sind in N_0, V_0, M_0 einzubeziehen.
- Praktische Rechnung am besten mit Tabellenkalkulation.

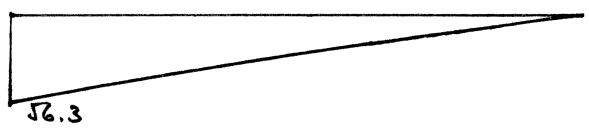
BEISPIEL 4.2



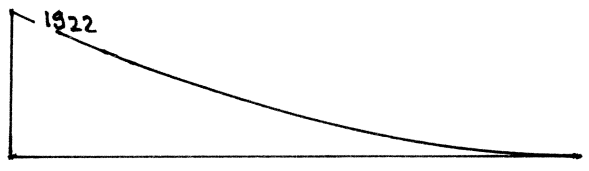
Kragarm im Freivorbau, $N = P = 0$

$z = 3 + 6 \cdot \left(\frac{x}{75}\right)^{1.5}$, $\tan\alpha = 0.6$

$b_w = 2 \cdot 0.4\,m$ $\qquad f_{cd} = 435\,N/mm^2$



$$q_d = 550\,\frac{kN}{m} + \frac{x}{75m} \cdot 400\,\frac{kN}{m}$$

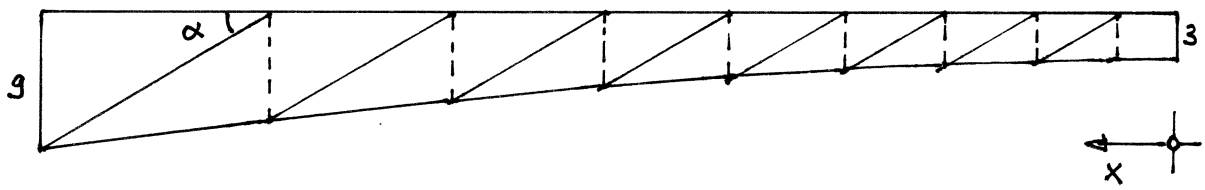


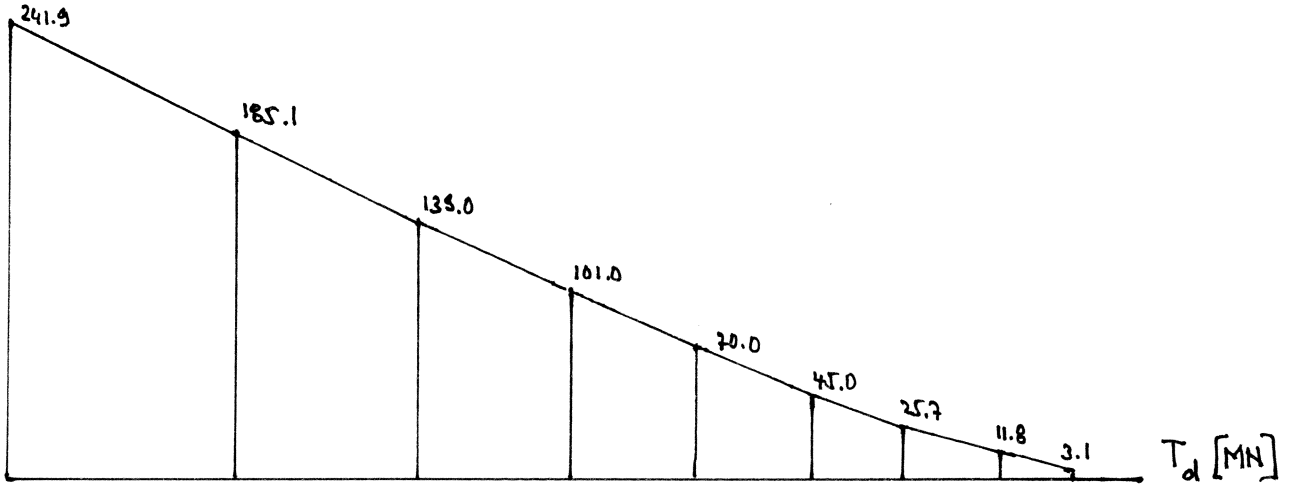
$$V_d = 0.55\,x + \frac{x^2}{375}$$

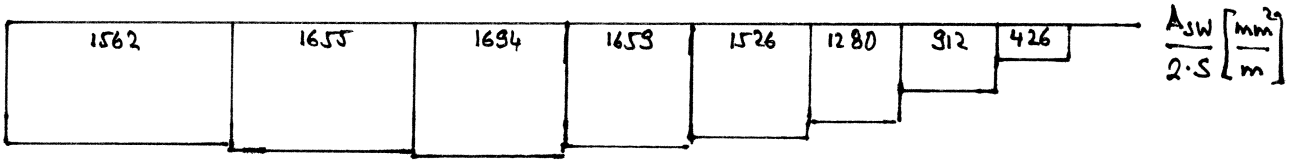
$$M_d = 0.275\,x^2 + \frac{x^3}{1125}$$

x	75	60	47.845	37.250	29.179	21.752	15.190	9.279	3.844	m
z	9	7.293	6.057	5.143	4.456	3.937	3.547	3.261	3.070	m
$\tan\delta_{inf}$	0.1200	0.1073	0.0958	0.0851	0.0748	0.0646	0.0540	0.0422	0.0272	-
k	0.8000	0.8212	0.8403	0.8582	0.8753	0.8923	0.9100	0.9257	0.9547	-
V_d	56.25	42.60	32.42	24.56	18.32	13.23	8.97	5.33	2.15	MN
M_d	1921.9	1182.0	726.9	439.7	256.2	139.3	66.6	24.4	4.1	MNm
D_d	66.14	53.81	44.20	36.16	29.06	22.48	16.19	10.10	4.20	MN
T_d	241.9	185.1	139.0	101.0	70.0	45.0	25.7	11.8	3.1	MN
C_d	186.5	139.8	101.5	70.2	45.2	25.8	11.9	3.2	-0.5	MN
$\frac{D_d}{b_w z \cot\alpha}$	10.7	10.8	10.6	10.2	9.5	8.3	6.7	4.5	2.0	N/mm^2
$\frac{A_{sw}}{s}\cdot\frac{1}{2}$ *	1562	1655	1694	1659	1526	1280	912	426	-	mm^2/m

* erforderliche Bügelbewehrung pro Steg, Zahlen gelten jeweils bis zu nächst kleinerem x, d.h. $A_{sw}/s = 1562\ mm^2/m$ für $75m \geq x \geq 60\ m$, etc.





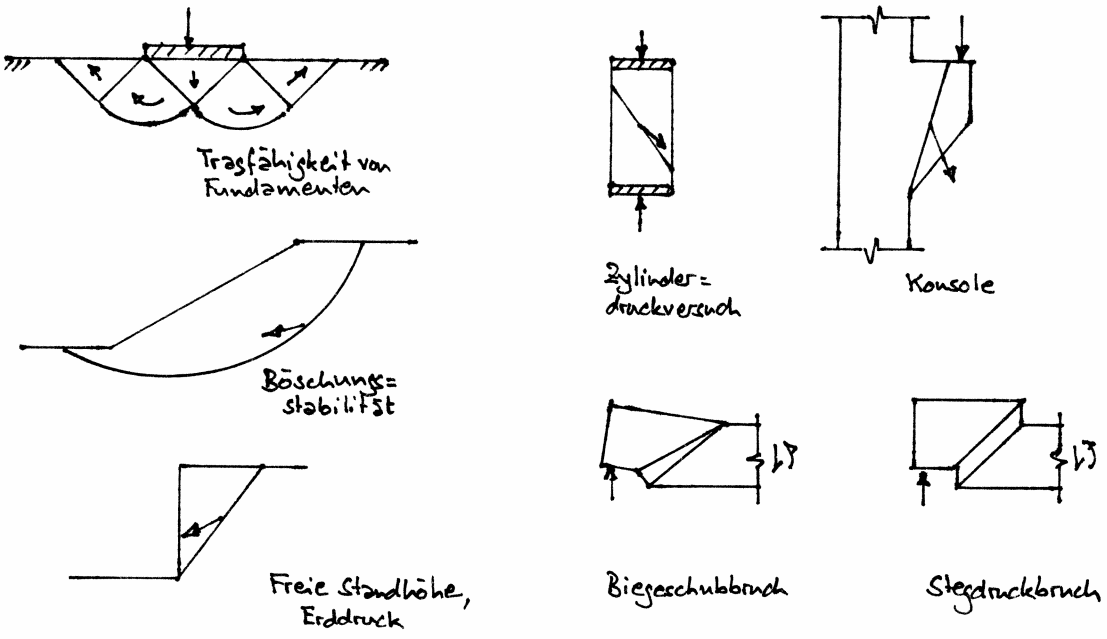


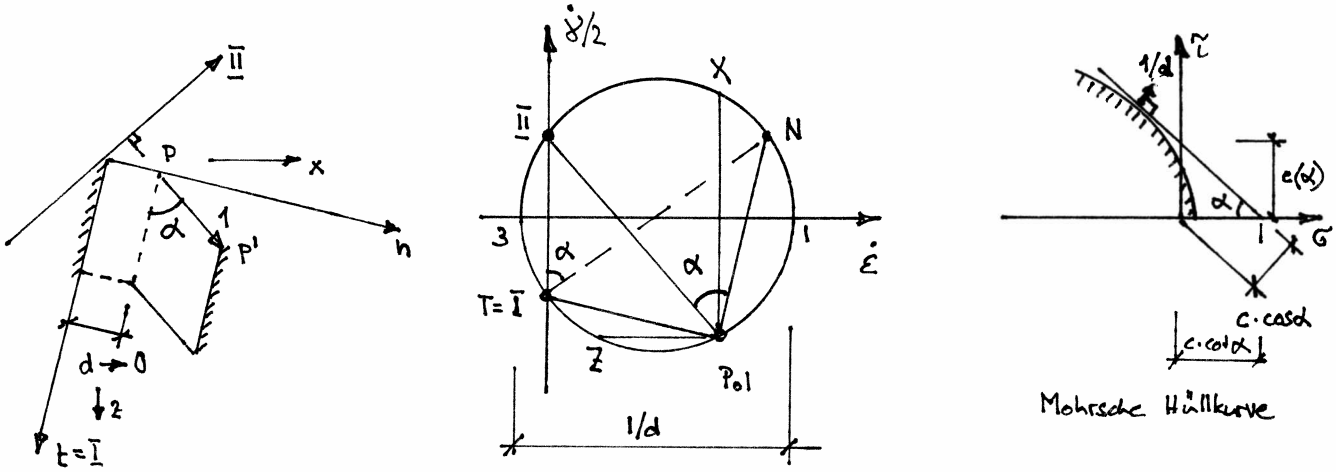
Zwischen $x = 75m$ und $x = 30m$ variiert T_d annähernd linear, und $A_{sw}/(2s)$ bleibt annähernd konstant → konstante Bügelbewehrung und Abstufung der Längsbewehrung.

4.5 Bruchmechanismen

4.5.1 Gleitlinien

Ähnlich wie bei boden- und felsmechanischen Problemstellungen ergeben sich im Betonbau oft diskrete Bruchflächen:





Gleitlinie I, Schichtdicke $d \to 0$

Relativverschiebung 1 orthogonal zu II

Verschiebungsinkremente in n- und t-Richtung

$$\dot{u}_n = \sin\alpha \cdot \frac{n}{d} \quad , \quad \dot{u}_t = \cos\alpha \cdot \frac{n}{d} \tag{4.23}$$

Somit Verzerrungsinkremente (Komponenten des Vektors mit Betrag 1/d orthogonal zu Hüllkurve):

$$\dot{\varepsilon}_n = \sin\alpha \cdot \frac{1}{d} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_t = 0 \quad , \quad \dot{\gamma}_{nt} = \cos\alpha \cdot \frac{1}{d} \tag{4.24}$$

Hauptwerte

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1+\sin\alpha}{2d} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_3 = \frac{-1+\sin\alpha}{2d} \tag{4.25}$$

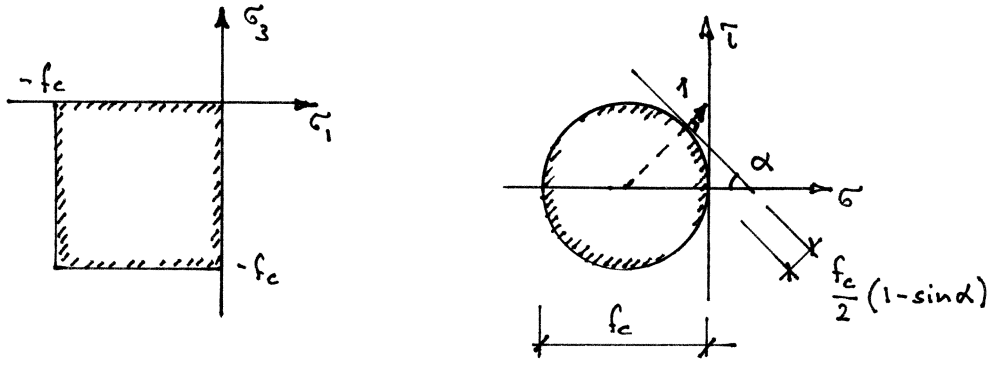
Die Hauptrichtungen 1 und 3 halbieren die Winkel zwischen den Gleitlinien I und II.

Dissipation pro Einheitsfläche

$$\dot{D} = d \cdot c \cdot \cot\alpha \cdot (\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3) = c \cdot \cos\alpha \tag{4.26}$$

4.5.2 Anwendung auf Stahlbeton — ebener Spannungszustand

a) Quadratische Fliessbedingung



Nimmt man an, dass für beliebige Richtungen n im ebenen Spannungszustand ($\sigma_2 = 0$) Druckspannungen bis zum Betrag f_c (effektive Betondruckfestigkeit), jedoch keine Zugspannungen aufgenommen werden können,

$$0 \geqslant \sigma_{cn} \geqslant -f_c \tag{4.27}$$

resultiert die oben dargestellte quadratische Fliessbedingung. In der Spannungsebene σ, τ entspricht dieser Bedingung der Kreis mit Durchmesser f_c, der zur τ-Achse tangential ist. Interpretiert man diesen Kreis im Sinn von Kapitel 4.5.1 als Mohrsche Hüllkurve, erhält man gemäss (4.26) die spezifische Dissipationsarbeit im Beton

$$\dot{D}_c = \frac{f_c}{2}(1-\sin\alpha) \tag{4.28}$$

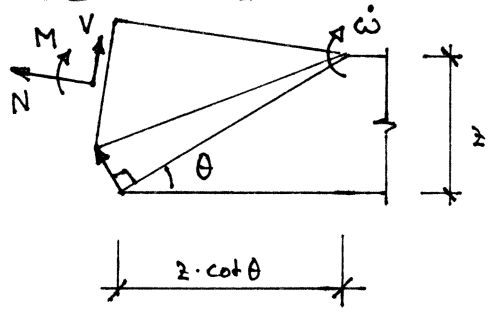
bei einem Sprung von 1 unter dem Winkel α an einer angenommenen Gleitlinie.

Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ... Kollapsriss (senkrechte Rissöffnung) ... $\dot{D} = 0$

Spezialfall $\alpha = 0$ ... Reine Gleitung ($\dot{\varepsilon}_n = 0$) ... $\dot{D} = f_c/2$

Spezialfall $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ... Reine Stauchung ... $\dot{D} = f_c$

b) Biegeschubbruch



Rotationsinkrement $\dot{w}$

Kollapsriss unter Neigung θ

$\alpha = \pi/2$, Gleitlinie $\underline{\Pi} = -\underline{I}$, $\dot{D}_c = 0$

Längsbewehrungsquerschnittsfläche A_{sl}

Bügelbewehrung A_{sw}, Abstand s

Arbeit der Schnittgrössen $\dot{W} = \left(M + N \cdot \frac{z}{2} + V \cdot z \cot\theta\right) \dot{w}$

Dissipationsarbeit $\dot{D} = \dot{D}_s = \left[A_{sl} \cdot f_s \cdot z + A_{sw} f_s \cdot \frac{(z \cot\theta)^2}{2s}\right] \cdot \dot{w}$

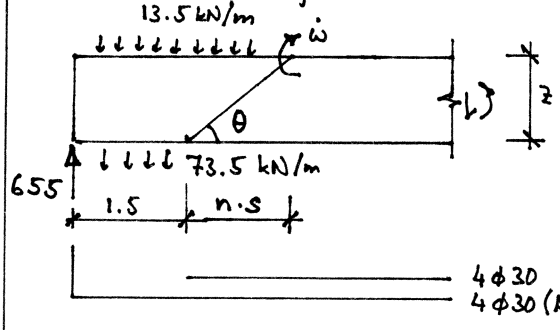
Gleichsetzen von $\dot{W}$ und $\dot{D}$ sowie Ableiten des für M resultierenden Ausdruckes nach $\cot\theta$ bringt durch Nullsetzen der Ableitung

$$\cot\theta = \frac{V \cdot s}{A_{sw} f_s z} \quad , \quad \frac{M}{z} + \frac{N}{2} + \frac{V \cot\theta}{2} = A_{sl} f_s \qquad (4.29)$$

$(4.29)_1$ entspricht bis auf die Bezeichnung (θ statt α) der Beziehung (4.9), und $(4.29)_2$ beschreibt die im einführenden Bild in Kapitel 4.4.1 eingetragene Untergurtkraft. Zusammen mit dem dort beschriebenen Spannungszustand konstituiert der hier dargestellte Biegeschubbruch-Mechanismus eine vollständige Lösung im Sinn der Plastizitätstheorie. (N.B. Exzentrizität von N: $e = 0$, siehe Kapitel 4.4.1).

BEISPIEL 4.3

Überprüfe die Zulässigkeit der Abstufung der Längsbewehrung 1.5 m neben dem Endauflager des im Kolloquium 4 behandelten Trägers (Bügel $\phi 10$, $s = 200$; $A_{sl} = 2827\ mm^2$)



Annahmen:
- Nutzlast + Steglast unten angehängt
  Plattenlast $(g_d/2)$ oben aufgebracht
- $z = 1.11$ m
- $z \cdot \cot\theta = n \cdot s$, erster und letzter Bügel nicht fliessend

$$\dot{W} = \left[655\,(1.5 + n \cdot s) - 87 \cdot 1.5 \cdot (0.75 + n \cdot s) - 13.5 \cdot (n \cdot s)^2/2\right] \dot{w}$$

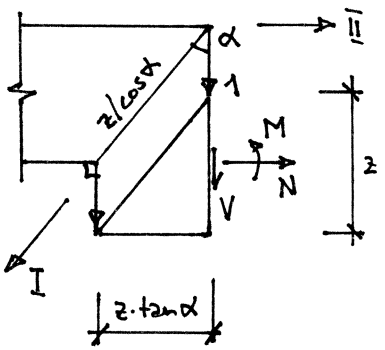
$$\dot{D} = \left[2827 \cdot 435 \cdot 1.11 + (n-1) \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot 435 \cdot ns/2\right] \dot{w}$$

Die Abstufung ist zulässig, sofern $\dot{W} \leq \dot{D}$ für alle n, siehe Tabelle nächste Seite.

n [-]	6	7	8	9	10	
$\dot{D}/\dot{w}$ [kNm]	1570.2	1652.2	1747.8	1857.2	1980.2	$1367.2 + n(n-1)\cdot 6.833$
$\dot{W}/\dot{w}$ [kNm]	1504.3	1605.7	1706.5	1806.8	1906.6	$884.6 + 104.9\,n - 0.27\,n^2$
$\dot{D}/\dot{W}$ [-]	1.044	1.029	1.024	1.028	1.039	

Wie man sieht, ist $\dot{D} > \dot{W}$ für alle n, minimaler Wert $\dot{D}/\dot{W} = 1.024$ für $n = 8$. Die Abstufung ist knapp, aber noch zulässig.

c) Stegdruckbruch



Gleitlinie $\underline{II} = x$, keine Dissipation in Längsbewehrung

$$\dot{W} = V \cdot 1$$

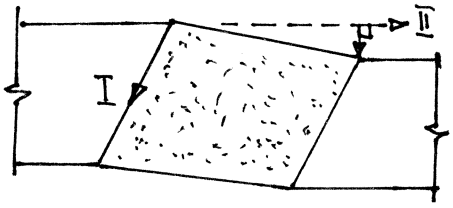
$$\dot{D} = \frac{z}{\cos\alpha} \cdot b_w \cdot \frac{f_c}{2}(1-\sin\alpha) + A_{sw} f_s \cdot \frac{z \cdot \tan\alpha}{s}$$

Gleichsetzen von $\dot{W}$ und $\dot{D}$ sowie Ableiten des für V resultierenden Ausdrucks nach α und Nullsetzen bringt

$$V = b_w z f_c \sqrt{\omega_w(1-\omega_w)}\,, \qquad \omega_w = \frac{A_{sw} f_s}{b_w s f_c} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad (4.30)$$

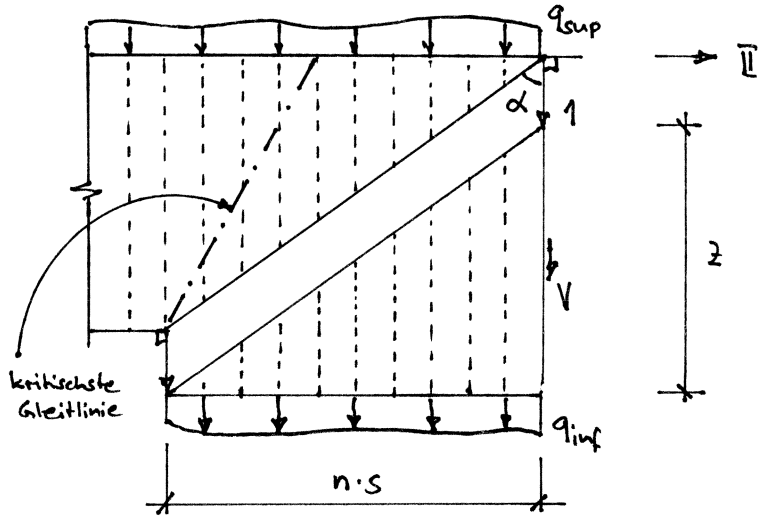
$(4.30)_1$ entspricht (4.16) mit $\beta = \pi/2$, und $(4.30)_2$ entspricht (4.17). Die Bügel fliessen, und der diagonal gedrückte Beton wird gestaucht, während die Längsbewehrung elastisch (starr) bleibt. Zugehöriger Neigungswinkel des diagonalen Betondruckfelds = $\pi/4 - \alpha/2$, vgl. (4.15) ... Achtung Bezeichnung α dort entspricht $\pi/4 - \alpha/2$ hier !

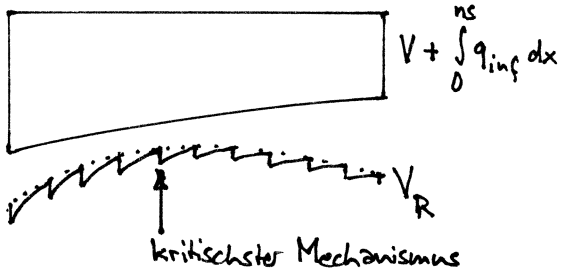
In Versuchen beobachtet man oft Betonversagen in einer ganzen Zone entsprechend vielen nebeneinander liegenden Gleitlinien:



Wiederum kommen die die Gleitlinien kreuzenden Bügel ins Fliessen, während die Längsbewehrung starr bleibt.

Für die praktische Anwendung z.B. bei der Überprüfung bestehender Konstruktionen betrachtet man am besten diskrete Gleitlinien zwischen Bügelenden, derart, dass der erste und letzte Bügel nicht aktiviert werden, vgl. Beispiel 4.3:





Durch Variation von n findet man die kritischste Gleitlinie mit dem kleinsten Verhältnis $V_R / (V + \int_0^{ns} q_{inf}\,dx)$

Nachweis

$$V + \int_0^{ns} q_{inf}\,dx \leq V_R = (n-1) A_{sw} f_s + \frac{f_c b_w}{2}\left(\sqrt{n^2 s^2 + z^2} - ns\right) \qquad (4.31)$$

$$\frac{dV_R}{dn} = 0: \quad A_{sw} f_s + (f_c b_w / 2)\cdot(s\cdot\sin\alpha - s) = 0, \text{ somit}$$

$$\sin\alpha = 1 - \frac{2 A_{sw} f_s}{f_c b_w s} = 1 - 2\omega_w$$

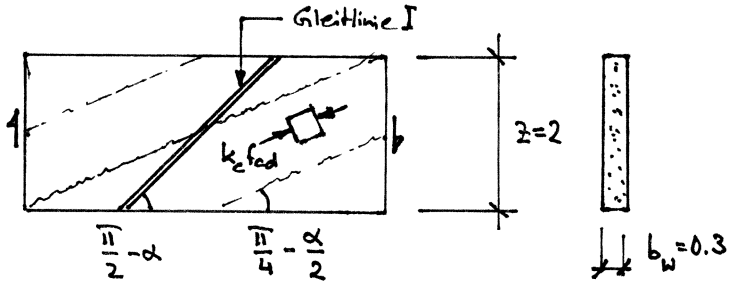
und damit gelangt man zurück zu (4.30).

BEISPIEL 4.4

Ein 300 mm dicker Steg aus Beton C 30/37 ist mit vertikalen Bügeln ϕ 14 mm @ 250 mm bewehrt (Betonstahl B500B). Der Abstand der Gurtkräfte beträgt $z = 2$ m. Ermittle den Querkraftwiderstand unter der Annahme, dass die Längsbewehrung elastisch bleibt.

$(4.30)_2$: $\omega_w = \dfrac{7^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 435}{300 \cdot 250 \cdot 0.6 \cdot 20} = \underline{0.149}$, $\alpha = 44.6^\circ$, $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2} = \underline{22.7^\circ}$

$(4.30)_1$: $V_R = 300 \cdot 2000 \cdot 0.6 \cdot 20 \cdot \sqrt{0.149\,(1 - 0.149)} = \underline{2562 \text{ kN}}$

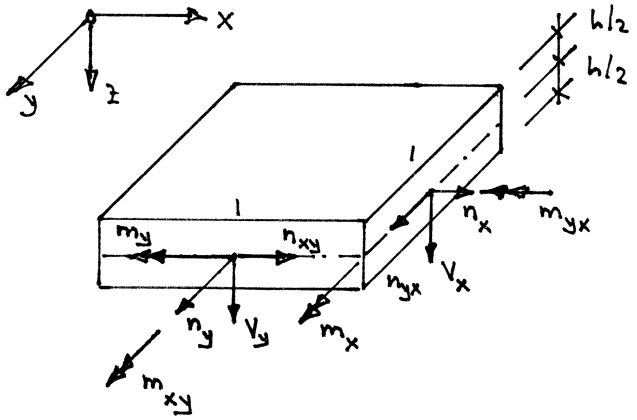


$k_c = 0.6$, $f_{cd} = 20 \text{ N/mm}^2$

Rechnung mit (4.31): $V_{R,min} = \underline{2429 \text{ kN}}$ mit $n = 8$. Im Vergleich zum oben ermittelten Wert von 2562 kN für gleichmässig verteilte Bügel ergibt sich durch Berücksichtigung des endlichen Bügelabstands eine Abminderung von 5.2 %.

4.6 Querkraft in Platten

4.6.1 Hauptquerkraft



Spannungsresultierende am Plattenelement

Membrankräfte [kN/m]

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz \tag{4.32}$$

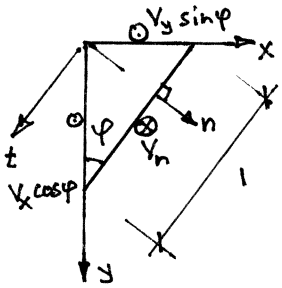
Querkräfte [kN/m]

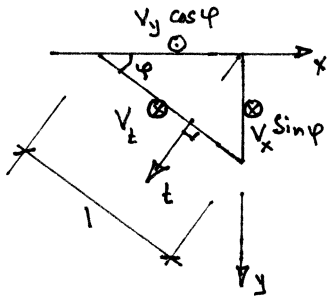
$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} \, dz, \quad v_y = \int_{h/2}^{h/2} \tau_{zy} \, dz \tag{4.33}$$

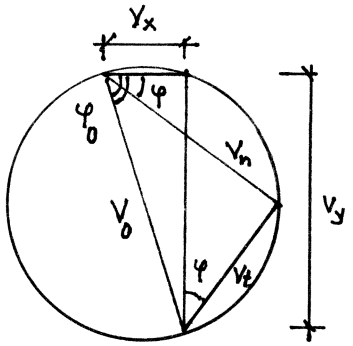
Biege- und Drillmomente [kNm/m]

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz \tag{4.34}$$

Koordinatentransformation:







$$v_n = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi \qquad v_t = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$$

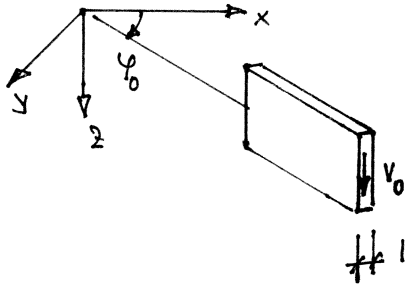
Somit

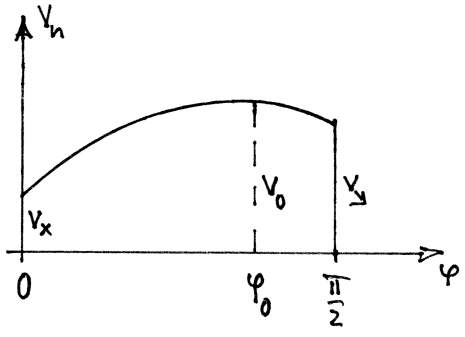
$$v_n^2 + v_t^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \tag{4.35}$$

Nullsetzen der Ableitung von v_n nach φ bringt $dv_n/d\varphi = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi = 0$, d.h.

$$\tan\varphi_0 = \frac{v_y}{v_x} \tag{4.36}$$

Fazit: In jedem Punkt x,y einer Platte wird eine <u>Hauptquerkraft</u> $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ in der <u>Hauptrichtung</u> $\varphi_0 = \arctan(v_y/v_x)$ übertragen.



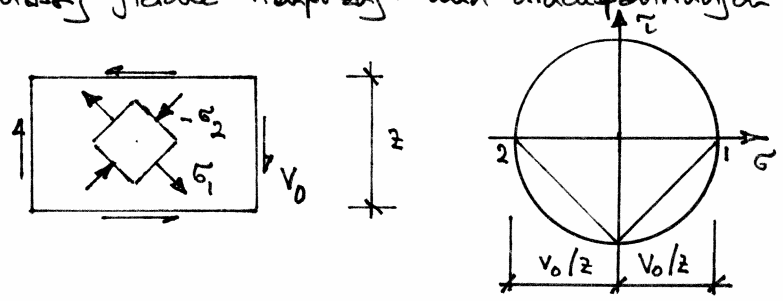


N.B. Für $\varphi_0 = \pi/4$ ist $v_0 = \sqrt{2}\, v_x = \sqrt{2}\, v_y$!

4.6.2 Sandwichmodell

a) Platten ohne Querkraftbewehrung

Für kleine Querkräfte und dünne Platten kann auf eine Querkraftbewehrung verzichtet werden. Dabei stützt man sich auf die Modellvorstellung, dass V_0 im Platteninnern über einen Zustand reinen Schubes, d.h. betragsmässig gleiche Hauptzug- und -druckspannungen aufgenommen wird:



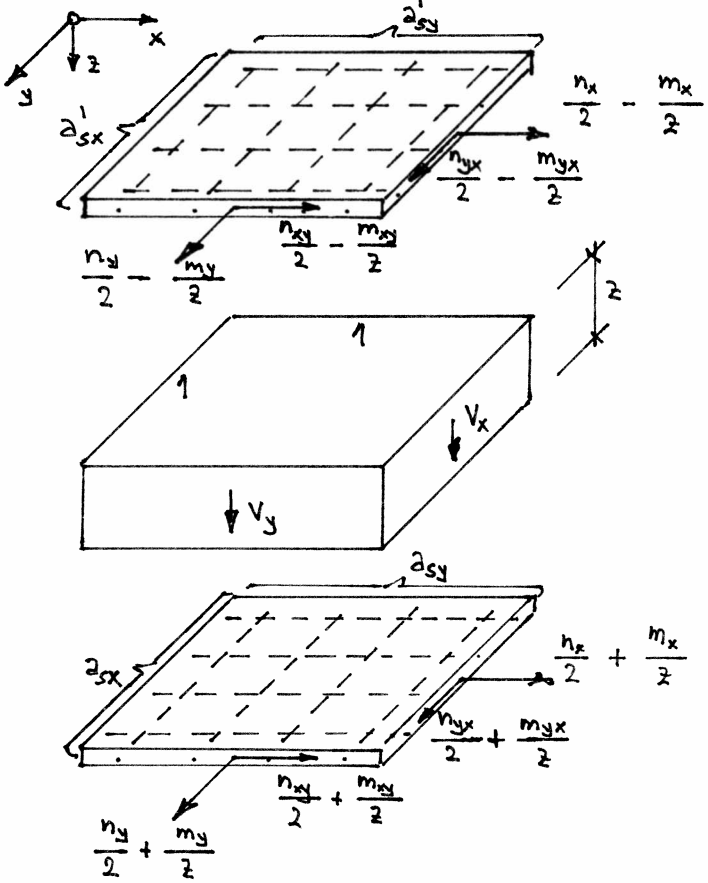
Es sind keine Bügel erforderlich, und die Biegebewehrung muss nicht verstärkt werden.

Als Grenzen für diese Tragwirkung kann man etwa

$$\frac{V_{0d}}{z} \leq f_{ctd} = 0.07\, f_{ck}^{2/3}, \qquad h \leq 400 \text{ mm} \tag{4.37}$$

setzen.

b) Platten mit Querkraftbewehrung



Die Querkräfte werden dem Kern des Sandwichs zugewiesen, Membrankräfte sowie Biege- und Drillmomente den Sandwichdeckeln.

Orthogonale Bewehrung mit Querschnittsflächen pro Längeneinheit

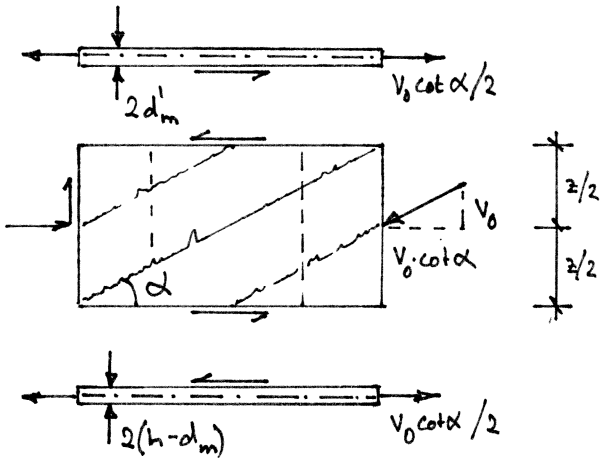
a'_{sx}, a'_{sy} ... oben $[mm^2/m]$

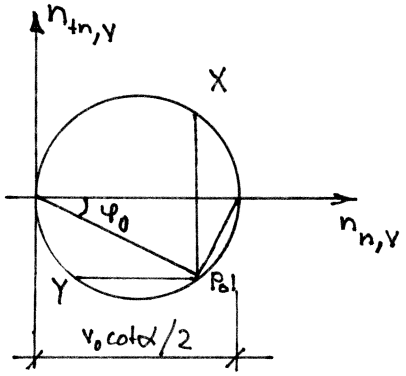
a_{sx}, a_{sy} ... unten $[mm^2/m]$

Bügel in z-Richtung

... Bügelbewehrungsgehalt ρ_z [%]

Im Sandwichkern wird ein unter dem Winkel α geneigtes Druckspannungsfeld zur Abtragung von v_0 angenommen. Die daraus resultierenden Zugkräfte $v_0 \cot\alpha/2$ in Richtung φ_0 entsprechen zusätzlichen Membrankräften in den Sandwichdeckeln.





Erforderliche Bügelbewehrung in z-Richtung:

$$\rho_z \cdot f_{sd} = \frac{V_{0d}}{z} \cdot \tan\alpha \qquad (4.38)$$

Membrankräfte in Sandwichdeckeln infolge v_0:

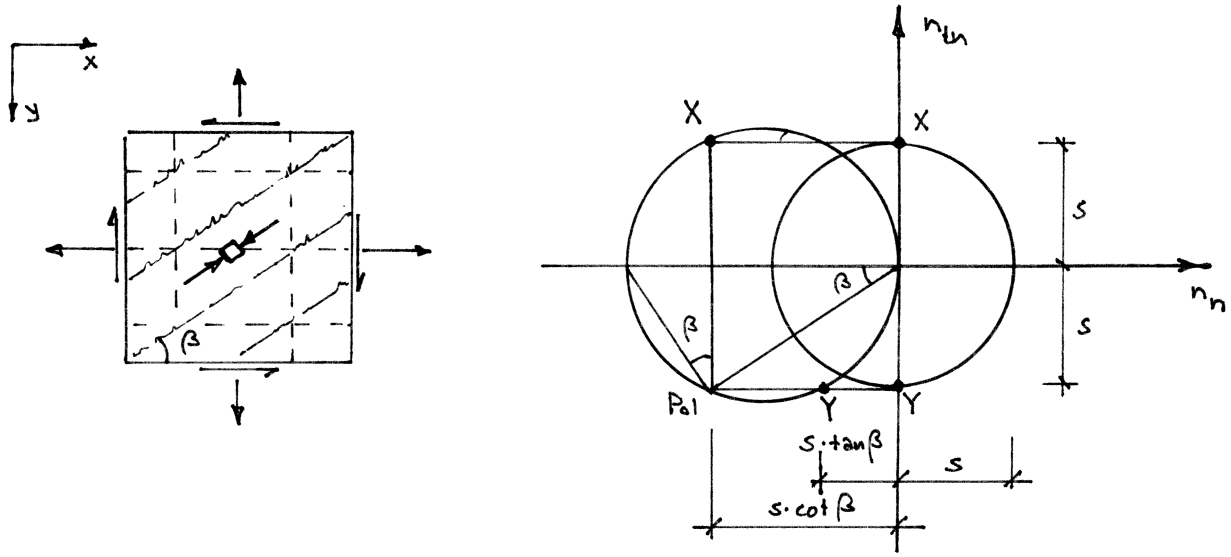
$$n_{x,V} = \frac{V_0}{2} \cdot \cot\alpha \cdot \cos^2\varphi_0 = \frac{V_x^2 \cot\alpha}{2V_0}, \quad n_{y,V} = \frac{V_0}{2} \cdot \cot\alpha \cdot \sin^2\varphi_0 = \frac{V_y^2 \cdot \cot\alpha}{2V_0}, \quad n_{xy,V} = \frac{V_0}{2} \cdot \cot\alpha \cdot \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 = \frac{V_x V_y \cot\alpha}{2V_0} \qquad (4.39)$$

In diesen Beziehungen wurden (4.35) und (4.36) berücksichtigt, $\sin\varphi_0 = v_y/v_0$ und $\cos\varphi_0 = v_x/v_0$.

Die Kräfte in den Sandwichdeckeln werden durch die Bewehrung und diagonale Betondruckspannungsfelder aufgenommen (Neigung β bzw. β' zur x-Achse). Dabei werden die Membranschubkräfte

$$s = \frac{n_{xy}}{2} \pm \frac{m_{xy}}{z} + \frac{V_x V_y \cot\alpha}{2V_0} \qquad (4.40)$$

dem Betondruckspannungsfeld zugewiesen. Die Bewehrungen müssen die Zugkräfte $n_x/2 + m_x/z + V_x^2 \cot\alpha/(2V_0)$ etc. aufnehmen und werden infolge s zusätzlich durch $s \cdot \cot\beta$ etc. beansprucht:



Mit $k = \cot\beta$ und $k' = \cot\beta'$ erhält man die erforderlichen Widerstände der Bewehrungen in x- und y-Richtung (Index d wegen Übersichtlichkeit weggelassen):

$$a_{sx}\cdot f_{sd} = \frac{n_x}{2} + \frac{m_x}{z} + \frac{v_x^2\cot\alpha}{2v_0} + k\cdot\left|\frac{n_{xy}}{2} + \frac{m_{xy}}{z} + \frac{v_x v_y\cot\alpha}{2v_0}\right|$$

$$a_{sy}\cdot f_{sd} = \frac{n_y}{2} + \frac{m_y}{z} + \frac{v_y^2\cot\alpha}{2v_0} + \frac{1}{k}\cdot\left|\frac{n_{xy}}{2} + \frac{m_{xy}}{z} + \frac{v_x v_y\cot\alpha}{2v_0}\right| \qquad (4.41)$$

$$a'_{sx}\cdot f_{sd} = \frac{n_x}{2} - \frac{m_x}{z} + \frac{v_x^2\cot\alpha}{2v_0} + k'\cdot\left|\frac{n_{xy}}{2} - \frac{m_{xy}}{z} + \frac{v_x v_y\cot\alpha}{2v_0}\right|$$

$$a'_{sy}\cdot f_{sd} = \frac{n_y}{2} - \frac{m_y}{z} + \frac{v_y^2\cot\alpha}{2v_0} + \frac{1}{k'}\cdot\left|\frac{n_{xy}}{2} - \frac{m_{xy}}{z} + \frac{v_x v_y\cot\alpha}{2v_0}\right|$$

(4.41) und (4.38) ermöglichen die Dimensionierung der Bewehrung für gegebene Spannungsresultierende. Frei ist man dabei in der Wahl von α, β und β'. Empfehlung: $0.5 \le \tan\alpha \le 1$, $0.5 \le \tan\beta \le 2$, $0.5 \le \tan\beta' \le 2$.

Für z sollte die Differenz der mittleren statischen Höhen gewählt werden:

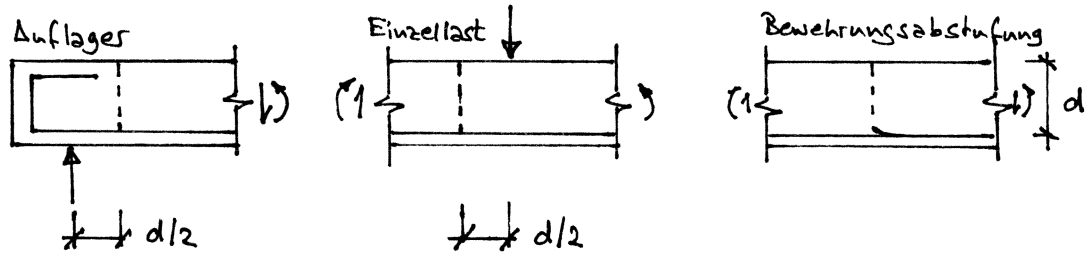
$$z = d_m - d'_m \qquad (4.42)$$

Kontrolle der Betondruckspannungen in den Sandwichdeckeln ($k_c = 0.6$):

$$|s|\cdot(\tan\beta + \cot\beta) \le 2(h - d_m)\cdot k_c f_{cd}$$
$$|s|\cdot(\tan\beta' + \cot\beta') \le 2 d'_m \cdot k_c f_{cd} \qquad (4.43)$$

4.6.3 SIA 262 (Ziffer 4.3.3.2)

Nachweisschnitte:



Querkraftwiderstand

$$V_{Rd} = k_d \tau_{cd} d \;,\quad k_d = \frac{1}{1 + k_v d} \;,\quad \tau_{cd} = 0.2\sqrt{f_{ck}} \qquad (4.44)$$

d in m, τ_{cd} und f_{ck} in N/mm^2.

Der Beiwert k_v ist in Abhängigkeit von den zu erwartenden Verformungen festzulegen. Bei elastisch bleibender Biegebewehrung

$$k_v = 2.2 \frac{m_d}{m_{Rd}} \qquad (4.45)$$

und $k_v = 3$, wenn plastische Verformungen der Biegebewehrung nicht ausgeschlossen werden können.

Modifikationsfaktoren für k_v (kumulativ):

- abgestufte Bewehrung im Bereich $\leq d$ vom Nachweisschnitt: $k_v \cdot 1.5$
- $f_{sd} > 435\ N/mm^2$: $k_v \cdot f_{sd}/435$
- $D_{max} < 32$ mm: $k_v \cdot 48/(D_{max}+16)$ ... Leichtbeton: $k_v \cdot 3$
- Hauptquerkraftrichtung φ_0 deutlich $\neq 0$: $k_v / (\sin^4\varphi_0 + \cos^4\varphi_0)$, d.h. z.B. für $\varphi_0 = 45° \rightarrow k_v \cdot 2$.

Bemerkung: Oft ergeben sich nach (4.44) sehr kleine V_{Rd}. Oft wird dann versucht, V_{Rd} durch Erhöhen von m_{Rd} zu steigern, vgl. (4.45). Dies ist meist unzweckmässig: einerseits wird das Tragverhalten spröder (geringere Rotationsfähigkeit) und andererseits sinkt die Wirtschaftlichkeit. In solchen Fällen ist es i.a. besser, eine Querkraftbewehrung vorzusehen.

4.6.4 Konstruktive Durchbildung der Querkraftbewehrung

Mögliche Formen:

geschlossene Bügel

Bügel mit Endhaken, evtl. zu Körben verbunden

Stäbe mit aufgestauchten oder aufgeschweissten Köpfen, evtl. auf Flachstahl aufgeschweisst → Dübelleisten

aufgebogene Längsbewehrungsstäbe

Grundsätzlich sollte die Querkraftbewehrung wie Bügel in Balken die Längsbewehrung umfassen. Bei vier Lagen Biegebewehrung (kreuzweise unten und oben) führt dies zu 6 Bewehrungslagen. Der Hebelarm der inneren Kräfte wird dadurch v.a. bei dünnen Platten relativ stark verkleinert. Versuche haben gezeigt, dass es in der Regel ausreicht, wenn die Querkraftbewehrung in die äussersten Lagen der Biegebewehrung geführt und dort verankert wird (1. und 4. Lage). Vor der Verwendung irgend eines der auf dem Markt angebotenen Produkte sollte man sich jedoch immer vergewissern, ob deren Wirksamkeit experimentell nachgewiesen ist.

Geschlossene Bügel bzw. Steckbügel mit ausreichender Stosslänge sind von ihrer Verankerung her einwandfrei, v.a. wenn in 1. und 6. Lage angeordnet.

Bügel mit Endhaken ergeben, wenn mit Montagestäben zu Körben verbunden, eine sehr praktische Alternative; das Einlegen der Biegebewehrung in die stabilen Körbe verursacht keine Probleme.

Stäbe mit aufgestauchten bzw. -geschweissten Köpfen sind äusserst flexibel in der Anwendung, müssen aber gut fixiert werden.

Bei aufgebogenen Stäben Umlenk- und Querzugkräfte beachten (SIA 262, 5.2.7.2).

4.7 Zusammenfassung

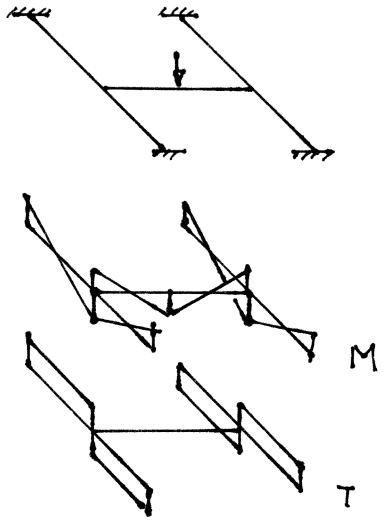
1. Das Tragverhalten von Trägern wird meist von den Kräften und Verformungen infolge Biegemomenten dominiert. Bei gedrungenen und stark profilierten Trägern können die Querkräfte und die zugehörigen Verformungen jedoch relativ gross sein.
2. In der Regel ist zur Querkraftabtragung eine zur Trägerachse senkrechte oder geneigte Bügelbewehrung sowie eine im Vergleich zu der zur Aufnahme der Biegemomente und Normalkräfte erforderlichen Bewehrung verstärkte Längsbewehrung anzuordnen.
3. Der Anteil der zur Querkraftabtragung erforderlichen Bewehrung an der gesamten Bewehrung ist relativ klein und nimmt mit zunehmender Trägerschlankheit ab.
4. Mit der Bemessung für Querkraft sind duktile Biegebrüche oder Biegeschubbrüche sicherzustellen; spröde Skizzenbrüche und relativ spröde Stegdruckbrüche sind zu vermeiden.
5. In Platten werden Hauptquerkräfte $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ in der zur x-Achse unter dem Winkel $\varphi_0 = \arctan(v_y / v_x)$ geneigten Richtung übertragen.
6. Platten mit einer Dicke bis 400 mm können ohne Bügel ausgeführt werden, sofern $v_{0d} \leq 2 \cdot f_{ctd}$ ist. Grundsätzlich ist keine Verstärkung der Biegebewehrung erforderlich. Vorsichtshalber und um eine gewisse Bogenwirkung zu ermöglichen, sollte jedoch 50% der im Feld erforderlichen Bewehrung über die Auflager geführt und verankert werden.
7. In dicken Platten ($h > 400$ mm) und in Balken ist stets eine Bügelbewehrung anzuordnen ($\rho \geq 0{,}2\%$).
8. Das Tragverhalten von bügelbewehrten Balken und Platten im gerissenen Zustand wird zweckmässigerweise mit Fachwerkmodellen bzw. Sandwichmodellen untersucht.
9. Fachwerkmodelle sind diskretisierte Spannungsfelder. Bei ihrer iterativen Entwicklung ist das angenommene Spannungsfeld (bestehend aus Zuggliedern, Knoten, Druckstreben, Fächern und Druckfeldern) zu berücksichtigen.

10. In einfachen Fällen ist eine auf der Fachwerkmodellvorstellung beruhende Querschnittsbetrachtung möglich. Dabei kann die infolge Querkraft erforderliche Verstärkung der Biegebewehrung mit einer Verschiebung der M_d/z-Linie um das Versatzmass $z \cdot \cot\vartheta / 2$ ermittelt werden.
11. Geneigte Zug- bzw. Druckgurte sowie Spannglieder können einen wesentlichen Anteil der Querkräfte übertragen. Fachwerkmodelle oder Spannungsfelder erlauben eine sichere Erfassung der entsprechenden Tragwirkungen.
12. Mit geneigten Bügeln kann die Gefahr eines Stegdruckbruchs in speziellen Fällen deutlich reduziert werden. Allerdings sind die baupraktischen Schwierigkeiten bei der Verwendung geneigter Bügel nicht zu unterschätzen.
13. Verformungen infolge Querkräften können aufbauend auf Fachwerkmodellvorstellungen abgeschätzt werden, siehe Kapitel 6 – Scheiben.

5. Torsion

5.1 Allgemeines

Grundsätzlich sind Fälle von Gleichgewichtstorsion und Verträglichkeitstorsion zu unterscheiden:



Gleichgewichtstorsion

T für Gleichgewicht erforderlich, unabhängig von angenommener Torsionssteifigkeit GK

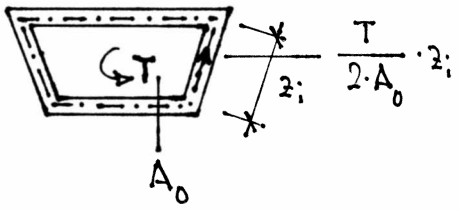
Verträglichkeitstorsion

T nicht für Gleichgewicht, sondern für Verträglichkeit der Verformungen erforderlich, abhängig von GK

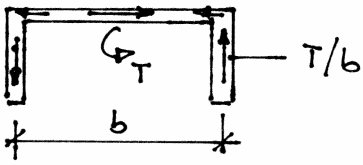
Bei Verträglichkeitstorsion ist T vom Verhältnis GK/(EI) der Torsions- und Biegesteifigkeiten abhängig. Im gerissenen Zustand nimmt GK im Vergleich zu EI gegenüber dem ungerissenen Zustand in der Regel wesentlich stärker ab, z.B. $GK^{II} \approx 0.1\, GK^{I}$ im Vergleich zu $EI^{II} \approx 0.3\, EI^{I}$. Bei der statischen Berechnung kann dies näherungsweise berücksichtigt werden, indem man mit EI^{I} und $GK^{I}/3$ rechnet. Im Grenzfall darf auch $GK = 0$ gesetzt werden (somit $T \to 0$).

Bei Vollquerschnitten und Hohlkastenträgern kann von Umlauftorsion mit einem geschlossenen Schubfluss ausgegangen werden. Bei offenen Querschnitten ergibt sich dagegen Wölbtorsion. Im allgemeinen liegt gemischte Torsion mit Umlauf- und Wölbtorsionsanteilen vor, siehe Baustatik III.

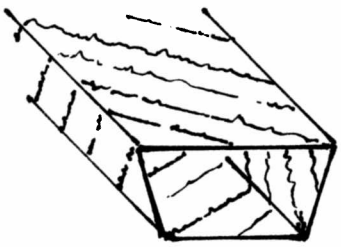
Umlauftorsion:

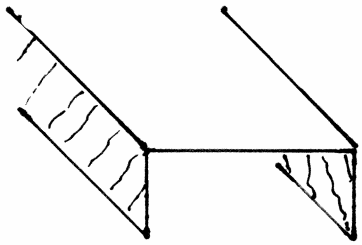


Wölbtorsion:

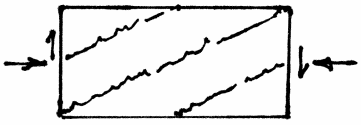


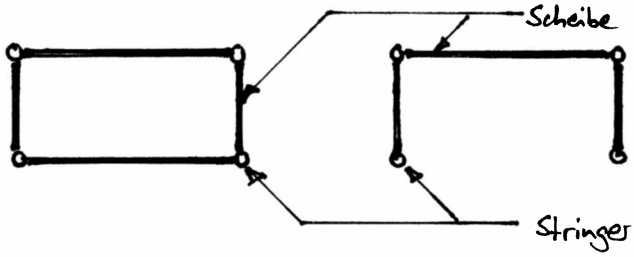
Die Schubflüsse aus Torsion in den einzelnen Querschnittsscheiben sind jenen aus Querkraft zu überlagern. Statt eines Stabfachwerkmodells resultiert für den gerissenen Zustand ein räumliches Fachwerkmodell.



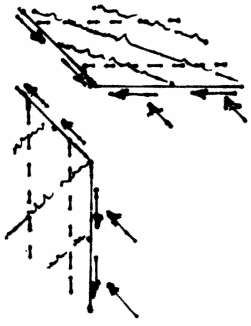


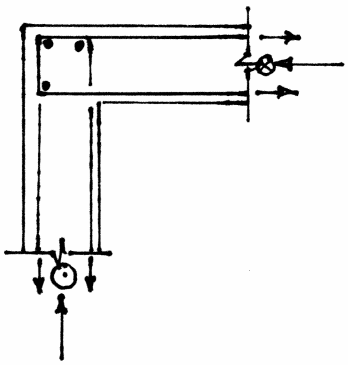
Die Querschnitte können als aus einzelnen Scheiben und Stringern zusammengesetzt idealisiert werden:





Die Sicherstellung des Schubflusses an den Kanten des Querschnitts erfordert eine entsprechende konstruktive Durchbildung, z.B. mit übergreifenden Steckbügeln:





5.2 Kastenquerschnitte unter reiner Torsionsbeanspruchung

5.2.1 Torsionswiderstand

Im folgenden wird lediglich der einfachste Fall eines Kastenquerschnitts mit konstanter Wanddicke t, konstanter Bügelbewehrung (Querschnittsfläche A_w, Abstand s) und gleichmässig über den Umfang $u = \sum z_i$ verteilter Längsbewehrung (totale Querschnittsfläche A_ℓ) betrachtet. Unter diesen Voraussetzungen kann sich in jeder Querschnittsscheibe ein diagonales Druckfeld mit der Neigung α zur x-Achse ausbilden.

Mit

$$V_{d,i} = \frac{T_d}{2A_0} \cdot z_i \leq A_w f_{sd} \cdot \frac{z_i \cot\alpha}{s}$$

folgt

$$T_d \leq 2A_0 \cdot \frac{A_w f_{sd}}{s} \cdot \cot\alpha \qquad (5.1)$$

Andererseits ist

$$\frac{T_d}{2A_0} \cdot u \cdot \cot\alpha \leq A_\ell \cdot f_{sd}$$

d.h.

$$T_d \leq 2A_0 \cdot \frac{A_\ell \cdot f_{sd}}{u} \cdot \tan\alpha \qquad (5.2)$$

Multiplikation der Ausdrücke rechterhand in (5.1) und (5.2) führt zu

$$T_{Rd} = 2A_0 f_{sd} \cdot \sqrt{\frac{A_w}{s} \cdot \frac{A_\ell}{u}} \qquad (5.3)$$

Division zu

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{A_w}{s} \cdot \frac{u}{A_\ell}} \qquad (5.4)$$

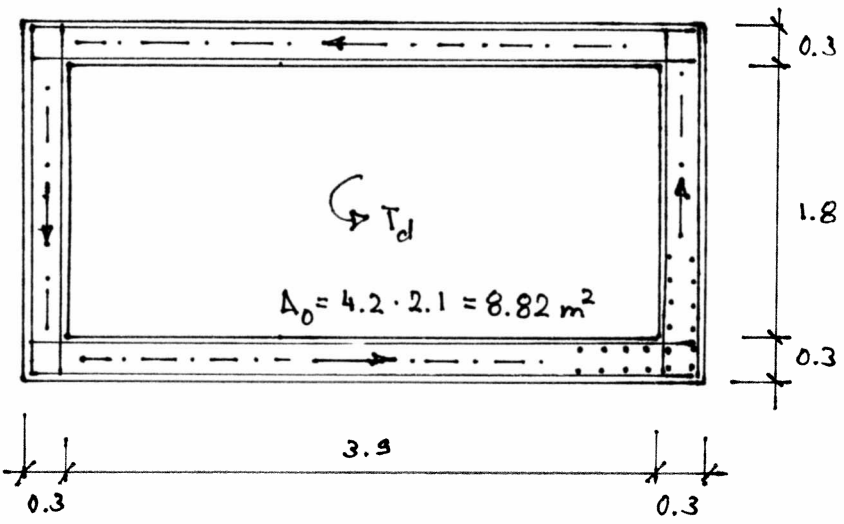
Die Beschränkung der Betondruckspannungen in den diagonalen Druckfeldern erfordert

$$\frac{T_d}{2A_0 \cdot t} \cdot (\tan\alpha + \cot\alpha) \leq k_c f_{cd}$$

und somit

$$\left(\frac{A_w}{s} + \frac{A_\ell}{u}\right) f_{sd} \leq k_c f_{cd}\, t \qquad (5.5)$$

BEISPIEL 5.1



- Beton C 25/30
- Betonstahl B500B

$c_{nom} = 30$ mm

- Bügel ϕ 14 @ 150

$\rightarrow A_{sw} = 308\ mm^2$, $s = 150$ mm

- Längsstäbe ϕ 16 @ 150

$\rightarrow A_l = 4 \cdot (12 + 4 + 26) \cdot 8^2 \cdot \pi$

$= 33778\ mm^2$

$u = 2 \cdot (4.2 + 2.1) = 12.6$ m

(5.3) : $T_{Rd} = 2 \cdot 4.2 \cdot 2.1 \cdot 435 \cdot \sqrt{\frac{308}{150} \cdot \frac{33778}{12600}} = \underline{18.0\ MNm}$

(5.4) : $\tan\alpha = \sqrt{\frac{308}{150} \cdot \frac{12600}{33778}} = 0.875 \rightarrow \underline{\alpha = 41.2^\circ}$

(5.5) : $\left(\frac{308}{150} + \frac{33778}{12600}\right) \cdot 435 = 2059 < 0.6 \cdot 16.5 \cdot 300 = 2970$ o.k.

Die zulässige Betondruckspannung $k_c \cdot f_{cd} = 9.9\ N/mm^2$ wird zu 2059/2970 = 69 % ausgenützt.

5.2.2 Torsionssteifigkeit

Für dünnwandige Hohlquerschnitte gilt im ungerissenen Zustand

$$GK^{I} = \frac{4A_0^2 \cdot G}{\oint \frac{ds}{t}} \qquad (5.6)$$

siehe Baustatik I.

Im gerissenen Zustand resultiert bei gleichen Voraussetzungen wie in Kapitel 5.2.1 (gleiche Bewehrung aller Scheiben, t = const) unter Annahme eines elastischen Verhaltens von Beton und Bewehrung

$$GK^{II} = \frac{4A_0^2 \cdot E_s \cdot (t/u)}{\frac{\cot^2\alpha}{\rho_l} + \frac{\tan^2\alpha}{\rho_w} + n(\tan\alpha + \cot\alpha)^2} \qquad (5.7)$$

mit

$$\tan\alpha = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{\rho_l} + n}{\frac{1}{\rho_w} + n}}, \quad \rho_l = \frac{A_l}{u \cdot t}, \quad \rho_w = \frac{A_w}{s \cdot t}, \quad n = \frac{E_s}{E_c} \qquad (5.8)$$

BEISPIEL 5.2

Ermittle die ungerissenen und gerissenen Torsionssteifigkeiten des in Beispiel 5.1 behandelten Trägers ($E_s = 205\ kN/mm^2$, $E_c = 32\ kN/mm^2$, $\nu_c = 0.2$).

(5.6): $$GK^{I} = \frac{4 \cdot (8.82)^2 \cdot \frac{32}{2(1+0.2)}}{\frac{12.6}{0.3}} = \underline{98.8\ GNm^2}$$

(5.8): $$\rho_1 = \frac{33778}{12600 \cdot 300} = 0.894\ \%$$

$$\rho_w = \frac{308}{150 \cdot 300} = 0.684\ \%$$

$$n = \frac{205}{32} = 6.406$$

$$\tan\alpha = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{0.00894} + 6.406}{\frac{1}{0.00684} + 6.406}} = 0.9384 \qquad (\alpha = 43.2^\circ)$$

(5.7): $$GK^{II} = \frac{4 \cdot (8.82)^2 \cdot 205 \cdot \frac{0.3}{12.6}}{\frac{1}{(0.9384)^2 \cdot 0.00894} + \frac{(0.9384)^2}{0.00684} + 6.406 \cdot \left(0.9384 + \frac{1}{0.9384}\right)^2} = \underline{5.4\ GNm^2}$$

$$\underline{GK^{II} / GK^{I} = 5.46\ \%}.$$

Vergleich mit Biegesteifigkeiten:

$$EI^{I} \approx E_c \cdot (2.4^3 \cdot 4.5 - 1.8^2 \cdot 3.9)/12 = \underline{105.2\ GNm^2}$$

(2.14) mit $A_s = 21715\ mm^2$, $d = 1783.3\ mm$, $A_s' = 12064\ mm^2$, $d' = 150\ mm$

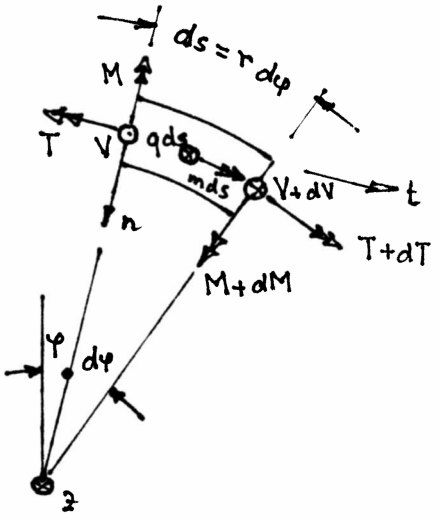
$b = 4500\ mm$, $n = 6.406 \rightarrow x = 296.15\ mm$

(2.15): $$EI^{II} = \underline{11.14\ GNm^2} = 0.1058 \cdot EI^{I}$$

d.h. $$\frac{EI^{II}/EI^{I}}{GK^{II}/GK^{I}} = \frac{10.58\ \%}{5.46\ \%} = 1.94.$$

5.3 Gekrümmte Träger

5.3.1 Gleichgewichtsbedingungen



Radius r

Streckenlast q, Streckenlastmoment m

$$\sum F_z = 0: \quad q\,ds + dV = 0$$

$$\sum M_n = 0: \quad -V\,ds + dM + T\,d\varphi = 0$$

$$\sum M_t = 0: \quad m\,ds - M\,d\varphi + dT = 0$$

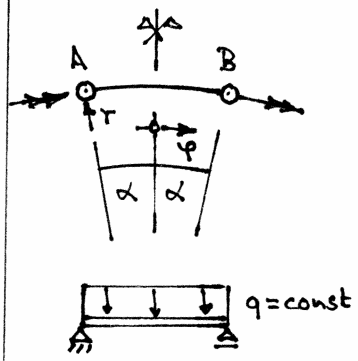
Damit erhält man die gekoppelten Differentialgleichungen

$$-q = \frac{dV}{ds}\,, \quad \frac{dM}{ds} + \frac{T}{r} = V\,, \quad \frac{dT}{ds} = \frac{M}{r} - m \tag{5.9}$$

Für Kreisringträger mit $r = \text{const}$ erhält man aus der Verknüpfung der Differentialgleichungen (5.9)

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2} + M = mr - qr^2 \tag{5.10}$$

BEISPIEL 5.3



Träger mit gekrümmter Länge $\ell = 2r\alpha$, $m = 0$

Allgemeine Lösung von (5.10):

$$M = c_1 \sin\varphi + c_2 \cos\varphi - qr^2 \tag{5.11}$$

Symmetriebedingung an der Stelle $\varphi = 0$: $dM/d\varphi = 0$

Randbedingung an der Stelle $\varphi = \alpha$: $M = 0$

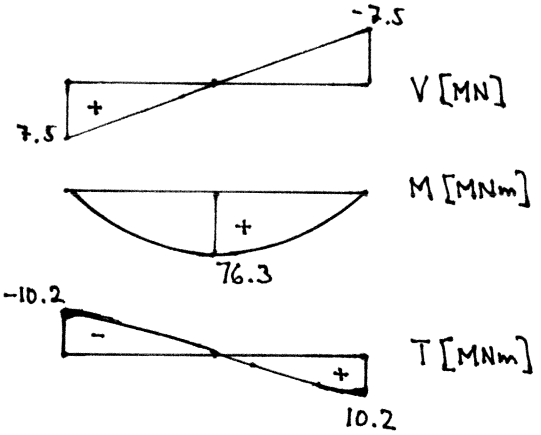
Somit $c_1 = 0$, $c_2 = qr^2/\cos\alpha$

Damit resultiert

$$V = -qr\varphi\,,\quad M = qr^2\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} - 1\right)\,,\quad T = qr^2\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} - \varphi\right) \qquad (5.12)$$

Anwendungsbeispiel: $r = 100$ m, $l = 40$ m, $\alpha = 0.2$ ($11.46°$), $q = 375$ kN/m

$V(-0.2) = 7.5$ MN, $M(0) = 76.3$ MNm, $T(0.2) = 10.2$ MNm

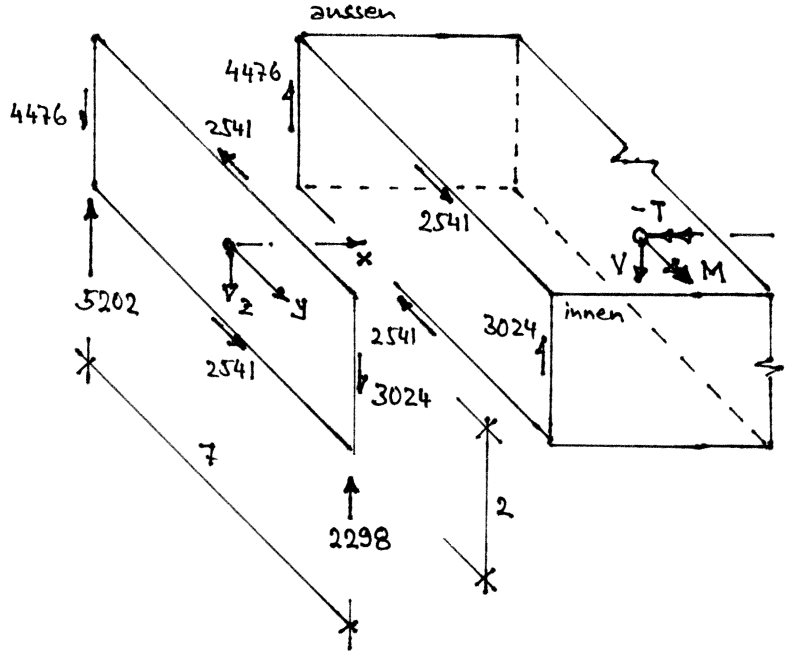


Die Biegemomente sind fast gleich wie beim abgewickelten geraden Träger ($375 \cdot 40^2/8 = 75$ MNm).

5.3.2 Krafteinleitung

a) Endquerträger

Erläuterung am Beispiel 5.3 (Trägerende A), Annahme Hohlkasten 7m · 2m:

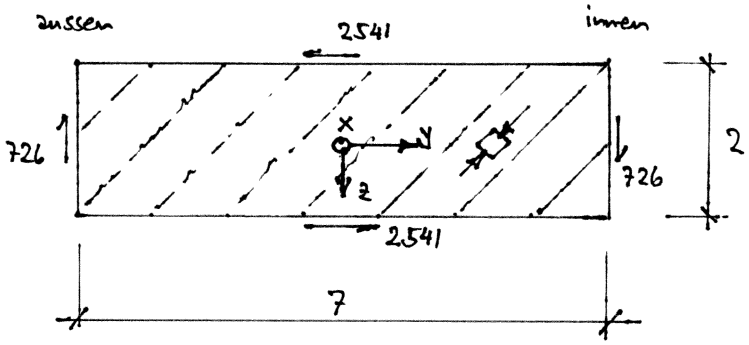


Auflagerkräfte $\quad \frac{7500}{2} \pm \frac{10\,163}{7} = \begin{Bmatrix} 5202 \\ 2298 \end{Bmatrix}$ kN

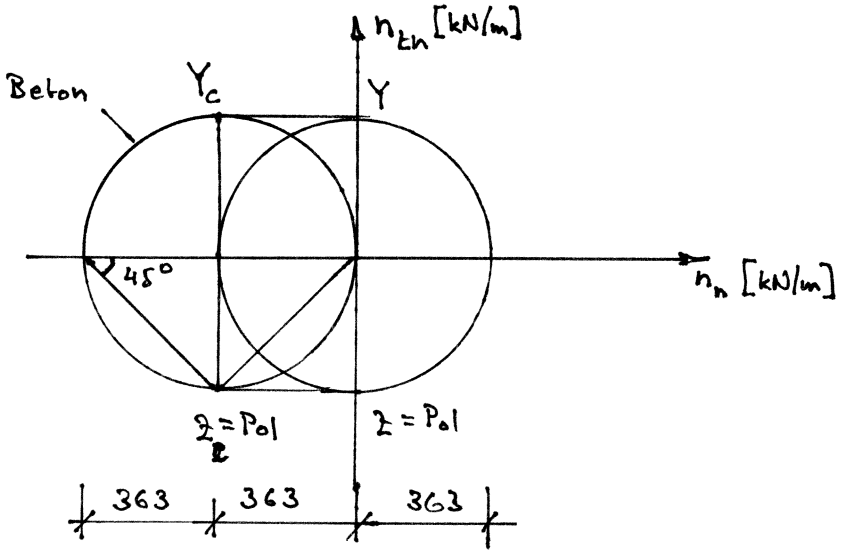
Schubfluss aus Torsion $\quad \frac{10163}{2 \cdot 2 \cdot 7} = 363$ kN/m

Stegkräfte $\quad \frac{7500}{2} \pm 363 \cdot 2 = \begin{Bmatrix} 4476 \\ 3024 \end{Bmatrix}$ kN

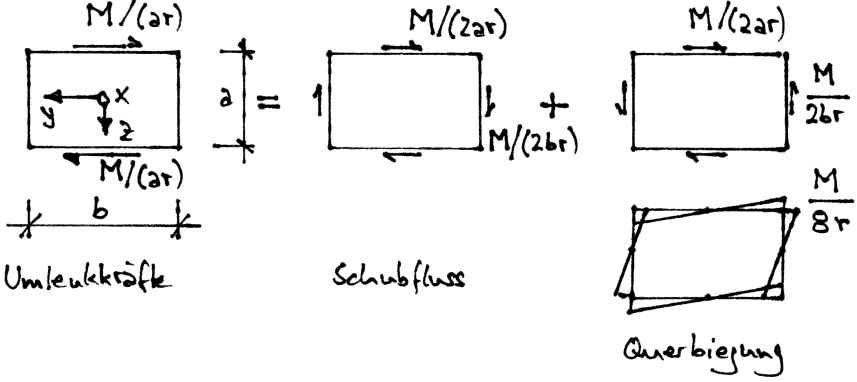
Die Endquerscheibe wird durch einen Zustand reinen Schubes beansprucht (Schubfluss = 363 kN/m). Die in den Flanschen und im inneren Steg verlaufenden schiefen Risse werden in der Endquerscheibe spiralförmig fortgesetzt.



Der Schubfluss kann beispielsweise über ein unter 45° zur y-Achse geneigtes Druckfeld abgetragen werden. Dies erfordert gleichmässig verteilte Bewehrungen in y- und z-Richtung mit einem Widerstand von je 363 kN/m. Im Beton entstehen Druckkräfte von $2 \cdot 363 = 726$ kN/m.



b) Querbiegung aus Stabkrümmung



Die Zug- und Druckkräfte M/a in den Flanschen produzieren Umlenkkräfte M/(ar), welche einerseits zum Torsions-Schubfluss beitragen und andererseits Querbiegung verursachen.
Eckmoment = M/(8r), falls obere und untere Flanschplatte gleich steif; M/(4r), falls $EI_{inf} \to 0$.

Im Beispiel 5.3 entstehen in Feldmitte beispielsweise Querbiegemomente von max. 76 271 / (8 · 100) = 95.3 kNm/m, wenn gleiche Biegesteifigkeiten der oberen und unteren Flanschplatten vorausgesetzt werden.

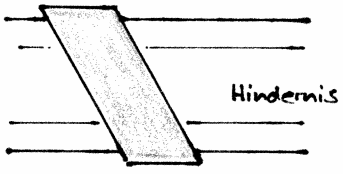
Querbiegung infolge Streckenlastmoment m könnte analog behandelt werden, vgl. $(5.9)_3$.

Eventuell müssen zur Aufnahme der Querbiegemomente Aussteifungsrippen oder Querscheiben angeordnet werden, v.a. auch bei konzentrierter Lasteinleitung:

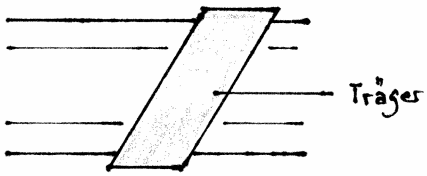
Alternative Ausbildung z.B. mit K-Fachwerken analog wie im Stahlbau.

5.4 Schief gelagerte Träger

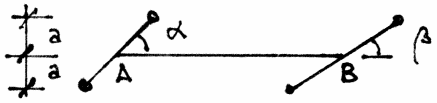
Aus der Sicht des Benutzers können "nach links" und "nach rechts schiefe" Träger unterschieden werden:

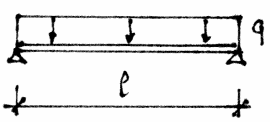


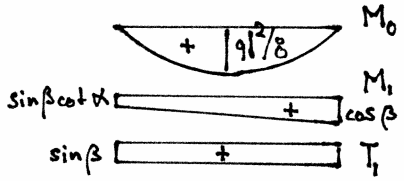
nach links schief



nach rechts schief







Der (nach links schiefe) Träger AB mit EI = const und GK = const ist über starre Endquerträger gelagert und durch q = const belastet.

$$\delta_{10} = \frac{q\ell^3}{24EI} \cdot (\cos\beta + \sin\beta\cot\alpha)$$

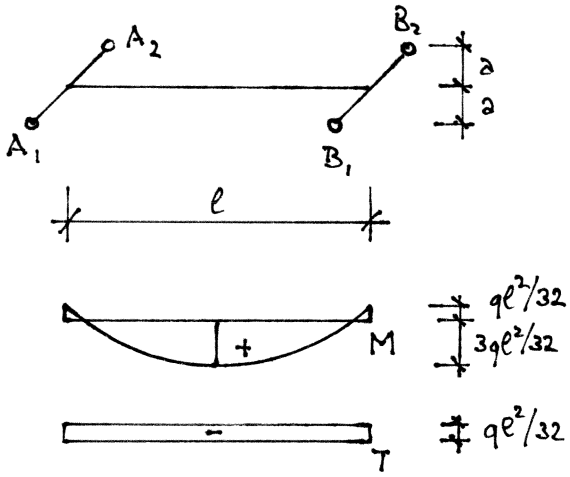
$$\delta_{11} = \frac{\ell\cos^2\beta}{3EI}(\tan^2\beta\cot^2\alpha + \tan\beta\cot\alpha + 1) + \frac{\ell\sin^2\beta}{GK}$$

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Die Schiefe nach links führt zu negativen Torsionsmomenten. Schiefe nach rechts ergäbe positive Torsionsmomente.

Die schiefe Lagerung wirkt wie eine Einspannung der Trägerenden. Die lastnahen Lager A_2 und B_1 erfahren grössere Auflagerkräfte als die lastfernen Lager A_1 und B_2.

Beispiel $\alpha = \beta = 45°$: $X_1 = \dfrac{-\sqrt{2}\,q\ell^2}{12\left(1+\frac{EI}{GK}\right)}$, $A_{1,2} = \dfrac{q\ell}{4} \mp \dfrac{q\ell^2}{24a\left(1+\frac{EI}{GK}\right)}$

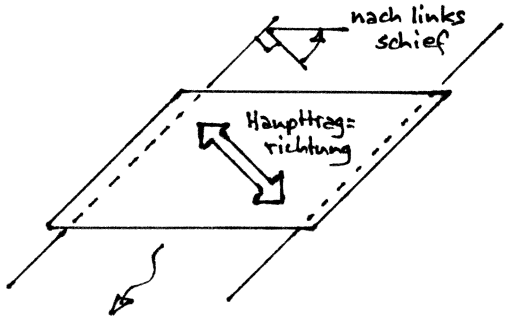


Annahme $\ell = 8a$, $EI/GK = 5/3$

$\rightarrow A_1 = q\ell/8$, $A_2 = 3q\ell/8$

$T = -q\ell^2/32$

Überführungen werden oft als schiefe Platten ausgeführt. Näherungsweise können solche Tragwerke mit der obigen Stabmodellierung behandelt werden. Man erkennt, dass derartige Platten "über die stumpfen Ecken tragen". Bei grosser Schiefe können die spitzen Ecken abheben bzw. sie müssen nach unten gehalten werden.



5.5 Zusammenfassung

1. Grundsätzlich sind Fälle von Gleichgewichtstorsion (T unabhängig von GK) und Verträglichkeitstorsion (T abhängig von GK) zu unterscheiden.
2. Im allgemeinen liegt gemischte Torsion (Umlauftorsion und Wölbtorsion) vor.
3. Torsion tritt in der Regel kombiniert mit anderen Beanspruchungen auf. Die Schubflüsse aus Torsion sind jenen aus Querkraft zu überlagern.
4. Für den Grenzzustand der Tragsicherheit können räumliche Fachwerkmodelle und entsprechende Spannungsfelder entwickelt werden.
5. Zur Sicherstellung des Schubflusses an Querschnittskanten ist eine entsprechende konstruktive Durchbildung, z.B. mit übergreifenden Bügeln, erforderlich.
6. Bei fliessender Längs- und Bügelbewehrung ist der Torsionswiderstand wie der Querkraftwiderstand proportional zum geometrischen Mittel der Längs- und Bügelbewehrungsgehalte.
7. Die Torsionssteifigkeit nimmt vom ungerissenen zum gerissenen Zustand meist viel ausgeprägter ab, als die Biegesteifigkeit. Dies kann man in der statischen Berechnung z.B. dadurch berücksichtigen, dass man mit EI^I und $GK^I/3$ rechnet.
8. Zur Einleitung konzentrierter Torsionsmomente in Träger, insbesondere bei End- und Zwischenauflagern, sind im allgemeinen Querscheiben erforderlich.
9. Stabkrümmung und Streckenlastmomente verursachen Querbiegung der Stabquerschnitte. Gegebenenfalls sind zur Aufnahme der Querbiegemomente Aussteifungsrippen oder Querscheiben bzw. Aussfachungen anzuordnen.
10. Schiefe Lagerung von Trägern wirkt ähnlich wie eine Einspannung der Trägerenden.
11. Schiefe nach links (rechts) führt zu negativen (positiven) Torsionsmomenten.
12. Schief gelagerte Platten tragen über die stumpfen Ecken. Die spitzen Ecken müssen gegebenenfalls nach unten vorgehalt werden.

6. Scheiben

6.1 Allgemeines

Die Betonbauweise eignet sich vor allem für Flächentragwerke (Scheiben, Platten, Faltwerke, Schalen). Scheiben spielen grosse Rolle als Teile zusammengesetzter Querschnitte (z. B. Hohlkasten, offene Querschnitte, Faltwerke). Ferner lässt sich die Tragwirkung von Platten und Schalen durch Anwendung von Sandwichmodellen (siehe Kapitel 4.6.2) weitgehend auf das Tragverhalten von Scheiben zurückführen.

Im ungerissenen Zustand rechnet man meist mit reinen Betonquerschnittswerten und wendet die bekannten Beziehungen für den ebenen Spannungszustand elastischer Körper an. Mit $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ gelten einerseits die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{6.1}$$

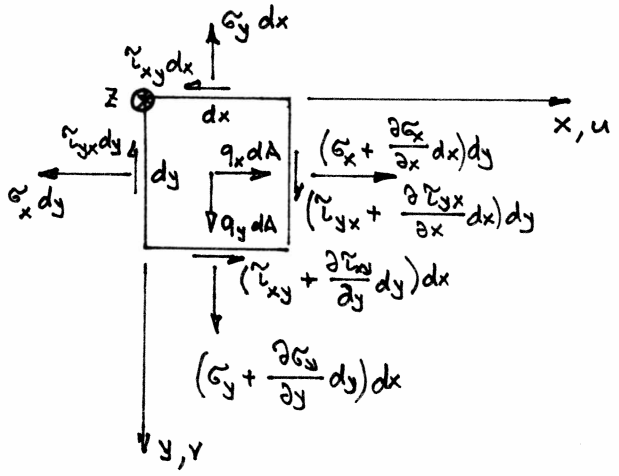
und aus der Verknüpfung des HOOKEschen Gesetzes mit den kinematischen Relationen folgt

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu \sigma_y)/E = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = (\sigma_y - \nu \sigma_x)/E = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.2}$$

wobei der Schubmodul G über

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.3}$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnungszahl ν verknüpft ist und die übrigen Bezeichnungen aus der folgenden Skizze ersichtlich sind.



$$dA = dx \cdot dy$$

Einfache Probleme des ebenen Spannungszustands elastischer Körper lassen sich analytisch lösen, i.a. müssen aber numerische Verfahren wie die Methode der finiten Elemente angewendet werden. Dies bildet auch die Basis des heute vorherrschenden Vorgehens, wonach mit Hilfe der Methode der finiten Elemente ein statisch zulässiger Spannungszustand ermittelt und die Bemessung darauf gestützt durch Anwendung (von allenfalls linearisierten) Fliessbedingungen vorgenommen wird.

Nach dem Reissen bildet sich im Beton näherungsweise ein einachsiger Druckspannungszustand aus. Bruchwiderstand und Bruchmechanismen von Scheibenelementen können mit Fliessbedingungen erfasst werden. Das Verformungsverhalten kann mit dem gerissenen Scheibenmodell beschrieben werden, welches auch die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen berücksichtigt. Wird diese Mitwirkung vernachlässigt, gelangt man zu den (linearen oder nichtlinearen) Druckfeldmodellen.

Für praktische Anwendungen empfiehlt sich vorab die Entwicklung von Fachwerkmodellen, ähnlich wie in Kapitel 4 und 5 dargelegt. Dabei ist es oft hilfreich, die Resultate einer linear elastischen Analyse mit der Methode der finiten Elemente beizuziehen. Der generelle Kraftfluss und mögliche Umlagerungen der inneren Kräfte können damit erkannt bzw. abgeschätzt werden.

6.2 Fliessbedingungen

6.2.1 Annahmen

Es werden folgende Annahmen getroffen:

1. Der Beton ist homogen und isotrop und kann in beliebigen Richtungen n Druckspannungen bis zu einem Betrag f_c aufnehmen, jedoch keine Zugspannungen.
2. Die Bewehrung übernimmt nur Spannungen in Stabrichtung, und zwar bis zu einem Betrag f_s. Ihre Verteilung und Verschmierung seien derart,

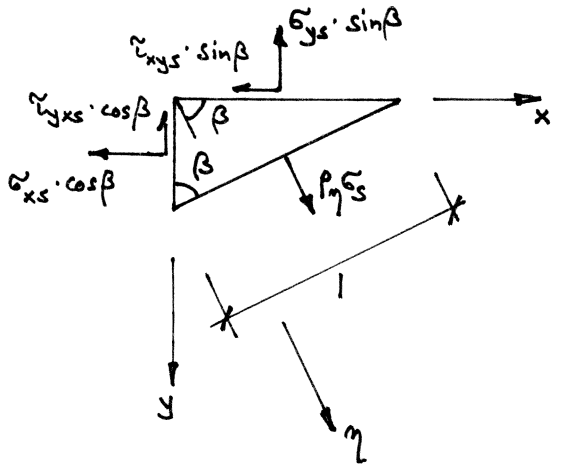
dass mit äquivalenten mittleren Spannungen gerechnet werden kann.

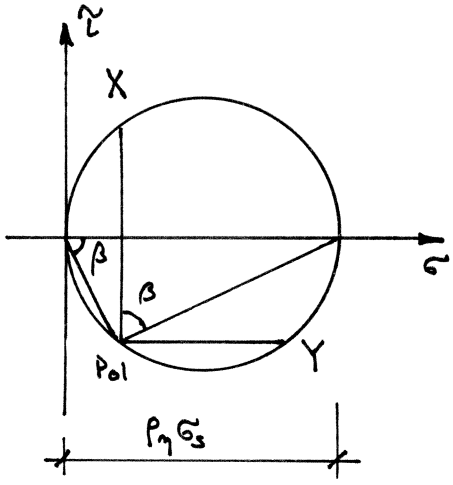
3. Zwischen Beton und Bewehrung herrscht starrer Verbund.

6.2.2 Fliess bedingung für Bewehrung

a) Äquivalente mittlere Spannungen

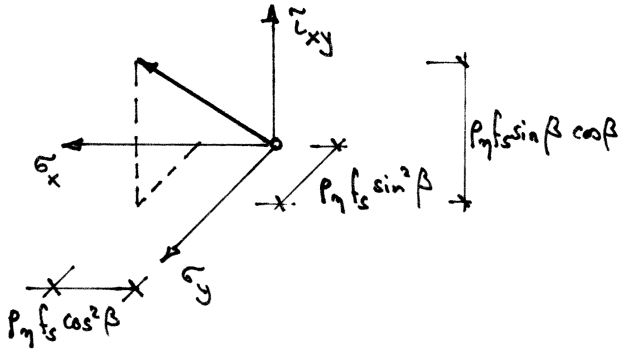
Bewehrung mit geometrischem Bewehrungsgehalt ρ_η in Richtung η (unter Winkel β zur x-Achse geneigt), Stahlspannung σ_s:





$$\sigma_{xs} = \rho_\eta\sigma_s\cdot\cos^2\beta\,,\quad \sigma_{ys} = \rho_\eta\sigma_s\cdot\sin^2\beta\,,\quad \tau_{xys} = \rho_\eta\sigma_s\cdot\sin\beta\cos\beta \qquad (6.4)$$

b) Fliessbedingung für eine Bewehrungslage



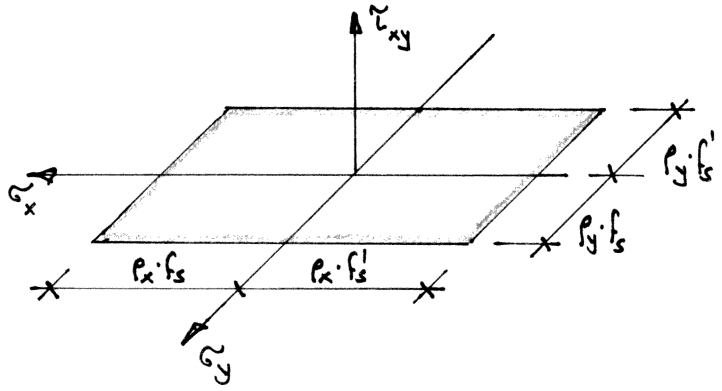
Im Spannungsraum $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ entspricht jeder Bewehrung gemäss (6.4) ein Vektor, dessen Länge durch

$$-f_s' \le \sigma_s \le f_s$$

beschränkt ist. Oft wird die Mitwirkung der Bewehrung auf Druck vernachlässigt, d.h. $f_s' = 0$ gesetzt.

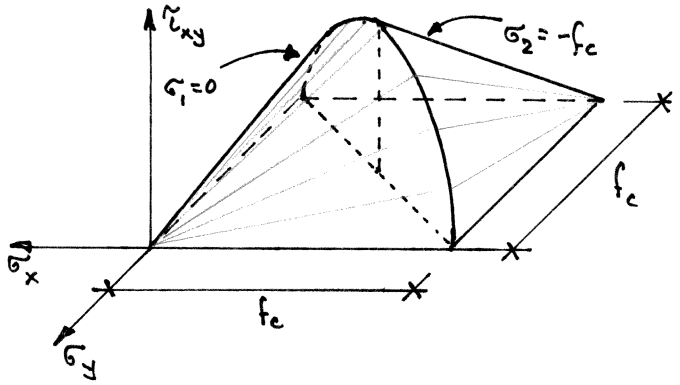
Kombination zweier Bewehrungen ergibt im Spannungsraum ein Parallelogramm, und bei drei nicht kollinearen Bewehrungen erhält man ein Parallelepiped.

c) Orthogonale Bewehrung in x- und y-Richtung



Das unter b) erwähnte Parallelogramm wird zum Rechteck in der σ_x-σ_y-Ebene

6.2.3 Fliessbedingung für Beton



Hauptspannungen

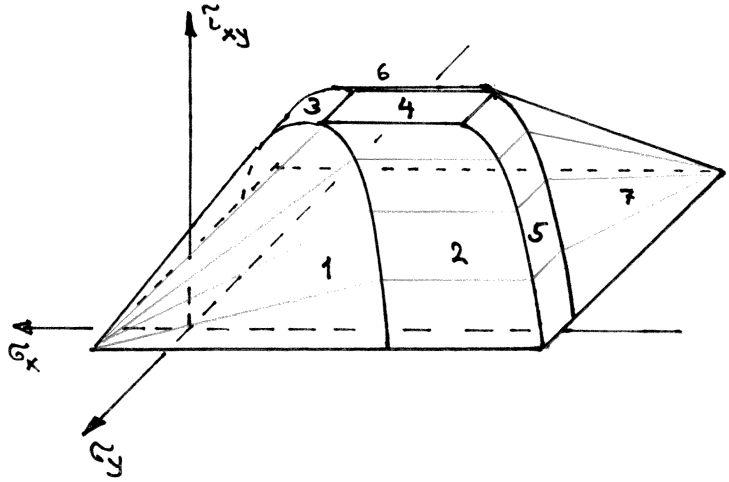
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 = 0 \dots \quad & \tau_{xy}^2 = \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_2 = -f_c \dots \quad & \tau_{xy}^2 = (f_c + \sigma_x)(f_c + \sigma_y) \end{aligned}\right\} \quad (6.5)$$

Die Beziehungen (6.5) beschreiben zwei elliptische Kegel im Spannungsraum.

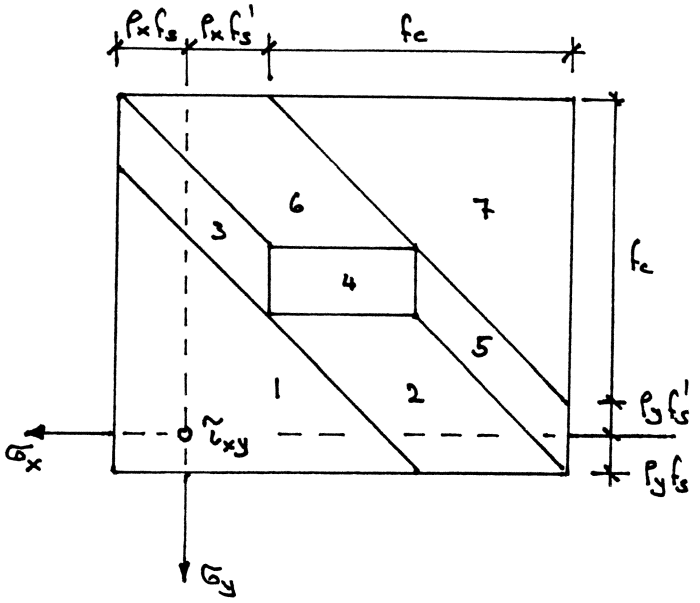
6.2.4 Fliessbedingung für orthogonal bewehrtes Stahlbetonelement

Die Fliessbedingung des Stahlbetonelements entsteht, indem man die Fliessbedingung des Betons rein translatorisch derart verschiebt, dass sich ihr Ursprung an der Fliessgrenze der Bewehrung entlang bewegt. Der so im Spannungsraum ausgefegte Bereich entspricht dem plastischen Bereich des Stahlbetonelements.



Im Spannungsraum entstehen sieben Regimes, die im folgenden analysiert werden.

Grundriss der Fliessfigur in $\sigma_x - \sigma_y$ - Ebene:



Regime	Fliessbedingung	$-\sigma_c$	σ_{sx}	σ_{sy}	Fliessgrenze	Bemerkungen
1	$Y_1 = \tau_{xy}^2 - (\rho_x f_s - \sigma_x)(\rho_y f_s - \sigma_y) = 0$	$\leq f_c$	f_s	f_s	elliptischer Kegel	entspricht Biegeschubbruch in Balken
2	$Y_2 = \tau_{xy}^2 - (f_c - \rho_y f_s + \sigma_y)(\rho_y f_s - \sigma_y) = 0$	f_c	$\leq f_s$	f_s	Kreiszylinder	entspricht Stegdruckbruch in Balken
3	$Y_3 = \tau_{xy}^2 - (f_c - \rho_x f_s + \sigma_x)(\rho_x f_s - \sigma_x) = 0$	f_c	f_s	$\leq f_s$	Kreiszylinder	
4	$Y_4 = \tau_{xy}^2 - f_c^2/4 = 0$	f_c	$\leq f_s$	$\leq f_s$	Ebene	$\tau_{xy} = f_c/2 = \text{const}$
5	$Y_5 = \tau_{xy}^2 + (f_c + \rho_x f_s' + \sigma_x)(\rho_x f_s' + \sigma_x) = 0$	f_c	$-f_s'$	$\geq -f_s'$	Kreiszylinder	
6	$Y_6 = \tau_{xy}^2 + (f_c + \rho_y f_s' + \sigma_y)(\rho_y f_s' + \sigma_y) = 0$	f_c	$\geq -f_s'$	$-f_s'$	Kreiszylinder	
7	$Y_7 = \tau_{xy}^2 - (f_c + \rho_x f_s' + \sigma_x)(f_c + \rho_y f_s' + \sigma_y) = 0$	f_c	$-f_s'$	$-f_s'$	elliptischer Kegel	zweiachsiger Betondruck-spannungszustand

In der Praxis ist Regime 1 weitaus am wichtigsten, gefolgt von Regime 2 und Regime 4.

Im Regime 7 herrscht (ausser an den Grenzen zu Regime 5 und Regime 6) ein zweiachsiger Betondruckspannungszustand: $\sigma_{c2} = -f_c$, $-f_c \leq \sigma_{c1} \leq 0$.

In Regime 2 bis 6 gilt $\sigma_{c2} = -f_c$, $\sigma_{c1} = 0$.

6.2.5 Fliessgesetz und Diskussion einzelner Regimes

a) Allgemeines

Nach der Theorie des plastischen Potentials (siehe Baustatik II) sind die plastischen Verzerrungsinkremente in jedem Punkt der Fliessfläche $Y = 0$ proportional zu den Komponenten des nach aussen gerichteten Einheitsnormalenvektors:

$$\dot{\varepsilon}_x = \varkappa \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_y = \varkappa \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \quad , \quad \dot{\gamma}_{xy} = \varkappa \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \tag{6.6}$$

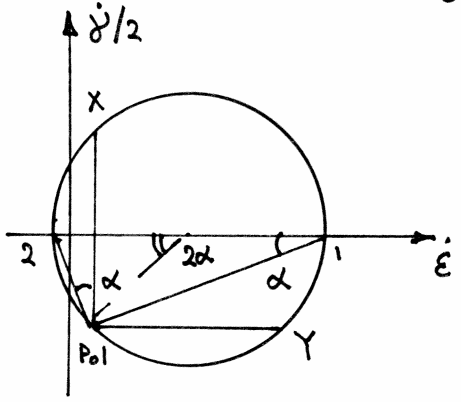
Der Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ ist nicht negativ, $\varkappa \geq 0$.

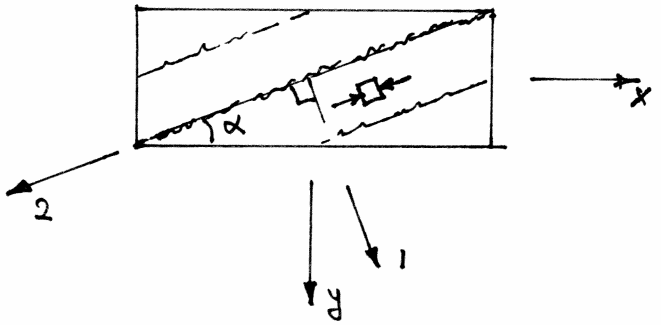
Spannungsbildpunkte, die mehrere Fliessbedingungen erfüllen, müssen nach dem verallgemeinerten Fliessgesetz behandelt werden (Superposition der Verzerrungskomponenten entsprechend jedem beteiligten Regime):

$$\dot{\varepsilon}_x = \sum_i \varkappa_i \frac{\partial Y_i}{\partial \sigma_x} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_y = \sum_i \varkappa_i \frac{\partial Y_i}{\partial \sigma_y} \quad , \quad \dot{\gamma}_{xy} = \sum_i \varkappa_i \frac{\partial Y_i}{\partial \tau_{xy}} \tag{6.7}$$

Die Hauptdruckrichtung 2 lässt sich aus dem MOHRschen Kreis der Verzerrungsinkremente ablesen:

$$\cot\alpha = \frac{\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}}\right)^2 + 1} \tag{6.8}$$





N.B. $\cot\alpha = \cot(2\alpha) + \dfrac{1}{\sin(2\alpha)}$

$$= \cot(2\alpha) + \sqrt{\frac{\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}} = \cot(2\alpha) + \sqrt{\cot^2(2\alpha) + 1}$$

b) Regime 1

Anwendung von (6.6) auf Y_1 (siehe Tabelle S. 6.5) bringt

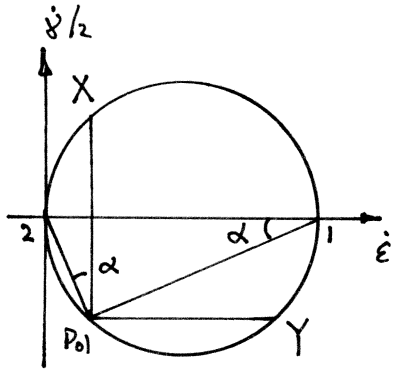
$$\dot\varepsilon_x = \partial e\,(\rho_y f_s - \sigma_y)\ ,\quad \dot\varepsilon_y = \partial e\,(\rho_x f_s - \sigma_x)\ ,\quad \dot\gamma_{xy} = \partial e \cdot 2\tau_{xy}$$

und somit $\dot\varepsilon_x \dot\varepsilon_y = (\dot\gamma_{xy}/2)^2$, woraus

$$\dot\varepsilon_1 = \dot\varepsilon_x + \dot\varepsilon_y \geq 0\ ,\quad \dot\varepsilon_2 = 0 \qquad (6.9)$$

folgt. Für α erhält man

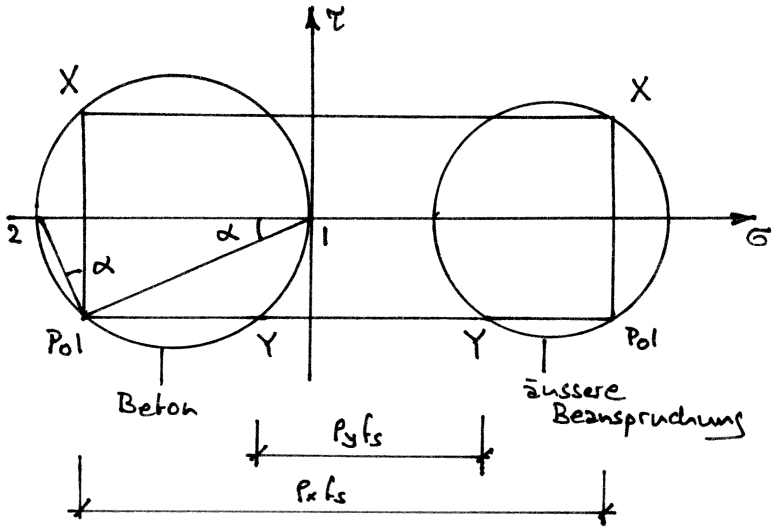
$$\cot\alpha = \sqrt{\frac{\rho_x f_s - \sigma_x}{\rho_y f_s - \sigma_y}} \qquad (6.10)$$

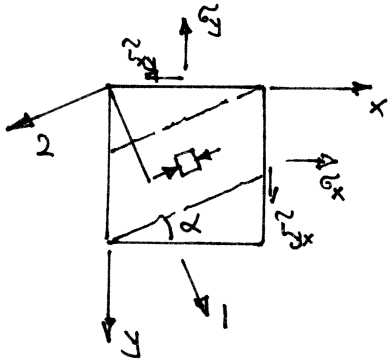


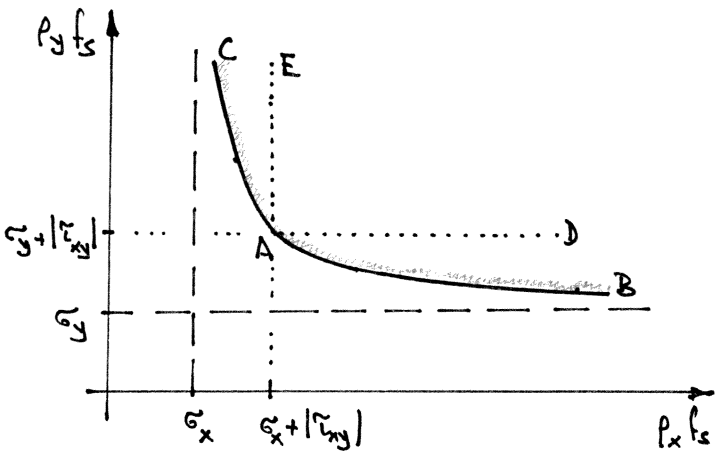
$\dot\varepsilon_2 = 0$ bedeutet, dass der Beton starr bzw. elastisch bleibt, d.h. nicht gestaucht wird.

$\dot\varepsilon_x > 0$ und $\dot\varepsilon_y > 0$ bedeutet, dass die Bewehrung in beiden Richtungen auf Zug fliesst.

Zugehöriger Spannungszustand:







Zulässiger Bereich bei Bemessung oberhalb Hyperbel CAB:

$$\rho_x f_s \geq \sigma_x + k\,|\tau_{xy}|\ ,\quad \rho_y f_s \geq \sigma_y + \frac{1}{k}\,|\tau_{xy}| \qquad (6.11)$$

mit $k = \cot\alpha$.

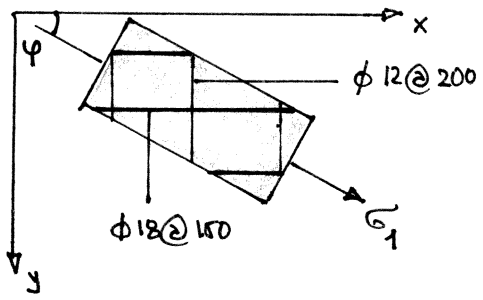
Evtl. Linearisierung ($k=1$, $\alpha = 45°$) entsprechend zulässigem Bereich oberhalb AD und rechts von AE.

Kontrolle $\sigma_{c2} \geq -f_c$ erfordert

$$\rho_x f_s + \rho_y f_s \leq f_c + \sigma_x + \sigma_y \qquad (6.12)$$

BEISPIEL 6.1

Eine 200 mm dicke Scheibe aus Beton C 25/30 ist beidseitig in x-Richtung mit Stäben ϕ 18 @ 150 und in y-Richtung mit Stäben ϕ 12 @ 200 bewehrt (Betonstahl B500B). Ermittle den Widerstand der Scheibe unter einer einachsigen Zugbeanspruchung σ_1 unter einem beliebigen Winkel φ zur x-Achse.



Beanspruchung:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cdot \cos^2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma_1 \cdot \sin^2\varphi, \quad \tau_{xy} = \sigma_1 \cdot \sin\varphi\cos\varphi$$

Widerstand:

x-Richtung ... $\frac{8^2 \cdot \pi \cdot 435}{150} \cdot 2 = 1476 \text{ kN/m} = r$

y-Richtung ... $\frac{6^2 \cdot \pi \cdot 435}{200} \cdot 2 = 492 \text{ kN/m} = r/3$

Mit der Scheibendicke $h = 200$ mm liefert die Fliessbedingung $Y_1 = 0$

$$\left(r - \sigma_1 h \cos^2\varphi\right)\left(\frac{r}{3} - \sigma_1 h \sin^2\varphi\right) = \sigma_1^2 h^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$$

woraus

$$\sigma_1 \cdot h = \frac{r}{3\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

folgt.

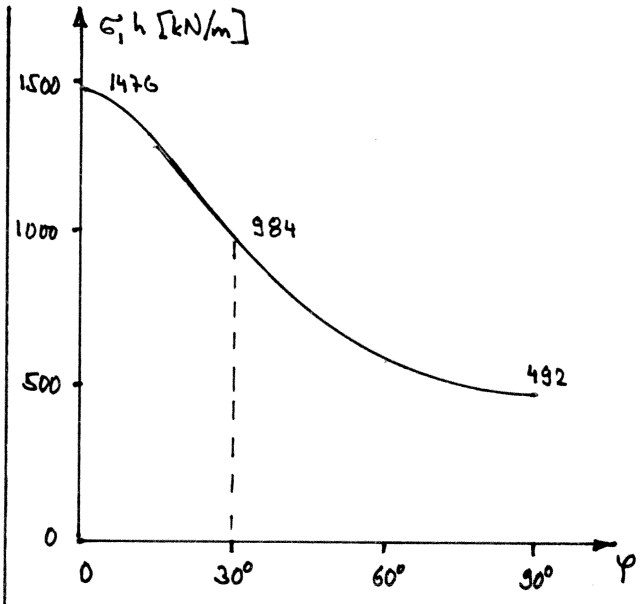
Die Bedingung (6.12) liefert mit $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1$ und $f_c = f_{cd}\, k_c = 16.5 \cdot 0.6 = 9.9 \text{ N/mm}^2$

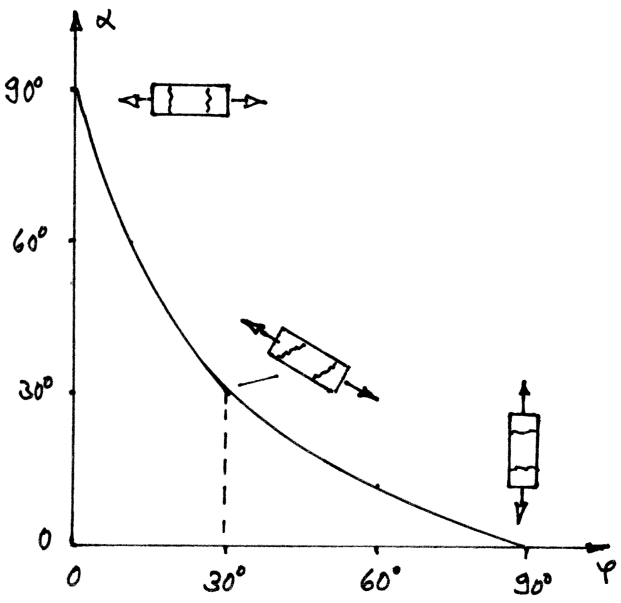
$$r + \frac{r}{3} - \frac{r}{3\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \leq r = 1476 \frac{\text{kN}}{\text{m}} < f_c \cdot h = 9.9 \cdot 0.2 = 1980 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

d.h. Regime 1 ist tatsächlich anwendbar.

Mit (6.10) findet man

$$\cot\alpha = \sqrt{\frac{r - \frac{r\cos^2\varphi}{3\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}}{\frac{r}{3} - \frac{r\sin^2\varphi}{3\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}}} = \sqrt{\frac{3\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{3} - \sin^2\varphi}} = 3 \cdot \tan\varphi$$





Für die Grenzfälle $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ ist die Rissrichtung α orthogonal zur Hauptzugrichtung, $\alpha + \varphi = 90°$. Dazwischen gilt $\alpha + \varphi < 90°$, d.h. die Risse drehen sich von der Richtung senkrecht zur Hauptzugrichtung etwas zur Richtung der stärkeren Bewehrung in x-Richtung. Für $\varphi = 30°$ gilt beispielsweise $\alpha = 30°$; im Vergleich zur initialen Rissrichtung ($\alpha \approx 60°$) ist also eine Umlagerung der Rissneigung von 30° zu erwarten.

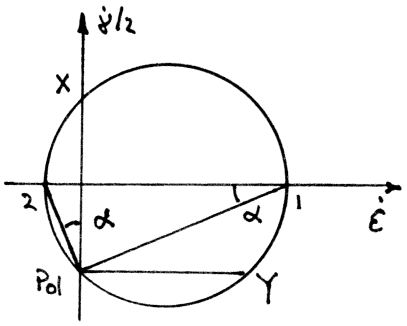
c) Regime 2

Anwendung von (6.6) auf Y_2 (siehe Tabelle S. 6.5) liefert

$$\dot{\varepsilon}_x = 0 \;,\quad \dot{\varepsilon}_y = \varkappa\left(f_c - 2\rho_y f_s + 2\sigma_y\right),\quad \dot{\gamma}_{xy} = \varkappa \cdot 2\tau_{xy}$$

Für α erhält man

$$\cot\alpha = \sqrt{\frac{f_c - \rho_y f_s + \sigma_y}{\rho_y f_s - \sigma_y}} \qquad (6.13)$$



N.B. Quadrieren und Umformen von (6.13) bringt

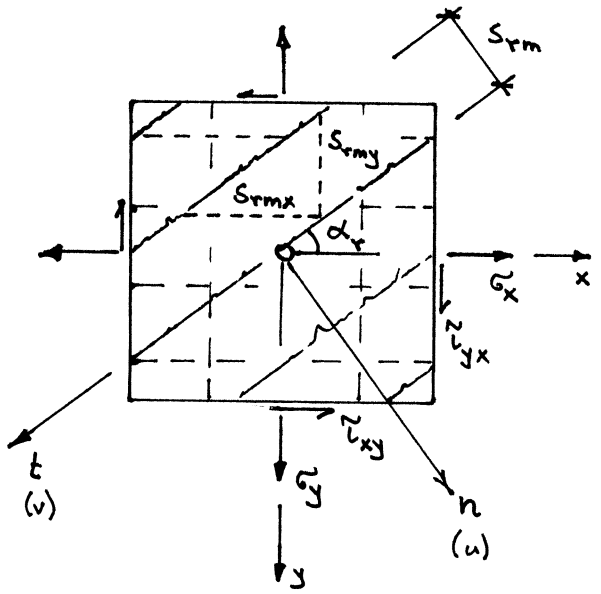
$$\frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1 - (\rho_y f_s - \sigma_y)/f_c}{(\rho_y f_s - \sigma_y)/f_c}$$

d.h. $$\sin^2\alpha = \frac{\rho_y f_s - \sigma_y}{f_c}$$

was mit $\beta = 90°$ bis auf den dort nicht enthaltenen Term σ_y ($\sigma_y = 0$) der Beziehung (4.15) entspricht.

6.3 Gerissenes Scheibenmodell

6.3.1 Allgemeines

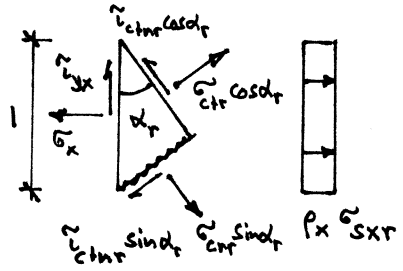


In x- und y-Richtung bewehrtes Scheibenelement (Bewehrungsgehalte ρ_x, ρ_y; Scheibendicke h).

Rissneigung α_r, mittlerer Rissabstand s_{rm} in n-Richtung ($s_{rmx} = s_{rm}/\sin\alpha_r$ bzw. $s_{rmy} = s_{rm}/\cos\alpha_r$ in x- und y-Richtung).

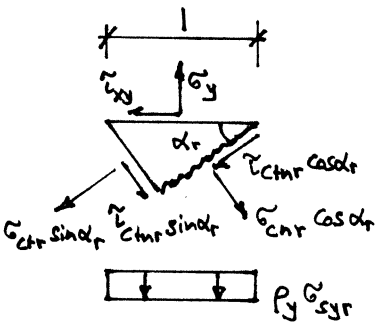
Stahlspannungen am Riss: σ_{sxr}, σ_{syr}

Betonspannungen am Riss: σ_{cnr}, σ_{ctr}, τ_{ctnr}



Gleichgewicht am Riss:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \rho_x\sigma_{sxr} + \sigma_{cnr}\sin^2\alpha_r + \sigma_{ctr}\cos^2\alpha_r - \tau_{ctnr}\cdot\sin(2\alpha_r)\\
\sigma_y &= \rho_y\sigma_{syr} + \sigma_{cnr}\cos^2\alpha_r + \sigma_{ctr}\sin^2\alpha_r + \tau_{ctnr}\cdot\sin(2\alpha_r)\\
\tau_{xy} &= (\sigma_{cnr} - \sigma_{ctr})\sin\alpha_r\cos\alpha_r - \tau_{ctnr}\cdot\cos(2\alpha_r)
\end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$



Am Riss ergeben sich Rissuferverschiebungen δ_n und δ_t sowie Betonverschiebungen u_{cr} und v_{cr} in n- bzw. t-Richtung. Betrachtet man diese vier Grössen zusammen mit σ_{sxr}, σ_{syr} und σ_{ctr} als primäre Unbekannte, lassen sich bei gegebener Rissrichtung α_r und gegebenem Rissabstand s_{rm} grundsätzlich alle Spannungen, Verschiebungen und Verzerrungen im Beton und in der

Bewehrung zwischen den Rissen ermitteln, wenn die Stoffgesetze des Betons und der Bewehrung, die Verbundspannungs - Schlupfbeziehungen der Bewehrung sowie die Rissverzahnungsbeziehung (σ_{cnr} und τ_{ctnr} in Funktion von δ_n und δ_t ausgedrückt) bekannt sind. Man stützt sich dabei auf die Feststellung, dass bei homogenen Verhältnissen (Beton- und Bewehrungseigenschaften) sämtliche relevanten Funktionen nur von n (nicht jedoch t) abhängen und (wegen $\partial u/\partial t = 0$, somit $\gamma_{nt} = \partial v/\partial n$ und $\partial \gamma_{nt}/\partial t = \partial(\partial v/\partial t)/\partial n = \partial \varepsilon_t/\partial n = 0$) $\varepsilon_t(n) = \text{const}$ sein muss. Es ergeben sich sieben nichtlineare Gleichungen, die nur numerisch und mit grossem Aufwand zu lösen sind. Zudem sind die Rissverzahnungsbeziehungen von vielen Parametern abhängig, grossen Streuungen unterworfen und empfindlich auf kleinste Verschiebungen. Ferner wird α_r von Eigenspannungszuständen beeinflusst, und im Lauf eines Belastungsprozesses entstehen im allgemeinen Risse mit unterschiedlicher Neigung. Diese Schwierigkeiten verunmöglichen eine praktisch taugliche Lösung, und es sind deshalb vereinfachende Annahmen zu treffen.

Das gerissene Scheibenmodell geht von folgenden Annahmen aus:

1. Risse spannungsfrei, $\sigma_{cnr} = \tau_{ctnr} = 0$.
2. α_r variabel, fällt mit Richtung der Hauptdehnungen zusammen, $t \equiv 2$.
3. Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen gemäss Zuggurtmodell.
4. Betonspannungen

$$\sigma_{ctr} = \frac{f_{ck}^{2/3}\left(\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_{c0}\right)}{(0.4 + 30\,\varepsilon_1)\,\varepsilon_{c0}^2} \qquad (6.15)$$

mit $\varepsilon_{c0} = 2‰$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ = Hauptwerte der mittleren totalen Verzerrungen.

Für den maximalen Rissabstand ergibt sich die Näherung

$$s_{r0} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha_r}{s_{rx0}} + \frac{\cos\alpha_r}{s_{ry0}}} \tag{6.16}$$

mit

$$s_{rx0} = \frac{\phi_x}{4}\left(\frac{1}{\rho_x} - 1\right) \quad , \quad s_{ry0} = \frac{\phi_y}{4}\left(\frac{1}{\rho_y} - 1\right) \tag{6.17}$$

6.3.2 Analytische Näherungslösung

Mit $\sigma_{cnr} = \tau_{ctnr} = 0$ folgt aus (6.14) zunächst

$$\rho_x \sigma_{sxr} = \sigma_x + \tau_{xy}\cot\alpha_r \quad , \quad \rho_y \sigma_{syr} = \sigma_y + \tau_{xy}\tan\alpha_r$$

sowie

$$-\sigma_{ctr} = \tau_{xy}\left(\tan\alpha_r + \cot\alpha_r\right)$$

Durch die Verbundwirkung nimmt der Beton zwischen den Rissen bei maximalem Rissabstand in jeder Richtung im Mittel eine Spannung von $f_{ct}/2$ auf. Somit ergeben sich die mittleren Spannungen

$$\rho_x \sigma_{sx} = \sigma_x + \tau_{xy}\cot\alpha_r - \frac{f_{ct}}{2}(1-\rho_x) \quad , \quad \rho_y \sigma_{sy} = \sigma_y + \tau_{xy}\tan\alpha_r - \frac{f_{ct}}{2}(1-\rho_y) \tag{6.18}$$

sowie

$$-\sigma_{ct} = -\sigma_{c2} = \tau_{xy}\left(\tan\alpha_r + \cot\alpha_r\right) - \frac{f_{ct}}{2} \tag{6.19}$$

Setzt man ein linear elastisches Verhalten von Bewehrung und Beton voraus

$$\varepsilon_x = \sigma_{sx}/E_s \quad , \quad \varepsilon_y = \sigma_{sy}/E_s \quad , \quad \varepsilon_2 = \sigma_{c2}/E_c \tag{6.20}$$

erhält man unter Verwendung von (6.18) und (6.19) durch Einsetzen in die Verträglichkeitsbedingung

$$\cot^2\alpha_r = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_2}{\varepsilon_x - \varepsilon_2} \tag{6.21}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} &\tan^2\alpha_r\left(1+n\rho_y\right)\rho_x + \tan\alpha_r\,\rho_x\left\{\frac{\sigma_y}{\tau_{xy}} - \frac{f_{ct}}{2\tau_{xy}}\left[1+\rho_y(n-1)\right]\right\} = \\ &\cot^2\alpha_r\left(1+n\rho_x\right)\rho_y + \cot\alpha_r\,\rho_y\left\{\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} - \frac{f_{ct}}{2\tau_{xy}}\left[1+\rho_x(n-1)\right]\right\} \end{aligned} \tag{6.22}$$

für α_r, wobei $n = E_s/E_c$.

Setzt man $f_{ct} = 0$, vereinfacht sich (6.22) zu

$$\tan^2\alpha_r (1+n\rho_y)\rho_x + \tan\alpha_r \rho_x \frac{\sigma_y}{\tau_{xy}} = \frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} \rho_y \cot\alpha_r + \rho_y (1+n\rho_x) \cot^2\alpha_r \qquad (6.23)$$

was für $\sigma_x = \sigma_y = 0$ zu (5.8)$_1$ führt.

Werden weiter die Verzerrungen des Betons vernachlässigt, d.h. $\varepsilon_2 \to 0$ bzw. $n \to 0$ so erhält man

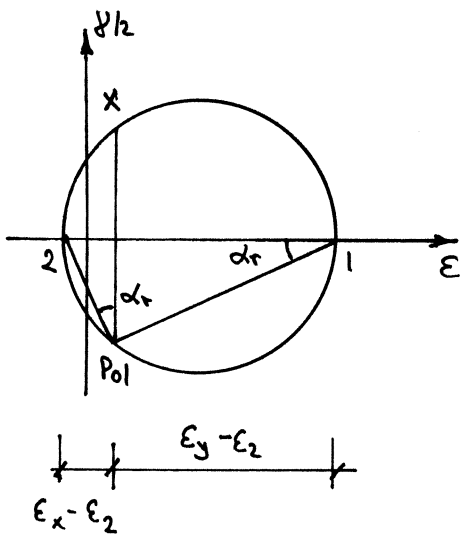
$$\left(\tan^2\alpha_r + \tan\alpha_r \frac{\sigma_y}{\tau_{xy}}\right)\rho_x = \rho_y \left(\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} \cot\alpha_r + \cot^2\alpha_r\right) \qquad (6.24)$$

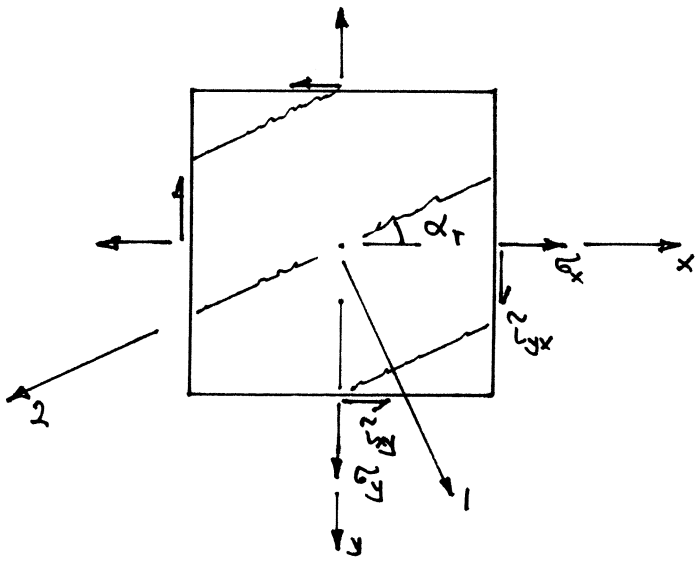
was für $\sigma_x = \sigma_y = 0$ zu

$$\tan\alpha_r = \sqrt[4]{\frac{\rho_y}{\rho_x}} \qquad (6.25)$$

führt.

Die Verträglichkeitsbedingung (6.21) kann aus dem MOHRschen Verzerrungskreis abgelesen werden:





Werden σ_x, σ_y und τ_{xy} proportional zueinander gesteigert, bleibt α_r nach (6.23) konstant. Wird hingegen die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen berücksichtigt, d.h. mit (6.22) gerechnet, verändert sich α_r mit der Belastung.

BEISPIEL 6.2

Diskutiere das Tragverhalten der in Beispiel 6.1 untersuchten Scheibe (Fall $\varphi = 30°$) bei einer monotonen Laststeigerung bis zum Bruch. Für das gerissen elastische Verhalten ist (6.24) zu verwenden, und auch in der anschliessenden elastisch-plastischen Phase sind die Verzerrungen des Betons zu vernachlässigen.

a) Ungerissenes Verhalten und Risslast

Mit $f_{ctm} = 2.6\ N/mm^2$ und unter Vernachlässigung des Beitrags der Bewehrung resultiert eine Risslast von $200\,mm \cdot 2.6\ N/mm^2 = \underline{520\ kN/m}$. Die ersten Risse treten senkrecht zur Hauptzugrichtung auf, d.h. $\underline{\alpha = 60°}$.

Mit $E_{cm} = 32\ kN/mm^2$ beträgt die Hauptdehnung beim Reissen $2.6/32 = 0.081\ ‰$.

b) Gerissen elastisches Verhalten

Mit $\rho_x = 3\rho_y$ sowie $\sigma_x/\tau_{xy} = \cot\varphi$ und $\sigma_y/\tau_{xy} = \tan\varphi = 1/\sqrt{3}$ bringt (6.24)

$$\left(\tan^2\alpha_r + \tan\alpha_r/\sqrt{3}\right)\cdot 3 = \left(\sqrt{3}\cdot\cot\alpha_r + \cot^2\alpha_r\right)$$

woraus $\underline{\alpha_r = 39.78°}$ folgt.

c) Elastisch-plastische Phase

Nach dem Fliessbeginn der schwächeren Bewehrung in y-Richtung gilt gemäss $(6.14)_2$ und $(6.14)_3$

$$\sigma_y = \rho_y f_{sd} + \sigma_{ctr}\sin^2\alpha_r\ ,\quad \tau_{xy} = -\sigma_{ctr}\sin\alpha_r\cos\alpha_r$$

und somit wegen $\sigma_y = \sigma_1\sin^2\varphi = \sigma_1/4$ und $\tau_{xy} = \sigma_1\sin\varphi\cos\varphi = \sigma_1\sqrt{3}/4$

$$\sigma_1\left(1 + \sqrt{3}\tan\alpha_r\right) = 4\rho_y f_{sd} \qquad (*)$$

Für den Fliessbeginn gilt $\alpha_r = 39.78°$ und deshalb wegen $\rho_y f_{sd} h = 492\ kN/m$

$$\sigma_{1y}\cdot h = \frac{4\cdot 492}{1 + \sqrt{3}\cdot 0.833} = \underline{806\ kN/m}$$

Beim Bruch gilt gemäss Beispiel 6.1 $\alpha_r = 30°$, d.h. $\tan\alpha_r = 1/\sqrt{3}$ und somit $\sigma_{1u}\cdot h = 2\cdot 492\ kN/m = \underline{984\ kN/m}$.

Mit $\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\varphi = 3\sigma_1/4$ und $\tau_{xy} = \sigma_1 \sin\varphi\cos\varphi = \sqrt{3}\sigma_1/4$ erhält man aus (6.14)$_1$ und (6.14)$_2$ unter Berücksichtigung von $\sigma_{sx} = E_s \cdot \varepsilon_x$

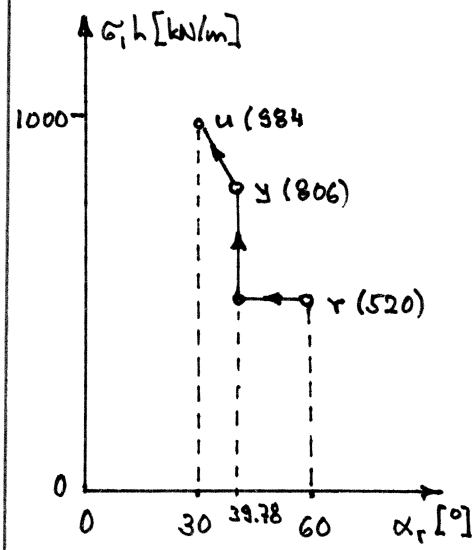
$$\rho_x E_s \varepsilon_x = \frac{3\sigma_1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}\tan\alpha_r}\right)$$

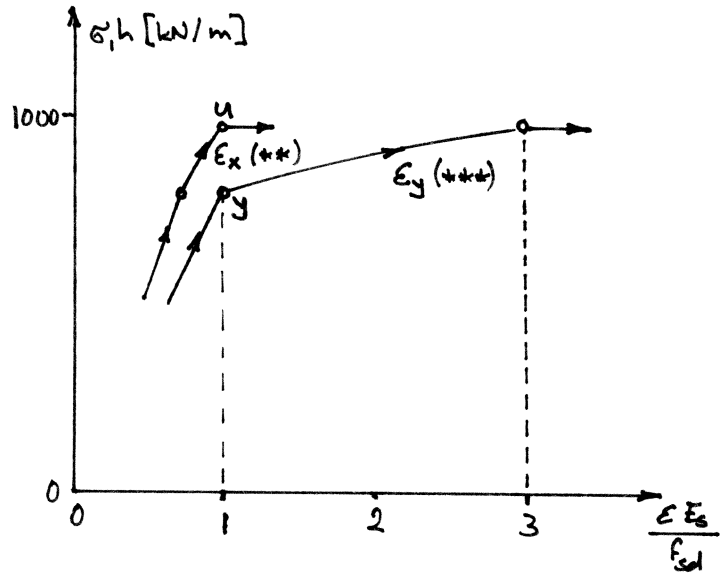
d.h. zusammen mit (*) und $\rho_x = 3\rho_y$

$$\varepsilon_x = \frac{f_{sd}}{E_s}\left(\frac{4\rho_y f_{sd}}{\sigma_1} - 1\right)^{-1} \qquad (**)$$

Da die Verzerrungen des Betons vernachlässigt werden ($\varepsilon_2 = 0$), gilt ferner $\varepsilon_y = \varepsilon_x \cdot \cot^2\alpha_r$, d.h. mit (*) und (**)

$$\varepsilon_y = \frac{3 f_{sd}}{E_s}\left(\frac{4\rho_y f_{sd}}{\sigma_1} - 1\right)^{-3} \qquad (***)$$





Wie man sieht, ergibt sich eine beträchtliche Änderung von α_r bereits in der gerissen elastischen Phase (d.h. unmittelbar nach dem Reissen), nicht erst nach dem Fliessbeginn der Bewehrung in y-Richtung.

d) Kollapszustand

Beim Eintreten des Kollapszustands (Fliessbeginn der Bewehrung in x-Richtung) gilt nach c) das Verhältnis $\varepsilon_y/\varepsilon_x = 3$.

Andererseits gilt nach (6.6)$_1$ und (6.6)$_2$ mit dem Ansatz für Y_1 gemäss S. 6.5

$$\frac{\dot\varepsilon_y}{\dot\varepsilon_x} = \frac{\rho_x f_{sd} - \sigma_1\cos^2\varphi}{\rho_y f_{sd} - \sigma_1 \sin^2\varphi} = \frac{3\rho_y f_{sd} - \cot^2\varphi \cdot \sigma_1 \sin^2\varphi}{\rho_y f_{sd} - \sigma_1 \sin^2\varphi} = 3, \quad \text{da } \cot^2\varphi = \cot^2(30°) = 3$$

Somit ist $\rho_x \cdot \dot\varepsilon_x = \rho_y \cdot \dot\varepsilon_y$, d.h. in beiden Bewehrungslagen wird gerade gleich viel Energie dissipiert.